

1

Introduzione

Il numero di problemi meccanici in cui intervengono fenomeni di contatto è quanto mai esteso nelle applicazioni dell'ingegneria meccanica e civile. E' infatti attraverso il contatto, in genere in presenza di attrito, che vengono trasferiti i carichi di superficie ai corpi oggetto di indagine. In particolare, lo spettro di applicazioni comprende lo stampaggio e la lavorazione dei metalli, cuscinetti, impianti frenanti, componenti di motori e turbine, giunti, nonché l'utilizzo nel campo della biomeccanica per lo studio di protesi, articolazioni e denti.

La presente ricerca riguarda la modellazione matematica del problema di contatto in presenza di attrito attraverso la formulazione in forma variazionale duale avente cioè, a differenza della formulazione primale negli spostamenti, come funzioni incognite da determinare le tensioni normale e tangenziale sulla superficie di contatto. E' stato sviluppato l'algoritmo chiamato *D-PANA* per risolvere i problemi di contatto e di attrito a blocchi e ne è stata provata la convergenza al finito ad un'unica soluzione. L'algoritmo è stato implementato in simulazioni di problemi in due e tre dimensioni, i cui risultati sono stati confrontati con successo con quelli ottenuti per via esatta o in formulazione primale.

1.1 Definizioni e notazioni

Le notazioni che verranno utilizzate nel seguito sono riassunte in Figura 1.1, che descrive un corpo dello spazio Euclideo \mathbb{R}^3 .

L'insieme di punti spaziali che definiscono il corpo è indicato con Ω , e la frontiera $\partial\Omega$ dell'aperto Ω è suddivisa nelle due regioni Γ_u e Γ_σ , per le quali le condizioni al contorno di DIRICHLET e di NEUMANN saranno specificate più

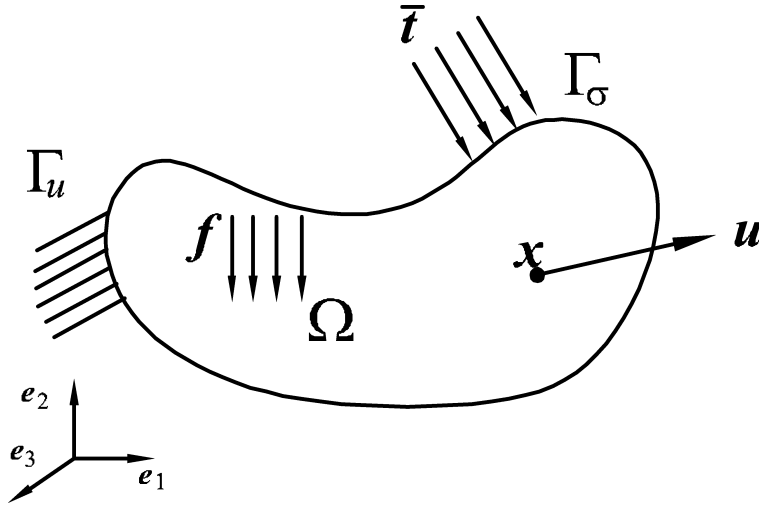


Figura 1.1: Problema di un continuo elastico con assegnati dati sulla frontiera avanti. Nel seguito considereremo che queste regioni soddisfino il requisito

$$\begin{aligned}\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma &= \partial\Omega, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &= \emptyset.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Le incognite, ovvero le variabili dipendenti di questo problema sono rappresentate dal campo vettoriale degli spostamenti \mathbf{u} . In generale \mathbf{u} dipende dalla posizione del punto in considerazione nello spazio $\mathbf{x} \in \Omega$, mentre $\mathbb{I} = (0, T)$, con $t \in \mathbb{I}$, indica l'intervallo temporale di interesse. Alla scrittura dell'equilibrio del continuo Ω

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}.\tag{1.2}$$

che deve essere valida in ogni istante $t \in \mathbb{I}$, vanno aggiunte le condizioni iniziali e sulla frontiera cui il corpo è sottoposto. Le condizioni sulla frontiera sono fissate introducendo forze di superficie $\bar{\mathbf{t}} : \Gamma_\sigma \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e cedimenti impressi $\bar{\mathbf{u}} : \Gamma_u \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$, e richiedendo

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, t \in \mathbb{I}, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, t \in \mathbb{I}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Le condizioni iniziali possono essere espresse introducendo un campo di velocità iniziale $\mathbf{v}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ed un campo di spostamento iniziale $\mathbf{u}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$

e richiedendo

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u}_i|_{t=0} = v_{0_i}, \\ u_i|_{t=0} = u_{0_i} \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (1.4)$$

Nelle (1.4) la notazione $\bar{\Omega}$ indica la chiusura dell'aperto Ω . Nell'ambito dell'ipotesi di deformazioni infinitesime, il problema è lineare, assumendo per deformazione del materiale la parte simmetrica del gradiente del campo di spostamento

$$D := \hat{\nabla} \mathbf{u}. \quad (1.5)$$

Assegnate le equazioni differenziali (1.2) con le condizioni al contorno (1.3) e le condizioni iniziali (1.4) il problema è completamente definito dalla legge costitutiva del materiale che lega tensione e deformazione. Verrà preso in esame di qui in avanti il caso di materiale linearmente elastico, con legge costitutiva

$$\mathbf{T} = \mathbb{C} : \mathbf{D} \quad (1.6)$$

avendo indicato con \mathbb{C} il tensore del quarto ordine delle costanti elastiche.

Un'ulteriore ipotesi che introduciamo è rappresentata dalla scelta di un processo di carico quasi statico. Scompare la dipendenza del problema dal tempo così come gli effetti inerziali relativi ai corpi in esame.

1.2 Il problema di contatto unilatero alla SIGNORINI con attrito alla COULOMB

1.2.1 Il problema di SIGNORINI: contatto con un ostacolo rigido liscio

Il problema da studiare è descritto in maniera schematica in Figura 1.2.

Sulla base della teoria lineare dell'elasticità consideriamo la risposta di un corpo $\Omega \in \mathbb{R}^3$ che può venire in contatto con un ostacolo rigido e immobile $\Omega^{obs} \in \mathbb{R}^3$ durante il processo di carico.

In termini meccanici il requisito è che i punti $\mathbf{x} \in \Omega$ non debbano compenetrarsi con l'ostacolo, mentre si assumerà che le forze esercitate dall'ostacolo sul corpo Ω siano esclusivamente di compressione nella direzione normale alla parte di frontiera di Ω in contatto. Assumiamo inoltre che la superficie di interfaccia tra corpo ed ostacolo sia perfettamente liscia, in modo da trascurare gli effetti dell'attrito, ipotesi che sarà rimossa nel seguito per considerare il caso più generale. Si estende quindi il problema elastostatico del corpo Ω

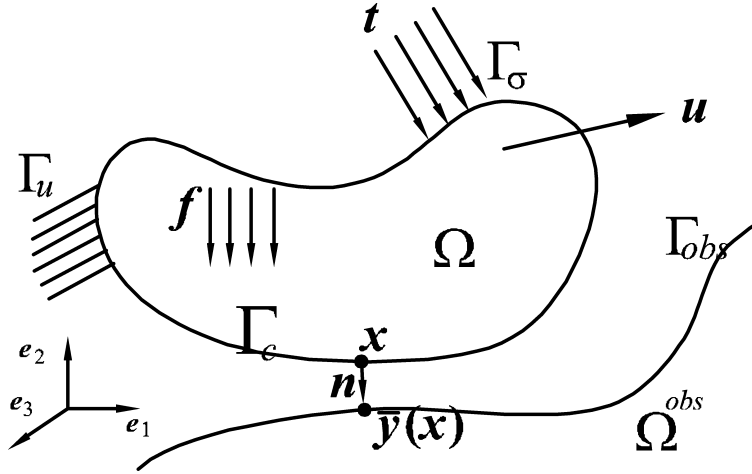


Figura 1.2: Problema di SIGNORINI

con assegnate condizioni al contorno suddividendo la frontiera in tre porzioni Γ_σ , Γ_u e Γ_c , tali da soddisfare le condizioni:

$$\begin{aligned}\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u \cup \Gamma_c &= \partial\Omega, \text{ e} \\ \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u &= \Gamma_\sigma \cap \Gamma_c = \Gamma_u \cap \Gamma_c = \emptyset.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Come già visto, Γ_σ rappresenta la regione sulla quale sono applicate le forze di superficie, mentre Γ_u è la regione sulla quale sono assegnati gli spostamenti. La porzione di superficie Γ_c , invece, è costituita dalla parte di Ω sulla quale si può verificare il contatto. E' da notarsi che la parte di Γ_c che in seguito alla deformazione del corpo viene in contatto con la frontiera Γ^{obs} di Ω^{obs} non è nota a priori, e nemmeno le tensioni che agiscono su di essa. Per questo motivo è necessario tenere distinte Γ_c da Γ_σ e da Γ_u .

Definizione del vincolo di contatto

Per introdurre il vincolo di contatto che governa l'interazione tra Ω e l'ostacolo nel problema in studio concentriamo l'attenzione su un generico punto $x \in \Gamma_c$. Assumiamo che per ciascun punto x sulla base della definizione della geometria del contatto venga identificato un punto corrispondente $\bar{y} \in \Gamma^{obs}$.

Sebbene esistano alternative per l'identificazione di \bar{y} una volta assegnato x , una scelta senz'altro logica ed intuitiva consiste nel prendere il punto di

Γ^{obs} che è più vicino ad \mathbf{x} in senso Euclideo, cioè:

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \Gamma^{obs}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (1.8)$$

Osserviamo che la terminologia $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ nella (1.8), con un lieve abuso di notazione, vuole indicare una corrispondenza uno ad uno tra i punti \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{y}}$ definita sul dominio Γ_c . Con riferimento ancora una volta alla Figura 1.2. Per ciascun punto $\mathbf{x} \in \Gamma_c$ è possibile definire un versore $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ normale locale alla superficie Γ^{obs} nel punto $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. L'ipotesi di piccoli spostamenti ha per conseguenza fondamentale nella definizione del vincolo che né il punto di contatto $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ né la normale alla superficie $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ dipendono dallo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in modo significativo. Se scegliamo di definire i punti $\bar{\mathbf{y}}$ come punti a minima distanza dai loro corrispondenti su Γ_c (1.8) questo significa che sia $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ che $\boldsymbol{\nu}$ sono definiti facendo riferimento alla geometria iniziale e di conseguenza mantenuti fissi.

Inoltre, assegnato un campo di spostamento $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, si definisce il distacco mediante la funzione $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$g(\mathbf{x}) := [\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c. \quad (1.9)$$

Dal momento che $\bar{\mathbf{y}}$ e $\boldsymbol{\nu}$ non dipendono da \mathbf{u} , possiamo riscrivere la (1.9) in una forma differente:

$$g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

nella quale

$$g_0(\mathbf{x}) = [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

indica il *gap* che separa inizialmente i punti \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$.

Nella (1.10) appare evidente che la funzione che rappresenta il distacco è lineare nella variabile di spostamento \mathbf{u} , questo perché sia i punti di contatto che i corrispondenti versori normali non subiscono variazione nel corso della deformazione. Si può anche verificare che, per la convenzione sul segno scelta per g , il vincolo di impenetrabilità di \mathbf{x} in Γ^{obs} viene fissato imponendo che $g(\mathbf{x}) \geq 0$.

Detto \mathbf{n} il versore normale alla superficie Γ_c nel punto \mathbf{x} , nel caso in cui le ipotesi sul campo di spostamenti siano valide e cioè che gli spostamenti siano sufficientemente piccoli da potere trascurare le variazioni dei punti di contatto e dei versori normali, si ha $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \approx -\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$.

La pressione di contatto t_N , assunta positiva di trazione, viene definita considerando la componente della tensione di CAUCHY \mathbf{t} in ogni punto \mathbf{x} nella direzione del versore $\boldsymbol{\nu}$:

$$t_N(\mathbf{x}) := -\mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

con il vettore tensione di CAUCHY \mathbf{t} espresso in funzione del tensore \mathbf{T} e della normale uscente \mathbf{n} alla superficie Γ_c .

Inoltre, la (1.10) e la (1.11) si riscrivono come

$$g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.13)$$

e

$$g_0(\mathbf{x}) = -[\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Possiamo fissare le condizioni di contatto che legano t_N e g sulla superficie di contatto Γ in termini delle *condizioni di ottimalità* di KUHN-TUCKER, caratteristiche di problemi in cui compaiono vincoli descritti da disequazioni (cfr. [29]):

$$\begin{aligned} t_N &\leq 0 \\ g &\geq 0 \\ t_N g &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

che devono valere per ogni punto $\mathbf{x} \in \Gamma_c$. La prima delle equazioni (1.15) fa riferimento al fatto che l'interazione di contatto si riduce alla sola compressione (ricordiamo la convenzione sul segno di t_N nella (1.12), mentre la (1.15)₂ impedisce che ci possa essere compenetrazione tra il corpo e la superficie Γ^{obs} .

L'ultima condizione delle (1.15), la condizione di *complementarietà*, richiede che si possa generare tensione di compressione esclusivamente nel caso in cui è verificato il contatto. Quando $g > 0$, questa condizione richiede che t_N sia pari a zero, in accordo con una condizione di distacco. La Figura 1.3 fornisce una rappresentazione schematica delle combinazioni ammissibili di g e t_N corrispondenti alle equazioni (1.15).

Si noti che non solo la t_N è una funzione discontinua e non lineare della g , ma anche che la relazione tra queste due variabili può assumere valori diversi per $g = 0$. Questa difficoltà è tipica dei problemi soggetti a vincoli espressi mediante disequazioni e fisicamente fa riferimento al fatto che $t_N(\mathbf{x})$ è la forza superficiale di contatto necessaria ad impedire la compenetrazione del punto \mathbf{x} con l'ostacolo e allo stesso tempo è in equilibrio con le tensioni interne e gli effetti d'inerzia nell'intorno del punto.

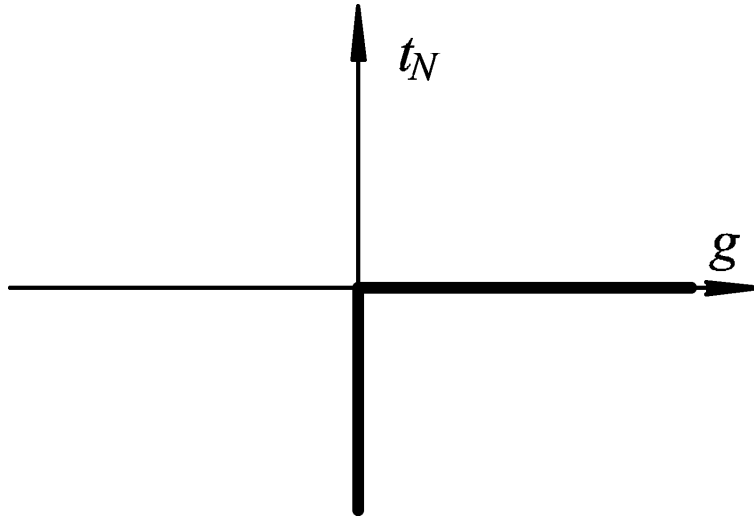


Figura 1.3: Rappresentazione schematica della condizione di complementarità

NOTA 1.1. *Del tutto differente è la formulazione matematica che descrive le condizioni fisiche di impenetrabilità rappresentata dalla cosiddetta legge di cedevolezza normale, che non è stata oggetto di studio della presente ricerca, ma della quale ricordiamo, per completezza, l'espressione*

$$-t_N = c_N(u_N - g)_+^{m_N} \quad (1.16)$$

nella quale c_N ed m_N rappresentano parametri positivi legati alle caratteristiche dell'interfaccia, avendo indicato con $(\bullet)_+ = \max(0, z)$. Questa condizione, talvolta si presenta utile in quanto riflette la natura fisica delle superfici a contatto e rappresenta un'alternativa alla condizione di SIGNORINI-FICHERA.

1.2.2 Il contatto tra due corpi

Consideriamo adesso il caso di contatto in assenza di attrito tra *due* corpi deformabili, e scriviamo la formulazione forte delle equazioni che regolano questo caso più generale, rappresentato in Figura 1.4. Nel problema con due corpi siamo interessati a conoscere i campi di spostamento $\mathbf{u}^{(i)}$ relativi ai corpi $\Omega^{(i)}$ $i = 1, 2$.

Indicheremo il generico punto di $\bar{\Omega}^{(1)}$ con \mathbf{x} , mentre i punti di $\bar{\Omega}^{(2)}$ saranno chiamati \mathbf{y} . Come nel caso precedente, la frontiera di ciascun corpo $\partial\Omega^{(i)}$ è

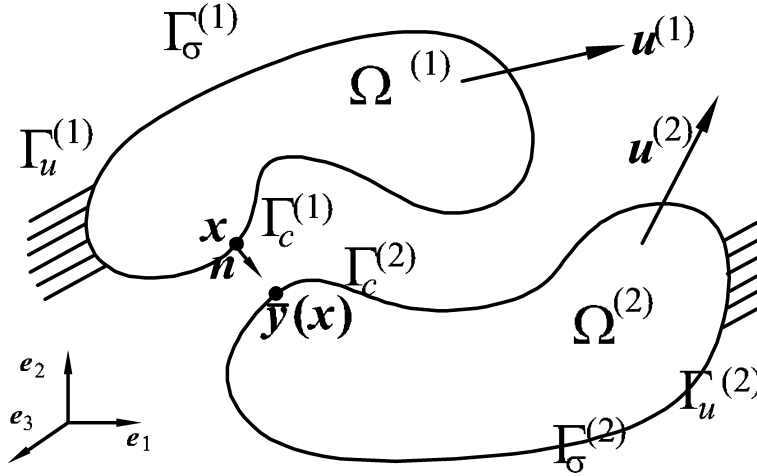


Figura 1.4: Problema di contatto tra due corpi

costituita dalle tre porzioni $\Gamma_c^{(i)}$, $\Gamma_\sigma^{(i)}$ e $\Gamma_u^{(i)}$ tali che

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_c^{(i)} &= \partial\Omega^{(i)}, \text{ e} \\ \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} &= \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \Gamma_u^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Anche in questo caso i cedimenti $\bar{\mathbf{u}}^{(i)}$ sono assegnati sulla porzione di frontiera $\Gamma_u^{(i)}$, mentre le forze di superficie $\bar{\mathbf{t}}^{(i)}$ sono applicate su $\Gamma_\sigma^{(i)}$. La parte restante di $\partial\Omega^{(i)}$, $\Gamma_c^{(i)}$, è scelta come nel caso precedente in modo da includere ogni punto per il quale può verificarsi il contatto.

Definizione del vincolo di contatto

Scegliendo punti $\mathbf{x} \in \Gamma_c^{(1)}$, il vincolo di contatto è definito in analogia con l'approccio seguito per il problema di SIGNORINI nel paragrafo 1.2.1. Inizialmente individuiamo i punti di contatto $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \in \Gamma_c^{(2)}$, come proiezioni dei punti \mathbf{x} su $\Gamma_c^{(2)}$:

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_c^{(2)}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (1.18)$$

Analogamente a quanto fatto per il problema dell'ostacolo rigido, definendo $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ il versore normale uscente da $\Gamma_c^{(2)}$ nel punto $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, si può descrivere il distacco tra il punto \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ attraverso la funzione $g(\mathbf{x})$:

$$g(\mathbf{x}) := [\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))] \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^{(1)}. \quad (1.19)$$

Dal momento che né $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \in \Gamma_c^{(2)}$ né $\boldsymbol{\nu}$ dipendono dai campi di spostamento $\mathbf{u}^{(i)}$ relativi ai due corpi, si può riscrivere la (1.19) come

$$g(\mathbf{x}) := g_0(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad (1.20)$$

con il distacco iniziale g_0 fornito da

$$g_0(\mathbf{x}) = [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \quad (1.21)$$

Considerando le azioni superficiali $\mathbf{t}^{(i)}$ che agiscono sulle regioni a contatto di $\Gamma_c^{(i)}$ è importante mettere in evidenza che l'equilibrio richiede che esse, siano opposte, cioè

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c^{(1)}. \quad (1.22)$$

Per ogni punto \mathbf{x} , quindi, siamo in grado di identificare le azioni di interfaccia in termini di un unico vettore forza di superficie e ad esempio scegliamo $\mathbf{t}^{(1)}$. La pressione di contatto t_N che agisce nel punto \mathbf{x} , assunta negativa di compressione, si ottiene considerando la componente nella direzione di $\boldsymbol{\nu}$ delle azioni superficiali:

$$t_N(\mathbf{x}) := -\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \quad (1.23)$$

con il vettore tensione di CAUCHY $\mathbf{t}^{(1)}$ espresso in funzione della tensione di CAUCHY e del versore normale $\boldsymbol{\nu}$ uscente dalla superficie $\Gamma_c^{(2)}$. Nel caso in cui sussistano le ipotesi di piccoli spostamenti, si ripropone la situazione in cui $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \approx -\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, con il risultato che

$$t_N(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.24)$$

$$g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) - (\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.25)$$

con

$$g_0(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.26)$$

1.2.3 Formulazione del problema in presenza di attrito

Una volta completata la descrizione del problema di contatto con una superficie liscia, rivolgiamo la nostra attenzione adesso all'effetto dell'attrito. In particolare la nostra attenzione sarà concentrata sul più comune modello di legge di attrito, quello alla COULOMB.

Il primo fattore importante nella descrizione di tale legame è costituito dalla definizione degli enti cinematici sulla superficie di contatto. Con riferimento al caso di due corpi in contatto descritto in Figura 1.4, nel caso di

problema in tre dimensioni, per ciascun punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^{(1)}$, è possibile associare i versori tangenti $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$, fra loro ortogonali, ai versori tangenti nel punto corrispondente $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \in \Gamma_c^{(2)}$ dell'altro corpo. In un problema in due dimensioni il versore normale \boldsymbol{n} è legato al versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ attraverso la relazione

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{e}_3 \quad (1.27)$$

con \boldsymbol{e}_3 il versore della base Euclidea diretto fuori del piano, mentre in tre dimensioni il versore \boldsymbol{n} è fornito da

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2. \quad (1.28)$$

L'orientamento dei versori $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ è tale che il versore \boldsymbol{n} rappresenta il versore normale uscente dalla superficie $\Gamma_c^{(1)}$. E' da notarsi che nelle ipotesi di cinematica lineare e piccoli spostamenti, i vettori della base $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ sono indipendenti dal campo di spostamento \boldsymbol{u} . Con queste definizioni lo spostamento in direzione tangenziale \boldsymbol{u}_T di un punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^{(1)}$ relativamente alla superficie opposta $\Gamma_c^{(2)}$ è fornito da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_T(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})) - [(\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))) \cdot \boldsymbol{n}] \boldsymbol{n} \\ &= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}](\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))) \end{aligned} \quad (1.29)$$

con \boldsymbol{I} che indica il tensore identico.

Nel caso del problema di SIGNORINI, in cui è presente un solo corpo deformabile, la (1.29) si semplifica in

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_T(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \\ &= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}] \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Allo stesso modo nel problema con due corpi definiamo le forze di contatto tangenziali, scomponendo $\boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x})$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{x}) &:= [\boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}] = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}] \boldsymbol{t}^{(1)} \\ &= \boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - t_N \boldsymbol{n} \end{aligned} \quad (1.31)$$

ovvero, in componenti,

$$\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{x}) = t_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha. \quad (1.32)$$

E' possibile descrivere la legge di COULOMB introducendo il coefficiente di attrito μ e richiedendo che vengano soddisfatte per ogni punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^{(1)}$ le seguenti condizioni:

$$\|\boldsymbol{t}_T\| \leq -\mu t_N \quad (1.33)$$

e

$$\mathbf{u}_T = -\lambda \mathbf{t}_T, \text{ con } \begin{cases} \lambda = 0, & \text{se } \|\mathbf{t}_T\| < -\mu t_N, \\ \lambda \geq 0, & \text{se } \|\mathbf{t}_T\| = -\mu t_N \end{cases} \quad (1.34)$$

La disequazione (1.33) impone che il modulo del vettore tensione tangenziale non possa superare il valore della tensione normale t_N moltiplicato per il coefficiente di attrito. L'espressione (1.34), invece, tiene conto di due importanti concetti fisici nella legge di COULOMB: il primo è che lo slittamento tangenziale (*slip*) \mathbf{u}_T è pari a zero fintantoché la tensione tangenziale si mantiene al di sotto del limite di COULOMB; il secondo è che qualsiasi slittamento tangenziale si verifichi risulta parallelo al vettore tensione tangenziale dovuto nel punto \mathbf{x} alla presenza dell'attrito con la superficie opposta, $\Gamma_c^{(2)}$ per il problema a due corpi e Γ^{obs} nel problema di contatto con un ostacolo rigido. La Figura 1.5 rappresenta geometricamente il concetto descritto nel caso relativo ad uno slittamento lungo una sola dimensione.

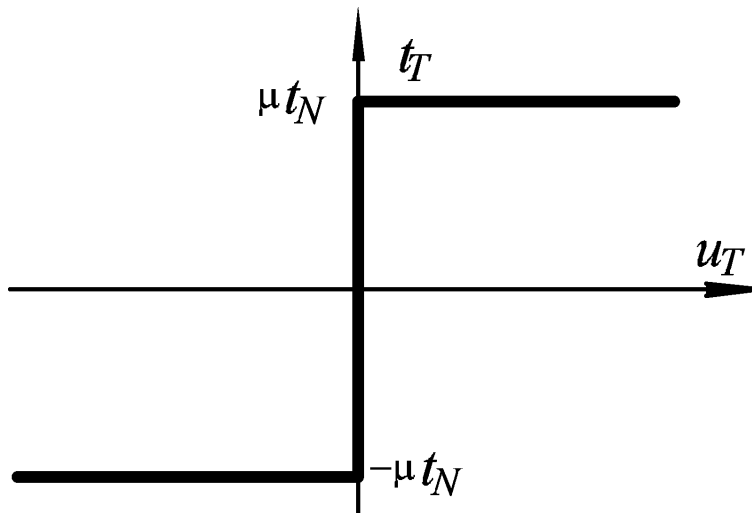


Figura 1.5: Rappresentazione schematica del vincolo di COULOMB

Dalla Figura 1.5 è possibile riconoscere un'interessante analogia con la formulazione incrementale che caratterizza i problemi elastoplastici. Questa analogia risulta evidente assumendo una legge costitutiva rigido-perfettamente plastica, assumendo cioè un modulo di YOUNG che tende all'infinito, un incrudimento nullo ed una tensione di snervamento pari al prodotto μt_N per il caso dell'attrito alla COULOMB.

L'analogia tra attrito e plasticità si traduce nella possibilità di sfruttare per

il problema di contatto procedure di tipo incrementale disponibili per problemi elastoplastici e di estendere la trattazione a leggi di attrito più generali. E' giusto allora ricordare, anche se non verrà ripresa nel seguito, la formulazione della legge di attrito in termini della funzione di slittamento:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{t}_T, t_N) &:= \|\mathbf{t}_T\| + \mu t_N \leq 0, \\ \dot{\mathbf{u}}_T &= \dot{\gamma} \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|}, \\ \dot{\gamma} &\geq 0, \\ \dot{\gamma} \Phi &= 0.\end{aligned}\tag{1.35}$$

La funzione di slittamento rappresenta quindi il diretto corrispondente del potenziale plastico nella teoria elastoplastica. L'equazione (1.35₁) equivale ad una riscrittura della (1.33), mentre le condizioni (1.35₂₋₄) ripetono la (1.34) con una importante differenza: le prime esprimono il parallelismo tra lo spostamento dovuto allo slittamento \mathbf{u}_T ed il vettore tensione tangenziale di contatto \mathbf{t}_T in forma incrementale, trasformando la legge d'attrito in una di tipo evolutivo. Più precisamente, la formulazione data attraverso la (1.35) afferma che la tensione tangenziale dovuta all'attrito dipenda dalla storia di carico. Per carico che non sia proporzionale questa proprietà può dare luogo ad un comportamento differente rispetto a quello calcolato attraverso la (1.34).

1.3 Cenni sull'attrito non locale

Una nota da aggiungere ancora alla trattazione del problema di contatto con attrito è fornita dal modello di attrito non locale. Fino a questo momento la legge di attrito scelta rappresenta una condizione di vincolo puntuale il cui rispetto potrebbe portare a difficoltà nel descrivere la funzione \mathbf{t}_T con sufficiente regolarità. Dal punto di vista fisico, inoltre, dal momento che il contatto tra corpi avviene attraverso le irregolarità microscopiche che caratterizzano le superfici a contatto, la distribuzione si presenterebbe soggetta a notevoli variazioni spostandosi da un'asperità all'altra. Per questi motivi è stata proposta una misura delle tensioni tangenziali di contatto funzione di una media nello spazio della tensione normale agente.

Una versione non locale della legge di COULOMB si esprime attraverso una funzione di mollificazione S_ρ definita come

$$S_\rho(t_N(\mathbf{u}), \mathbf{x}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} \omega_\rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|) t_N(\mathbf{u}(\mathbf{z})) d\Gamma \tag{1.36}$$

con ω_ρ fornito da

$$\omega_\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{\rho^2}{x^2 - \rho^2}\right), & x \leq \rho, \\ 0, & x > \rho. \end{cases} \quad (1.37)$$

Nella (1.37) la costante c è scelta in modo tale da assicurare che

$$\int_0^1 \omega_\rho dx = 1. \quad (1.38)$$

Un aspetto cruciale di una tale formulazione è la dimensione di ρ che compare nella determinazione del limite di slittamento, che dovrebbe essere collegata alla scala della lunghezza delle irregolarità della superficie del problema in esame.

Per molte applicazioni di interesse pratico questa dimensione è notevolmente più piccola della dimensione di un generico elemento finito del magliaggio attraverso cui si discretizza la superficie di contatto, rendendo in tal modo la differenza tra $t_N(\mathbf{u})$ locale e $S_\rho(t_N(\mathbf{u}))$ di importanza pratica limitata. Pertanto, nonostante la trattazione presenti interessanti vantaggi nei problemi di esistenza della soluzione, nel seguito l'attenzione sarà dedicata esclusivamente alla legge di attrito locale.

1.4 Linee di ricerca più recenti

Il problema del contatto unilatero in assenza di attrito ha ricevuto la sua formulazione di base nel lavoro sviluppato da FICHERA ([14],[15],[16]) in cui viene data dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione in presenza di materiale linearmente elastico attraverso un problema di minimizzazione quadratica.

Tuttavia, nel momento in cui si va ad introdurre la presenza dell'attrito le proprietà del problema cambiano radicalmente: lo slittamento tangenziale rappresenta un problema incrementale e pertanto la soluzione risulta dipendente dalla storia di carico. Per incrementi di carico sufficientemente lenti il processo viene studiato come quasi-statico ma anche in questo caso il modello con attrito non è autoaggiunto ed il problema non è più di minimizzazione quadratica. DUVAUT e LIONS in [13] hanno per primi fornito una formulazione matematica del problema di attrito in elasticità lineare, senza per altro risolverlo se non parzialmente. Per il problema quasi-statico di contatto con attrito non sono disponibili al continuo risultati di esistenza della soluzione.

In formulazione variazionale primale discretizzata sono disponibili risultati in [1] per valori piccoli del coefficiente di attrito. Attraverso una regolarizzazione della legge di attrito COCU, PRATT e RAOUS in [11] hanno ricavato un risultato di unicità per il caso di piccolo coefficiente di attrito.

Il problema numerico in formulazione primale, è stato risolto da PANAGIOTOPOULOS in [31], senza tuttavia dimostrare la convergenza della procedura, suddividendo il problema originario in due sottoproblemi; il primo è quello di contatto con assegnate azioni tangenziali sulla frontiera, mentre il secondo rappresenta un problema elastico con assegnati valori delle azioni normali di contatto.

Nel caso più generale, in assenza di regolarizzazione, NEČAS, JARUŠEC e HASLINGER in [30] hanno dimostrato l'esistenza della soluzione per valori piccoli di μ basandosi su una tecnica di punto fisso. Inoltre in [18] HASLINGER ha dimostrato al discreto in formulazione primale che il metodo per approssimazioni successive applicato al problema di contatto con attrito risulta convergente per valori sufficientemente piccoli del coefficiente di attrito. Tuttavia tale limite risulta dipendente dalla discretizzazione scelta. In [19] viene seguito un approccio duale alle tensioni che prevede una decomposizione del problema e vengono forniti alcuni risultati numerici per problemi piani.