

CAPITOLO

IV

Un elemento finito piezoelettrico bidimensionale

Lo scopo della costruzione di un modello matematico è l'analisi di alcuni aspetti di un fenomeno reale. Condizione necessaria perché il modello sia utile è che sia risolubile. Per un modello matematico, risolubilità significa di solito richiedere che il problema associato risulti:

- *ben posto*: *esistenza e unicità* della soluzione, che varia con continuità al variare dei dati (eventuali molteplicità e discontinuità della soluzione devono essere spiegate).
- *ben condizionato*: a piccole perturbazioni dei dati, dovute ad errori sperimentali o ad errori di arrotondamento nella rappresentazione numerica, devono corrispondere piccole perturbazioni nei risultati.

Queste proprietà danno un carattere di affidabilità al modello, ma non esauriscono il significato di risolubilità. Spesso, infatti, la soluzione del problema non è data in forma esplicita o direttamente utilizzabile. Per conoscere il comportamento della

soluzione, può essere necessaria l'introduzione di un nuovo modello, che si configura come una rappresentazione in dimensione finita, ottenuta per discretizzazione del problema continuo.

Qualsiasi riduzione di modelli continui a modelli discreti conduce a sistemi di equazioni algebriche. Il modello discreto, o modello numerico, presenta caratteristiche simili a quelle del modello continuo. In particolare, ne sono proprietà necessarie l'esistenza, unicità e stabilità della soluzione. Esempio tipico è la risoluzione di un problema ai limiti per un operatore differenziale lineare su un dominio fissato, tramite la discretizzazione del dominio stesso e la sostituzione delle derivate con opportuni rapporti incrementali. Si perviene alla risoluzione di un sistema lineare; esistenza ed unicità della soluzione sono garantite dalla non singolarità della matrice dei coefficienti, la stabilità dal condizionamento della matrice stessa.

Tuttavia, sapere che il sistema è ben posto non basta a rendere il modello numerico un utile strumento di indagine del problema continuo. Rimangono due importanti questioni da esaminare. La prima riguarda la capacità del modello discreto di descrivere il modello continuo. Si deve stabilire se la soluzione discreta può essere resa vicina quanto si vuole alla soluzione del problema continuo (modificando, ad esempio, la configurazione del dominio discreto): si tratta di esaminare la convergenza del metodo. La seconda questione riguarda la necessità di produrre un algoritmo per risolvere il modello numerico (nel caso dell'esempio precedente si deve provvedere alla scelta di un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare).

Ultima fase del processo di costruzione del modello numerico è la implementazione dell'algoritmo in un particolare linguaggio di programmazione.

In seguito saranno richiamati alcuni elementi di teoria degli elementi finiti. Nel capitolo si farà riferimento ai testi di Hughes [40], di Zienkiewicz e Taylor [102], di Brebbia e Connor [15], di Johnson [45] e di Corradi [25].

1. Il metodo degli elementi finiti

Nel capitolo III si è costruito un modello matematico continuo per strutture bi-dimensionali elettroelastiche. Il risultato di tale modellazione è la determinazione delle equazioni differenziali e delle condizioni ai limiti che governano una famiglia di problemi di equilibrio per tali strutture.

Al fine di ottenere risultati numerici, adotteremo il metodo degli elementi finiti, che si adatta bene alla discretizzazione di un problema differenziale con valori al bordo.

In questo paragrafo descriviamo l'idea del metodo, lasciando da parte i problemi inerenti l'unicità della soluzione numerica u^h , le proprietà di *convergenza* della soluzione u^h , e i criteri di scelta dello spazio V^h su cui si cercano le soluzioni u^h .

Dato il problema ai limiti seguente

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \mathcal{P}, \\ \mathcal{B}u = g & \text{in } \partial\mathcal{P}, \end{cases} \quad (1.1)$$

la corrispondente formulazione variazionale consiste nel cercare una funzione $u \in U(\mathcal{P})$ tale che

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V(\mathcal{P}) \quad (1.2)$$

dove $f \in L_2(\mathcal{P})$, U e V sono due spazi di Hilbert.¹ Consideriamo in avanti, per semplificare l'esposizione, il caso in cui $\mathcal{B}u = u = 0$; allora, $U = V$.

¹ Ricordiamo che $L_2(\mathcal{P})$ è lo spazio hilbertiano di tutte le funzioni $\psi(x)$ a quadrato sommabile, cioè tali che

$$\int_{\mathcal{P}} \psi^2 < \infty,$$

munito di prodotto scalare

$$(\psi, \chi) = \int_{\mathcal{P}} \psi \chi,$$

e norma

$$\|\psi\| = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}.$$

Con U e V indichiamo due sottospazi dello spazio hilbertiano $L_2(\mathcal{P})$ tale che le funzioni $u \in U$ e $v \in V$ soddisfino alcune condizioni supplementari. Queste ultime, in dipendenza dal problema in esame, possono essere condizioni di regolarità, condizioni da rispettare sulla frontiera $\partial\mathcal{P}$, etc. In ogni caso queste condizioni debbono essere sufficienti affinché l'operatore lineare \mathcal{L} del problema

Nel metodo di approssimazione variazionale si considera il seguente problema discreto, noto come il *metodo di Faedo-Galerkin*, che consiste nel cercare una funzione $u^h \in V^h(\mathcal{P})$ tale che

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h) \quad \forall v^h \in V^h(\mathcal{P}), \quad (1.3)$$

dove V^h è un sottospazio di *dimensione finita* dello spazio V . Lo spazio V^h può essere uno spazio di polinomi (di Lagrange, Legendre, Chebichev, ...) oppure uno spazio di splines o di funzioni trigonometriche, etc.

Indichiamo con $\{N_i, i = 1, 2, \dots, n(h)\}$ una *base* dello spazio V^h , dove $n(h)$ è la dimensione dello spazio V^h . Per le funzioni u^h e v^h si ha:

$$u^h = \sum_{i=1}^{n(h)} u_i N_i, \quad v^h = \sum_{i=1}^{n(h)} v_i N_i,$$

dove u_i e v_i sono, rispettivamente, le *coordinate* di u^h e v^h nella base fissata. Il problema (1.3) è equivalente al seguente sistema lineare:

$$\sum_{i=1}^{n(h)} a(N_i, N_j) u_i = (f, N_j) \quad j = 1, 2, \dots, n(h),$$

dove \mathbf{A} , con $A_{ij} = a(N_i, N_j)$, è la matrice di rigidità e \mathbf{b} , con $b_i = (f, N_i)$, è il vettore di carico.

Il metodo di Faedo-Galerkin è soggetto a forti limitazioni operative. Un'adeguata rappresentazione della soluzione richiede un numero notevole di termini e, quindi, sistemi algebrici di notevole dimensioni da risolvere per via numerica. C'è poi il problema della scelta delle funzioni che costituiscono la base di V^h , che dipendono dalla geometria del dominio di definizione del problema e dalle condizioni al contorno; queste funzioni debbono essere definite caso per caso ed è spesso difficile sceglierle

trasformi l'elemento $u \in U$ nell'elemento $\mathcal{L}u \in L_2(\mathcal{P})$ ossia che valga

$$a(u, v) = (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v) = (f, v) \quad \forall u, v \in U \times V.$$

Lo spazio V differisce dallo spazio U per le condizioni da rispettare sulla frontiera $\partial\mathcal{P}$ (V è lo spazio delle variazioni associato al problema per cui si impone che le $v \in V$ siano nulle su $\partial\mathcal{P}$).

in modo adeguato, soprattutto per domini di forma complessa. Ciò rende il metodo difficilmente automatizzabile.

Il metodo degli elementi finiti è una variante del metodo di Faedo-Galerkin e consiste nel valutare la (1.3) in sottodomini di \mathcal{P} , imponendo in modo opportuno la congruenza della soluzione tra sottodomini confinanti. Un modello agli elementi finiti è costruito tramite:

1. la discretizzazione del dominio di definizione del problema continuo, che viene realizzata approssimando il dominio con un insieme finito di sottodomini, chiamati *elementi finiti*;
2. la scelta di punti, chiamati *nodi*, sul bordo di ogni elemento finito e, se necessario, all'interno dell'elemento;
3. la scelta di uno spazio lineare di dimensioni finite di funzioni N_i definite sul singolo elemento. Le funzioni N_i sono chiamate *funzioni forma*.
4. la scelta di funzioni parametro del problema continuo, i cui valori nei nodi vengono assunti come incognite (*variabili nodali o gradi di libertà*); in un generico punto dell'elemento, il campo delle funzioni parametro viene ricostruito in termini di variabili nodali tramite le funzioni forma N_i ;
5. la determinazione delle equazioni algebriche risolventi, tramite l'impiego di un principio variazionale.

Se \mathcal{P} è un dominio piano poligonale, si definisce *triangolazione* \mathcal{T}_h di \mathcal{P} un insieme finito di m poligoni, triangoli o rettangoli, K tali che nessun vertice di un poligono giaccia all'interno del lato di un altro, e che

$$\mathcal{P} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = K_1 \cup K_2 \dots \cup K_m \quad \& \quad \emptyset = K_1 \cap K_2 \dots \cap K_m;$$

introduciamo il seguente parametro di discretizzazione:

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K).$$

In seguito faremo riferimento a elementi finiti rettangolari *isoparametrici*. In questo caso si formula l'elemento in coordinate *intrinseche* (ξ, η) , definito in un dominio quadrato \bar{K} (*elemento genitore*) i cui spigoli hanno coordinate $(-1, -1; 1, -1; 1, 1;$

-1,1). Poi, tramite una trasformazione $(x_1, x_2) = F(\xi, \eta)$, detta *isoparametrica*, si riporta l'elemento sul suo dominio effettivo K .

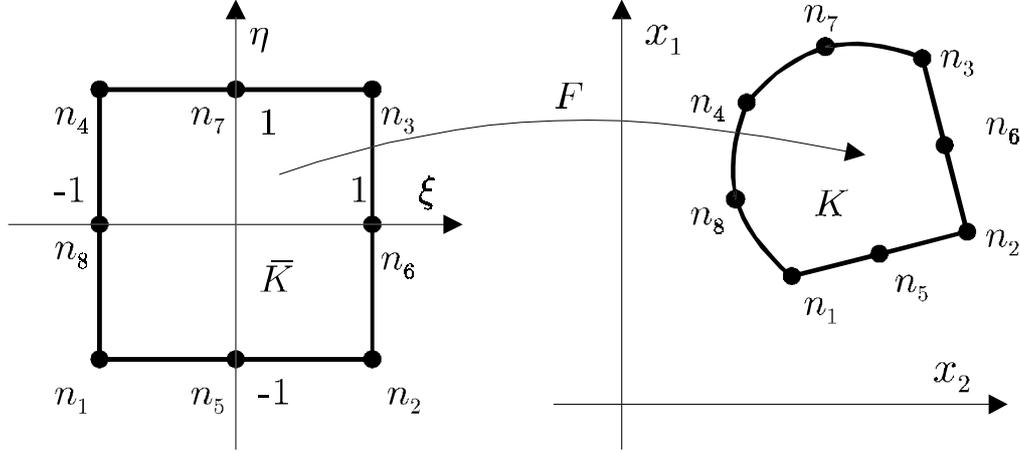


Figura IV.1 Elemento finito isoparametrico.

Segue che è possibile utilizzare elementi finiti rettangolari K con lati *curvi*. In questo modo si riesce ad approssimare una frontiera $\partial\mathcal{P}$ non poligonale con una curva poligonale $\partial\mathcal{P}_h$ a lati curvi diminuendo così l'errore sulla soluzione numerica dovuto alla discretizzazione del dominio. Nelle nostre analisi si considera un elemento finito isoparametrico con 8 nodi (elemento della *serendipity family*). Per questo tipo di elemento lo spazio V^h è così definito

$$V^h := \{v \in C^0(\bar{\mathcal{P}}) : v|_K \in \mathbb{Q}_2^{isop.}(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

con

$$\mathbb{Q}_2^{isop.}(K) = \{v : v(x) = \bar{v}(F^{-1}(x)), \quad x \in K, \quad \bar{v} \in \mathbb{Q}_2^{ser.}(\bar{K})\},$$

dove $\mathbb{Q}_2^{ser.}$ è l'insieme dei polinomi delle funzioni biquadratiche definite su 8 punti della frontiera di \bar{K} , cioè

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi, \eta) \in \mathbb{Q}_2^{ser.}(\bar{K}) \Leftrightarrow \bar{v}(\xi, \eta) = & a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + \\ & a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2, \quad (\xi, \eta) \in \bar{K}, \quad a_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

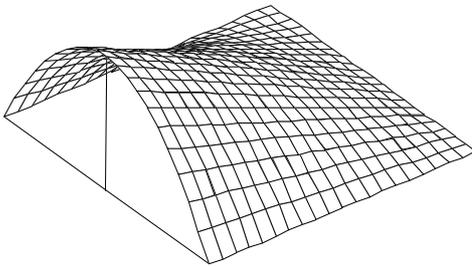
Le funzioni di forma N_i per un elemento finito isoparametrico a 8 nodi sono così

definite

$$\begin{aligned} \text{nodi di vertice: } N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \\ \text{nodi di lato: } \xi_i = 0 : N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i), \\ \eta_i = 0 : N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2), \end{aligned}$$

dove (ξ_i, η_i) sono le coordinate dei nodi dell'elemento genitore.

$N_i(\xi\eta)$: nodi di lato



$N_i(\xi\eta)$: nodi di vertice

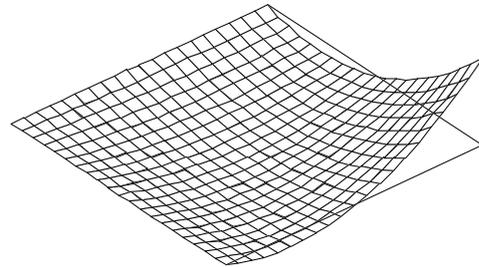


Figura IV.2 Rappresentazioni funzioni forma.

In corrispondenza dei nodi n_j^e dell'elemento si ha

$$N_i(n_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 8.$$

La funzione v^h ha, allora, la seguente rappresentazione su K

$$v^h = \sum_{i=1}^8 v_i N_i(F^{-1}(x)), \quad v_i = v^h(n_i^e), \quad x \in K.$$

2. Formulazione debole del problema elettroelastico 2D

Nei prossimi paragrafi, relativamente al problema della piastra elettroelastica nelle variabili (\mathbf{u}, ϕ) , si descriverà:

1. la procedura di determinazione delle *matrici di rigidezza di elemento* e del vettore dei *carichi nodali*;
2. la procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza *globale* e del relativo vettore dei carichi nodale (sistema di equazioni algebriche lineari);
3. l'introduzione delle condizioni al contorno;
4. il calcolo delle deformazioni \mathbf{E} , degli sforzi \mathbf{S} , del campo elettrico \mathbf{e} e dello spostamento elettrico \mathbf{d} in base alla coppia (\mathbf{u}, ϕ) che si è determinata risolvendo il sistema algebrico risultante.

Vogliamo determinare un modello discreto agli elementi finiti relativo al problema piano della piastra piezoelettrica nelle variabili (\mathbf{u}, ϕ) tramite la *formulazione debole* (III.4.28). Ricordiamo che questa consiste nel trovare una coppia $(\mathbf{u}, \phi) \in \bar{U}_0^{\mathcal{P}} \times \bar{\Phi}_0^{\mathcal{P}}$ tali che

$$\begin{aligned}
 a\left((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) &= \left((\mathbf{p}, \mathbf{q}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) + \left\langle (\bar{\mathbf{s}}_0, \bar{\bar{\mathbf{s}}}_0), (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\rangle \\
 &\quad \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{v} = \mathbf{a} + \zeta \mathbf{b} \in V_0^{\mathcal{P}}, \\
 b\left((\mathbf{u}, \phi), (\alpha, \beta)\right) &= \left((\pi, \theta), (\alpha, \beta)\right) + \left\langle (\bar{\omega}_0, \bar{\bar{\omega}}_0), (\alpha, \beta) \right\rangle \\
 &\quad \forall (\alpha, \beta) : \psi = \alpha + \zeta \beta \in \Psi_0^{\mathcal{P}},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove

$$\begin{aligned}
 a\left((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \phi) \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \mathbf{b}, \\
 b\left((\mathbf{u}, \phi), (\alpha, \beta)\right) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{l}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \alpha + [\mathbf{l}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{z}] \beta + \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \beta, \\
 \left((\mathbf{p}, \mathbf{q}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) &= \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{p} - 2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{q} - \frac{2}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{b}, \\
 \left((\pi, \theta), (\alpha, \beta)\right) &= - \int_{\mathcal{P}} (\pi \alpha + \theta \beta), \\
 \left\langle (\bar{\mathbf{s}}_0, \bar{\bar{\mathbf{s}}}_0), (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\rangle &= \int_{\partial \mathcal{P}} \bar{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{a} + \bar{\bar{\mathbf{s}}}_0 \cdot \mathbf{b}, \\
 \left\langle (\bar{\omega}_0, \bar{\bar{\omega}}_0), (\alpha, \beta) \right\rangle &= - \int_{\partial \mathcal{P}} (\bar{\omega}_0 \alpha + \bar{\bar{\omega}}_0 \beta),
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

e dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= 2\epsilon \left\{ \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z}] + \mathbf{c}^t[\nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z}] \right\}, \\
\tilde{\mathbf{M}} &= \frac{2}{3} \epsilon^3 \left\{ \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}_1] + \mathbf{c}^t[\nabla \phi_1] \right\}, \\
\mathbf{l} &= 2\epsilon \left\{ \mathbf{c}[\nabla \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z}] - \mathbf{C}[\nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z}] \right\}, \\
\tilde{\mathbf{m}} &= \frac{2}{3} \epsilon^3 \left\{ \mathbf{c}[\nabla \mathbf{u}_1] - \mathbf{C}[\nabla \phi_1] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Riscriviamo, per comodità, le definizioni di spazio delle soluzioni deboli $\bar{U}_o^{\mathcal{P}} \times \bar{\Phi}_o^{\mathcal{P}}$

$$\bar{U}_o^{\mathcal{P}} := \{ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, t) + \zeta \mathbf{u}_1(x, t) \mid \mathbf{u}_0(x, t), \mathbf{u}_1(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$\mathbf{P}_o(x) \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{o0}, \quad \mathbf{P}_o(x) \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{o1} \quad \text{in } \partial \mathcal{P} \},$$

$$\bar{\Phi}_o^{\mathcal{P}} := \{ \phi = \phi_0(x, t) + \zeta \phi_1(x, t) \mid \phi_0(x, t), \phi_1(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$P_o(x) \phi_0 = \phi_{o0}, \quad P_o(x) \phi_1 = \phi_{o1} \quad \text{in } \partial \mathcal{P} \},$$

e spazio delle variazioni $V_o^{\mathcal{P}} \times \Psi_o^{\mathcal{P}}$

$$V_o^{\mathcal{P}} := \{ \mathbf{v} = \mathbf{a}(x, t) + \zeta \mathbf{b}(x, t) \mid \mathbf{a}(x, t), \mathbf{b}(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$\mathbf{P}_o(x) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_o(x) \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \partial \mathcal{P} \},$$

$$\Psi_o^{\mathcal{P}} := \{ \psi = \alpha(x, t) + \zeta \beta(x, t) \mid \alpha(x, t), \beta(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$P_o(x) \alpha = 0, \quad P_o(x) \beta = 0 \quad \text{in } \partial \mathcal{P} \}.$$

per la definizione dei carichi (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , $(\bar{\mathbf{s}}_o, \bar{\bar{\mathbf{s}}}_o)$, (π, θ) e $(\bar{\omega}_o, \bar{\bar{\omega}}_o)$ si veda, rispettivamente, (III.4.16), (III.4.17), (III.4.22) e (III.4.23).

Nel § III.7 abbiamo dimostrato che, nel caso di materiale trasversalmente isotropo, è possibile disaccoppiare il comportamento tipico flessionale, che abbiamo chiamato *tipo piastra*, descritto da $(w, \boldsymbol{\varphi}, \phi_0)$, da quello tipico membranale, che abbiamo chiamato *tipo lastra*, descritto da (\mathbf{v}, u, ϕ_1) . A questi corrispondono le seguenti rappresentazioni della coppia (spostamento, potenziale):

lastra

$$\mathbf{u}^l(x, \zeta, t) = \mathbf{v}(x, t) + \zeta u(x, t) \mathbf{z} \tag{2.7}$$

$$\phi^l(x, \zeta, t) = \zeta \phi_1(x, t)$$

piastra

$$\mathbf{u}^p(x, \zeta, t) = w(x, t) \mathbf{z} + \zeta \boldsymbol{\varphi}(x, t) \tag{2.8}$$

$$\phi^p(x, \zeta, t) = \phi_0(x, t)$$

con la conseguenza di poter definire due funzionali $\Theta^f(\mathbf{u}^P, \phi^P)$ e $\Theta^m(\mathbf{u}^l, \phi^l)$ e dare una formulazione variazionale in cui il problema della determinazione delle soluzioni $(\mathbf{u}^P, \phi^P) \equiv (w, \varphi, \phi_0)$ del problema $\Theta^f(\mathbf{u}^P, \phi^P) = \text{minimax}$ risulta indipendente dall'analogo problema per $(\mathbf{u}^l, \phi^l) \equiv (\mathbf{v}, u, \phi_1)$, cioè, $\Theta^m(\mathbf{u}^l, \phi^l) = \text{minimax}$.

Le formulazioni deboli, in forma matriciale, di questi due problemi saranno descritte nei prossimi paragrafi, dove si compirà anche la formulazione dei relativi elementi finiti.

3. Formulazione debole in forma matriciale per la lastra

Riscriviamo in forma matriciale la formulazione debole relativa al comportamento membranale. Ci farà comodo partizionare tutti i vettori che introdurremo in due sottovettori che caratterizzano, rispettivamente, le componenti meccaniche ed elettriche.

Indichiamo con ${}^l\mathbf{y}$ il vettore delle variabili relative alle soluzioni deboli

$$[{}^l\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{w} \\ {}^l\phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u \end{bmatrix} \quad [{}^l\phi] = [\phi_1], \quad (3.9)$$

con $({}^l\mathbf{w}, {}^l\phi) \in {}^l\bar{U}_o^P \times {}^l\bar{\Phi}_o^P$. Lo spazio delle soluzioni deboli tipo lastra ${}^l\bar{U}_o^P \times {}^l\bar{\Phi}_o^P$ è così definito

$${}^l\bar{U}_o^P := \{\mathbf{u}^l = \mathbf{v}(x, t) + \zeta u(x, t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = 0 \quad | \quad \mathbf{v}(x, t), u(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}}); \\ \mathbf{P}_o(x)\mathbf{v} = \mathbf{v}_o, \quad \mathbf{P}_o(x)u\mathbf{z} = u_o\mathbf{z} \quad \text{in} \quad \partial\mathcal{P}\},$$

$${}^l\bar{\Phi}_o^P := \{\phi^l = \zeta\phi_1(x, t) \quad | \quad \phi_1(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}}); \quad P_o(x)\phi_1 = \phi_{o1} \quad \text{in} \quad \partial\mathcal{P}\}.$$

Indichiamo con ${}^l\tilde{\mathbf{y}}$ il vettore delle variazioni

$$[{}^l\tilde{\mathbf{y}}] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{\mathbf{w}} \\ {}^l\tilde{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\phi}] = [\beta], \quad (3.10)$$

con $({}^l\tilde{\mathbf{w}}, {}^l\tilde{\boldsymbol{\phi}}) \in {}^lV_{\circ}^{\mathcal{P}} \times {}^l\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}}$. Lo spazio delle variazioni tipo lastra ${}^lV_{\circ}^{\mathcal{P}} \times {}^l\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}}$ è così definito

$$\begin{aligned} {}^lV_{\circ}^{\mathcal{P}} &:= \{\mathbf{v}^l = \mathbf{a}(x, t) + \zeta b_3(x, t)\mathbf{z}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} = 0 \mid \mathbf{a}(x, t), b_3(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \\ &\quad \mathbf{P}_{\circ}(x)\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{\circ}(x)b_3(x, t)\mathbf{z} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\mathcal{P}\}, \\ {}^l\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}} &:= \{\psi^l = \zeta\beta(x, t) \mid \beta(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \quad P_{\circ}(x)\beta = 0 \text{ in } \partial\mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

Indichiamo con ${}^l\boldsymbol{\gamma}$ il vettore contenente le “deformazioni deboli”, cioè, le componenti di ${}^l\mathbf{E} = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}^l, \bar{\boldsymbol{\phi}}^l)$ e ${}^l\mathbf{e} = \mathbf{e}(\bar{\mathbf{u}}^l, \bar{\boldsymbol{\phi}}^l)$ relative agli scorrimenti (di ordine zero in ζ) e con ${}^l\boldsymbol{\kappa}$ il vettore contenente quelle relative alle curvature (quelle lineari in ζ)

$$[{}^l\boldsymbol{\gamma}] = \begin{bmatrix} {}^l\boldsymbol{\gamma}^w \\ {}^l\boldsymbol{\gamma}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\boldsymbol{\gamma}^w] = \begin{bmatrix} {}^lE_{11} \\ {}^lE_{22} \\ 2{}^lE_{12} \\ {}^lE_{33} \end{bmatrix} \quad [{}^l\boldsymbol{\gamma}^{\phi}] = [{}^le_3], \quad (3.11)$$

con ${}^lE_{11} = v_{1,1}$, ${}^lE_{22} = v_{2,2}$, $2{}^lE_{12} = v_{1,2} + v_{2,1}$, ${}^lE_{33} = u$, ${}^le_3 = -\phi_1$,

$$[{}^l\boldsymbol{\kappa}] = \begin{bmatrix} {}^l\boldsymbol{\kappa}^w \\ {}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\boldsymbol{\kappa}^w] = \begin{bmatrix} 2{}^lE_{13} \\ 2{}^lE_{23} \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi}] = \begin{bmatrix} {}^le_1 \\ {}^le_2 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

con $2{}^lE_{13} = u_{,1}$, $2{}^lE_{23} = u_{,2}$, ${}^le_1 = -\phi_{1,1}$, ${}^le_2 = -\phi_{1,2}$.

Con ${}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ e ${}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ indichiamo le componenti di deformazione relative alle variazioni

$$[{}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^w \\ {}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^w] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{E}_{11} \\ {}^l\tilde{E}_{22} \\ 2{}^l\tilde{E}_{12} \\ {}^l\tilde{E}_{33} \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{\phi}] = [{}^l\tilde{e}_3], \quad (3.13)$$

$$[{}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^w \\ {}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^w] = \begin{bmatrix} 2{}^l\tilde{E}_{13} \\ 2{}^l\tilde{E}_{23} \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi}] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{e}_1 \\ {}^l\tilde{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Indichiamo con ${}^l\ddot{\mathbf{y}}$ il vettore delle accelerazioni meccaniche

$$[{}^l\ddot{\mathbf{y}}] = \begin{bmatrix} {}^l\ddot{\mathbf{w}} \\ {}^l\ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\ddot{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{u} \end{bmatrix} \quad [{}^l\ddot{\phi}] = [\ddot{\phi}_1]; \quad (3.15)$$

in modo analogo definiamo il vettore velocità ${}^l\dot{\mathbf{y}}$.

Indichiamo con ${}^l\mathbf{M}$ la matrice delle masse definite su \mathcal{P}

$$[{}^l\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{M}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{M}_w] = \begin{bmatrix} 2\epsilon\rho & 0 & 0 \\ 0 & 2\epsilon\rho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3\rho \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Indichiamo con ${}^l\mathbf{t}$ il vettore dei carichi definiti su \mathcal{P}

$$[{}^l\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{t}_w \\ {}^l\mathbf{t}_\phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{t}_w] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{t}_\phi] = [-\theta], \quad (3.17)$$

e con ${}^l\mathbf{l}$ il vettore dei carichi definiti su $\partial\mathcal{P}$

$$[{}^l\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{l}_w \\ {}^l\mathbf{l}_\phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{l}_w] = \begin{bmatrix} \bar{s}_{o1} \\ \bar{s}_{o2} \\ \bar{s}_{o3} \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{l}_\phi] = [-\bar{\omega}_o]. \quad (3.18)$$

La formulazione debole dell'equilibrio membranale è dato dalla seguente relazione

$$\int_{\mathcal{P}} {}^l\tilde{\gamma}^t {}^l\mathbf{D}_s {}^l\gamma + {}^l\tilde{\kappa}^t {}^l\mathbf{D}_b {}^l\kappa = \int_{\mathcal{P}} {}^l\tilde{\mathbf{y}}^t ({}^l\mathbf{t} - {}^l\mathbf{M} {}^l\ddot{\mathbf{y}}) + \int_{\partial\mathcal{P}} {}^l\tilde{\mathbf{y}}^t {}^l\mathbf{l}, \quad (3.19)$$

$$\forall {}^l\tilde{\mathbf{y}} \in {}^lV_o^{\mathcal{P}} \times {}^l\Psi_o^{\mathcal{P}},$$

dove ${}^l\mathbf{D}_s$ e ${}^l\mathbf{D}_b$ sono le matrici dei coefficienti costitutivi (la s sta per *shear* e la b sta per *bending*)

$$[{}^l\mathbf{D}_s] = 2\epsilon \begin{bmatrix} {}^l\bar{\mathbf{C}}_s & -{}^l\bar{\mathbf{C}}_s^t \\ -{}^l\bar{\mathbf{C}}_s & -{}^l\bar{\mathbf{C}}_s \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{D}_b] = \frac{2}{3}\epsilon^3 \begin{bmatrix} {}^l\bar{\mathbf{C}}_b & -{}^l\bar{\mathbf{C}}_b^t \\ -{}^l\bar{\mathbf{C}}_b & -{}^l\bar{\mathbf{C}}_b \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

con

$$[{}^l\bar{\mathbf{C}}_s] = \begin{bmatrix} (\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \tau_2 \\ \lambda & (\mu + \lambda) & 0 & \tau_2 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \tau_2 & \tau_2 & 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \quad [{}^l\bar{\mathbf{C}}_s^t] = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_2 \\ 0 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad [{}^l\bar{\mathbf{C}}_s] = [\gamma_2], \quad (3.21)$$

$$[{}^l\bar{\mathbf{C}}_b] = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \quad [{}^l\bar{\mathbf{C}}_b] = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \quad [{}^l\bar{\mathbf{C}}_b] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

3.1. Matrici di elemento di rigidezza, massa e vettore carichi nodali

La matrice di rigidezza di elemento e i relativi carichi nodali possono essere ottenuti direttamente dalla formulazione debole in forma matriciale. Indichiamo con ${}^l\mathbf{y}^h$ e ${}^l\tilde{\mathbf{y}}^h$ i campi di soluzione e le variazioni relativi al modello discreto agli elementi finiti.

Sia n_{ne} il numero di nodi di un tipico elemento, si ha:

$$\begin{aligned} v_\alpha^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i v_{\alpha i}^h, \\ u^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i u_i^h, \\ \phi_1^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i \phi_{1i}^h, \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove N_i è la funzione forma associata con il nodo i e $v_{\alpha i}^h$, u_i^h e ϕ_{1i}^h l' i -esimo valore nodale, rispettivamente, di v_α^h , u^h e ϕ_1^h .

Definiamo

$$[{}^l\mathbf{y}^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{y}_1^e \\ {}^l\mathbf{y}_2^e \\ \vdots \\ {}^l\mathbf{y}_{ne}^e \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\mathbf{y}}^e] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{\mathbf{y}}_1^e \\ {}^l\tilde{\mathbf{y}}_2^e \\ \vdots \\ {}^l\tilde{\mathbf{y}}_{ne}^e \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

con

$$[{}^l\mathbf{y}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{w}_i^e \\ {}^l\phi_i^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{w}_i^e] = \begin{bmatrix} v_{1i}^h \\ v_{2i}^h \\ u_i^h \end{bmatrix} \quad [{}^l\phi_i^e] = [\phi_{1i}^h], \quad (3.25)$$

$$[{}^l\tilde{\mathbf{y}}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^l\tilde{\mathbf{w}}_i^e \\ {}^l\tilde{\phi}_i^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\tilde{\mathbf{w}}_i^e] = \begin{bmatrix} a_{1i}^h \\ a_{2i}^h \\ b_{3i}^h \end{bmatrix} \quad [{}^l\tilde{\phi}_i^e] = [\beta_i^h], \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
{}^l\boldsymbol{\gamma} &= {}^l\mathbf{B}_s {}^l\mathbf{y}^e & {}^l\tilde{\boldsymbol{\gamma}} &= {}^l\mathbf{B}_s {}^l\tilde{\mathbf{y}}^e, \\
{}^l\boldsymbol{\kappa} &= {}^l\mathbf{B}_b {}^l\mathbf{y}^e & {}^l\tilde{\boldsymbol{\kappa}} &= {}^l\mathbf{B}_b {}^l\tilde{\mathbf{y}}^e,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
[{}^l\mathbf{B}_s] &= [{}^l\mathbf{B}_{s1} \quad {}^l\mathbf{B}_{s2} \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{sne}], \\
[{}^l\mathbf{B}_b] &= [{}^l\mathbf{B}_{b1} \quad {}^l\mathbf{B}_{b2} \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{bne}], \\
[{}^l\mathbf{B}_s^w] &= [{}^l\mathbf{B}_{s1}^w \quad {}^l\mathbf{B}_{s2}^w \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{sne}^w], \\
[{}^l\mathbf{B}_s^\phi] &= [{}^l\mathbf{B}_{s1}^\phi \quad {}^l\mathbf{B}_{s2}^\phi \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{sne}^\phi], \\
[{}^l\mathbf{B}_b^w] &= [{}^l\mathbf{B}_{b1}^w \quad {}^l\mathbf{B}_{b2}^w \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{bne}^w], \\
[{}^l\mathbf{B}_b^\phi] &= [{}^l\mathbf{B}_{b1}^\phi \quad {}^l\mathbf{B}_{b2}^\phi \quad \dots \quad {}^l\mathbf{B}_{bne}^\phi],
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$[{}^l\mathbf{B}_{si}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^l\mathbf{B}_{si}^\phi \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{B}_{bi}] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{B}_{bi}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^l\mathbf{B}_{bi}^\phi \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

$$[{}^l\mathbf{B}_{si}^w] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{B}_{si}^\phi] = [-N_i], \tag{3.30}$$

$$[{}^l\mathbf{B}_{bi}^w] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,y} \end{bmatrix} \quad [{}^l\mathbf{B}_{bi}^\phi] = \begin{bmatrix} -N_{i,x} \\ -N_{i,y} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Definiamo il vettore di elemento velocità ${}^l\dot{\mathbf{y}}^e$ e accelerazione ${}^l\ddot{\mathbf{y}}^e$ in modo analogo a come è stato definito ${}^l\mathbf{y}^e$.

Tramite queste definizioni possiamo ottenere le espressioni della rigidità di elemento ${}^l\mathbf{k}^e$ e il relativo vettore dei carichi nodali ${}^l\mathbf{t}^e$

$${}^l\mathbf{k}^e = {}^l\mathbf{k}_s^e + {}^l\mathbf{k}_b^e, \quad \begin{cases} {}^l\mathbf{k}_s^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^l\mathbf{B}_s^t {}^l\mathbf{D}_s {}^l\mathbf{B}_s, \\ {}^l\mathbf{k}_b^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^l\mathbf{B}_b^t {}^l\mathbf{D}_b {}^l\mathbf{B}_b, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$[{}^l\mathbf{k}^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{k}_{ww}^e & {}^l\mathbf{k}_{w\phi}^e \\ {}^l\mathbf{k}_{w\phi}^{e\ t} & {}^l\mathbf{k}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} {}^l\mathbf{k}_{ww}^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^l\mathbf{B}_s^{w\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_s {}^l\mathbf{B}_s^w + {}^l\mathbf{B}_b^{w\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_b {}^l\mathbf{B}_b^w, \\ {}^l\mathbf{k}_{\phi\phi}^e = - \int_{\mathcal{P}^e} [{}^l\mathbf{B}_s^{\phi\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_s {}^l\mathbf{B}_s^\phi + {}^l\mathbf{B}_b^{\phi\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_b {}^l\mathbf{B}_b^\phi], \\ {}^l\mathbf{k}_{w\phi}^e = - \int_{\mathcal{P}^e} [{}^l\mathbf{B}_s^{w\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_s^{\ t} {}^l\mathbf{B}_s^\phi + {}^l\mathbf{B}_b^{w\ t} {}^l\bar{\mathbf{C}}_b^{\ t} {}^l\mathbf{B}_b^\phi], \end{cases} \quad (3.33)$$

$$[{}^l\mathbf{M}^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{M}_1^e & & & \\ & {}^l\mathbf{M}_2^e & & \\ & & \ddots & \\ & & & {}^l\mathbf{M}_{ne}^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{M}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{M}_{wi}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

con

$$[{}^l\mathbf{M}_{wi}^e] = \begin{bmatrix} 2\epsilon \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\epsilon \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3 \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$[{}^l\mathbf{t}^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{t}_1^e \\ {}^l\mathbf{t}_2^e \\ \vdots \\ {}^l\mathbf{t}_{ne}^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^l\mathbf{t}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^l\mathbf{t}_{wi}^e \\ {}^l\mathbf{t}_{\phi i}^e \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

con

$$[{}^l\mathbf{t}_{wi}^e] = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{P}^e} N_i \mathcal{P}_1 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{\mathcal{S}}_{01} \\ \int_{\mathcal{P}^e} N_i \mathcal{P}_2 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{\mathcal{S}}_{02} \\ \int_{\mathcal{P}^e} N_i \mathcal{Q}_3 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{\bar{\mathcal{S}}}_{03} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$[{}^l\mathbf{t}_{\phi i}^e] = \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{P}^e} N_i \theta - \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{\bar{\omega}}_0 \end{bmatrix},$$

dove \mathcal{P}^e e $\partial\mathcal{P}^e$ sono, rispettivamente, il dominio e la frontiera dell'elemento e-esimo.

Le componenti dello sforzo elettroelastico possono essere determinate tramite le relazioni

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ N_3 \\ l_3 \end{pmatrix} = {}^l \mathbf{D}_s {}^l \mathbf{B}_s {}^l \mathbf{y}^e \quad \begin{pmatrix} M_1^q \\ M_2^q \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = {}^l \mathbf{D}_b {}^l \mathbf{B}_b {}^l \mathbf{y}^e. \quad (3.38)$$

4. Formulazione debole in forma matriciale per la piastra

Riciviamo la formulazione debole relativa al comportamento flessionale in forma matriciale. Il flusso è lo stesso del paragrafo relativo alla lastra.

Indichiamo con ${}^p \mathbf{y}$ il vettore delle variabili relative alle soluzioni deboli

$$[{}^p \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} {}^p \mathbf{w} \\ {}^p \phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad [{}^p \phi] = [\phi_0], \quad (4.39)$$

con $({}^p \mathbf{w}, {}^p \phi) \in {}^P \bar{U}_o^{\mathcal{P}} \times {}^P \bar{\Phi}_o^{\mathcal{P}}$. Lo spazio delle soluzioni deboli tipo piastra ${}^P \bar{U}_o^{\mathcal{P}} \times {}^P \bar{\Phi}_o^{\mathcal{P}}$ è così definito

$${}^P \bar{U}_o^{\mathcal{P}} := \{ \mathbf{u}^p = w(x, t) \mathbf{z} + \zeta \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{z} = 0 \mid w(x, t), \boldsymbol{\varphi}(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$\mathbf{P}_o(x) w \mathbf{z} = w_o \mathbf{z}, \quad \mathbf{P}_o(x) \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_o \quad \text{in} \quad \partial \mathcal{P} \},$$

$${}^P \bar{\Phi}_o^{\mathcal{P}} := \{ \phi^p = \phi_0(x, t) \mid \phi_0(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}}); \quad P_o(x) \phi_0 = \phi_{o0} \quad \text{in} \quad \partial \mathcal{P} \}.$$

Indichiamo con ${}^p \tilde{\mathbf{y}}$ il vettore delle variazioni

$$[{}^p \tilde{\mathbf{y}}] = \begin{bmatrix} {}^p \tilde{\mathbf{w}} \\ {}^p \tilde{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p \tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad [{}^p \tilde{\phi}] = [\alpha], \quad (4.40)$$

con $({}^p\tilde{\mathbf{w}}, {}^p\tilde{\phi}) \in {}^pV_{\circ}^{\mathcal{P}} \times {}^p\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}}$. Lo spazio delle variazioni tipo lastra ${}^pV_{\circ}^{\mathcal{P}} \times {}^p\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}}$ è così definito

$${}^lV_{\circ}^{\mathcal{P}} := \{ \mathbf{v}^p = a_3(x, t)\mathbf{z} + \zeta\mathbf{b}(x, t), \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = 0 \quad | \quad a_3(x, t), \mathbf{b}(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \\ \mathbf{P}_o(x)a_3\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_o(x)\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \partial\mathcal{P} \},$$

$${}^l\Psi_{\circ}^{\mathcal{P}} := \{ \psi^p = \alpha(x, t) \quad | \quad \alpha(x, t) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \quad P_o(x)\alpha = 0 \quad \text{in} \quad \partial\mathcal{P} \}.$$

Indichiamo con ${}^p\boldsymbol{\gamma}$ il vettore contenente le “deformazioni deboli”, cioè, le componenti di ${}^p\mathbf{E} = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}^p, \bar{\phi}^p)$ e ${}^p\mathbf{e} = \mathbf{e}(\bar{\mathbf{u}}^p, \bar{\phi}^p)$ relative agli scorrimenti (di ordine zero in ζ) e con ${}^p\boldsymbol{\kappa}$ il vettore contenente quelle relative alle curvature (quelle lineari in ζ)

$$[{}^p\boldsymbol{\gamma}] = \begin{bmatrix} {}^p\boldsymbol{\gamma}^w \\ {}^p\boldsymbol{\gamma}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\boldsymbol{\gamma}^w] = \begin{bmatrix} 2 {}^pE_{12} \\ 2 {}^pE_{23} \end{bmatrix} \quad [{}^p\boldsymbol{\gamma}^{\phi}] = \begin{bmatrix} 2 {}^pe_1 \\ 2 {}^pe_2 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

con $2 {}^pE_{13} = \varphi_1 + w_{,1}$, $2 {}^pE_{23} = \varphi_2 + w_{,2}$, ${}^pe_1 = -\phi_{0,1}$, ${}^pe_2 = -\phi_{0,2}$,

$$[{}^p\boldsymbol{\kappa}] = \begin{bmatrix} {}^p\boldsymbol{\kappa}^w \\ {}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\boldsymbol{\kappa}^w] = \begin{bmatrix} {}^pE_{11} \\ {}^pE_{12} \\ 2 {}^pE_{12} \end{bmatrix} \quad [{}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi}] = [{}^pe_3], \quad (4.42)$$

con ${}^pE_{11} = \varphi_{1,1}$, ${}^pE_{22} = \varphi_{2,2}$, $2 {}^pE_{12} = \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}$, ${}^pe_3 = 0$.

Con ${}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ e ${}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ indichiamo le componenti di deformazione relative alle variazioni

$$[{}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}] = \begin{bmatrix} {}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^w \\ {}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^w] = \begin{bmatrix} 2 {}^p\tilde{E}_{12} \\ 2 {}^p\tilde{E}_{23} \end{bmatrix} \quad [{}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{\phi}] = \begin{bmatrix} 2 {}^p\tilde{e}_1 \\ 2 {}^p\tilde{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

$$[{}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}] = \begin{bmatrix} {}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^w \\ {}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^w] = \begin{bmatrix} {}^p\tilde{E}_{11} \\ {}^p\tilde{E}_{12} \\ 2 {}^p\tilde{E}_{12} \end{bmatrix} \quad [{}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{\phi}] = [{}^p\tilde{e}_3]. \quad (4.44)$$

Indichiamo con ${}^l\ddot{\mathbf{y}}$ il vettore delle accelerazioni meccaniche

$$[{}^p\ddot{\mathbf{y}}] = \begin{bmatrix} {}^p\ddot{\mathbf{w}} \\ {}^p\ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\ddot{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad [{}^p\ddot{\phi}] = [\ddot{\phi}_0]; \quad (4.45)$$

in modo analogo definiamo il vettore velocità ${}^p\dot{\mathbf{y}}$.

Indichiamo con ${}^p\mathbf{M}$ la matrice delle masse definite su \mathcal{P}

$$[{}^p\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{M}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{M}_w] = \begin{bmatrix} 2\epsilon\rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3\rho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3\rho \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Indichiamo con ${}^p\mathbf{t}$ il vettore dei carichi definiti su \mathcal{P}

$$[{}^p\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{t}_w \\ {}^p\mathbf{t}_\phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{t}_w] = \begin{bmatrix} P_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{t}_\phi] = [-\pi], \quad (4.47)$$

e con ${}^p\mathbf{l}$ il vettore dei carichi definiti su $\partial\mathcal{P}$

$$[{}^p\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{l}_w \\ {}^p\mathbf{l}_\phi \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{l}_w] = \begin{bmatrix} \bar{s}_{o3} \\ \bar{s}_{o1} \\ \bar{s}_{o2} \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{l}_\phi] = [-\bar{\omega}_o]. \quad (4.48)$$

La formulazione debole dello stato flessionale è dato dalla seguente relazione

$$\int_{\mathcal{P}} {}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^t {}^p\mathbf{D}_s {}^p\boldsymbol{\gamma} + {}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^t {}^p\mathbf{D}_b {}^p\boldsymbol{\kappa} = \int_{\mathcal{P}} {}^p\tilde{\mathbf{y}}^t ({}^p\mathbf{t} - {}^l\mathbf{M} {}^l\dot{\mathbf{y}}) + \int_{\partial\mathcal{P}} {}^p\tilde{\mathbf{y}}^t {}^p\mathbf{l}, \quad (4.49)$$

$$\forall {}^p\tilde{\mathbf{y}} \in {}^pV_o^{\mathcal{P}} \times {}^p\Psi_o^{\mathcal{P}},$$

dove ${}^p\mathbf{D}_s$ e ${}^p\mathbf{D}_b$ sono le matrici dei coefficienti costitutivi

$$[{}^p\mathbf{D}_s] = 2\epsilon \begin{bmatrix} {}^p\bar{\mathbf{C}}_s & -{}^p\bar{\mathbf{C}}_s^t \\ -{}^p\bar{\mathbf{C}}_s & -{}^p\bar{\mathbf{C}}_s \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{D}_b] = \frac{2}{3}\epsilon^3 \begin{bmatrix} {}^p\bar{\mathbf{C}}_b & -{}^p\bar{\mathbf{C}}_b^t \\ -{}^p\bar{\mathbf{C}}_b & -{}^p\bar{\mathbf{C}}_b \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

con

$$[{}^p\bar{\mathbf{C}}_s] = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \quad [{}^p\bar{\mathbf{C}}_s^t] = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \quad [{}^p\bar{\mathbf{C}}_b] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$[{}^p\bar{\mathbf{C}}_b] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad [{}^p\bar{\mathbf{C}}_b] = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [{}^p\bar{\mathbf{C}}_b] = [\gamma_2]. \quad (4.52)$$

4.1. Matrici di elemento di rigidezza, massa e vettore carichi nodali

La matrice di rigidezza di elemento e i relativi carichi nodali possono essere ottenuti direttamente dalla formulazione debole in forma matriciale. Indichiamo con ${}^p\mathbf{y}^h$ e ${}^p\tilde{\mathbf{y}}^h$ i campi di soluzione e le variazioni relativi al modello discreto agli elementi finiti. Sia n_{ne} il numero di nodi di un tipico elemento, si ha

$$\begin{aligned} w^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i w_i^h, \\ \varphi_\alpha^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i \varphi_{\alpha i}^h, \\ \phi_0^h &= \sum_{i=1}^{n_{ne}} N_i \phi_{0i}^h, \end{aligned} \quad (4.53)$$

dove N_i è la funzione forma associata con il nodo i e $\varphi_{\alpha i}^h$, w_i^h e ϕ_{0i}^h l' i -esimo valore nodale, rispettivamente, di φ_α^h , w^h e ϕ_0^h .

Definiamo

$$[{}^p\mathbf{y}^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{y}_1^e \\ {}^p\mathbf{y}_2^e \\ \vdots \\ {}^p\mathbf{y}_{n_e}^e \end{bmatrix} \quad [{}^p\tilde{\mathbf{y}}^e] = \begin{bmatrix} {}^p\tilde{\mathbf{y}}_1^e \\ {}^p\tilde{\mathbf{y}}_2^e \\ \vdots \\ {}^p\tilde{\mathbf{y}}_{n_e}^e \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

con

$$[{}^p\mathbf{y}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{w}_i^e \\ {}^p\phi_i^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{w}_i^e] = \begin{bmatrix} w_i^h \\ \varphi_{1i}^h \\ \varphi_{2i}^h \end{bmatrix} \quad [{}^p\phi_i^e] = [\phi_{0i}^h], \quad (4.55)$$

$$[{}^p\tilde{\mathbf{y}}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^p\tilde{\mathbf{w}}_i^e \\ {}^p\tilde{\phi}_i^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\tilde{\mathbf{w}}_i^e] = \begin{bmatrix} a_{3i}^h \\ b_{1i}^h \\ b_{2i}^h \end{bmatrix} \quad [{}^p\tilde{\phi}_i^e] = [\alpha_i^h], \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} {}^p\boldsymbol{\gamma} &= {}^p\mathbf{B}_s {}^p\mathbf{y}^e & {}^p\tilde{\boldsymbol{\gamma}} &= {}^p\mathbf{B}_s {}^p\tilde{\mathbf{y}}^e, \\ {}^p\boldsymbol{\kappa} &= {}^p\mathbf{B}_b {}^p\mathbf{y}^e & {}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}} &= {}^p\mathbf{B}_b {}^p\tilde{\mathbf{y}}^e, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
[{}^p\mathbf{B}_s] &= [{}^p\mathbf{B}_{s1} \quad {}^p\mathbf{B}_{s2} \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{sne}], \\
[{}^p\mathbf{B}_b] &= [{}^p\mathbf{B}_{b1} \quad {}^p\mathbf{B}_{b2} \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{bne}], \\
[{}^p\mathbf{B}_s^w] &= [{}^p\mathbf{B}_{s1}^w \quad {}^p\mathbf{B}_{s2}^w \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{sne}^w], \\
[{}^p\mathbf{B}_s^\phi] &= [{}^p\mathbf{B}_{s1}^\phi \quad {}^p\mathbf{B}_{s2}^\phi \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{sne}^\phi], \\
[{}^p\mathbf{B}_b^w] &= [{}^p\mathbf{B}_{b1}^w \quad {}^p\mathbf{B}_{b2}^w \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{bne}^w], \\
[{}^p\mathbf{B}_b^\phi] &= [{}^p\mathbf{B}_{b1}^\phi \quad {}^p\mathbf{B}_{b2}^\phi \quad \dots \quad {}^p\mathbf{B}_{bne}^\phi],
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$[{}^p\mathbf{B}_{si}] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^p\mathbf{B}_{si}^\phi \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{B}_{bi}] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{B}_{bi}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^p\mathbf{B}_{bi}^\phi \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

$$[{}^p\mathbf{B}_{si}^w] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{B}_{si}^\phi] = \begin{bmatrix} -N_{i,x} \\ -N_{i,y} \end{bmatrix}, \tag{4.60}$$

$$[{}^p\mathbf{B}_{bi}^w] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad [{}^p\mathbf{B}_{bi}^\phi] = [0]. \tag{4.61}$$

Definiamo il vettore di elemento velocità ${}^p\dot{\mathbf{y}}^e$ e accelerazione ${}^p\ddot{\mathbf{y}}^e$ in modo analogo a come è stato definito ${}^p\mathbf{y}^e$.

Tramite queste definizioni possiamo ottenere le espressioni della rigidità di elemento ${}^p\mathbf{k}^e$ e il relativo vettore dei carichi nodali ${}^p\mathbf{t}^e$

$${}^p\mathbf{k}^e = {}^p\mathbf{k}_s^e + {}^p\mathbf{k}_b^e, \quad \begin{cases} {}^p\mathbf{k}_s^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^p\mathbf{B}_s^t {}^p\mathbf{D}_s {}^p\mathbf{B}_s, \\ {}^p\mathbf{k}_b^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^p\mathbf{B}_b^t {}^p\mathbf{D}_b {}^p\mathbf{B}_b, \end{cases} \tag{4.62}$$

$$[{}^p\mathbf{k}^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{k}_{ww}^e & {}^p\mathbf{k}_{w\phi}^e \\ {}^p\mathbf{k}_{w\phi}^{e\ t} & {}^p\mathbf{k}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} {}^p\mathbf{k}_{ww}^e = \int_{\mathcal{P}^e} {}^p\mathbf{B}_s^{wt} {}^p\bar{\mathbf{C}}_s {}^p\mathbf{B}_s^w + {}^p\mathbf{B}_b^{wt} {}^p\bar{\mathbf{C}}_b {}^p\mathbf{B}_b^w, \\ {}^p\mathbf{k}_{\phi\phi}^e = - \int_{\mathcal{P}^e} [{}^p\mathbf{B}_s^{\phi t} {}^p\bar{\mathbf{C}}_s {}^p\mathbf{B}_s^\phi + {}^p\mathbf{B}_b^{\phi t} {}^p\bar{\mathbf{C}}_b {}^p\mathbf{B}_b^\phi], \\ {}^p\mathbf{k}_{w\phi}^e = - \int_{\mathcal{P}^e} [{}^p\mathbf{B}_s^{wt} {}^p\bar{\mathbf{C}}_s^t {}^p\mathbf{B}_s^\phi + {}^p\mathbf{B}_b^{wt} {}^p\bar{\mathbf{C}}_b^t {}^p\mathbf{B}_b^\phi], \end{cases} \tag{4.63}$$

$$[{}^p\mathbf{M}^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{M}_1^e & & & \\ & {}^p\mathbf{M}_2^e & & \\ & & \ddots & \\ & & & {}^p\mathbf{M}_{ne}^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{M}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{M}_{w_i}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

con

$$[{}^p\mathbf{M}_{w_i}^e] = \begin{bmatrix} 2\epsilon \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3 \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\epsilon^3 \int_{\mathcal{P}^e} \rho N_i^2 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$[{}^p\mathbf{t}^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{t}_1^e \\ {}^p\mathbf{t}_2^e \\ \vdots \\ {}^p\mathbf{t}_{ne}^e \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad [{}^p\mathbf{t}_i^e] = \begin{bmatrix} {}^p\mathbf{t}_{w_i}^e \\ {}^p\mathbf{t}_{\phi_i}^e \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

con

$$[{}^p\mathbf{t}_{w_i}^e] = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{P}^e} N_i p_3 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{s}_{o3} \\ \int_{\mathcal{P}^e} N_i q_1 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{s}_{o1} \\ \int_{\mathcal{P}^e} N_i q_2 + \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{s}_{o2} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

$$[{}^p\mathbf{t}_{\phi_i}^e] = \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{P}^e} N_i \pi - \int_{\partial\mathcal{P}^e \cap \partial\mathcal{P}_h} N_i \bar{w}_o \end{bmatrix},$$

dove \mathcal{P}^e e $\partial\mathcal{P}^e$ sono, rispettivamente, il dominio e la frontiera dell'elemento e-esimo.

Le componenti dello sforzo elettroelastico possono essere determinate tramite le relazioni

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} = {}^p\mathbf{D}_s {}^p\mathbf{B}_s {}^p\mathbf{y}^e \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = {}^p\mathbf{D}_b {}^p\mathbf{B}_b {}^p\mathbf{y}^e. \quad (4.68)$$

5. Assemblaggio delle equazioni

Dopo aver determinato le matrici di rigidezza di elemento \mathbf{k}^e , di massa \mathbf{M}^e e i vettori dei carichi nodali \mathbf{t}^e si passa alla fase di assemblaggio per costruire il sistema algebrico risolvibile. In questa fase si ricostruisce la continuità della soluzione imponendo quella dei parametri nodali. Questo si fa, come è ben noto, collegando i parametri nodali di elemento \mathbf{y}^e e le variazioni $\tilde{\mathbf{y}}^e$, rispettivamente, ai vettori globali dei parametri nodali \mathbf{y}^h e delle variazioni nodali $\tilde{\mathbf{y}}^h$ attraverso le matrici di connettività \mathbf{L}^e

$$\mathbf{y}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{y}^h, \quad \tilde{\mathbf{y}}^e = \mathbf{L}^e \tilde{\mathbf{y}}^h. \quad (5.69)$$

La formulazione debole nella forma discreta diventa

$$\tilde{\mathbf{y}}^{ht} \left[\sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{k}^e \mathbf{L}^e \right] \mathbf{y}^h + \tilde{\mathbf{y}}^{ht} \left[\sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{M}^e \mathbf{L}^e \right] \ddot{\mathbf{y}}^h = \tilde{\mathbf{y}}^{ht} \left[\sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{t}^e \right] \quad \forall \tilde{\mathbf{y}}^h.$$

Il sistema risolvibile si scrive

$$\mathbf{K} \mathbf{y}^h + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}^h = \mathbf{t}, \quad (5.70)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza globale, \mathbf{M} è la matrice delle *masse* globale e \mathbf{t} è il vettore dei carichi nodali, così definite:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{k}^e \mathbf{L}^e, \\ \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{M}^e \mathbf{L}^e, \\ \mathbf{t} &= \sum_{e=1}^{n_{nf}} \mathbf{L}^{et} \mathbf{t}^e. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Riscriviamo in forma matriciale i vettori \mathbf{y} , $\ddot{\mathbf{y}}$ (omettendo l'indice h relativo alla discretizzazione) e \mathbf{t} , e le matrici \mathbf{K} e \mathbf{M} nel caso elettroelastico:

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \phi \end{bmatrix} & [\ddot{\mathbf{y}}] &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} & [\mathbf{t}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_w \\ \mathbf{t}_\phi \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\phi} \\ \mathbf{K}_{w\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Le condizioni al bordo si introducono nel sistema, in modo simbolico, partizionando \mathbf{y} in due parti, dove \mathbf{y}_1 è il sottovettore dei parametri nodali liberi e \mathbf{y}_o è il sottovettore dei parametri nodali di cui si assegna il valore. Al primo corrisponde il vettore dei carichi nodali attivi \mathbf{t}_o mentre al secondo corrisponde il vettore delle reazioni vincolari \mathbf{r} . Alla luce di queste considerazioni, il sistema (5.70) si scrive in forma matriciale, non considerando il termine inerziale, come segue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_{lo} \\ \mathbf{K}_{lo}^t & \mathbf{K}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_o \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Il sistema risolvibile diventa

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 \mathbf{y}_1 = \mathbf{t}_o - \mathbf{K}_{lo} \mathbf{y}_o, \\ \mathbf{r} = \mathbf{K}_{lo}^t \mathbf{y}_1 + \mathbf{K}_o \mathbf{y}_o. \end{cases} \quad (5.74)$$

La (5.74)₁ consente il calcolo dei parametri nodali liberi \mathbf{y}_1 . Le condizioni al bordo \mathbf{y}_o implicano soltanto una modifica del vettore dei carichi nodali attivi. Una volta valutato \mathbf{y}_1 , le reazioni si calcolano tramite la (5.74)₂.

6. Analisi statica, autovalori e analisi evolutiva

Nell'analisi statica si risolve il seguente problema:

$$\mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{t}. \quad (6.75)$$

Dopo aver determinato le incognite (\mathbf{w}, ϕ) si determinano nei *punti di Gauss*² dei singoli elementi finiti i valori degli scorrimenti γ e delle curvature κ tramite le (3.27) e (4.57), e i valori delle sollecitazioni $(\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{l}, \tilde{\mathbf{m}})$ tramite le (3.38) e (4.68).

² Usualmente, il calcolo numerico degli integrali che compaiono nella formulazione del metodo degli elementi finiti viene effettuato utilizzando il metodo noto come *quadratura di Gauss*. Su un dominio quadrato $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, l'integrale della funzione $f(\xi, \eta)$ viene approssimato come segue

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_i w_j f(\xi_i, \eta_j),$$

dove ξ_i e η_j sono le coordinate di opportuni punti appartenenti al dominio, detti *punti di Gauss*, e w_i e w_j i *pesi*.

Nell'analisi dello stato stazionario si risolve il seguente problema:

$$\mathbf{K} \mathbf{y} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{t}, \quad (6.76)$$

dove la forzante è caratterizzata dalla pulsazione ω e dalla ampiezza \mathbf{t} .

Il problema agli autovalori consiste nel determinare gli autovalori e gli autovettori del sistema

$$\mathbf{K} \mathbf{y} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (6.77)$$

dove la frequenza dell' i -esimo modo di vibrare del sistema è pari ha $f_i = \omega_i/(2\pi)$.

Per studiare l'evoluzione di un sistema elettroelastico conviene riscrivere le (5.70) come segue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\phi} \\ \mathbf{K}_{w\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_w \\ \mathbf{t}_\phi \end{bmatrix}, \quad (6.78)$$

dove è stato aggiunto il termine dissipativo meccanico $\mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}$, dove \mathbf{C} è la matrice di *dissipazione* del sistema. Questa è ottenuta in genere nel seguente modo

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}_{ww}, \quad (6.79)$$

dove a e b sono i coefficienti di Rayleigh [22]; quest'ultimi sono determinati dalla conoscenza sperimentale di due coefficienti di smorzamento relativi a due frequenze proprie del sistema. La (6.79) presuppone l'ipotesi che i coefficienti di smorzamento ξ_i associati all' i -esimo modo di vibrazione, di pulsazione ω_i del sistema seguano la seguente relazione

$$\xi_i = \frac{a}{2\omega_i} + \frac{b\omega_i}{2}, \quad (6.80)$$

dunque per determinare i due coefficienti Rayleigh basta conoscere due coppie (ω_i, ξ_i) è risolvere il sistema lineare di due equazioni nelle incognite a e b derivante dalla (6.80).

Anche nel caso in cui si vogliono studiare le oscillazioni senza smorzamento è necessario per la stabilità della soluzione numerica introdurre un "piccolo smorzamento"

tramite la matrice di dissipazione in modo da evitare che si possa introdurre energia algoritmica spuria nel processo evolutivo [13]. Questo dipende, ovviamente, dal particolare algoritmo di integrazione nel tempo che si utilizza nell'analisi evolutiva del sistema.

7. Procedure di soluzione del sistema di equazioni risolventi

In certi casi può essere utile eliminare le variabili meccaniche \mathbf{w} o quelle elettriche ϕ dal sistema (6.78) tramite la tecnica detta della “condensazione statica”. In questa maniera si risolvono due problemi di dimensioni ridotte in cascata. Nel caso dinamico conviene effettuare la codensazione del vettore ϕ ; il sistema (6.78) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ww}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}_{ww}\dot{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{w} &= \mathbf{t}_w - \mathbf{K}_{w\phi}\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1}\mathbf{t}_\phi, \\ \phi &= \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1}(\mathbf{t}_\phi - \mathbf{K}_{w\phi}^t\mathbf{w}), \end{aligned} \quad (7.81)$$

dove

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{ww} - \mathbf{K}_{w\phi}\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1}\mathbf{K}_{w\phi}^t. \quad (7.82)$$

Nel caso statico si possono fare entrambe le condensazioni; se si effettua la codensazione del vettore \mathbf{w} il sistema (6.75) diventa

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{K}}\phi &= \mathbf{t}_\phi - \mathbf{K}_{w\phi}^t\mathbf{K}_{ww}^{-1}\mathbf{t}_w, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{K}_{ww}^{-1}(\mathbf{t}_w - \mathbf{K}_{w\phi}\phi), \end{aligned} \quad (7.83)$$

dove

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{\phi\phi} - \mathbf{K}_{w\phi}^t\mathbf{K}_{ww}^{-1}\mathbf{K}_{w\phi}; \quad (7.84)$$

invece, se si effettua la codensazione del vettore ϕ si ottiene la (7.81) senza i termini dinamici, dove $\overline{\mathbf{K}}$ è definita dalla (7.82).

Se si assegna ϕ su \mathcal{P} (effetto piezoelettrico) per determinare \mathbf{w} bisogna risolvere, nel caso statico, la (7.83)₂, e nel caso dinamico, la seguente

$$\mathbf{M}_{ww}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}_{ww}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_{ww}\mathbf{w} = \mathbf{t}_w - \mathbf{K}_{w\phi}\phi. \quad (7.85)$$

Invece, se si assegna \mathbf{w} su \mathcal{P} (effetto piezoelettrico inverso) per determinare ϕ bisogna risolvere la (7.81)₂.

È possibile risolvere il problema statico tramite un procedura iterativa [33]. I passi di questa procedura possono essere descritti brevemente nel seguente modo:

1. si risolve la (7.81)₂ con $\mathbf{w} = \mathbf{0}$;
2. si sostituisce ϕ così ottenuto nella (7.83)₂ e si determina \mathbf{w} ;
3. si sostituisce \mathbf{w} così ottenuto nella (7.81)₂ e si determina ϕ ;
4. si paragona $\phi^{(3)}$, il valore di ϕ nel passo 3, con $\phi^{(1)}$, il valore ottenuto al passo 1, cercando di soddisfare la disuguaglianza in

$$\frac{\|\phi^{(3)} - \phi^{(1)}\|}{\|\phi^{(1)}\|} \leq \alpha_1,$$

dove α_1 è un coefficiente di tolleranza;

5. si sostituisce $\phi^{(3)}$ nella (7.83)₂ e si determina \mathbf{w} ;
6. si paragona $\mathbf{w}^{(5)}$, il valore di \mathbf{w} nel passo 5, con $\mathbf{w}^{(2)}$, il valore ottenuto al passo 2, cercando di soddisfare la disuguaglianza in

$$\frac{\|\mathbf{w}^{(5)} - \mathbf{w}^{(2)}\|}{\|\mathbf{w}^{(2)}\|} \leq \alpha_2,$$

dove α_2 è un coefficiente di tolleranza.

Se le due condizioni di convergenza non sono entrambe soddisfatte si continua con l'analisi, ripetendo i passi 3 e 6, fin tanto che le due condizioni non sono soddisfatte.

8. Validazione dell'elemento finito bidimensionale

In questo paragrafo si vuole validare l'elemento finito piezoelettrico bidimensionale proposto confrontandone le previsioni con le particolari soluzioni del modello continuo bidimensionale trovate nel paragrafo III.9.1. Per le elaborazioni numeriche si è realizzato un programma agli elementi finiti in ambiente Matlab.

Si considera una piastra quadrata piezoelettrica (ceramica CdS) di lato $L = 0.1$ m semplicemente appoggiata (per i valori della densità massa, delle costanti elastiche, piezoelettriche e dielettriche si veda la tabella III.1 del paragrafo III.9.2).

Le condizioni al bordo sono:

- lati ortogonali all'asse x_1 :

$$v_2 = 0, w = 0, \varphi_2 = 0, u = 0, \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, N_1 = 0, M_1 = 0;$$

- lati ortogonali all'asse x_2 :

$$v_1 = 0, w = 0, \varphi_1 = 0, u = 0, \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, N_2 = 0, M_2 = 0.$$

Per la discretizzazione si utilizzano elementi finiti isoparametrici a 8 nodi.

Il confronto si effettua sulla prima frequenza naturale dei modi (1,1), rispettivamente, di w e u , variando sia il rapporto spessore/lato sia il numero di elementi finiti che discretizzano la piastra.

L'errore medio varia tra il 33 %, per la mesh di 4 elementi finiti, e 1.3 %, per la mesh di 64 elementi finiti. I risultati vengono riportati nelle tabelle 1-2.

Elemento finito piastra - w						
h/L	2D	4 el.	9 el.	16 el.	32 el.	64 el.
1/100	83.1	111.9	96.6	89.2	86.9	84.2
1/50	166.1	223.4	189.6	178.1	173.6	168.4
1/20	411.5	551.4	466.7	441.0	429.9	417.1
1/10	798.6	1058.6	901.9	854.4	833.3	809.2
1/5	1443.1	1854.8	1612.0	1535.3	1500.7	1460.4

Tabella IV.1 Frequenze naturali (Hz) ottenute con il modello agli elementi finiti.

Elemento finito lastra - u						
h/L	2D	4 el.	9 el.	16 el.	32 el.	64 el.
1/100	616599	830260	716462	661886	645048	625018
1/50	308334	414741	352029	330690	322270	312544
1/20	123430	165390	139990	132270	128934	125098
1/10	61888	82037	69892	66213	64578	62706
1/5	31296	40225	34959	33297	32546	31672

Tabella IV.2 Frequenze naturali (Hz) ottenute con il modello agli elementi finiti.

9. Esempi numerici

In questo paragrafo si trovano 2 particolari soluzioni numeriche del problema bidimensionale analizzato nel paragrafo III.9.1 utilizzando il modello agli elementi finiti piezoelettrico bidimensionale sviluppato in questo capitolo.

Si fa riferimento alla piastra del paragrafo precedente con spessore $h = 0.05$ m ($h/L = 1/20$); le condizioni di carico considerate sono le seguenti:

tipo flessionale (elemento finito piastra)

$$p_3(x_1, x_2) = P_3 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right),$$

tipo membranale (elemento finito lastra)

$$q_3(x_1, x_2) = Q_3 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right),$$

con $P_3 = 1$ GPa, $Q_3 = 1 \cdot \epsilon$ GPa·m, $n_1 = n_2 = 1$ e $L_1 = L_2 = L$.

La piastra viene discretizzata tramite una mesh di 10 elementi finiti per lato. L'errore assoluto nel computare le ampiezze dei campi incogniti varia tra il 0.21 % e 0.01 % (si vedano le tabelle 3-4). Si riportano i grafici dei campi incogniti, normalizzati rispetto al carico, e delle deformate per le due condizioni di carico considerate.

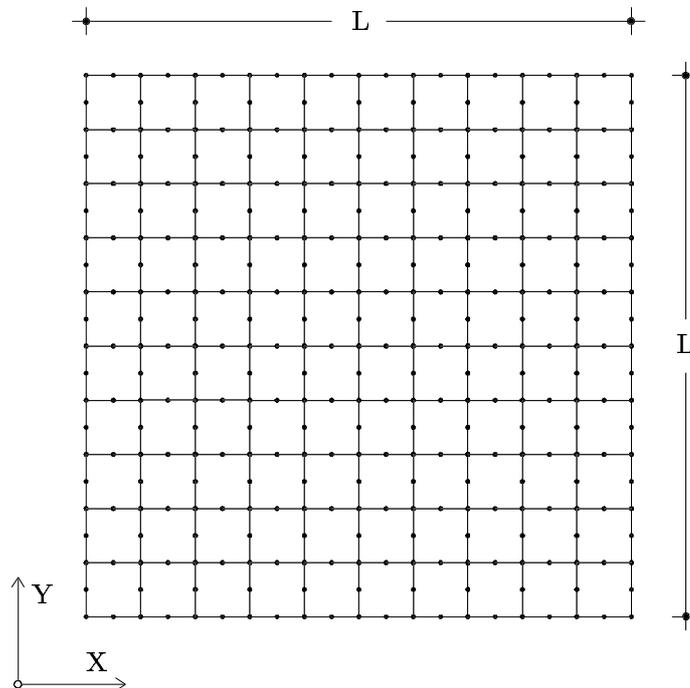


Figura IV.3 Mesh elementi finiti.

Elemento finito piastra			
Ampiezze	2D	FEM	Errore (%)
$W/P_3 (w) [\text{m} \cdot \text{GPa}^{-1}]$	2.7840e-01	2.7825E-1	0.05
$R_1/P_3 (\varphi_1) [\text{GPa}^{-1}]$	-8.5340e+00	-8.5376E+0	0.04
$R_1/P_3 (\varphi_2) [\text{GPa}^{-1}]$	-8.5340e+00	-8.5376E+0	0.04
$F_0/P_3 (\phi_0) [\text{GV} \cdot \text{GPa}^{-1}]$	-1.7775e-05	-1.7774E-5	0.01

Tabella IV.3 Ampiezze ottenute con il modello agli elementi finiti.

Elemento finito lastra			
Ampiezze	2D	FEM	Errore (%)
$V_1/(Q_3/\epsilon) (v_1) [\text{m} \cdot \text{GPa}^{-1}]$	6.8386e-05	6.8337e-05	0.01
$V_2/(Q_3/\epsilon) (v_2) [\text{m} \cdot \text{GPa}^{-1}]$	6.8386e-05	6.8337e-05	0.01
$U/(Q_3/\epsilon) (u) [\text{GPa}^{-1}]$	7.6568e-03	7.6727e-03	0.21
$F_1/(Q_3/\epsilon) (\phi_1) [\text{GV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{GPa}^{-1}]$	5.2171e-03	5.2232e-03	0.12

Tabella IV.4 Ampiezze ottenute con il modello agli elementi finiti.

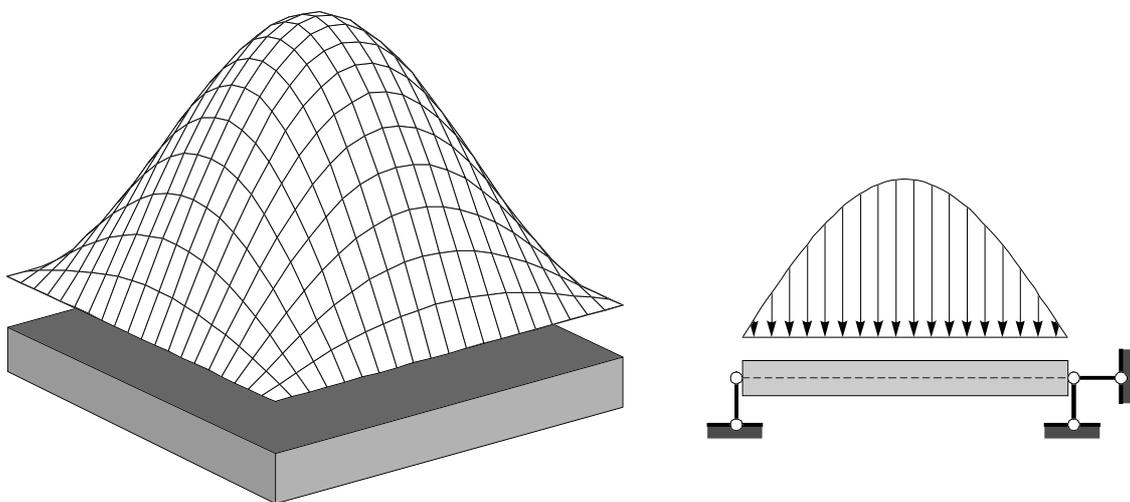


Figura IV.4 Condizioni di carico tipo flessionale p_3 per la piastra quadrata.

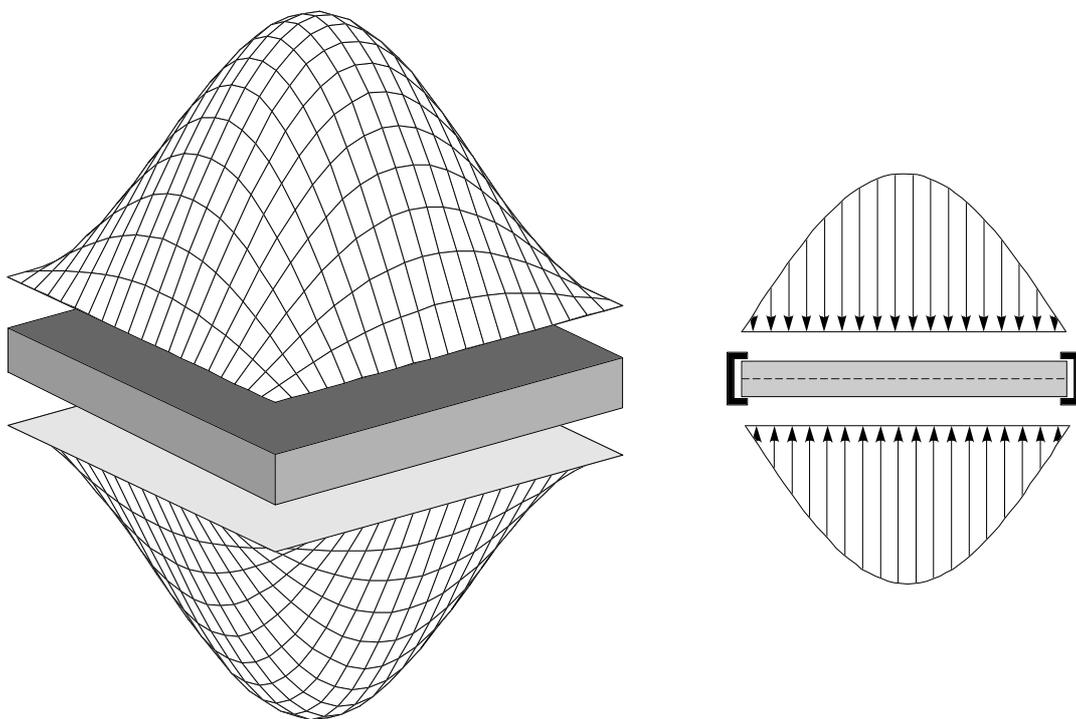


Figura IV.5 Condizioni di carico tipo membranale q_3 per la piastra quadrata.

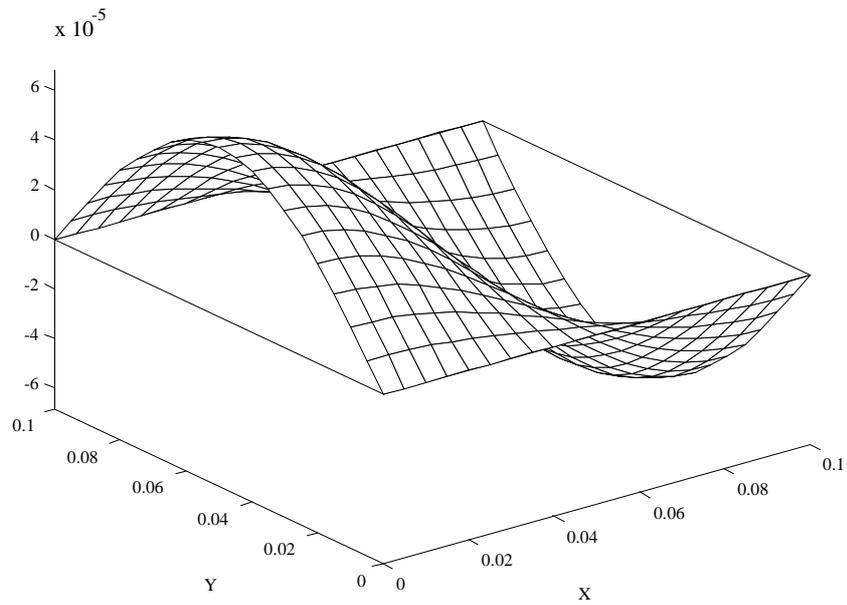


Figura IV.6 Grafico dello spostamento planare normalizzato $v_1/(Q_3/\epsilon)$ [$\text{m} \times \text{GPa}^{-1}$].

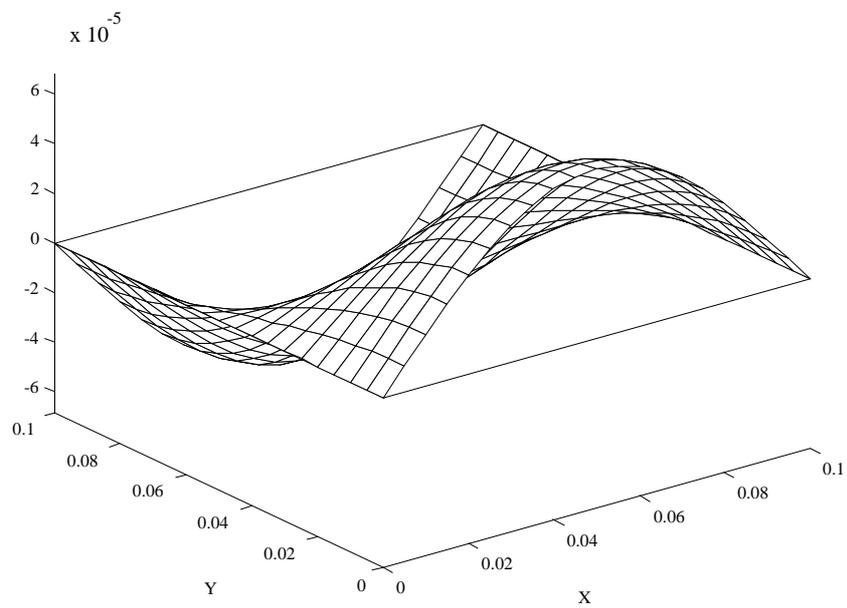


Figura IV.7 Grafico dello spostamento planare normalizzato $v_2/(Q_3/\epsilon)$ [$\text{m} \times \text{GPa}^{-1}$].

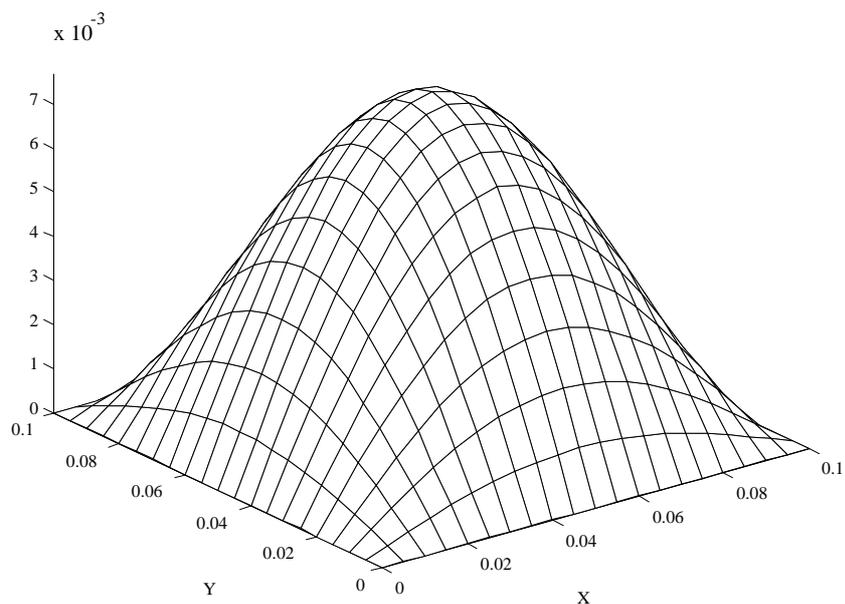


Figura IV.8 Grafico della deformazione di spessore normalizzata $u/(Q_3/\epsilon)$ [GPa^{-1}].

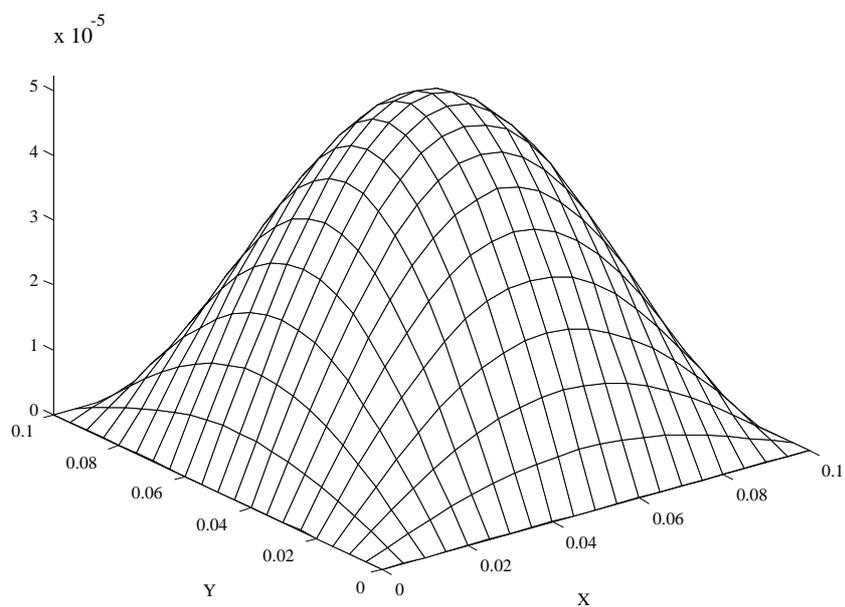


Figura IV.9 Grafico del potenziale elettrico normalizzato $\phi_1/(Q_3/\epsilon)$ [$\text{GV} \times \text{m}^{-1} \times \text{GPa}^{-1}$].

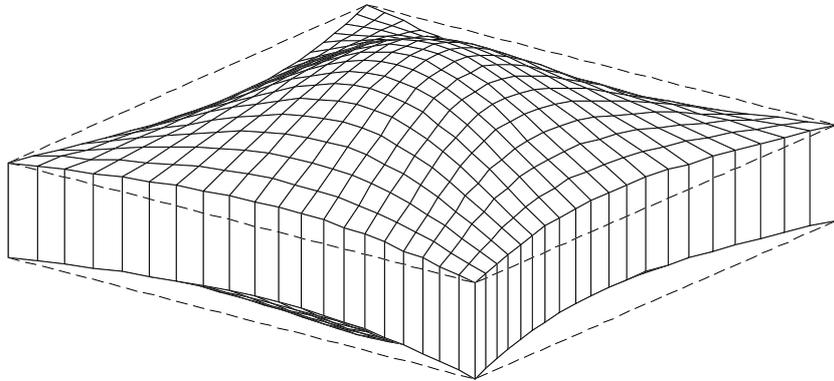


Figura IV.10 Configurazione deformata della piastra soggetta al carico membranale q_3 .

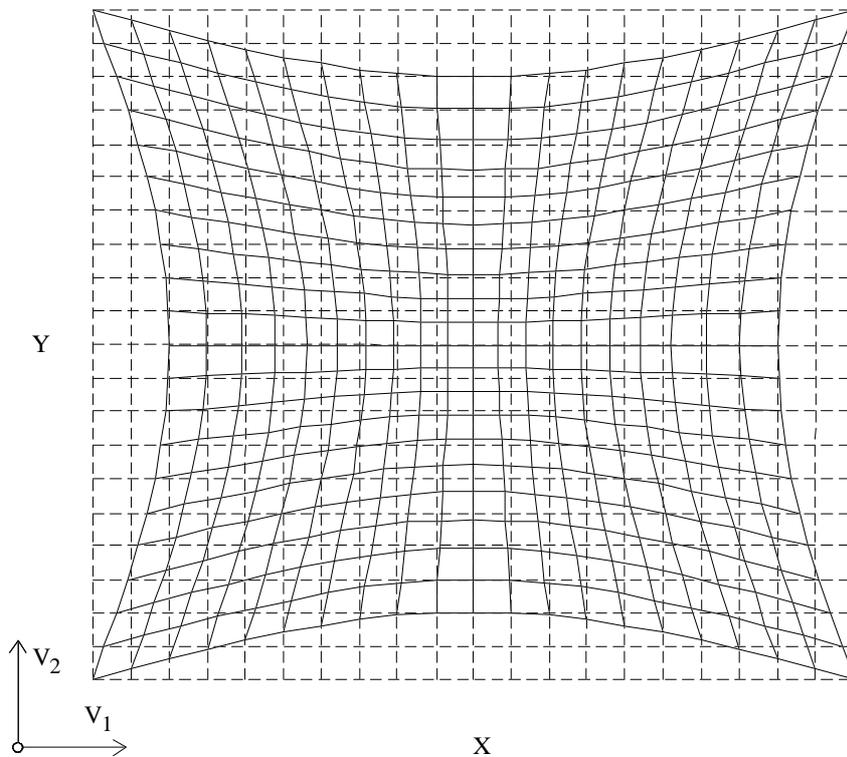


Figura IV.11 Deformata della superficie media della piastra.

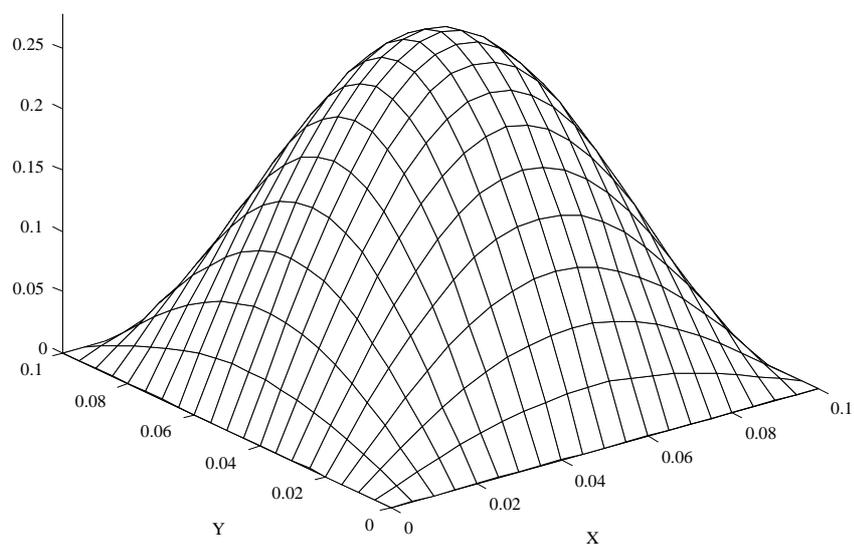


Figura IV.12 Grafico della deflessione trasversale normalizzata w/P_3 [$\text{m} \times \text{GPa}^{-1}$].

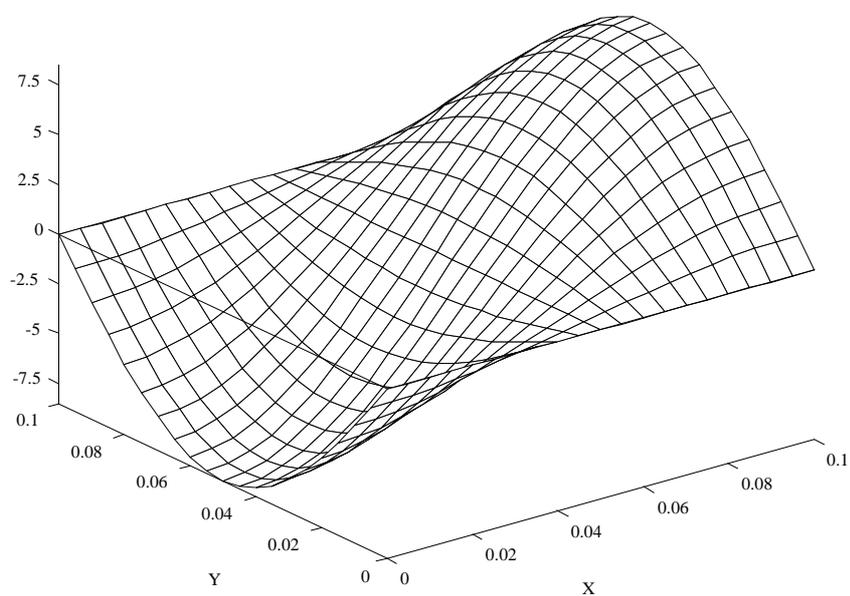


Figura IV.13 Grafico della rotazione delle fibre trasverse normalizzata φ_1/P_3 [GPa^{-1}].

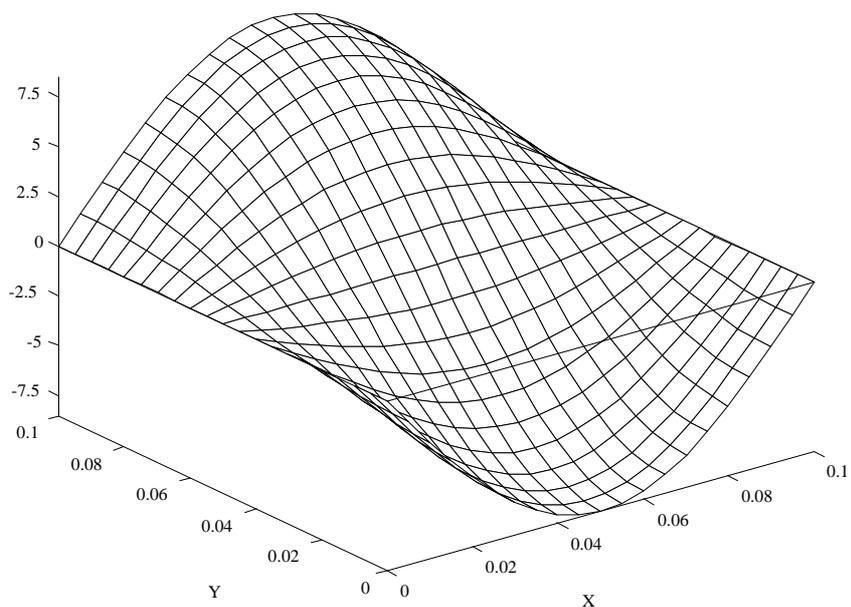


Figura IV.14 Grafico della rotazione delle fibre trasverse normalizzata φ_2/P_3 [GPa⁻¹].

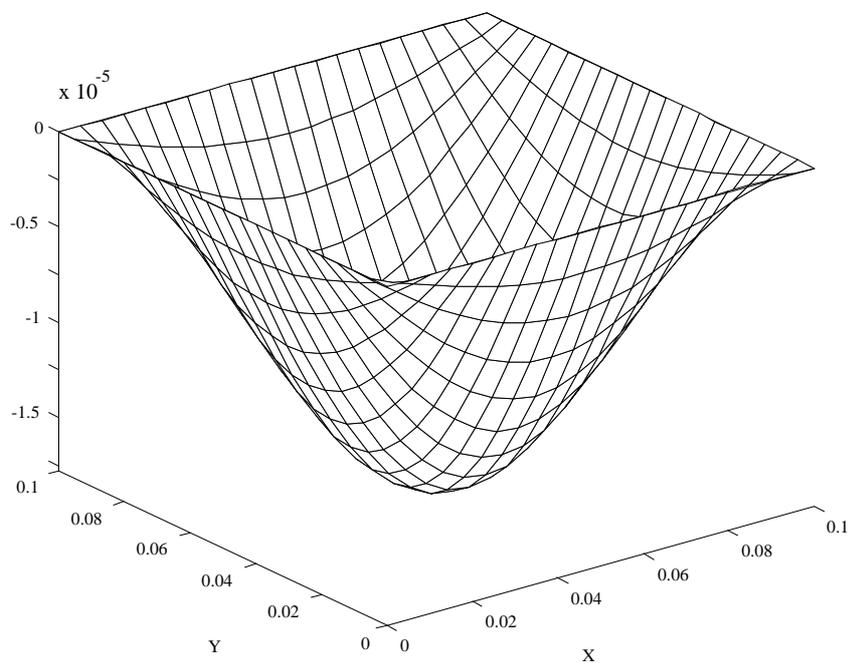


Figura IV.15 Grafico del potenziale elettrico normalizzato ϕ_0/P_3 [GV × GPa⁻¹].

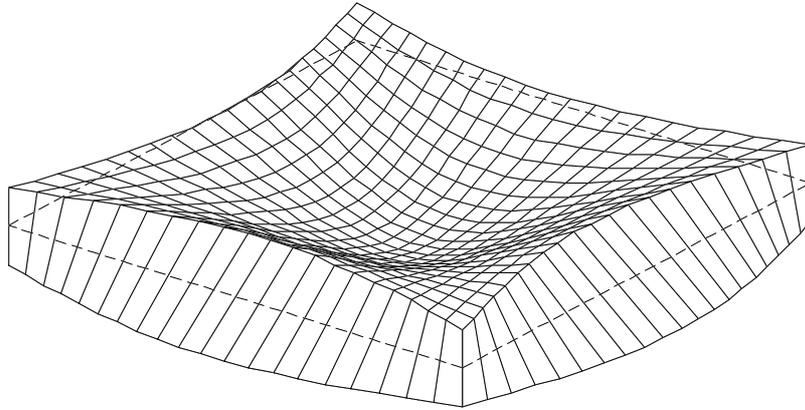


Figura IV.16 Configurazione deformata della piastra soggetta al carico flessionale p_3 .

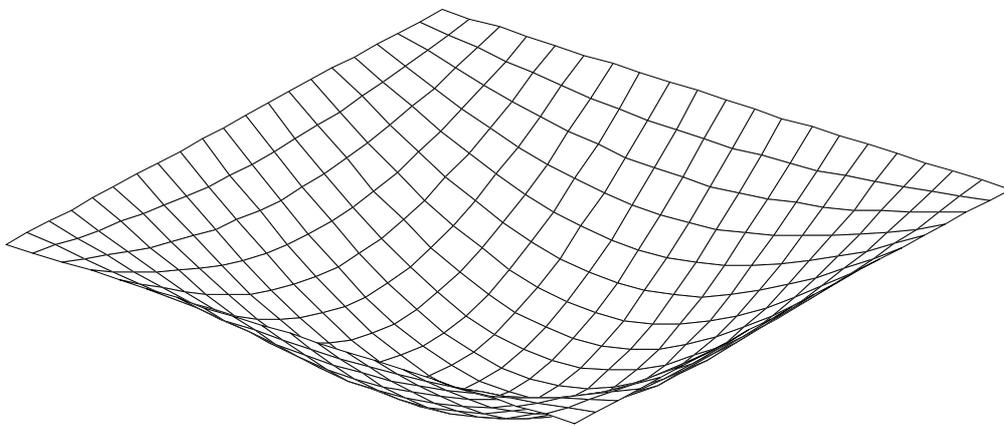


Figura IV.17 Deformata della superficie media della piastra.