

CAPITOLO

III

Piastre piezoelettriche

La teoria delle strutture cerca di descrivere il comportamento meccanico di corpi continui sottili in una maniera semplice eppure sufficientemente dettagliata per gli scopi applicativi. Come nel caso classico dell'elasticità lineare, una teoria delle strutture piezoelettriche è *coerente* con il relativo problema tridimensionale quando si sappia dare una deduzione razionale da quest'ultimo.

L'obiettivo di questo capitolo è la deduzione di una teoria di piastre piezoelettriche capaci di compiere oscillazioni di spessori. Le equazioni delle piastre piezoelettriche lineari sono ottenute tramite l'imposizione della stazionarietà del funzionale $\Theta(\mathbf{u}, \phi)$, definito dalla (II.5.41) per campi tridimensionali, introducendo opportune ipotesi di natura meccanica ed elettrica sulla rappresentazione di questi campi. Il modello è una variante del classico modello elastico di piastra di Reissner-Mindlin.

1. Corpi elettroelastici a forma di piastra

Sia $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{z}\}$ un riferimento cartesiano ortogonale, con $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{z}\}$ una base ortonormale di \mathcal{V} , e sia \mathcal{P} una regione compatta del piano $x_1 - x_2$, con contorno $\partial\mathcal{P}$ regolare. Una regione a forma di piastra di spessore $h = 2\epsilon > 0$ è un cilindro $\mathcal{C}(\epsilon) := \mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[$ di \mathcal{E} , con $2\epsilon \ll \text{diam}(\mathcal{P})$. La frontiera di $\mathcal{C}(\epsilon)$ è costituita dal mantello laterale $\partial\mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[$ e dalle due facce $\mathcal{P} \times \{\pm\epsilon\}$. Indichiamo con x e p la coppia dei punti tipici, rispettivamente, di \mathcal{P} e di $\mathcal{C}(\epsilon)$ tale che

$$p = x + \zeta \mathbf{z}, \quad (1.1)$$

con (x_1, x_2) le coordinate cartesiane di x .

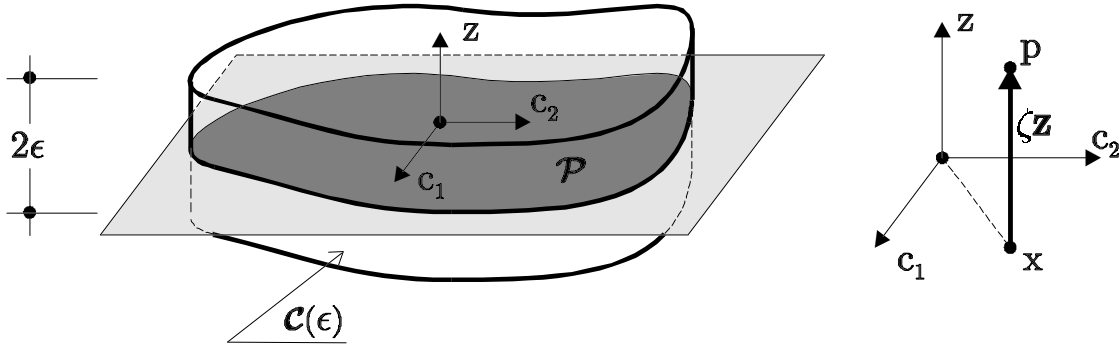


Figura III.1 Corpo a forma di piastra.

Per descrivere le grandezze tensoriali del nostro problema utilizzeremo la seguente base ortonormale di Sym è $\{\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, 6\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &:= \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1, & \mathbf{X}_4 &:= \sqrt{2} \text{sym}(\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{z}), \\ \mathbf{X}_2 &:= \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2, & \mathbf{X}_5 &:= \sqrt{2} \text{sym}(\mathbf{z} \otimes \mathbf{c}_1), \\ \mathbf{X}_3 &:= \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, & \mathbf{X}_6 &:= \sqrt{2} \text{sym}(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dalla forma di $\mathcal{C}(\epsilon)$ segue che la coppia (\mathbf{P}_o, P_o) assuma i seguenti valori sulle

sue due facce \mathcal{P}^\pm :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_o(x, \pm\epsilon) &= \{\mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}\} \\ P_o(x, \pm\epsilon) &= \{1, 0\} \end{aligned} \quad x \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Poiché su questa parte della frontiera di $\mathcal{C}(\epsilon)$ si suppone di assegnare i carichi applicati (\mathbf{s}_o, ω_o) , si sceglie

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_o(x, \pm\epsilon) &= \{\mathbf{O}\} \\ P_o(x, \pm\epsilon) &= \{0\} \end{aligned} \quad x \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Per quanto riguarda il mantello laterale, sia x un punto tipico di $\partial\mathcal{P}$ e sia $\boldsymbol{\nu}(x, \zeta)$ la normale esterna nel punto (x, ζ) con $\zeta \in (-\epsilon, +\epsilon)$. È evidente che $\boldsymbol{\nu}(x, \zeta) = \boldsymbol{\nu}(x, 0)$ per tutte le $\zeta \in]-\epsilon, +\epsilon[$ e che $\boldsymbol{\nu}(x, 0) \cdot \mathbf{z} = 0$. Indichiamo $\boldsymbol{\nu}(x)$ con $\boldsymbol{\nu}(x, 0)$; si sceglie che la coppia (\mathbf{P}_o, P_o) assuma i seguenti valori sul mantello laterale

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_o(x, \zeta) &= \mathbf{P}_o(x, 0) = \{\mathbf{I}, \mathbf{O}, \boldsymbol{\nu}(x) \otimes \boldsymbol{\nu}(x), \mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}(x) \otimes \boldsymbol{\nu}(x)\}, \\ P_o(x, \zeta) &= P_o(x, 0) = \{1, 0\}, \end{aligned}$$

con $(x, \zeta) \in \partial\mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[$.

In seguito indicheremo con $(\mathbf{P}_o(x), P_o(x))$ la coppia $(\mathbf{P}_o(x, 0), P_o(x, 0))$. Assumiamo, inoltre, che le mappe $x \rightarrow \mathbf{P}_o(x)$ e $x \rightarrow P_o(x)$ assumano valori costanti a tratti su $\partial\mathcal{P}$.

2. Cinematica

Cerchiamo una rappresentazione per la coppia (\mathbf{u}, ϕ) in una regione a forma di piastra. Il nostro scopo è ridurre il problema di equilibrio elettroelastico tridimensionale ad un problema bidimensionale; in considerazione di ciò, scegliamo una rappresentazione parametrizzata tramite funzioni definite su \mathcal{P} , e precisamente

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, \zeta, t) &= \mathbf{u}_0(x, t) + \zeta \mathbf{u}_1(x, t), \\ \phi(x, \zeta, t) &= \phi_0(x, t) + \zeta \phi_1(x, t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Osservazione 2.1. Il nostro modello di piastra piezoelettrica non prevede vincoli interni, cioè, non imponiamo alcuna condizione algebrica alla coppia (\mathbf{E}, \mathbf{e}) . La rappresentazione (2.3) non è la soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che esprime in termini di (\mathbf{u}, ϕ) una condizione algebrica di vincolo interno su (\mathbf{E}, \mathbf{e}) .¹

Partendo dalla rappresentazione (2.3) possiamo calcolarci il campo della deformazione \mathbf{E} e il campo elettrico \mathbf{e} : per definizione di gradiente,

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= \nabla \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z} + \zeta \nabla \mathbf{u}_1, \\ \nabla \phi &= \nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z} + \zeta \nabla \phi_1;\end{aligned}\tag{2.4}$$

quindi, per le condizioni di compatibilità (II.1.4) e (II.1.5),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{u}) &= \mathbf{E}(\mathbf{u}_0) + \text{sym}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z}) + \zeta \mathbf{E}(\mathbf{u}_1), \\ \mathbf{e}(\phi) &= -(\nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z} + \zeta \nabla \phi_1).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Per non escudere a priori che il nostro modello “2D” abbia delle soluzioni che corrispondono esattamente a soluzioni “3D” bisogna che i dati (\mathbf{u}_0, ϕ_0) abbiano anch’essi una rappresentazione tipo (2.3):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0(x, \zeta) &= \mathbf{u}_{00}(x) + \zeta \mathbf{u}_{10}(x), \\ \phi_0(x, \zeta) &= \phi_{00}(x) + \zeta \phi_{10}(x).\end{aligned}$$

In caso contrario avremo una *teoria approssimata*, nel senso che potremmo tener conto soltanto di certe informazioni globali contenute nei dati (\mathbf{u}_0, ϕ_0) ; precisamente, dovremo prendere

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{00}(x) &:= (2\epsilon)^{-1} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{u}_0(x, \zeta) d\zeta, & \mathbf{u}_{10}(x) &:= \left(\frac{2}{3}\epsilon^3\right)^{-1} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{u}_0(x, \zeta) d\zeta; \\ \phi_{00}(x) &:= (2\epsilon)^{-1} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \phi_0(x, \zeta) d\zeta, & \phi_{10}(x) &:= \left(\frac{2}{3}\epsilon^3\right)^{-1} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \phi_0(x, \zeta) d\zeta.\end{aligned}$$

¹ Ad esempio, la teoria di piastra di Kirchoff-Love è costruita partendo dal vincolo interno:

$$\mathbf{Ez} = 0,$$

e il sistema differenziale corrispondente in \mathbf{u} ha la soluzione

$$\mathbf{u}(x, \zeta) = \mathbf{u}_0(x) - \zeta \nabla(\mathbf{u}_0(x) \cdot \mathbf{z}).$$

3. Stato di sforzo elettroelastico

In questo paragrafo ci proponiamo di definire su \mathcal{P} i campi necessari per descrivere in modo opportuno lo stato di sforzo (\mathbf{S}, \mathbf{d}) in $\mathcal{C}(\epsilon)$. Consideriamo che $\mathcal{C}(\epsilon)$ sia occupata da un continuo di Cauchy soggetto ad un campo di forze di contatto $\mathbf{s}(p, t; \mathbf{n})$ ed in moto con velocità $\dot{\mathbf{u}}(x, \zeta, t)$; sia inoltre \mathcal{L} una curva su \mathcal{P} per x , di normale $\boldsymbol{\nu}(x)$.

I descrittori dinamici meccanici in x sono (per unità di lunghezza d'arco di \mathcal{L}):

la *forza risultante*

$$\mathbf{f}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) := \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{s}(p, t; \boldsymbol{\nu}(x)) d\zeta, \quad (3.6)$$

la *coppia risultante*

$$\mathbf{c}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) := \mathbf{z} \times \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{s}(p, t; \boldsymbol{\nu}(x)) d\zeta, \quad (3.7)$$

il *centro di forza risultante*²

$$\gamma(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) := \mathbf{z} \cdot \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{s}(p, t; \boldsymbol{\nu}(x)) d\zeta. \quad (3.8)$$

Il sistema $(\mathbf{f}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)), \mathbf{c}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)), \gamma(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)))$ è per definizione *equipotente* alla distribuzione di forze di contatto $\mathbf{s}(p, t; \boldsymbol{\nu}(x))$ sul segmento $x \times [-\epsilon, +\epsilon]$, nel senso che si possono trovare due vettori $\mathbf{a}(x, t)$ e $\mathbf{b}(x, t)$ e uno scalare $\delta(x, t)$ tale che

$$(\mathbf{f}, \mathbf{c}, \gamma) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \gamma \delta = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\zeta, \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \zeta \dot{\mathbf{u}}_1,$$

dove $\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\varphi} + u\mathbf{z}$ con $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{z} = 0$.

Questi descrittori cinematici meccanici sono $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}_0$, $\mathbf{b} \times \mathbf{z} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\delta = \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{z} = \dot{u}$. Ai descrittori dinamici $(\mathbf{f}, \mathbf{c}, \gamma)$ sono associati due descrittori di sforzo, il tensore di *sforzo risultante* \mathbf{F} e il tensore di *momento risultante* $\tilde{\mathbf{M}}$. Questi ultimi sono definiti tramite le rappresentazioni alla Cauchy della tripletta $(\mathbf{f}, \mathbf{c}, \gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) &=: \mathbf{F}(x, t)\boldsymbol{\nu}, \\ \mathbf{c}(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) &=: \mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{M}}(x, t)\boldsymbol{\nu}, \\ \gamma(x, t; \boldsymbol{\nu}(x)) &=: \mathbf{z} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(x, t)\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

² Cf. DeSimone e Podio-Guidugli [28].

a valere per ogni scelta di $x \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{U}$ con $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{z} = 0$. Se rappresentiamo il campo di forze di contatto $\mathbf{s}(p, t; \mathbf{n})$ al modo di Cauchy:

$$\mathbf{s}(p, t; \mathbf{n}) = \mathbf{S}(p, t)\mathbf{n},$$

e se si tiene conto delle definizioni (3.6), (3.7) e (3.8), le (3.9) implicano che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, t) &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{S}(p, t) d\zeta, \\ \tilde{\mathbf{M}}(x, t) &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{S}(p, t) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

\mathbf{F} e $\tilde{\mathbf{M}}$ sono due tensori simmetrici, dato che lo è \mathbf{S} .

I descrittori dinamici elettrici in x sono (per unità di lunghezza d'arco di \mathcal{L}):
lo *spostamento elettrico risultante*

$$\mathbf{l}(x, t) := \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d}(p, t) d\zeta, \quad (3.11)$$

il *momento dello spostamento elettrico risultante*

$$\mathbf{m}(x, t) := \mathbf{z} \times \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{d}(p, t) d\zeta = \mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{m}}, \quad (3.12)$$

con

$$\tilde{\mathbf{m}}(x, t) := \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{d}(p, t) d\zeta. \quad (3.13)$$

Il sistema $(\mathbf{l}(x, t), \mathbf{m}(x, t))$ è *equipotente* alla distribuzione dello spostamento elettrico $\mathbf{d}(p, t)$ sul segmento $x \times [-\epsilon, +\epsilon]$, nel senso che si possono trovare due vettori $\boldsymbol{\alpha}(x, t)$ e $\boldsymbol{\beta}(x, t)$ tale che

$$(\mathbf{l}, \mathbf{m}) \cdot (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\beta} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} d\zeta.$$

Infatti, poiché

$$\mathbf{e} = -(\nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z} + \zeta \nabla \phi_1),$$

i descrittori “cinematici” elettrici risultano essere

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\nabla \phi_0 + \phi_1 \mathbf{z}), \quad \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{z} = -\nabla \phi_1.$$

Le componenti dei tensori \mathbf{F} e $\tilde{\mathbf{M}}$ e dei vettori \mathbf{l} e $\tilde{\mathbf{m}}$ forniscono le *caratteristiche di sollecitazione*.

La seguente notazione è quella più usata nella letteratura tecnica per indicare le caratteristiche di sollecitazione:

$$\begin{cases}
N_\alpha := \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{F}\mathbf{c}_\alpha & \text{le forze di membrana normali,} \\
N_{\alpha\beta} := \mathbf{c}_\beta \cdot \mathbf{F}\mathbf{c}_\alpha & \text{le forze di membrana di taglio,} \\
Q_\alpha := \mathbf{z} \cdot \mathbf{F}\mathbf{c}_\alpha & \text{le forze di taglio trasversali,} \\
\\
M_\alpha := \mathbf{c}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{c}_\alpha & \text{i momenti flettenti,} \\
M_{\alpha\beta} := \mathbf{c}_\beta \cdot \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{c}_\alpha & \text{i momenti torcenti,} \\
\\
N_3 := \mathbf{z} \cdot \mathbf{F}\mathbf{z} & \text{la forza di spessore,} \\
M^q_\alpha := \mathbf{z} \cdot \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{c}_\alpha & \text{il momento di spessore,} \\
\\
l_\alpha := \mathbf{l} \cdot \mathbf{c}_\alpha & \text{i flussi elettrici piani,} \\
l_3 := \mathbf{l} \cdot \mathbf{z} & \text{il flusso elettrico trasversale,} \\
m_\alpha := \tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{c}_\alpha & \text{i flussi di dipolo elettrico piani.}
\end{cases} \tag{3.14}$$

4. Equazioni dei lavori virtuali

Per trovare delle soluzioni $(\mathbf{u}(x, \zeta), \phi(x, \zeta))$ deboli che abbiano una rappresentazione tipo piastra (2.3) e che risolvano le equazioni dei lavori virtuali (II.7.60), è necessario ridefinire gli spazi funzionali che riguardano la *formulazione debole* (II.7.61), cioè lo spazio delle soluzioni deboli, lo spazio staticamente ammissibile e lo spazio delle variazioni come segue:

lo spazio $\bar{U}_0^{\mathcal{P}} \times \bar{\Phi}_0^{\mathcal{P}}$ delle *soluzioni deboli*, con

$$\bar{U}_0^{\mathcal{P}} := \{\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x) + \zeta \mathbf{u}_1(x) \mid \mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_1(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$\mathbf{P}_o(x)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{0o}, \quad \mathbf{P}_o(x)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1o} \quad \text{in } \partial\mathcal{P}\},$$

$$\bar{\Phi}_0^{\mathcal{P}} := \{\phi = \phi_0(x) + \zeta \phi_1(x) \mid \phi_0(x), \phi_1(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}});$$

$$P_o(x)\phi_0 = \phi_{0o}, \quad P_o(x)\phi_1 = \phi_{1o} \quad \text{in } \partial\mathcal{P}\},$$

lo spazio $V_o^{\mathcal{P}} \times \Psi_o^{\mathcal{P}}$ ³ delle *variazioni*, con

$$\begin{aligned} V_o^{\mathcal{P}} &:= \{\mathbf{v} = \mathbf{a}(x) + \zeta \mathbf{b}(x) \mid \mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \\ &\quad \mathbf{P}_o(x)\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_o(x)\mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\mathcal{P}\}, \\ \Psi_o^{\mathcal{P}} &:= \{\psi = \alpha(x) + \zeta\beta(x) \mid \alpha(x), \beta(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}); \\ &\quad P_o(x)\alpha = 0, \quad P_o(x)\beta = 0 \text{ in } \partial\mathcal{P}\}, \end{aligned}$$

lo spazio $\tilde{S}_o \times \tilde{D}_o$ degli sforzi e spostamenti elettrici *staticamente ammissibili*, con

$$\begin{aligned} \tilde{S}_o &:= \{\mathbf{S} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \mid \mathbf{S} \in \text{Sym} \text{ in } \overline{\Omega}, \\ &\quad \text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{b}_o = \mathbf{0} \text{ in } \Omega; \quad \pm \mathbf{S}(x, \pm\epsilon)\mathbf{z} = \mathbf{s}_o^\pm \text{ in } \mathcal{P}, \\ &\quad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o(x))\mathbf{S}(x, \zeta)\boldsymbol{\nu}(x) = \mathbf{s}_o(x, \zeta) \text{ in } \partial\mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[\}, \\ \tilde{D}_o &:= \{\mathbf{d} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \mid \text{Div } \mathbf{d} - \gamma_o = 0 \text{ in } \Omega, \\ &\quad (1 - P_o(x))\mathbf{d}(x, \zeta) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) = -\omega_o(x, \zeta) \text{ in } \partial\mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[\}. \end{aligned}$$

Scriviamo l'equazioni dei lavori virtuali (II.7.60) per una piastra piezoelettrica

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v}, \quad (\mathbf{S}, \mathbf{v}) \in \tilde{S}_o \times V_o^{\mathcal{P}}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \nabla \psi &= - \int_{\Omega} \gamma_o \psi - \int_{\partial\Omega} \omega_o \psi, \quad (\mathbf{d}, \psi) \in \tilde{D}_o \times \Psi_o^{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A primo membro della (4.15)₁ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \int_{\mathcal{P}} [(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{S}) \cdot \nabla \mathbf{a} + (\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{S})\mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + (\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{S}) \cdot \nabla \mathbf{b}] = \\ &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{M}} \cdot \nabla \mathbf{b} = \\ &= \int_{\mathcal{P}} -\text{div } \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} + \text{div}(\mathbf{F}^t \mathbf{a}) + \mathbf{F}\mathbf{z} \cdot \mathbf{b} - \text{div } \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b} + \text{div}(\tilde{\mathbf{M}}^t \mathbf{b}) = \\ &= \int_{\mathcal{P}} -\text{div } \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{z} \cdot \mathbf{b} - \text{div } \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b} + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{F}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

³ Gli spazi variazionali $V_o^{\mathcal{P}}$ e $\Psi_o^{\mathcal{P}}$ sono in generale un sottospazio di un prodotto cartesiano tra due coppie, rispettivamente, dello spazio

$$\tilde{V}_o := \{\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}) \mid \mathbf{P}_o \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\mathcal{P}\},$$

e dello spazio

$$\tilde{\Psi}_o := \{\psi \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\overline{\mathcal{P}}) \mid P_o \psi = 0 \text{ in } \partial\mathcal{P}\}.$$

dove l'integrale sul bordo può essere scritto nella seguente maniera

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{F}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b} &= \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{F}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{b} = \\ &= \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{F}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Il secondo membro della (4.15)₁ diventa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v} &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\mathbf{s}_o^+ + \mathbf{s}_o^- + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{b}_o] \cdot \mathbf{a} \right. \\ &\quad \left. + [\epsilon(\mathbf{s}_o^+ - \mathbf{s}_o^-) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{b}_o] \cdot \mathbf{b} \right\} \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}} \left\{ \left[\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{s}_o \right] \cdot \mathbf{a} + \left[\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{s}_o \right] \cdot \mathbf{b} \right\}. \end{aligned}$$

Segue da questa equazione la definizione, in funzione delle forze applicate sulle facce della piastra (\mathbf{s}_o^+ , \mathbf{s}_o^-), della forza a distanza per unità di volume (\mathbf{b}_o) e della densità di massa, i seguenti vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x, t) &:= \mathbf{s}_o^+(x, t) + \mathbf{s}_o^-(x, t) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{b}_o^{ni}(p, t) d\zeta, \\ \mathbf{q}(x, t) &:= \epsilon(\mathbf{s}_o^+(x, t) - \mathbf{s}_o^-(x, t)) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{b}_o^{ni}(p, t) d\zeta, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}_o &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{s}_o, \\ \bar{\bar{\mathbf{s}}}_o &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{s}_o, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{b}_o^{in}(p, t) d\zeta &= - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho \ddot{\mathbf{u}} d\zeta = -2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \\ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{b}_o^{in}(p, t) d\zeta &= - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \rho \ddot{\mathbf{u}} d\zeta = -\frac{2}{3}\epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dopo queste considerazioni, la (4.15)₁ diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} [\operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{p} - 2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0] \cdot \mathbf{a} + [\operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{q} - \frac{2}{3}\epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1] \cdot \mathbf{b} + \\ \int_{\partial\mathcal{P}} [(\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{F}\boldsymbol{\nu} - \bar{\mathbf{s}}_o] \cdot \mathbf{a} + [(\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} - \bar{\bar{\mathbf{s}}}_o] \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{v} = \mathbf{a} + \zeta \mathbf{b} \in V_o^{\mathcal{P}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

e tramite un lemma di localizzazione otteniamo le equazioni di equilibrio meccanico puntuali valevoli per la piastra

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{p} &= 2\epsilon\rho\ddot{\mathbf{u}}_0, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{q} &= \frac{2}{3}\epsilon^3\rho\ddot{\mathbf{u}}_1, \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{P} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{F}\boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{s}}_o, \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{s}}_o. \end{aligned} \quad \text{in } \partial\mathcal{P} \quad (4.21)$$

Procedendo in maniera analoga per (4.15)₂ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \nabla \psi &= \int_{\mathcal{P}} \left[\left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d} \right) \cdot \nabla \alpha + \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d} \right) \mathbf{z} \cdot \beta + \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \mathbf{d} \right) \cdot \nabla \beta \right] = \\ &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{l} \cdot \nabla \alpha + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{z})\beta + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \nabla \beta = \\ &= \int_{\mathcal{P}} -(\operatorname{div} \mathbf{l})\alpha + \operatorname{div}(\mathbf{l}\alpha) + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{z})\beta - (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{m}})\beta + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{m}}\beta) = \\ &= \int_{\mathcal{P}} -(\operatorname{div} \mathbf{l})\alpha + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{z})\beta - (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{m}})\beta + \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}} (1 - P_o)(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu})\alpha + (1 - P_o)(\tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu})\beta, \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma_o \psi + \int_{\partial_d \Omega} \omega_o \psi &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [(\omega_o^+ + \omega_o^-) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \gamma_o] \alpha \right. \\ &\quad \left. + [\epsilon(\omega_o^+ - \omega_o^-) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \gamma_o] \beta \right\} \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}} \left\{ \left[\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \gamma_o \right] \alpha + \left[\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \gamma_o \right] \cdot \beta \right\}. \end{aligned}$$

Definiamo, in funzione dei dati di carica elettrica applicate sulle facce della piastra (ω_o^+, ω_o^-) , di carica per unità di volume (γ_o) , le seguenti funzioni scalari

$$\begin{aligned} \pi(x, t) &:= \omega_o^+(x, t) + \omega_o^-(x, t) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \gamma_o(p, t) d\zeta, \\ \theta(x, t) &:= \epsilon(\omega_o^+(x, t) - \omega_o^-(x, t)) + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \gamma_o(p, t) d\zeta, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_o &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \omega_o, \\ \bar{\bar{\omega}}_o &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta \omega_o. \end{aligned} \quad (4.23)$$

La (4.15)₂ diventa

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} [\operatorname{div} \mathbf{l} - \pi] \cdot \alpha + [\operatorname{div} \tilde{\mathbf{m}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{z} - \theta] \cdot \beta + \\ & \int_{\partial \mathcal{P}} [(1 - P_o) \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + \bar{\omega}_o] \cdot \alpha + [(1 - P_o) \tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \bar{\bar{\omega}}_o] \cdot \beta = 0 \quad (4.24) \\ & \forall \alpha, \beta : \psi = \alpha + \zeta \beta \in \Psi_o^{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

e tramite un opportuno lemma di localizzazione otteniamo le equazioni di equilibrio elettrico puntuali valevoli per la piastra

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{l} - \pi &= 0, \\ & \text{in } \mathcal{P} \quad (4.25) \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{m}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{z} - \theta &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - P_o) \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\omega}_o, \\ & \text{in } \partial \mathcal{P} \quad (4.26) \\ (1 - P_o) \tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\bar{\omega}}_o. \end{aligned}$$

Ora possiamo definire lo spazio $\tilde{S}_o^{\mathcal{P}} \times \tilde{D}_o^{\mathcal{P}}$ delle caratteristiche sollecitazione meccaniche ed elettriche *staticamente ammissibili*, con

$$\begin{aligned} \tilde{S}_o^{\mathcal{P}} &:= \{ \mathbf{F}(x), \tilde{\mathbf{M}}(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}}) \mid \mathbf{F}(x), \tilde{\mathbf{M}}(x) \in \operatorname{Sym} \text{ in } \bar{\mathcal{P}}, \\ & \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{p} = 2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{F} \mathbf{z} + \mathbf{q} = \frac{2}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1 \text{ in } \mathcal{P}; \\ & (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o) \mathbf{F} \boldsymbol{\nu} = \bar{\mathbf{s}}_o, \quad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o) \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu} = \bar{\bar{\mathbf{s}}}_o \text{ in } \partial \mathcal{P} \} \\ \tilde{D}_o^{\mathcal{P}} &:= \{ \mathbf{l}(x), \tilde{\mathbf{m}}(x) \in C^1(\mathcal{P}) \cap C^0(\bar{\mathcal{P}}) \mid \\ & \operatorname{div} \mathbf{l} - \pi = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{m}} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{z} - \theta = 0 \text{ in } \mathcal{P}; \\ & (1 - P_o) \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\bar{\omega}_o, \quad (1 - P_o) \tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\bar{\bar{\omega}}_o \text{ in } \partial \mathcal{P} \}. \end{aligned}$$

Possiamo anche riformulare le equazioni dei lavori virtuali per una piastra piezoelettrica come

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{F} \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{M}} \cdot \nabla \mathbf{b} = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{p} - 2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{a} + \\ & \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{q} - \frac{2}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{b} + \int_{\partial \mathcal{P}} (\bar{\mathbf{s}}_o \cdot \mathbf{a} + \bar{\bar{\mathbf{s}}}_o \cdot \mathbf{b}), \quad (\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \tilde{S}_o^{\mathcal{P}} \times V_o^{\mathcal{P}}; \\ & \int_{\mathcal{P}} \mathbf{l} \cdot \nabla \alpha + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{z}) \beta + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \nabla \beta = \\ & - \int_{\mathcal{P}} (\pi \alpha + \theta \beta) - \int_{\partial \mathcal{P}} (\bar{\omega}_o \alpha + \bar{\bar{\omega}}_o \beta), \quad (\mathbf{l}, \tilde{\mathbf{m}}; \alpha, \beta) \in \tilde{D}_o^{\mathcal{P}} \times \Psi_o^{\mathcal{P}}. \quad (4.27) \end{aligned}$$

La *formulazione debole* del problema di equilibrio per una piastra piezoelettrica consiste nel cercare un campo di spostamento $\mathbf{u} \in \bar{U}_0^{\mathcal{P}}$ ed un potenziale $\phi \in \bar{\Phi}_0^{\mathcal{P}}$ tali che

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \phi) \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \mathbf{b} &= \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{p} - 2\epsilon \rho \ddot{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{a} + \\ &+ \int_{\mathcal{P}} \left(\mathbf{q} - \frac{2}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\mathbf{u}}_1 \right) \cdot \mathbf{b} + \int_{\partial \mathcal{P}} (\bar{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{a} + \bar{\bar{\mathbf{s}}}_0 \cdot \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{v} = \mathbf{a} + \zeta \mathbf{b} \in V_0^{\mathcal{P}}; \\ \int_{\mathcal{P}} \mathbf{l}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \alpha + [\mathbf{l}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{z}] \beta + \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \beta &= \\ - \int_{\mathcal{P}} (\pi \alpha + \theta \beta) - \int_{\partial \mathcal{P}} (\bar{\omega}_0 \alpha + \bar{\bar{\omega}}_0 \beta), \quad \forall \alpha, \beta : \psi = \alpha + \zeta \beta \in \Psi_0^{\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

5. Legame costitutivo

Supponiamo che il cilindro $\mathcal{C}(\epsilon)$ sia fatto di materiale elettroelastico lineare trasversalmente isotropo rispetto all'asse \mathbf{z} . Allora i tensori di risposta \mathbb{C}, \mathbf{c} e \mathbf{C} introdotti nel capitolo II, hanno nella base sopra definita le rappresentazioni seguenti:

– (*tensore di elasticità*)

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \mathbb{C}_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) \\ &+ \mathbb{C}_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) \\ &+ \mathbb{C}_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) \\ &+ \mathbb{C}_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) + 2\mathbb{C}_{2323}(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5), \end{aligned} \quad (5.29)$$

– (*tensore piezoelettrico*)

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sqrt{2} \mathbf{c}_{131}(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{X}_4) \\ &+ \mathbf{c}_{311}(\mathbf{z} \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{z} \otimes \mathbf{X}_2) + \mathbf{c}_{333}(\mathbf{z} \otimes \mathbf{X}_3), \end{aligned} \quad (5.30)$$

– (*tensore dielettrico*)

$$\mathbf{C} = C_{11}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) + C_{33}\mathbf{X}_3. \quad (5.31)$$

Per alleggerire la notazione, introduciamo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{1111} &= 2\mu + \lambda, & \mathbb{C}_{1122} &= \lambda, & \mathbb{C}_{3333} &= \tau_1, & \mathbb{C}_{1133} &= \tau_2, & \mathbb{C}_{2323} &= \eta; \\ \mathbf{c}_{131} &= \delta_1, & \mathbf{c}_{311} &= \delta_2, & \mathbf{c}_{333} &= \delta_3; & C_{11} &= \gamma_1, & C_{33} &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Ricordiamo altresì che, affinché la densità di energia immagazzinata da un materiale piezoelettrico lineare risulti positiva, i moduli sopra definiti devono obbedire a queste restrizioni algebriche:

$$\mu > 0, \quad \tau_1 > 0, \quad \eta > 0, \quad \tau_1(\lambda + \mu) - \tau_2^2 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0. \quad (5.32)$$

Tenendo conto delle relazioni costitutive (II.1.6) e (II.1.7), le caratteristiche di sollecitazione \mathbf{F} , $\tilde{\mathbf{M}}$, \mathbf{l} , $\tilde{\mathbf{m}}$ assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{c}^t \mathbf{e}) d\zeta = \\ &= 2\epsilon \left\{ \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_0) + \text{sym}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z})] + \mathbf{c}^t [\nabla\phi_0 + \phi_1 \mathbf{z}] \right\}, \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta (\mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{c}^t \mathbf{e}) d\zeta = \\ &= \frac{2}{3} \epsilon^3 \left\{ \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_1)] + \mathbf{c}^t [\nabla\phi_1] \right\}, \\ \mathbf{l} &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\mathbf{c}\mathbf{E} + \mathbf{C}\mathbf{e}) d\zeta = \\ &= 2\epsilon \left\{ \mathbf{c}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_0) + \text{sym}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{z})] - \mathbf{C}[\nabla\phi_0 + \phi_1 \mathbf{z}] \right\}, \\ \tilde{\mathbf{m}} &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \zeta (\mathbf{c}\mathbf{E} + \mathbf{C}\mathbf{e}) d\zeta = \\ &= \frac{2}{3} \epsilon^3 \left\{ \mathbf{c}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_1)] - \mathbf{C}[\nabla\phi_1] \right\}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

6. Piastre alla Reissner-Mindlin con spessore variabile

In questo paragrafo vogliamo trovare un modello di piastra piezoelettrica che risulta una variante del classico modello di piastra di Reissner-Mindlin, nel quale la rappresentazione standard degli spostamenti meccanici è accompagnata dall'introduzione di un descrittore delle variazioni di spessore.

Ci fa comodo riscrivere la (2.3)₁ nella seguente maniera

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, \zeta, t) &= \mathbf{v}(x, t) + w(x, t)\mathbf{z} + \zeta(\boldsymbol{\varphi}(x, t) + u(x, t)\mathbf{z}), \\ \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \boldsymbol{\varphi}(x, t) \cdot \mathbf{z} = 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

dove \mathbf{v} è il campo degli spostamenti planari del piano medio della piastra, w è lo spostamento trasversale del piano medio, φ è il campo delle rotazioni delle fibre trasverse al piano medio, e u è la deformazione “di spessore”, cioè, la deformazione assiale delle fibre trasverse. Questa rappresentazione ci permetterà più avanti di distinguere, quando possibile, il comportamento *flessionale*, descritto da w e φ , da quello *membranale*, descritto da \mathbf{v} e u . Per fornire la formulazione variazionale del problema della piastra piezoelettrica basta inserire nel funzionale $\Theta(\mathbf{u}, \phi)$, definito dalla (II.5.41), le rappresentazioni (2.3) dei campi (\mathbf{u}, ϕ) . Imponendo la condizione di stazionarietà, si ottengono le equazioni di equilibrio (4.20) e (4.25) e le condizioni al bordo (4.21) e (4.26) in termini di (\mathbf{u}, ϕ) ; infine, inserendo in queste ultime le relazioni costitutive (5.33), si ottiene un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite meccaniche (\mathbf{u}, ϕ) , con le relative condizioni al bordo. Qui procederemo in modo leggermente diverso. Dato che abbiamo già determinato le equazioni di equilibrio e le condizioni al bordo, preferiamo sostituire in queste le relazioni (5.33) per \mathbf{F} , $\tilde{\mathbf{M}}$, \mathbf{l} , e $\tilde{\mathbf{m}}$, valendoci anche delle relazioni costitutive (5.29)-(5.31) per materiali trasversalmente isotropi non vincolato. Il flusso espositivo è ricalcato su quello di Nardinocchi e Podio-Guidugli [68].

1. *Equazioni di equilibrio.* Riscriviamo le equazioni vettoriali (4.20) e (4.25) nella equivalente forma scalare, utilizzando le caratteristiche di sollecitazioni definite in

(3.14):

$$\begin{cases}
 N_{1,1} + N_{12,2} + p_1 = 2\epsilon\rho\ddot{v}_1 \\
 N_{21,1} + N_{2,2} + p_2 = 2\epsilon\rho\ddot{v}_1 \\
 Q_{1,1} + Q_{2,2} + p_3 = 2\epsilon\rho\ddot{w} \\
 M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 + q_1 = \frac{2}{3}\epsilon^3\rho\ddot{\varphi}_1 \\
 M_{21,1} + M_{2,2} - Q_1 + q_2 = \frac{2}{3}\epsilon^3\rho\ddot{\varphi}_1 \\
 M^a_{1,1} + M^a_{2,2} - N_3 + q_3 = \frac{2}{3}\epsilon^3\rho\ddot{u} \\
 l_{1,1} + l_{2,2} - \pi = 0 \\
 m_{1,1} + m_{2,2} - l_3 - \theta = 0
 \end{cases} \quad (6.35)$$

La (6.35)₆ è l'equazione di equilibrio ai momenti associata al descrittore cinematico u della deformazione di spessore.

2. *Condizioni al bordo.* Le quantità meccaniche $Q_\alpha, \dots, M_\alpha^q$ possono essere organizzate nella seguente forma matriciale

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}] &= \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, & [\mathbf{N}] &= \begin{bmatrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}^q] &= \begin{bmatrix} M_1^q \\ M_2^q \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

in modo che

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^t & N_3 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\mathbf{M}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}^q \\ \mathbf{M}^{qt} & . \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Inoltre, sul bordo si ha che $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{z} = 0$, allora

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu})\mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{M}^q \cdot \boldsymbol{\nu})\mathbf{z}. \quad (6.38)$$

Dalla rappresentazione di \mathbf{u} (2.3)₁ segue

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_0 &= \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu})w, \\ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} + (\mathbf{M}^q \cdot \boldsymbol{\nu})u, \end{aligned} \quad (6.39)$$

per cui le condizioni di bordo implicate dalle forze generalizzate $(\mathbf{F}\boldsymbol{\nu}, \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\nu})$ possono essere scritte in termini di $(\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{M}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{M}^q \cdot \boldsymbol{\nu})$.

Consideriamo un sistema di riferimento intrinseco $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})$ alla curva di bordo $\partial\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} &= N_\nu v_\nu + N_{\nu\tau} v_\tau, & (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu})w &= Q_\nu w, \\ \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} &= M_\nu \varphi_\nu + M_{\nu\tau} \varphi_\tau, & (\mathbf{M}^q \cdot \boldsymbol{\nu})w &= M_\nu^q w, \\ (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu})\phi_0 &= l_\nu \phi_0, & (\tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu})\phi_0 &= m_\nu \phi_0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

dove $N_\nu = \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $N_{\nu\tau} = \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}$, $Q_\nu = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $M_\nu = \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $M_{\nu\tau} = \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}$, $M_\nu^q = \mathbf{M}^q \cdot \boldsymbol{\nu}$, $l_\nu = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $m_\nu = \tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nu}$. Allora sulla frontiera $\partial\mathcal{P}$ possiamo assegnare le condizioni al bordo geometriche $(v_\nu, v_\tau, w, \varphi_\nu, \varphi_\tau, u, \phi_0, \phi_1)$ o naturali $(N_\nu, N_{\nu\tau}, Q_\nu, M_\nu, M_{\nu\tau}, M_\nu^q, l_\nu, m_\nu)$ in funzione dei valori che assume la coppia (\mathbf{P}_o, P_o) .

3. *Equazioni costitutive.* Inserendo le relazioni costitutive (5.29)-(5.31) relative ad un materiale trasversalmente isotropo non vincolato nelle (5.33) otteniamo le espressioni delle caratteristiche di sollecitazioni (3.14) in funzione della coppia (\mathbf{u}, ϕ) :

forze di membrana

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2\epsilon \{ (2\mu + \lambda)v_{1,1} + \lambda v_{2,2} + \delta_2 \phi_1 + \tau_2 u \} \\
 &= 2\epsilon \{ (2\mu + \lambda)(v_{1,1} + \nu v_{2,2}) + \delta_2 \phi_1 + \tau_2 u \}, \\
 N_2 &= 2\epsilon \{ (2\mu + \lambda)v_{2,2} + \lambda v_{1,1} + \delta_2 \phi_1 + \tau_2 u \} \\
 &= 2\epsilon \{ (2\mu + \lambda)(v_{2,2} + \nu v_{1,1}) + \delta_2 \phi_1 + \tau_2 u \}, \\
 N_{12} &= 2\epsilon \{ \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) \} = \epsilon(2\mu + \lambda)(1 - \nu)(v_{1,2} + v_{2,1}),
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

forze di taglio trasversali

$$Q_\alpha = 2\epsilon \{ \eta(w_{,\alpha} + \varphi_\alpha) + \delta_1 \phi_{0,\alpha} \}, \tag{6.42}$$

momenti flettenti

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{2}{3}\epsilon^3 \{ (2\mu + \lambda)\varphi_{1,1} + \lambda\varphi_{2,2} \} = \mathcal{D}(\varphi_{1,1} + \nu\varphi_{2,2}), \\
 M_2 &= \frac{2}{3}\epsilon^3 \{ (2\mu + \lambda)\varphi_{2,2} + \lambda\varphi_{1,1} \} = \mathcal{D}(\varphi_{2,2} + \nu\varphi_{1,1}),
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

momento torcente

$$M_{12} = \frac{2}{3}\epsilon^3 \{ \mu(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) \} = \frac{1}{2}\mathcal{D}(1 - \nu)(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}), \tag{6.44}$$

forza di spessore

$$N_3 = 2\epsilon \{ \tau_2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \tau_1 u + \delta_3 \phi_1 \}, \tag{6.45}$$

momento di spessore

$$M^q_\alpha = \frac{2}{3}\epsilon^3 \{ \eta u_{,\alpha} + \delta_1 \phi_{1,\alpha} \}, \tag{6.46}$$

flussi elettrici piani

$$l_\alpha = 2\epsilon \{ \delta_1(w_{,\alpha} + \varphi_\alpha) - \gamma_1 \phi_{0,\alpha} \}, \tag{6.47}$$

flusso elettrico trasversale

$$l_3 = 2\epsilon\{(\delta_2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta_3 u - \gamma_2 \phi_1)\}, \quad (6.48)$$

flussi di dipolo elettrico piani

$$\mathbf{m}_\alpha = \frac{2}{3}\epsilon^3\{\delta_1 u_{,\alpha} - \gamma_1 \phi_{1,\alpha}\}, \quad (6.49)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}, \\ \mathcal{D} &= \frac{2}{3}\epsilon^3(2\mu + \lambda) \quad (\text{rigidità flessionale}). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Le relazioni (6.50) si giustificheranno nel paragrafo 8.

4. *Equazioni di campo.* Se inseriamo le relazioni (6.41)-(6.49) nelle equazioni di equilibrio della piastra elettroelastica (6.35) otteniamo le equazioni di equilibrio in termini di (\mathbf{u}, ϕ) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(2\mu + \lambda)[(1 - \nu) \Delta \mathbf{v} + (1 + \nu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v})] \\ &\quad + \tau_2 \nabla u + \delta_2 \nabla \phi_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) \bar{\mathbf{p}} = \rho \ddot{\mathbf{v}}, \\ &\eta \operatorname{div}(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) + \delta_1 \Delta \phi_0 + \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{z} = \rho \ddot{w}, \\ &\frac{1}{4} \mathcal{D} [(1 - \nu) \Delta \boldsymbol{\varphi} + (1 + \nu) \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})] \\ &\quad - \epsilon [\eta(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) + \delta_1 \nabla \phi_0] + \epsilon(\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \\ &\frac{1}{3} \epsilon^2 (\eta \Delta u + \delta_1 \Delta \phi_1) - \tau_2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \tau_1 u - \delta_3 \phi_1 + \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{3} \epsilon^2 \rho \ddot{u}, \\ &\delta_1 \operatorname{div}(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) - \gamma_1 \Delta \phi_0 - \bar{\pi} = 0, \\ &\frac{1}{3} \epsilon^2 (\delta_1 \Delta u - \gamma_1 \Delta \phi_1) - \delta_2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \delta_3 u + \gamma_2 \phi_1 - \bar{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (6.51)$$

con

$$\bar{\mathbf{p}} := \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{q}} := \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{q}, \quad \bar{\pi} := \frac{1}{2\epsilon} \pi, \quad \bar{\theta} := \frac{1}{2\epsilon} \theta.$$

7. Ortogonalità in energia

Ci fa comodo riscrivere le rappresentazioni (2.3) come somma di due termini in modo da evidenziare le componenti che rappresentano un comportamento tipico flessionale (*piastro*), che indichiamo con (\mathbf{u}^P, ϕ^P) , dalle componenti che rappresentano un comportamento tipico membranale (*lastra*), che indichiamo con (\mathbf{u}^l, ϕ^l)

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, \zeta, t) &= \mathbf{u}^P(x, \zeta, t) + \mathbf{u}^l(x, \zeta, t), \\ \phi(x, \zeta, t) &= \phi^P(x, \zeta, t) + \phi^l(x, \zeta, t),\end{aligned}\tag{7.52}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^P(x, \zeta, t) &= w(x, t)\mathbf{z} + \zeta\boldsymbol{\varphi}(x, t), \\ \mathbf{u}^l(x, \zeta, t) &= \mathbf{v}(x, t) + \zeta u(x, t)\mathbf{z}, \\ \phi^P(x, \zeta, t) &= \phi_0(x, t), \\ \phi^l(x, \zeta, t) &= \zeta\phi_1(x, t).\end{aligned}\tag{7.53}$$

Vogliamo far vedere che i campi (\mathbf{u}^P, ϕ^P) e (\mathbf{u}^l, ϕ^l) sono ortogonali in energia, ossia che verificano

$$\begin{aligned}2 \int_{\mathcal{C}(\epsilon)} W(\mathbf{E}(\mathbf{u}^P + \mathbf{u}^l), \mathbf{e}(\phi^P + \phi^l)) &= 2 \int_{\mathcal{C}(\epsilon)} W(\mathbf{E}(\mathbf{u}^P), \mathbf{e}(\phi^P)) + W(\mathbf{E}(\mathbf{u}^l), \mathbf{e}(\phi^l)) = \\ \int_{\mathcal{C}(\epsilon)} \mathbf{S}(\mathbf{u}^P, \phi^P) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}^P) + \mathbf{d}(\mathbf{u}^P, \phi^P) \cdot \mathbf{e}(\phi^P) &+ \mathbf{S}(\mathbf{u}^l, \phi^l) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}^l) + \mathbf{d}(\mathbf{u}^l, \phi^l) \cdot \mathbf{e}(\phi^l),\end{aligned}$$

che equivale a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{S}(\mathbf{u}^l, \phi^l) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}^P) &= \int_{\mathcal{P}} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{S}(\mathbf{u}^P, \phi^P) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}^l) = 0, \\ \int_{\mathcal{P}} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d}(\mathbf{u}^l, \phi^l) \cdot \mathbf{e}(\phi^P) &= \int_{\mathcal{P}} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathbf{d}(\mathbf{u}^P, \phi^P) \cdot \mathbf{e}(\phi^l) = 0.\end{aligned}\tag{7.54}$$

Questo è vero solo se il prodotto scalare avviene tra termini tra di loro ortogonali o se il prodotto scalare rappresenta una funzione dispari in ζ .

Dimostriamo che si ha ortogonalità in energia per un materiale trasversalmente isotropo provando vere solo i primi termini delle (7.54), gli altri due termini si provano in modo analogo. Iniziamo col valutare i gradienti dei campi di spostamento \mathbf{u}^P e \mathbf{u}^l

$$\nabla \mathbf{u}^P = \mathbf{z} \otimes \nabla w + \zeta \nabla \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{z},$$

$$\nabla \mathbf{u}^l = \nabla \mathbf{v} + \zeta \mathbf{z} \otimes \nabla u + u \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}.$$

i relativi tensori della deformazione

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^P)(x, \zeta, t) = \text{sym}[\mathbf{z} \otimes (\nabla w + \boldsymbol{\varphi})](x, t) + \zeta \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})(x, t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^1)(x, \zeta, t) = \mathbf{E}(\mathbf{v})(x, t) + u(x, t) \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \zeta \text{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla u)(x, t),$$

ed infine i campi elettrici associati ai potenziali elettrici ϕ^P e ϕ^1

$$\mathbf{e}(\phi^P)(x, \zeta, t) = -\nabla \phi^P(x, \zeta, t) = -\nabla \phi_0(x, t),$$

$$\mathbf{e}(\phi^1)(x, \zeta, t) = -\nabla \phi^1(x, \zeta, t) = -(\zeta \nabla \phi_1(x, t) + \phi_1(x, t) \mathbf{z}).$$

Valutiamo poi il tensore dello sforzo e lo spostamento elettrico associati alla coppia (\mathbf{u}^1, ϕ^1)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{u}^1, \phi^1) &= \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}^1)] + \mathbf{c}^\dagger[\nabla \phi^1] = \\ &= \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{v}) + u \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \zeta \text{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla u)] + \mathbf{c}^\dagger[\zeta \nabla \phi_1 + \phi_1 \mathbf{z}], \\ \mathbf{d}(\mathbf{u}^1, \phi^1) &= \mathbf{c}[\mathbf{E}(\mathbf{u}^1)] - \mathbf{C}[\nabla \phi^1] = \\ &= \mathbf{c}[\mathbf{E}(\mathbf{v}) + u \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \zeta \text{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla u)] - \mathbf{C}[\zeta \nabla \phi_1 + \phi_1 \mathbf{z}]. \end{aligned}$$

Per il tipo di rappresentazione scelto per \mathbf{u} , ϕ e del materiale si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{v})], \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) &\in \text{Span}\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_6\} \\ \mathbb{C}[\text{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla u)], \text{sym}[\mathbf{z} \otimes (\nabla w + \boldsymbol{\varphi})], \mathbf{c}^\dagger[\nabla \phi_1], \mathbf{c}^\dagger[\nabla \phi_1] &\in \text{Span}\{\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5\} \\ \mathbb{C}[u \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}], &\in \text{Span}\{\mathbf{X}_3\} \\ \mathbf{c}^\dagger[\phi_1 \mathbf{z}] &\in \text{Span}\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\} \\ \mathbf{c}[\mathbf{E}(\mathbf{v})], \mathbf{c}[u \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}], \mathbf{C}[\phi_1 \mathbf{z}] &\in \text{Span}\{\mathbf{z}\} \\ \mathbf{c}[\text{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla u)], \mathbf{C}[\nabla \phi_1], \nabla \phi_0 &\in \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\} \end{aligned}$$

segue che tutti i termini pari sono ortogonali e i rimanenti termini dispari in ζ non danno contributo per l'integrazione sullo spessore.

Una utile conseguenza di questa proprietà è che possiamo definire due funzionali disaccoppiati e dare una formulazione variazionale in cui il problema della determinazione delle soluzioni $(w, \boldsymbol{\varphi}, \phi_0)$, rappresentanti il regime *flessionale*, risulta indipendente da quello in termini di (\mathbf{v}, u, ϕ_1) , rappresentanti il regime *membranale*, cioè

$$\Theta(\mathbf{u}^P + \mathbf{u}^1, \phi^P + \phi^1) = \Theta^f(\mathbf{u}^P, \phi^P) + \Theta^m(\mathbf{u}^1, \phi^1). \quad (7.55)$$

È importante ricordare che questo risultato non è valido in assoluto ma dipende dalla rappresentazione scelta per \mathbf{u} , ϕ e dal legame costitutivo.

Riscriviamo le (6.51) alla luce di queste considerazioni separando le equazioni di campo e le relative condizioni al bordo nella seguente maniera:

Equazioni di campo per la lastra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2\mu + \lambda)[(1 - \nu) \Delta \mathbf{v} + (1 + \nu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v})] \\ & \quad + \tau_2 \nabla u + \delta_2 \nabla \phi_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) \bar{\mathbf{p}} = \rho \ddot{\mathbf{v}}, \\ & \frac{1}{3} \epsilon^2 (\eta \Delta u + \delta_1 \Delta \phi_1) - \tau_2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \tau_1 u - \delta_3 \phi_1 + \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{3} \epsilon^2 \rho \ddot{u}, \\ & \frac{1}{3} \epsilon^2 (\delta_1 \Delta u - \gamma_1 \Delta \phi_1) - \delta_2 \operatorname{div} \mathbf{v} - \delta_3 u + \gamma_2 \phi_1 - \bar{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (7.56)$$

condizioni al bordo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\nu & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{N}_\nu & = 2\epsilon[(2\mu + \lambda) \partial_\nu \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda \partial_\tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \delta_2 \phi_1 + \tau_2 u], \\ \mathbf{v}_\tau & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{N}_{\nu\tau} & = 2\epsilon\mu(\partial_\tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_\nu \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}), \\ u & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{M}^q_\nu & = \frac{2}{3} \epsilon^3 (\eta \partial_\nu u + \delta_1 \partial_\nu \phi_1), \\ \phi_1 & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{m}_\nu & = \frac{2}{3} \epsilon^3 (\delta_1 \partial_\nu u - \gamma_1 \partial_\nu \phi_1). \end{aligned}$$

Equazioni di campo per la piastra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \mathcal{D}[(1 - \nu) \Delta \boldsymbol{\varphi} + (1 + \nu) \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})], \\ & \quad - \epsilon[\eta(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) + \delta_1 \nabla \phi_0] + \epsilon(\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{3} \epsilon^3 \rho \ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \\ & \eta \operatorname{div}(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) + \delta_1 \Delta \phi_0 + \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{z} = \rho \ddot{w}, \\ & \delta_1 \operatorname{div}(\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) - \gamma_1 \Delta \phi_0 - \bar{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (7.57)$$

condizioni al bordo

$$\begin{aligned} w & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{Q}_\nu & = 2\epsilon[\eta(\partial_\nu w + \varphi_\nu) + \delta_1 \partial_\nu \phi_0], \\ \varphi_\nu & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{M}_\nu & = \frac{2}{3} \epsilon^3 [(2\mu + \lambda) \partial_\nu \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda \partial_\tau \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau}], \\ \varphi_\tau & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{M}_{\nu\tau} & = \frac{2}{3} \epsilon^3 \mu (\partial_\tau \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_\nu \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau}), \\ \phi_0 & \quad \text{oppure} & \quad \mathbf{l}_\nu & = 2\epsilon[\delta_1 (\partial_\nu w + \varphi_\nu) - \gamma_1 \partial_\nu \phi_0]. \end{aligned}$$

8. Scelta dei parametri di rigidità significativi

Si vuole trovare una classe di problemi tridimensionali relativi a corpi a forma di piastra $\mathcal{C}(\epsilon)$ le cui soluzioni *coincidano* con quelle dei corrispondenti problemi bidimensionali retti dalle equazioni (6.51).

Si considera un corpo tridimensionale a sezione trasversale rettangolare

$$\mathcal{P} =] - L_1/2, +L_1/2[\times] - L_2/2, +L_2/2[,$$

e di spessore 2ϵ , costituito da un materiale trasversalmente isotropo non vincolato, con forze di volume e carichi elettrici nulli; si prescrivono le seguenti condizioni al bordo:

$$\begin{aligned} \text{per } x_1 = \pm \frac{L_1}{2} : \quad \mathbf{S}\mathbf{c}_1 &= \sigma \frac{\zeta}{\epsilon} \mathbf{c}_1 \quad \text{con } \sigma > 0, \quad \phi = 0; \\ \text{per } x_2 = \pm \frac{L_2}{2} : \quad \mathbf{S}\mathbf{c}_2 &= \mathbf{0}, \quad \phi = 0; \\ \text{per } \zeta = \pm \epsilon : \quad \mathbf{S}\mathbf{c}_3 &= \mathbf{0}, \quad [\phi] = 0. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Procediamo in modo euristico. Le simmetrie del problema suggeriscono di verificare se esistono soluzioni (\mathbf{u}, ϕ) tali che

$$\mathbf{S} = \sigma \frac{\zeta}{\epsilon} \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1, \quad \phi_{,\alpha} = 0, \quad \phi_{,3} = 0. \tag{8.59}$$

Si noti che, se una soluzione siffatta esiste è unica per un ben noto risultato di Kirchhoff. Ora, per le relazioni costitutive (5.29)-(5.31), le (8.59) implicano

$$\begin{cases} \sigma \frac{\zeta}{\epsilon} = (2\mu + \lambda)E_{11} + \lambda E_{22} + \tau_2 E_{33} \\ 0 = \lambda E_{11} + (2\mu + \lambda)E_{22} + \tau_2 E_{33} \\ 0 = \tau_2(E_{11} + E_{22}) + \tau_1 E_{33} \end{cases} \tag{8.60}$$

$$E_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j. \tag{8.61}$$

Risolvendo il sistema (8.60) si ottiene

$$\begin{aligned} E_{11} &= u_{1,1} = \sigma C_1 \frac{\zeta}{\epsilon}, \\ E_{22} &= u_{2,2} = -\sigma C_2 \frac{\zeta}{\epsilon}, \\ E_{33} &= u_{3,3} = -\sigma C_3 \frac{\zeta}{\epsilon}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(2\mu + \lambda) - \tau_2^2/\tau_1}{4\mu[(\mu + \lambda) - \tau_2^2/\tau_1]}, \\ C_2 &= \frac{\lambda - \tau_2^2/\tau_1}{4\mu[(\mu + \lambda) - \tau_2^2/\tau_1]}, \\ C_3 &= \frac{\tau_2}{2[(\mu + \lambda) - \tau_2^2/\tau_1]}. \end{aligned}$$

e quindi, a meno di un moto rigido,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \zeta) &= \sigma C_1 \frac{\zeta}{\epsilon} x_1, \\ u_2(x_1, x_2, \zeta) &= -\sigma C_2 \frac{\zeta}{\epsilon} x_2, \\ u_3(x_1, x_2, \zeta) &= -\sigma C_3 \frac{\zeta^2}{2\epsilon}. \end{aligned}$$

Dalla struttura della soluzione è evidente che questa classe di problemi tridimensionali non rientra tra quelle cercate. Infatti nella teoria di piastra che abbiamo costruito gli spostamenti ammissibili hanno la forma

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, \zeta) = \mathbf{u}_0(x_1, x_2) + \zeta \mathbf{u}_1(x_1, x_2), \quad (8.62)$$

e quindi possono essere al più lineari nella variabile ζ .

Cerchiamo allora di formulare un problema tridimensionale che, pur mimando una flessione pura come quello precedente, possa avere una soluzione compatibile con la (8.62).

Rilassiamo la condizione (8.58)₃, chiedendo che sia, invece,

$$\text{per } \zeta = \pm\epsilon : \quad \mathbf{S}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_\alpha = 0; \quad [u_3] = 0, \quad [\phi] = 0.$$

Allora al posto di (8.59) assumiamo la rappresentazione di tentativo

$$\mathbf{S} = \sigma \frac{\zeta}{\epsilon} \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1 + S_{33} \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \quad u_{3,3} = 0, \quad \phi_{,\alpha} = 0, \quad \phi_{,3} = 0. \quad (8.63)$$

Dalle (8.63) seguono le condizioni

$$\begin{cases} \sigma \frac{\zeta}{\epsilon} = (2\mu + \lambda)E_{11} + \lambda E_{22} \\ 0 = \lambda E_{11} + (2\mu + \lambda)E_{22} \\ u_{3,3} = 0 \end{cases} \quad (8.64)$$

$$E_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j, \quad (8.65)$$

(si confrontino le (8.60)-(8.61) con le (8.64)-(8.65)).

Adesso l'integrazione di

$$\begin{aligned} E_{11} &= u_{1,1} = \sigma \tilde{C}_1 \frac{\zeta}{\epsilon}, \\ E_{22} &= u_{2,2} = -\sigma \tilde{C}_2 \frac{\zeta}{\epsilon}, \\ E_{33} &= u_{3,3} = 0, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}, \\ \tilde{C}_2 &= \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}, \end{aligned}$$

porge

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \zeta) &= \sigma \tilde{C}_1 \frac{\zeta}{\epsilon} x_1, \\ u_2(x_1, x_2, \zeta) &= -\sigma \tilde{C}_2 \frac{\zeta}{\epsilon} x_2, \\ u_3(x_1, x_2, \zeta) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon} (\tilde{C}_1 x_1^2 - \tilde{C}_2 x_2^2). \end{aligned} \quad (8.66)$$

Della soluzione di questo problema ci avvaliamo per decidere l'espressione in termini di λ, μ , *etc.* delle costanti tecniche di Young e Poisson. Definiamo

$$\begin{aligned} E &= \text{modulo di Young} = \frac{S_{11}}{E_{11}}, \\ \nu &= \text{modulo di Poisson} = -\frac{E_{22}}{E_{11}}, \end{aligned}$$

e ne otteniamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Definiamo quindi la rigidità flessionale della piastra (intesa come struttura bidimensionale) come

$$\mathcal{D} = \frac{2}{3} \epsilon^3 \frac{E}{1 - \nu^2},$$

e otteniamo dalle (8.67) che

$$\mathcal{D} = \frac{2}{3} \epsilon^3 (2\mu + \lambda).$$

Si sono così giustificate le (6.50).

9. Validazione del modello di piastra piezoelettrica

Si vuole convalidare il modello continuo bidimensionale ottenuto confrontandone le previsioni con una particolare soluzione tridimensionale proposta da Bisegna e Maceri [11]. Il confronto si effettua:

- i*) sulle *frequenze naturali* di vibrazione di una piastra piezoelettrica semplicemente appoggiata;
- ii*) sulla risposta in frequenza in termini di spostamenti per un potenziale elettrico applicato sulle facce \mathcal{P}^\pm della piastra, variabile nel tempo con legge sinusoidale.

Il metodo di confronto utilizzato fa riferimento a Bisegna, Chiappini e Maceri [9].

9.1. Piastra piezoelettrica appoggiata

Si considera una piastra piezoelettrica rettangolare trasversalmente isotropa che occupa il dominio

$$\mathcal{P} =]0, L_1[\times]0, L_2[,$$

semplicemente appoggiata, connessa elettricamente a terra sul contorno laterale e soggetta a una distribuzione di carichi superficiali. Si fa l'ipotesi che forze di volume non inerziali \mathbf{b}_o e le cariche di volume γ_o siano nulle.

Per le condizioni al bordo, si assumono i seguenti valori per la coppia (\mathbf{P}_o, P_o) sulle sue facce \mathcal{P}^\pm

$$\begin{cases} \mathbf{P}_o(x, \pm\epsilon) = \{\mathbf{O}\} \\ P_o(x, \pm\epsilon) = \{0\} \end{cases} \quad x \in \overline{\mathcal{P}}$$

e sul mantello laterale

$$\begin{cases} \mathbf{P}_o(x, \zeta) = \{\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}(x) \otimes \boldsymbol{\nu}(x)\} \\ P_o(x, \zeta) = \{1\} \end{cases} \quad (x, \zeta) \in \partial\mathcal{P} \times]-\epsilon, +\epsilon[,$$

che esplicitate diventano sulle facce laterali ortogonali, rispettivamente, agli assi x_1 e x_2

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(a, x_2, z, t) = 0 \\ u_3(a, x_2, z, t) = 0 \\ \phi(a, x_2, z, t) = 0 \\ S_{11}(a, x_2, z, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, b, z, t) = 0 \\ u_3(x_1, b, z, t) = 0 \\ \phi(x_1, b, z, t) = 0 \\ S_{22}(x_1, b, z, t) = 0 \end{array} \right. \quad (9.68)$$

per $a \in \{0, L_1\}$ e $b \in \{0, L_2\}$,

e sulle facce \mathcal{P}^\pm

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{13}(x_1, x_2, \pm\epsilon, t) = \pm s_{1o}^\pm(x_1, x_2, t) \\ S_{23}(x_1, x_2, \pm\epsilon, t) = \pm s_{2o}^\pm(x_1, x_2, t) \\ S_{33}(x_1, x_2, \pm\epsilon, t) = \pm s_{3o}^\pm(x_1, x_2, t) \\ d_3(x_1, x_2, \pm\epsilon, t) = \mp \omega_o^\pm(x_1, x_2, t) \end{array} \right. \quad (9.69)$$

Si considera che la piastra sia soggetta a carichi superficiali del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{1o}^\pm(x_1, x_2, t) = s_{1o(n_1, n_2)}^\pm \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ s_{2o}^\pm(x_1, x_2, t) = s_{2o(n_1, n_2)}^\pm \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ s_{3o}^\pm(x_1, x_2, t) = s_{3o(n_1, n_2)}^\pm \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \omega_o^\pm(x_1, x_2, t) = \omega_{o(n_1, n_2)}^\pm \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \end{array} \right. \quad (9.70)$$

dove n_1 e n_2 sono interi fissati positivi e $s_{io(n_1, n_2)}^\pm$ e $\omega_{o(n_1, n_2)}^\pm$ sono le ampiezze dei carichi. Questa particolare forma dei carichi superficiali è stata scelta in modo da poter soddisfare le condizioni al bordo (9.68).⁴

In [11] e in [9] si propone una soluzione tridimensionale per la piastra in cui i campi incogniti del problema \mathbf{u} e ϕ sono del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, z, t) = U_1 \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) e^{\lambda z} \sin(\omega t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) = U_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) e^{\lambda z} \sin(\omega t) \\ u_3(x_1, x_2, z, t) = U_3 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) e^{\lambda z} \sin(\omega t) \\ \phi(x_1, x_2, z, t) = F \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) e^{\lambda z} \sin(\omega t) \end{array} \right. \quad (9.71)$$

⁴ Nel caso si voglia considerare una condizione di carico generica, si possono rappresentare le singole componenti dei carichi superficiali tramite una doppia serie trigonometrica del tipo indicato in (9.70), nel dominio \mathcal{P} , dove i coefficienti sono calcolati alla Fourier.

che soddisfano le condizioni al bordo (9.68). Sostituendo le (9.71) nelle equazioni di campo (II.1.9) si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche

$$\mathbf{A}(\lambda^2, \lambda, \omega)\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (9.72)$$

dove $\mathbf{y} = (U_1, U_2, U_3, F)$ è il vettore delle ampiezze.

Per ogni ω fissato, per avere una soluzione non banale dalla (9.72) bisogna risolvere un associato problema agli autovalori. In questo modo si determinano i valori di λ e i relativi autovettori \mathbf{y} . Per semplicità si assume che si abbiano 8 autovalori *distinti* $\pm\lambda_i$, con $i = 1, 2, 3, 4$. Posto

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) = c_1\mathbf{y}_1 e^{\lambda_1 z} + c_2\mathbf{y}_2 e^{-\lambda_1 z} + c_3\mathbf{y}_3 e^{\lambda_2 z} + c_4\mathbf{y}_4 e^{-\lambda_2 z} + \\ c_5\mathbf{y}_5 e^{\lambda_3 z} + c_6\mathbf{y}_6 e^{-\lambda_3 z} + c_7\mathbf{y}_7 e^{\lambda_4 z} + c_8\mathbf{y}_8 e^{-\lambda_4 z}, \end{aligned}$$

la soluzione (9.71) prende l'aspetto

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, z, t) = Y_1(z) \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) = Y_2(z) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ u_3(x_1, x_2, z, t) = Y_3(z) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \phi(x_1, x_2, z, t) = Y_4(z) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \end{cases} \quad (9.73)$$

Le 8 costanti c_i incognite si ottengono risolvendo il sistema lineare che deriva dalle condizioni di carico sulle facce \mathcal{P}^\pm :

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{c} = \mathbf{p}, \quad (9.74)$$

dove \mathbf{c} è il vettore delle costanti incognite c_i e \mathbf{p} delle ampiezze dei carichi superficiali $s_{io(n_1, n_2)}^\pm$ e $\omega_{o(n_1, n_2)}^\pm$.

Le frequenze naturali della piastra si ottengono tramite la relazione

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (9.75)$$

il che equivale a determinare gli zeri di $\det \mathbf{H}(\omega)$ (le frequenze sono $\omega/2\pi$).

Anche per il modello bidimensionale si cerca una soluzione a variabili separabili; la dipendenza da ζ è fissata nella rappresentazione (2.3). Si sceglie la seguente rappresentazione per i campi incogniti

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(x_1, x_2, t) = V_1 \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ v_2(x_1, x_2, t) = V_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ w_3(x_1, x_2, t) = W \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \varphi_1(x_1, x_2, t) = R_1 \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \varphi_2(x_1, x_2, t) = R_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ u(x_1, x_2, t) = U \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \phi_0(x_1, x_2, t) = F_0 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \phi_1(x_1, x_2, t) = F_1 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \end{array} \right. \quad (9.76)$$

e la seguente rappresentazione per i carichi

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x_1, x_2, t) = P_1 \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ P_2(x_1, x_2, t) = P_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ P_3(x_1, x_2, t) = P_3 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ q_1(x_1, x_2, t) = Q_1 \cos\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ q_2(x_1, x_2, t) = Q_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ q_3(x_1, x_2, t) = Q_3 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \pi(x_1, x_2, t) = \Pi \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \\ \theta(x_1, x_2, t) = \Theta \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t) \end{array} \right. \quad (9.77)$$

Le condizioni al bordo del modello bidimensionale che seguono dalle (9.68) sono:

- lati ortogonali all'asse x_1 :

$$v_2 = 0, w = 0, \varphi_2 = 0, u = 0, \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, N_1 = 0, M_1 = 0;$$

- lati ortogonali all'asse x_2 :

$$v_1 = 0, w = 0, \varphi_1 = 0, u = 0, \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, N_2 = 0, M_2 = 0;$$

queste condizioni sono automaticamente soddisfatte dai campi (9.76).

Sostituendo le (9.76) e (9.77) nelle equazioni di campo del modello bidimensionale (6.51) otteniamo il seguente sistema di equazioni algebriche

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{t} = \mathbf{q}, \quad (9.78)$$

dove \mathbf{t} è il vettore delle ampiezze dei campi incogniti (9.76), \mathbf{q} il vettore delle ampiezze dei carichi (9.77), \mathbf{K} la matrice di rigidità e \mathbf{M} la matrice delle masse.

Le frequenze naturali del modello bidimensionale sono determinate tramite il seguente problema agli autovalori

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{t} = \mathbf{0}. \quad (9.79)$$

Si riportano 4 particolari soluzioni statiche del sistema (9.78), 2 flessionali e 2 membranali.

Soluzioni flessionali

a) carico meccanico

$$p_3(x_1, x_2) = P_3 \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L),$$

ampiezze

$$\begin{aligned} W &= \frac{3P_3 L^4}{8\pi^4 \epsilon^3 (2\mu + \lambda)} + \frac{s_o L^2}{4\pi^2 \epsilon (\eta + \delta_1^2/\gamma_1)}, \\ R_1 &= -\frac{3P_3 L^3}{8\pi^3 \epsilon^3 (2\mu + \lambda)}, \\ R_2 &= -\frac{3P_3 L^3}{8\pi^3 \epsilon^3 (2\mu + \lambda)}, \\ F_0 &= \frac{P_3 L^2}{4\pi^2 \epsilon (\eta\gamma_1/\delta_1 + \delta_1)}; \end{aligned}$$

b) carico elettrico

$$\pi(x_1, x_2) = \Pi \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L),$$

ampiezze

$$W = \frac{\Pi L^2}{4\pi^2 \epsilon (\eta \gamma_1 / \delta_1 + \delta_1)},$$

$$R_1 = 0,$$

$$R_2 = 0,$$

$$F_0 = -\frac{\Pi L^2}{4\pi^2 \epsilon (\gamma_1 + \delta_1^2 / \eta)}.$$

Soluzioni membranali

a) carico meccanico

$$q_3(x_1, x_2) = Q_3(\epsilon) \sin(\pi x_1 / L) \sin(\pi x_2 / L),$$

ampiezze

$$V_1 = 3L^3 Q_3(\epsilon) \frac{3L^2(\delta_2 \delta_3 + \tau_2 \gamma_2) + 2\pi^2 \epsilon^2 (\delta_1 \delta_2 + \tau_2 \gamma_1)}{4\pi \epsilon C},$$

$$V_2 = 3L^3 Q_3(\epsilon) \frac{3L^2(\delta_2 \delta_3 + \tau_2 \gamma_2) + 2\pi^2 \epsilon^2 (\delta_1 \delta_2 - \tau_2 \gamma_1)}{4\pi \epsilon C},$$

$$U = 3L^2 Q_3(\epsilon) \frac{3L^2[(2\mu + \lambda)\gamma_2 + \delta_2^2] + 2\pi^2 \epsilon^2 (2\mu + \lambda)\gamma_1}{2\epsilon C},$$

$$F_1 = 3L^2 Q_3(\epsilon) \frac{3L^2[(2\mu + \lambda)\delta_3 - \tau_2 \delta_2] + 2\pi^2 \epsilon^2 (2\mu + \lambda)\delta_1}{2\epsilon C},$$

con

$$C = 9L^4 [(2\mu + \lambda)(\tau_1 \gamma_2 + \delta_3^2) - \tau_2(\tau_2 \gamma_2 + 2\delta_2 \delta_3) + \tau_1 \delta_2^2]$$

$$+ 6\pi^2 \epsilon^2 L^2 \{2(2\mu + \lambda)\delta_1 \delta_3 + \eta[(2\mu + \lambda)\gamma_2 + \delta_2^2] + \gamma_1[(2\mu + \lambda)\tau_1 - \tau_2^2] - 2\tau_2 \delta_1 \delta_2\}$$

$$+ 4\pi^4 \epsilon^4 (2\mu + \lambda)(\eta \gamma_1 + \delta_1^2);$$

b) carico elettrico

$$\theta(x_1, x_2) = \Theta(\epsilon) \sin(\pi x_1 / L) \sin(\pi x_2 / L),$$

ampiezze

$$V_1 = 3L^3 \Theta(\epsilon) \frac{3L^2(\tau_2 \delta_3 - \tau_1 \delta_2) + 2\pi^2 \epsilon^2 (\tau_2 \delta_1 - \eta \delta_2)}{4\pi \epsilon C},$$

$$V_2 = 3L^3 \Theta(\epsilon) \frac{3L^2(\tau_2 \delta_3 - \tau_1 \delta_2) + 2\pi^2 \epsilon^2 (\tau_2 \delta_1 - \eta \delta_2)}{4\pi \epsilon C},$$

$$U = 3L^2 \Theta(\epsilon) \frac{3L^2[(2\mu + \lambda)\delta_3 - \tau_2 \delta_2] + 2\pi^2 \epsilon^2 (2\mu + \lambda)\delta_1}{2\epsilon C},$$

$$F_1 = -3L^2 \Theta(\epsilon) \frac{3L^2[(2\mu + \lambda)\tau_1 - \tau_2^2] + 2\pi^2 \epsilon^2 (2\mu + \lambda)\eta}{2\epsilon C}.$$

9.2. Applicazioni numeriche

Per validare il modello bidimensionale si sono sviluppati alcuni esempi numerici. Si considera una piastra quadrata, costituita da CdS (un semiconduttore piezoelettrico), di lato $L = 0.1$ m; nella tabella seguente si riportano i valori della densità massa, delle costanti elastiche, piezoelettriche e dielettriche [97].

| Costanti | CdS |
|--------------------------------|--------|
| ρ [Kg/m ³] | 7500 |
| μ [GPa] | 16.3 |
| λ [GPa] | 58.1 |
| η [GPa] | 15.0 |
| τ_1 [GPa] | 93.8 |
| τ_2 [GPa] | 50.9 |
| δ_1 [C/m ²] | -0.210 |
| δ_2 [C/m ²] | -0.245 |
| δ_3 [C/m ²] | 0.440 |
| γ_1 [nF/m] | 79.8 |
| γ_2 [nF/m] | 84.3 |

Tabella III.1 Densità di massa e costanti costitutive.

Il primo confronto riguarda le frequenze naturali della piastra, nell'ipotesi che, oltre al mantello laterale, siano messe a terra anche le facce \mathcal{P}^\pm della piastra. Si sono considerati varie condizioni geometriche in funzione del rapporto spessore/lato, mantenendo costante il lato L . Inoltre, sono stati considerati differenti modi di vibrazione indicati tramite una coppia di valori (n_1, n_2) interi positivi.

Nelle tabelle che seguono si riporta la prima frequenza naturale dei modi (1,1), (1,2) \equiv (2,1) e (2,2) di w e u , rispettivamente, della soluzione tridimensionale e bidimensionale, per alcuni rapporti spessore/lato (h/L).

| Soluzione 3D | | | Soluzione 2D | |
|----------------------|-------|--------|--------------|--------|
| Modo | w | u | w | u |
| (1,1) | 83.1 | 559208 | 83.1 | 616599 |
| (1,2) \equiv (2,1) | 207.5 | 559262 | 207.7 | 616633 |
| (2,2) | 332.1 | 559314 | 332.1 | 616668 |

Tabella III.2 Frequenze naturali (Hz) per $h/L = 1/100$.

| Soluzione 3D | | | Soluzione 2D | |
|----------------------|-------|--------|--------------|--------|
| Modo | w | u | w | u |
| (1,1) | 166.0 | 279667 | 166.1 | 308334 |
| (1,2) \equiv (2,1) | 413.9 | 279763 | 414.1 | 308403 |
| (2,2) | 660.3 | 279870 | 660.9 | 308472 |

Tabella III.3 Frequenze naturali (Hz) per $h/L = 1/50$.

| Soluzione 3D | | | Soluzione 2D | |
|----------------------|--------|--------|--------------|--------|
| Modo | w | u | w | u |
| (1,1) | 411.0 | 112012 | 411.5 | 123430 |
| (1,2) \equiv (2,1) | 1010.1 | 112279 | 1013.1 | 123603 |
| (2,2) | 1589.9 | 112549 | 1597.3 | 123777 |

Tabella III.4 Frequenze naturali (Hz) per $h/L = 1/20$.

Si nota da questi risultati che le frequenze dei modi associati alla deformazione di spessore u crescono al diminuire del rapporto h/L ; quelle dei modi associati alla deflessione trasversale w diminuiscono. Questo è dovuto alla diversa dipendenza dallo spessore h delle forze di inerzia associate a w e u : le prime sono proporzionali ad h e le seconde a h^3 .

| Soluzione 3D | | | Soluzione 2D | |
|----------------------|--------|-------|--------------|-------|
| Modo | w | u | w | u |
| (1,1) | 795.0 | 56274 | 798.6 | 61888 |
| (1,2) \equiv (2,1) | 1872.8 | 56821 | 1891.7 | 62238 |
| (2,2) | 2845.1 | 57382 | 2886.1 | 62592 |

Tabella III.5 Frequenze naturali (Hz) per $h/L = 1/10$.

| Soluzione 3D | | | Soluzione 2D | |
|----------------------|--------|-------|--------------|-------|
| Modo | w | u | w | u |
| (1,1) | 1422.6 | 28691 | 1443.1 | 31296 |
| (1,2) \equiv (2,1) | 3028.8 | 29866 | 3105.9 | 32022 |
| (2,2) | 4309.1 | 31098 | 4458.4 | 32779 |

Tabella III.6 Frequenze naturali (Hz) per $h/L = 1/5$.

La seconda analisi riguarda lo studio delle vibrazioni forzate della piastra. Si applica sia un potenziale elettrico che ecciti il modo (1,1) di w

$$\phi_0(x_1, x_2, t) = V_0 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t), \quad (9.80)$$

e sia un potenziale elettrico che ecciti il modo (1,1) di u

$$\phi_1(x_1, x_2, t) = V_1 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin(\omega t). \quad (9.81)$$

Il primo equivale ad applicare sulle facce \mathcal{P}^\pm della piastra lo stesso potenziale elettrico (facce cortocircuitate), di ampiezza massima V_0 ; il secondo, invece, equivale ad applicare una differenza di potenziale tra le facce \mathcal{P}^\pm di ampiezza massima $2\epsilon V_1$. Seguono i grafici in cui si riportano le ampiezze massime di w e $\epsilon \cdot u$ al variare della pulsazione ω , rispettivamente, delle forzanti (9.80) e (9.81).

In conclusione, i risultati ottenuti mostrano che il modello di piastra proposto descrive ottimamente la dinamica del comportamento flessionale di una piastra piezoelettrica, anche per rapporti spessore/lato alti (per $h/L = 1/5$ nel valutare la prima frequenza del modo (1,1) della deflessione trasversale w si compie un errore di 1.4 %). Nelle figure 2-5 si vede che le curve relative alla risposta in regime forzato della soluzione 3D e 2D praticamente coincidono. Le cose vanno meno bene nella descrizione della dinamica del comportamento membranale, dove si ha un errore medio del 10 % nel valutare la prima frequenza naturale del modo (1,1) della deformazione di spessore u .

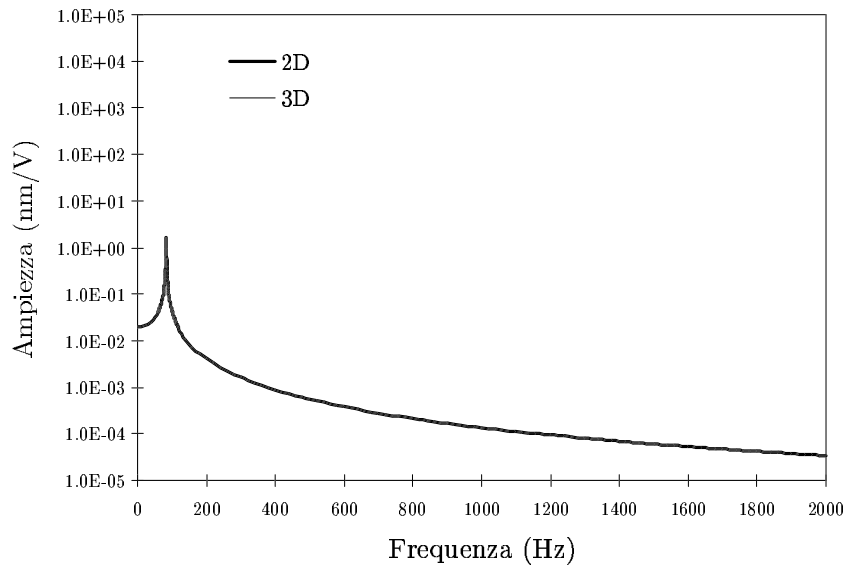


Figura III.2 Risposta in frequenza di w per $h/L = 1/100$.

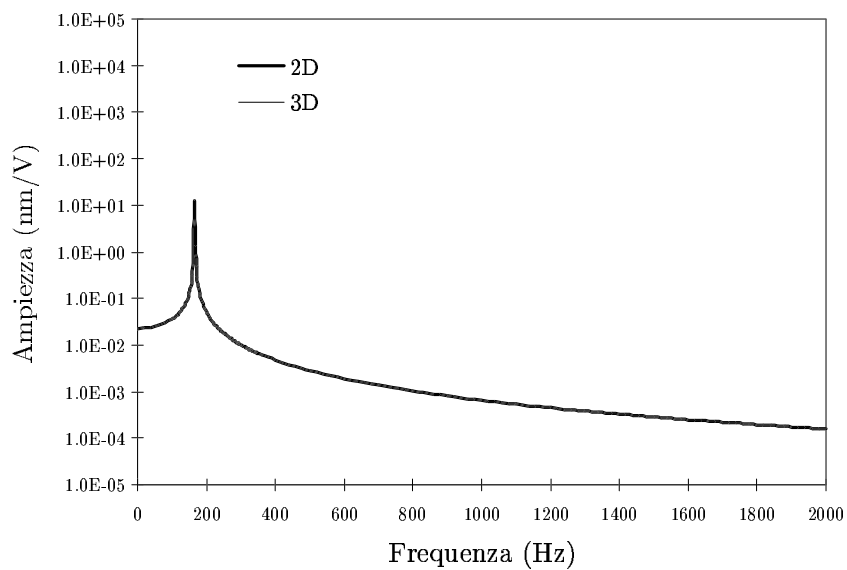


Figura III.3 Risposta in frequenza di w per $h/L = 1/50$.

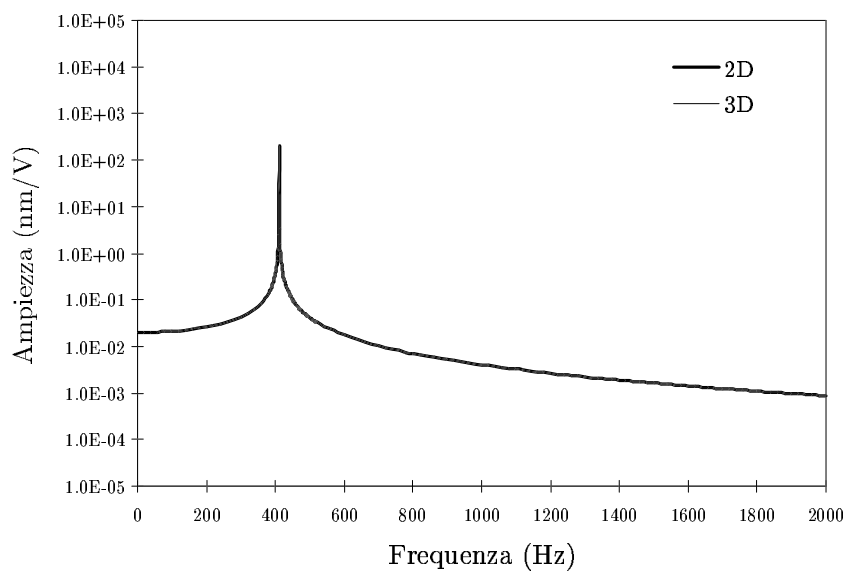


Figura III.4 Risposta in frequenza di w per $h/L = 1/20$.

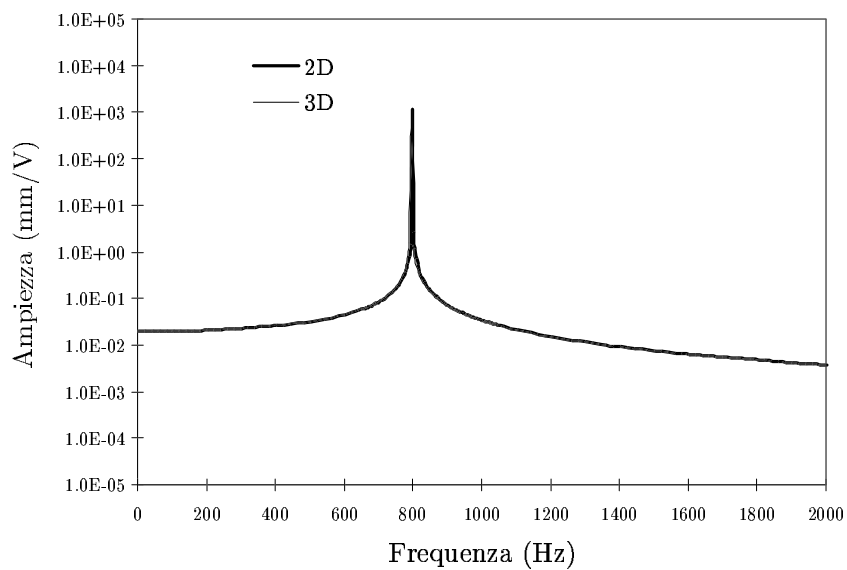


Figura III.5 Risposta in frequenza di w per $h/L = 1/10$.

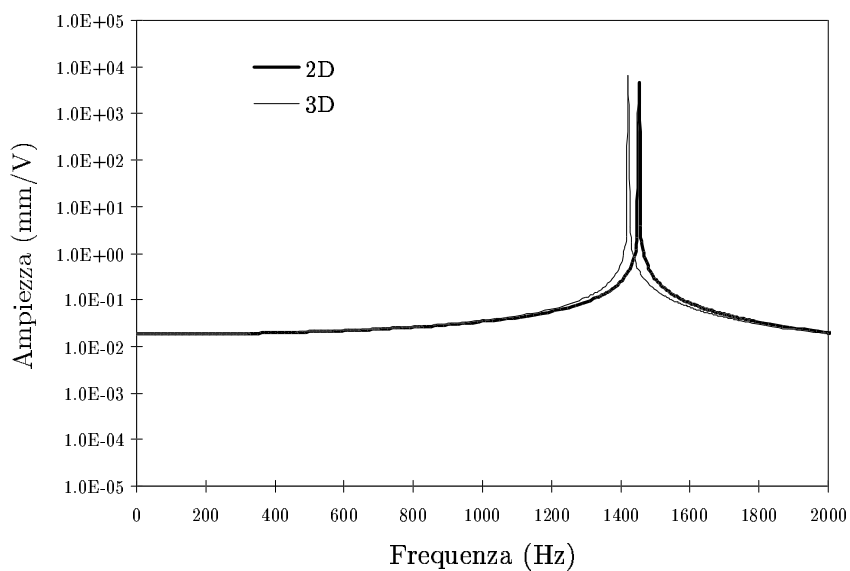


Figura III.6 Risposta in frequenza di w per $h/L = 1/5$.

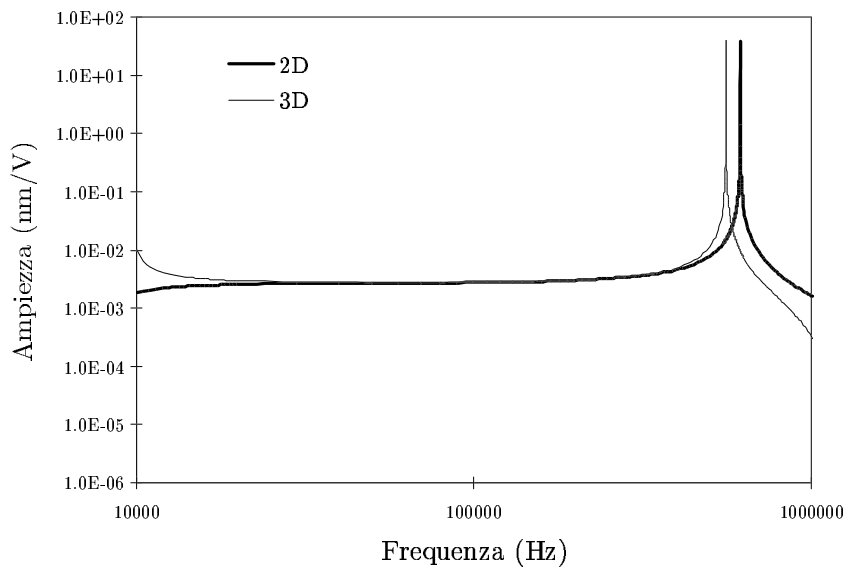


Figura III.7 Risposta in frequenza di $\epsilon \cdot u$ per $h/L = 1/100$.

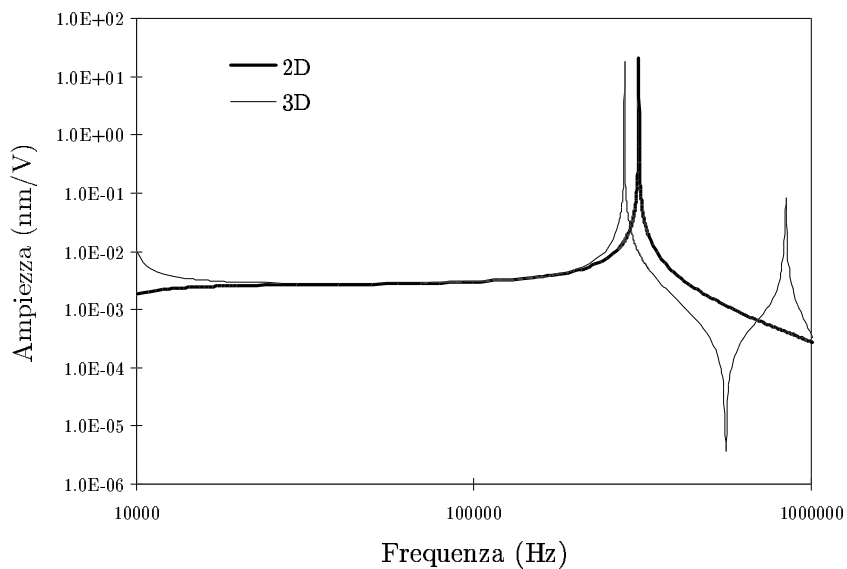


Figura III.8 Risposta in frequenza di $\epsilon \cdot u$ per $h/L = 1/50$.

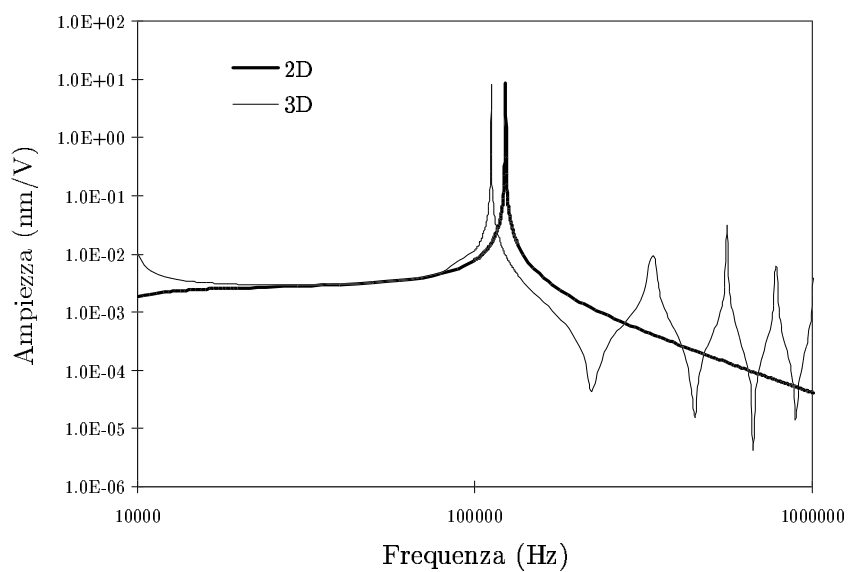


Figura III.9 Risposta in frequenza di $\epsilon \cdot u$ per $h/L = 1/20$.

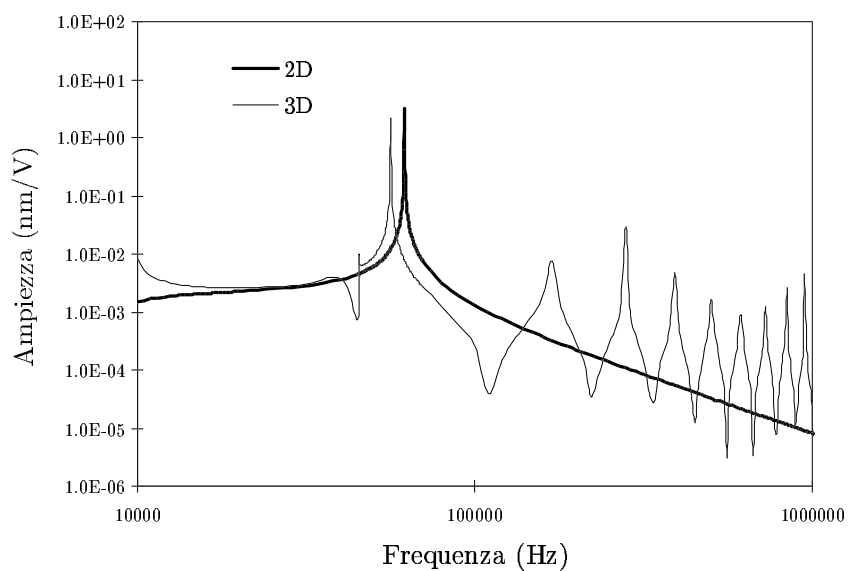


Figura III.10 Risposta in frequenza di $\epsilon \cdot u$ per $h/L = 1/10$.

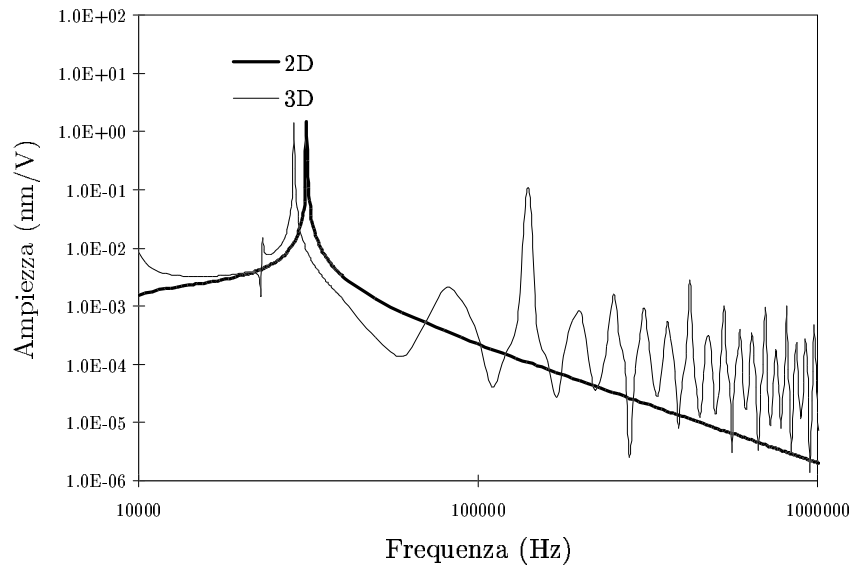


Figura III.11 Risposta in frequenza di $\epsilon \cdot u$ per $h/L = 1/5$.