CAPITOLO

II

L'equilibrio in elettroelasticità

I problemi di equilibrio dell'elettroelasticità ammettono varie formulazioni, ognuna delle quali ha differente generalità e differenti scopi. L'obiettivo di questo capitolo è fornire una presentazione delle principali tra queste formulazioni, modellata su quella abituale per l'elasticità lineare e che sia insieme breve ed esauriente. In questo capitolo si fa riferimento a Podio-Guidugli [73].

1. Formulazione classica, forte e debole

Una *formulazione classica* del problema dell'equilibrio in elettroelasticità consiste in una assegnazione di *dati*, una lista di *incognite*, e un sistema di *equazioni* che le incognite devono soddisfare per i dati assegnati.

I *dati* sono:

- una regione regolare Ω di $\mathcal{E}$, il cui bordo $\partial\Omega$ ammette quasi ovunque una normale esterna $\mathbf{n}$ ed è composto di quattro porzioni, $\partial_u\Omega$, $\partial_s\Omega$, $\partial_\phi\Omega$ e $\partial_d\Omega$, a due a due complementari e disgiunte:

$$\begin{aligned} \partial_u\Omega \cup \partial_s\Omega &= \partial\Omega, \quad \partial_u\Omega \cap \partial_s\Omega = \emptyset, \\ \partial_\phi\Omega \cup \partial_d\Omega &= \partial\Omega, \quad \partial_\phi\Omega \cup \partial_d\Omega = \emptyset; \end{aligned} \tag{1.1}$$

- un campo di spostamenti $\mathbf{u}_\mathrm{o}$ su $\partial_u\Omega$;
- un sistema di carichi $(\mathbf{s}_\mathrm{o}, \mathbf{b}_\mathrm{o})$, con i carichi di volume $\mathbf{b}_\mathrm{o}$ definiti su Ω ed i carichi superficiali $\mathbf{s}_\mathrm{o}$ definiti su $\partial_s\Omega$;
- un potenziale elettrico ϕ_o su $\partial_\phi\Omega$;
- un sistema di carichi elettrici $(\omega_\mathrm{o}, \gamma_\mathrm{o})$, con la carica di volume γ_o definita su Ω e la carica elettrica superficiale ω_o su $\partial_d\Omega$;
- un tensore (del quarto ordine) di elasticità $\mathbb{C}$, un tensore (del secondo ordine) dielettrico $\mathbf{C}$ (sia $\mathbb{C}$ che $\mathbf{C}$ sono definiti positivi) ed un tensore (del terzo ordine) di accoppiamento $\mathbb{c}$; questi tensori descrivono la risposta costitutiva (in termini di sforzo e spostamento elettrico, ad una deformazione ed un campo elettrico) del materiale piezoelettrico compreso nella regione Ω.

Le *incognite* che si vogliono determinare compongono uno *stato elettroelastico* $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \phi, \mathbf{e}, \mathbf{d})$, cioè una lista di tre campi vettoriali $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$ e $\mathbf{d}$, due campi tensoriali simmetrici $\mathbf{E}$ e $\mathbf{S}$, ed un campo scalare ϕ (tutti definiti su Ω) che realizzano l'equilibrio, nel senso che soddisfano le seguenti *equazioni*:

– (*condizioni di bilancio*)

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}\mathbf{S} + \mathbf{b}_\mathrm{o} = \mathbf{0} \qquad & \textit{in } \Omega, \\ \mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s}_\mathrm{o} \qquad & \textit{in } \partial_s\Omega; \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}\mathbf{d} - \gamma_\mathrm{o} = 0 \qquad & \textit{in } \Omega, \\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = -\omega_\mathrm{o} \qquad & \textit{in } \partial_d\Omega; \end{aligned} \tag{1.3}$$

– (*condizioni di compatibilità*)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \operatorname{sym}\nabla\mathbf{u} \qquad \mathit{in}\ \Omega,\\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_{\mathrm{o}} \qquad \mathit{in}\ \partial_u\Omega;
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} &= -\nabla\phi \qquad \mathit{in}\ \Omega,\\
\phi &= \phi_{\mathrm{o}} \qquad \mathit{in}\ \partial_\phi\Omega;
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

– (*condizioni costitutive*)

$$
\mathbf{S} = \mathbb{C}\mathbf{E} - \mathbb{c}^{\mathsf{t}}\mathbf{e} \qquad \mathit{in}\ \Omega,
\tag{1.6}
$$

$$
\mathbf{d} = \mathbb{c}\mathbf{E} + \mathbf{C}\mathbf{e} \qquad \mathit{in}\ \Omega.
\tag{1.7}
$$

La formulazione classica ha il merito di rendere chiara la distinzione tra condizioni di bilancio, di compatibilità e costitutive; tuttavia è difettosa, perché non sono specificati gli spazi di funzioni nei quali si cercano le soluzioni e quindi il problema da risolvere non è formulato correttamente. Alla maniera di Hadamard, un problema lineare è *ben posto* quando si può mostrare che una soluzione esiste, è unica, e dipende in maniera continua dai dati. Per iniziare a parlare in modo rigoroso di esistenza di soluzioni si deve specificare in quale spazio di funzioni esse devono essere ricercate e si deve rendere esplicita la regolarità dei dati.

Noi stipuliamo che siano continui sia gli spostamenti $\mathbf{u}_{\mathrm{o}}$ e i dati di forza $(\mathbf{s}_{\mathrm{o}}, \mathbf{b}_{\mathrm{o}})$ sia il potenziale elettrico ϕ_{o} e i dati di carica elettrica $(\gamma_{\mathrm{o}}, \omega_{\mathrm{o}})$; inoltre, che la dipendenza di $\mathbb{C}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbb{c}$ dal posto, se c'è, sia regolare. Introduciamo inoltre le seguenti collezioni di campi su Ω:

lo spazio $U \times \varPhi$ delle *soluzioni forti*, con

$$
\begin{aligned}
U &:= \{\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \mathit{in} \quad \partial_u\Omega\},\\
\varPhi &:= \{\phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad | \quad \phi = \phi_0 \quad \mathit{in} \quad \partial_\phi\Omega\};
\end{aligned}
$$

lo spazio $V\times\Psi$ delle *variazioni*, con

$$V := \{\mathbf{v}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{v}=\mathbf{0} \quad in \quad \partial_u\Omega\},$$

$$\Psi := \{\psi\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \psi=0 \quad in \quad \partial_\phi\Omega\};$$

lo spazio $\tilde{S}\times\tilde{D}$ degli sforzi e spostamenti elettrici *staticamente ammissibili*, con

$$\tilde{S} := \{\mathbf{S}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{S}\in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega},$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{S}+\mathbf{b}_\mathrm{o}=\mathbf{0} \quad in \quad \Omega, \quad \mathbf{Sn}=\mathbf{s}_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_s\Omega\};$$

$$\tilde{D} := \{\mathbf{d}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{d}-\gamma_\mathrm{o}=0 \quad in \quad \Omega,$$

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}=-\omega_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_d\Omega\}.$$

Una *formulazione forte* del problema dell'equilibrio si ottiene nel seguente modo: (i) si inseriscono le condizioni di compatibilità (1.4) e (1.5) nelle condizioni costitutive (1.6) e (1.7):

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]+\mathbb{c}^\mathbf{t}[\nabla\phi],\\ \mathbf{d}&=\mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]-\mathbf{C}[\nabla\phi];\end{aligned} \tag{1.8}$$

(ii) si inseriscono le (1.8) nelle condizioni di bilancio (1.2) e (1.3), arrivando ad un sistema differenziale per il campo di spostamento $\mathbf{u}$ ed il potenziale ϕ:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}(\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]+\mathbb{c}^\mathbf{t}[\nabla\phi])+\mathbf{b}_\mathrm{o}=\mathbf{0} \quad in \quad \Omega,\\ &\mathrm{Div}(\mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]-\mathbf{C}[\nabla\phi])-\gamma_\mathrm{o}=0 \quad in \quad \Omega,\end{aligned} \tag{1.9}$$

nonché alle condizioni di bordo

$$\begin{aligned}&(\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]+\mathbb{c}^\mathbf{t}[\nabla\phi])\mathbf{n}=\mathbf{s}_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_s\Omega,\\ &(\mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})]-\mathbf{C}[\nabla\phi])\cdot\mathbf{n}=-\omega_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_d\Omega;\end{aligned} \tag{1.10}$$

(iii) si cerca una coppia $(\mathbf{u},\phi)\in U\times\Phi$ che soddisfi il sistema (1.9)-(1.10); questa coppia si dice una *soluzione forte del problema dell'equilibrio.*

Siano ora $\mathbf{S}$ e $\mathbf{d}$ dei campi di sforzo e spostamento elettrico staticamente ammissibili scelti arbitrariamente. Allora, per ogni $\mathbf{v}\in V$ e $\psi\in\Psi$, con l'uso dell'identità di divergenza si ha dalle $(1.2)_1$ e $(1.3)_1$

$$0=\int_\Omega \mathrm{Div}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}+\int_\Omega \mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v}=\int_\Omega(\mathrm{Div}(\mathbf{S}^\mathbf{t}\mathbf{v})-\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v})+\int_\Omega\mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v},$$
$$0=\int_\Omega \psi\,\mathrm{Div}\,\mathbf{d}-\int_\Omega\psi\gamma_\mathrm{o}=\int_\Omega(\mathrm{Div}(\psi\mathbf{d})-\nabla\psi\cdot\mathbf{d})-\int_\Omega\psi\gamma_\mathrm{o},$$

dalle quali (per il lemma di divergenza e le $(1.2)_2$ e $(1.3)_2$) seguono le cosiddette *equazioni dei lavori virtuali* :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}, \qquad (\mathbf{S},\mathbf{v})\in\tilde{S}\times V,\\
&\int_\Omega \mathbf{d}\cdot\nabla\psi = -\int_\Omega \gamma_o\psi - \int_{\partial_d\Omega}\omega_o\psi, \qquad (\mathbf{d},\psi)\in\tilde{D}\times\varPsi.
\end{aligned}\tag{1.11}$$

La deduzione di queste equazioni suggerisce di dare alle condizioni di equilibrio (1.2) e (1.3) la forma debole:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}\in V,\\
&\int_\Omega \mathbf{d}\cdot\nabla\psi = -\int_\Omega \gamma_0\psi - \int_{\partial_d\Omega}\omega_o\psi, \qquad \psi\in\varPsi.
\end{aligned}\tag{1.12}$$

In particolare, le (1.12) sono soddisfatte da un campo di sforzo $\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)$ e da un campo di spostamento elettrico $\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)$ come nelle (1.8), quando $\mathbf{u}$ e ϕ sono soluzioni forti del problema dell'equilibrio, ma hanno anche senso per campi di spostamento e potenziale elettrico di minore regolarità. Per porre in evidenza quest'ultima importante proprietà introduciamo

lo spazio $\bar{U}\times\bar{\varPhi}$ delle *soluzioni deboli*, con

$$\begin{aligned}
&\bar{U} := \{\mathbf{u}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_o \quad in \quad \partial_u\Omega\},\\
&\bar{\varPhi} := \{\phi\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \phi=\phi_o \quad in \quad \partial_\phi\Omega\};
\end{aligned}$$

e diamo la seguente *formulazione debole* del problema dell'equilibrio elettroelastico, ricercare una coppia $(\mathbf{u},\phi)\in\bar{U}\times\bar{\varPhi}$ tale che

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\cdot\nabla\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}\in V,\\
&\int_\Omega \mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\nabla\psi = -\int_\Omega \gamma_0\psi - \int_{\partial_d\Omega}\omega_o\psi, \qquad \psi\in\varPsi.
\end{aligned}\tag{1.13}$$

2. Formulazione debole di tipo complementare

Del problema elettroelastico si può costruire una formulazione debole, duale di quella appena discussa, che chiameremo *complementare.* Cominciamo ricavando una forma debole delle condizioni di compatibilità. Introduciamo la seguente collezione di campi su Ω:

lo spazio $S \times D$ delle *soluzioni forti complementari*, con

$$S := \{\mathbf{S} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{S} \in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega}, \quad \mathbf{Sn} = \mathbf{s}_o \quad in \quad \partial_s\Omega\},$$

$$D := \{\mathbf{d} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = -\omega_o \quad in \quad \partial_d\Omega\};$$

lo spazio $T \times G$ delle *variazioni complementari*, con

$$T := \{\mathbf{T} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{T} \in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad in \quad \Omega,$$
$$\mathbf{Tn} = \mathbf{0} \quad in \quad \partial_s\Omega\},$$

$$G := \{\mathbf{g} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{g} = 0 \quad in \quad \Omega, \quad \mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad in \quad \partial_d\Omega\};$$

lo spazio $K \times L$ degli spostamenti e dei potenziali elettrici *cinematicamente ammissibili*, con

$$K := \{(\mathbf{u}, \mathbf{E}) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{E} \in Sym \quad in \quad \overline{\Omega},$$
$$\mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{u} = \mathbf{E} \quad in \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_o \quad in \quad \partial_u\Omega\},$$

$$L := \{(\phi, \mathbf{e}) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad -\nabla\phi = \mathbf{e} \quad in \quad \Omega,$$
$$\phi = \phi_o \quad in \quad \partial_\phi\Omega\}.$$

Siano ora $\mathbf{u}$ e ϕ dei campi di spostamento e di potenziale elettrico cinematicamente ammissibili scelti arbitrariamente. Allora, per ogni $\mathbf{T} \in T$ e $\mathbf{g} \in G$, con l'uso dell'identità di divergenza si ha dalle (1.4) e (1.5)

$$\int_\Omega \mathbf{E}\cdot\mathbf{T} = \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{T} = \int_\Omega (\mathrm{Div}(\mathbf{T}^t\mathbf{u}) - \mathrm{Div}\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}),$$
$$\int_\Omega \mathbf{e}\cdot\mathbf{g} = -\int_\Omega \nabla\phi\cdot\mathbf{g} = \int_\Omega (-\,\mathrm{Div}(\phi\mathbf{g}) + \phi\,\mathrm{Div}\,\mathbf{g}),$$

dalle quali seguono le *equazioni dei lavori virtuali complementari*:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{E}\cdot\mathbf{T} = \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{Tn}\cdot\mathbf{u}_\mathrm{o}, \qquad ((\mathbf{u},\mathbf{E}),\mathbf{T}) \in K\times T,\\
&\int_\Omega \mathbf{e}\cdot\mathbf{g} = -\int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_\mathrm{o}, \qquad ((\phi,\mathbf{e}),\mathbf{g}) \in L\times G.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

La deduzione di queste equazioni suggerisce di dare alle condizioni di compatibilità (1.4) e (1.5) la forma debole:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{T} = \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{Tn}\cdot\mathbf{u}_\mathrm{o}, \qquad \mathbf{T}\in T,\\
&\int_\Omega \nabla\phi\cdot\mathbf{g} = \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_\mathrm{o}, \qquad \mathbf{g}\in G.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

In particolare, le (2.15) sono soddisfatte da un campo di spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{S},\mathbf{d})$ e da un potenziale elettrico $\phi(\mathbf{S},\mathbf{d})$ quando $\mathbf{S}$ e $\mathbf{d}$ sono soluzioni forti del problema dell'equilibrio, ma hanno anche senso per campi del tensore dello sforzo e dello spostamento elettrico di minore regolarità. Per porre in evidenza quest'ultima importante proprietà introduciamo

lo spazio $\bar{S}\times\bar{D}$ delle *soluzioni deboli complementari*, con

$$
\begin{aligned}
\bar{S} &:= \{\mathbf{S}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{S}\in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega}, \quad \mathbf{Sn}=\mathbf{s}_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_s\Omega\},\\
\bar{D} &:= \{\mathbf{d}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = -\omega_\mathrm{o} \quad in \quad \partial_d\Omega\};
\end{aligned}
$$

e diamo la seguente *formulazione debole complementare* del problema dell'equilibrio elettroelastico, ricercare una coppia $(\mathbf{S},\mathbf{d})\in\bar{S}\times\bar{D}$ tali che

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\mathbf{S},\mathbf{d})\cdot\mathbf{T} = \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{Tn}\cdot\mathbf{u}_\mathrm{o}, \qquad \mathbf{T}\in T,\\
&\int_\Omega \nabla\phi(\mathbf{S},\mathbf{d})\cdot\mathbf{g} = \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_\mathrm{o}, \qquad \mathbf{g}\in G.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

<u>**Osservazione 2.1.**</u> La dualità basica è tra le coppie di spazi K e $\tilde{S}$ (delle coppie $(\mathbf{u},\mathbf{E})$ cinematicamente ammissibili e dei campi $\mathbf{S}$ staticamente ammissibili), e L e $\tilde{D}$ (delle coppie $(\phi,\mathbf{e})$ cinematicamente ammissibili e dei campi $\mathbf{d}$ staticamente ammissibili). Le relazioni

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{S}\cdot\mathbf{E} = \int_\Omega \mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{u} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{u} + \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{Sn}\cdot\mathbf{u}_\mathrm{o},\\
&\int_\Omega \mathbf{d}\cdot\mathbf{e} = \int_\Omega \gamma_\mathrm{o}\phi + \int_{\partial_d\Omega} \omega_\mathrm{o}\phi - \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\phi_\mathrm{o};
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

sono identità, rispettivamente, su $K \times \tilde{S}$ e su $L \times \tilde{D}$, e stabiliscono tale dualità.

3. Formulazione variazionale

Si consideri il funzionale

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}\{\mathbf{u},\phi,\mathbf{d}\} = &\int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}) - \int_\Omega (\mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_o)\phi + \int_{\partial_d\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \omega_o)\phi \\ &+ \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\phi_o - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{u} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{u},\end{aligned} \tag{3.18}$$

definito sullo spazio A delle triple $\{\mathbf{u},\phi,\mathbf{d}\}$ tali che:

$\mathbf{u} \in \bar{U}$, $\mathbf{E}(\mathbf{u}) \in C^0(\overline{\Omega})$ con $\mathbf{E}(\mathbf{u}) := \mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{u}$;

$\phi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$;

$\mathbf{d} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

E' facile fornire una caratterizzazione *variazionale* delle soluzioni deboli del problema dell'equilibrio elettroelastico tramite l'annullamento della variazione prima di tale funzionale. Definiamo la variazione prima di $\hat{\Pi}$ come

$$\delta\hat{\Pi}\{\mathbf{u},\phi,\mathbf{d}\}[\mathbf{v},\psi,\mathbf{g}] := \frac{d}{dh}\hat{\Pi}\{\mathbf{u}+h\mathbf{v},\phi+h\psi,\mathbf{d}+h\mathbf{g}\}\Big|_{h=0}, \quad (\mathbf{v},\psi,\mathbf{g}) \in V\times\Psi\times G.$$

Segue,

$$\begin{aligned}\delta\hat{\Pi}\{\mathbf{u},\phi,\mathbf{d}\} = &\int_\Omega \mathbb{D}[\nabla\mathbf{u}]\cdot\nabla\mathbf{v} - \mathbb{d}[\nabla\mathbf{u}]\cdot\mathbf{g} - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}[\mathbf{d}]\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{D}[\mathbf{d}]\cdot\mathbf{g} \\ &- \int_\Omega(\mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_o)\psi + \int_{\partial_d\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}+\omega_o)\psi + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o \\ &- \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v},\end{aligned} \tag{3.19}$$

con $\mathbf{v} \in V$, $\psi \in \Psi$ e $\mathbf{g} \in G$. Viste le (I.6.26), si ha

$$\begin{aligned}0 = &\int_\Omega \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{e}\cdot\mathbf{g} - \int_\Omega(\mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_o)\psi \\ &+ \int_{\partial_d\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}+\omega_o)\psi + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v};\end{aligned} \tag{3.20}$$

ricordando che

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} &= \operatorname{Div}(\mathbf{S}^{\mathbf{t}}\mathbf{v}) - \operatorname{Div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v},\\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{g} = -\nabla\phi\cdot\mathbf{g} &= -\operatorname{Div}(\phi\mathbf{g}) + \phi\operatorname{Div}\mathbf{g},\end{aligned}\tag{3.21}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}0 = &\int_\Omega -(\operatorname{Div}\mathbf{S}+\mathbf{b}_\mathrm{o})\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega(\operatorname{Div}\mathbf{d}-\gamma_\mathrm{o})\psi\\ &+\int_{\partial_d\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}+\omega_\mathrm{o})\psi + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})(\phi_\mathrm{o}-\phi) + \int_{\partial_s\Omega}(\mathbf{Sn}-\mathbf{s}_\mathrm{o})\cdot\mathbf{v};\end{aligned}\tag{3.22}$$

infine, l'arbitrarietà delle variazioni fornisce le equazioni (1.2) e (1.3).

Consideriamo ora un nuovo funzionale,

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}\{\mathbf{u},\mathbf{e},\phi,\mathbf{d}\} = &\int_\Omega \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \int_\Omega \mathbf{d}\cdot\nabla\phi + \int_\Omega \gamma_\mathrm{o}\phi\\ &+\int_{\partial_d\Omega}\omega_\mathrm{o}\phi + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})(\phi_\mathrm{o}-\phi) - \int_\Omega \mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{u} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{u},\end{aligned}\tag{3.23}$$

definito sullo spazio B delle quadruple $\{\mathbf{u},\mathbf{e},\phi,\mathbf{d}\}$ tali che:

$\mathbf{u}\in\bar{U}$, $\mathbf{E}(\mathbf{u})\in C^0(\overline{\Omega})$ (con $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}$);

$\mathbf{e}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$;

$\phi\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $\nabla\phi\in C^0(\Omega)$;

$\mathbf{d}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$;

$\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi) = \mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{e}(\phi)$.

Calcoliamo la variazione prima di questo funzionale

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Theta}\{\mathbf{u},\mathbf{e},\phi,\mathbf{d}\} = &\int_\Omega \mathbb{C}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{v} - \mathbb{c}\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{Ce}\cdot\mathbf{i}\\ &+\int_\Omega[(\mathbf{e}+\nabla\phi)\cdot\mathbf{g} + (\mathbf{i}+\nabla\psi)\cdot\mathbf{d}] - \int_\Omega\gamma_\mathrm{o}\psi + \int_{\partial_d\Omega}\omega_\mathrm{o}\psi\\ &+\int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})(\phi-\phi_\mathrm{o}) - \int_\Omega\mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v},\end{aligned}\tag{3.24}$$

con $\mathbf{v}\in V$, $\psi\in\Psi$, $\mathbf{g}\in G$ e $\mathbf{i}\in I := \{\mathbf{i}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})\}$ ($\mathbf{i}$ indica la variazione del campo elettrico $\mathbf{e}$). Viste le (1.6) (1.7), si ha

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Theta}\{\mathbf{u},\mathbf{e},\phi,\mathbf{d}\} = &\int_\Omega \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} + \int_\Omega[(\mathbf{e}+\nabla\phi)\cdot\mathbf{g} + \nabla\psi\cdot\mathbf{d}]\\ &+\int_\Omega\gamma_\mathrm{o}\psi + \int_{\partial_d\Omega}\omega_\mathrm{o}\psi + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})(\phi-\phi_\mathrm{o})\\ &-\int_\Omega\mathbf{b}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_\mathrm{o}\cdot\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Facendo riferimento alla $(3.21)_1$ e ricordando che

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{d} = \mathrm{Div}(\psi\mathbf{d}) - \psi\,\mathrm{Div}\,\mathbf{d}, \tag{3.26}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = &\int_\Omega -(\mathrm{Div}\,\mathbf{S} + \mathbf{b}_\mathrm{o}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_s\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{n} - \mathbf{s}_\mathrm{o}) \cdot \mathbf{v} \\ &- \int_\Omega (\mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_\mathrm{o})\psi + \int_{\partial_d\Omega} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} + \omega_\mathrm{o})\psi \\ &+ \int_{\partial_d\Omega} (\mathbf{e} + \nabla\phi) \cdot \mathbf{g} + \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\phi_\mathrm{o} - \phi), \end{aligned} \tag{3.27}$$

infine, l'arbitrarietà delle variazioni fornisce le condizioni di bilancio (1.2) e (1.3) e la condizione di compatibilità (1.7).

4. Un principio di minimo energetico

Si consideri adesso il funzionale

$$\begin{aligned} \Pi\{\mathbf{u}, \mathbf{d}\} = &\int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{d}) \\ &+ \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\phi_\mathrm{o} - \int_\Omega \mathbf{b}_\mathrm{o} \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_\mathrm{o} \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

definito sulla collezione di coppie $(\mathbf{u}, \mathbf{d})$ tali che

$\mathbf{u} \in \bar{U}$, $\mathbf{E}(\mathbf{u}) \in C^0(\overline{\Omega})$;

$\mathbf{d} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_\mathrm{o} = 0$ in Ω, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = -\omega_\mathrm{o}$ in $\partial_d\Omega$.

Questo funzionale si può riguardare come la restrizione del funzionale (3.18) a triple $\{\mathbf{u}, \phi, \mathbf{d}\} \in A$, per le quali $\mathbf{d} \in \tilde{D}$, cioè, lo spostamento elettrico è staticamente ammissibile.

La porzione quadratica

$$(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \mapsto \int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{d}),$$

è interpretabile come l'energia elettroelastica totale immagazzinata nel corpo quando gli spostamenti meccanico ed elettrico dalla configurazione di riferimento sono $\mathbf{u}$ e

$\mathbf{d}$, rispettivamente. La porzione lineare

$$(\mathbf{u},\mathbf{d}) \mapsto -(\int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{u} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial_\phi\Omega} (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\phi_o)$$

esprime il potenziale totale dei carichi meccanici ed elettrici applicati in corrispondenza degli spostamenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{d}$.

L'annullamento della variazione prima del funzionale $\Pi\{\mathbf{u},\mathbf{d}\}$ fornisce la caratterizzazione variazionale delle soluzioni deboli del problema elettroelastico nelle variabili $\mathbf{u}$ e $\mathbf{d}$. Osserviamo che la (I.6.28) da, per ogni $h \in \mathbb{R}$ e per $\mathbf{w} = \mathbf{u} + h\mathbf{v}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{d} + h\mathbf{g}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{w}),\mathbf{d}) = {} & \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}) \\ & + h\{\mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g} + \mathbf{D}\mathbf{d}\cdot\mathbf{g}\} \\ & + h^2\hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}).\end{aligned} \tag{4.29}$$

In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned}\Pi\{\mathbf{u}+h\mathbf{v},\mathbf{d}+h\mathbf{g}\} = {} & \Pi\{\mathbf{u},\mathbf{d}\} + h\{\int_\Omega \mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) \\ & - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g} + \mathbf{D}\mathbf{d}\cdot\mathbf{g} + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}\} + h^2\Pi\{\mathbf{v},\mathbf{g}\},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\delta\Pi\{\mathbf{u},\mathbf{d}\}[\mathbf{v},\mathbf{g}] = {} & \{\int_\Omega \mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g} + \mathbf{D}\mathbf{d}\cdot\mathbf{g} \\ & + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}\}.\end{aligned}$$

Viste le (I.6.26), si ha

$$\begin{aligned}0 = {} & \int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u},\mathbf{d})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{e}(\mathbf{u},\mathbf{d})\cdot\mathbf{g} \\ & + \int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v},\end{aligned} \tag{4.30}$$

e per l'arbitrarietà delle variazioni fornisce la $(2.14)_2$ e la $(1.11)_1$ che riscriviamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u},\mathbf{d})\cdot\nabla\mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{v} + \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{v}, \\ \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u},\mathbf{d})\cdot\mathbf{g} &= -\int_{\partial_\phi\Omega}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\phi_o.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Dunque, per questo funzionale, l'annullamento della variazione prima produce l'*equazione dei lavori virtuali* per la componente meccanica e l'*equazione dei lavori virtuali complementare* per la componente elettrica.

Vogliamo ora provare che il funzionale ha un minimo locale in un'eventuale soluzione forte del problema di equilibrio elettroelastico.

Per $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{d} \in D$, si prenda un coppia qualsiasi $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}$, $\bar{\mathbf{d}} \in \bar{D}$ e si scriva l'identità algebrica (4.29) per $h = -1$, $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ e $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$, ottenendo

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{w}), \mathbf{f}) = \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{d}}) + \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{d}) - \{\mathbb{D}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \\ - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{d}} - \mathbb{d}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{d} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d}\}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

La quantità tra parentesi graffe può essere manipolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{d}} - \mathbb{d}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{d} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d} = \\ &\mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{d}} - \mathbb{d}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{d} + \mathbf{D}\mathbf{d} \cdot \bar{\mathbf{d}} = \\ &2\hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{d})) + \mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f} - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) + \mathbf{D}\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

La (4.32) perciò si riscrive come

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{w}), \mathbf{f}) = \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{d}}) - \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{d}) - \{(\mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) \\ + (-\mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{f}\}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Prendiamo ora una coppia $(\mathbf{u}, \phi)$ soluzione forte del problema dell'equilibrio; costruiamo sforzo e spostamento elettrico corrispondenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) &= \mathbb{C}\nabla\mathbf{u} + \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\nabla\phi, \\ \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) &= \mathbb{c}\nabla\mathbf{u} - \mathbf{C}\nabla\phi, \end{aligned} \tag{4.35}$$

e da queste, attraverso le relazioni costitutive (I.6.27), passiamo a sforzo e campo elettrico in termini di $(\mathbf{u}, \mathbf{d})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) &= \mathbb{D}\nabla\mathbf{u} - \mathbb{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}, \\ \mathbf{e}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) &= -\nabla\phi = -\mathbb{d}\nabla\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{d}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Quindi scegliamo $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}$ e $\bar{\mathbf{d}} \in \bar{D}$. Allora, $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ è un elemento di V e $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$ è un elemento di G. Dato che $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \in \tilde{S}$ vale l'equazione dei lavori virtuali $(1.11)_1$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \cdot \nabla\mathbf{w} = \int_\Omega (\mathbb{D}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{d}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) = \\ = \int_\Omega \mathbf{b}_{\mathrm{o}} \cdot \mathbf{w} + \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_{\mathrm{o}} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

D'altra parte, visto che $\mathbf{e}(\mathbf{u},\mathbf{d}) = -\nabla\phi$, vale anche l'equazione dei lavori virtuali complementare $(2.14)_2$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial_\phi \Omega} \phi_o(\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}) + \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u},\mathbf{d})\cdot\mathbf{f} = \\
&= \int_{\partial_\phi \Omega} \phi_o(\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}) + \int_\Omega -\mathbb{d}\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{f} + \mathbf{D}\mathbf{d}\cdot\mathbf{f}.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Ora integrando la (4.34) su Ω si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{w}),\mathbf{f}) &= \int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}),\bar{\mathbf{d}}) - \int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}) \\
&- \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) - \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o\cdot(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) + \int_{\partial_\phi\Omega} \phi_o((\bar{\mathbf{d}}-\mathbf{d})\cdot\mathbf{n}) = \\
&= \Pi(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}),\bar{\mathbf{d}}) - \Pi(\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}),
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

e quindi, poiché l'energia imagazzinata non è mai negativa, ne segue

$$
\Pi\{\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}),\bar{\mathbf{d}}\} \geq \Pi\{\mathbf{E}(\mathbf{u}),\mathbf{d}\}, \qquad \bar{\mathbf{u}}\in\bar{U}, \quad \bar{\mathbf{d}}\in\bar{D}. \tag{4.40}
$$

Osservazione 4.1. Oltre alla definita positività di $\hat{\mathrm{W}}$, l'ipotesi chiave per provare questo ultimo risultato è che $(\mathbf{u},\phi)$ appartenga allo spazio $U\times\Phi$ per garantire l'appartenenza di $\mathbf{S}(\mathbf{u},\mathbf{d})$ ad $\tilde{S}$ e la relazione $\mathbf{e}(\mathbf{u},\mathbf{d}) = -\nabla\phi$, con $\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)$ ottenuto tramite la $(4.35)_2$.

5. Un principio variazionale

Si consideri ora un nuovo funzionale:

$$
\begin{aligned}
\Theta\{\mathbf{u},\phi\} = \int_\Omega \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{e}(\phi)) \\
\int_\Omega \gamma_o\phi + \int_{\partial_d\Omega}\omega_o\phi - \int_\Omega \mathbf{b}_o\cdot\mathbf{u} - \int_{\partial_s\Omega}\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{u},
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

definito sulla collezione di coppie $(\mathbf{u},\phi)$ tali che

$\mathbf{u}\in\bar{U}$, $\mathbf{E}(\mathbf{u})\in C^o(\overline{\Omega})$;

$\phi\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathbf{e}(\phi) = -\nabla\phi\in C^0(\Omega)$, $\phi=\phi_o$ in $\partial_\phi\Omega$.

Questo funzionale si può riguardare come la restrizione del funzionale (3.23) a quadruple $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}, \phi, \mathbf{d}\} \in B$ per le quali $(\phi, \mathbf{e}) \in L$, cioè, il potenziale elettrico è cinematicamente ammissibile, e inoltre,

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{e}(\phi);$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbb{c}\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi).$$

L'annullamento della variazione prima del funzionale $\Theta\{\mathbf{u}, \phi\}$ fornisce la caratterizzazione variazionale delle soluzioni deboli del problema elettroelastico nelle variabili $\mathbf{u}$ e ϕ. Infatti,

$$\begin{aligned}\delta\Theta\{\mathbf{u}, \phi\}[\mathbf{v}, \psi] = &\int_\Omega (\mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{e}(\phi)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) - (\mathbb{c}\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi)) \cdot \mathbf{e}(\psi)\\ &\int_\Omega \gamma_o\psi + \int_{\partial_d\Omega} \omega_o\psi - \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Viste le (1.6) e (1.7), si ottiene

$$\begin{aligned}0 = &\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{e}(\psi)\\ &\int_\Omega \gamma_o\psi + \int_{\partial_d\Omega} \omega_o\psi - \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial_s\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v},\end{aligned} \tag{5.42}$$

infine, l'arbitrarietà delle variazioni $(\mathbf{v}, \psi)$ fornisce le *equazioni dei lavori virtuali* (1.11).

Vogliamo ora provare che il funzionale (5.41) ha un punto di sella in un'eventuale soluzione forte del problema di equilibrio elettroelastico.

Ripercorriamo i passi fatti nel paragrafo precedente valutando la funzione quadratica W per $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ e $\zeta = \bar{\phi} - \phi$. Con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{w}), \mathbf{e}(\zeta)) = &\mathrm{W}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{e}(\bar{\phi})) + \mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\phi))\\ &- \{\mathbb{C}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\bar{\phi}) \cdot \mathbf{e}(\phi)\},\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\mathbf{w}, \zeta) \cdot \mathbf{e}(\zeta) = &\mathbf{d}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\phi}) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi}) - \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{e}(\phi)\\ &- \{\mathbb{C}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}(\phi) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi) \cdot \mathbf{e}(\zeta) + \mathbb{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{e}(\phi) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w})\\ &+ \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi) \cdot \mathbf{e}(\zeta)\}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

La quantità tra parentesi graffe della (5.43) può essere manipolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\bar{\phi}) \cdot \mathbf{e}(\phi) &= 2\mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\phi)) \\ &\quad + \mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi) \cdot \mathbf{e}(\zeta).\end{aligned} \tag{5.45}$$

La (5.43) perciò si riscrive come

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{w}), \mathbf{e}(\zeta)) &= \mathrm{W}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{e}(\bar{\phi})) - \mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\phi)) \\ &\quad - \{\mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi) \cdot \mathbf{e}(\zeta)\}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Prendiamo ora una coppia $(\mathbf{u}, \phi)$ soluzione forte del problema dell'equilibrio; costruiamo sforzo e spostamento elettrico corrispondenti tramite la (4.35). Quindi scegliamo $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}$ e $\bar{\phi} \in \bar{\Phi}$. Allora, $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ è un elemento di V e $\zeta = \bar{\phi} - \phi$ è un elemento di Ψ. Dato che $(\mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi), \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi)) \in \tilde{S} \times \tilde{D}$ valgono le equazioni dei lavori virtuali (1.11):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \mathbf{w} &= \int_\Omega (\mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbb{c}\mathbf{e}(\phi)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) = \\ &= \int_\Omega \mathbf{b_o} \cdot \mathbf{w} + \int_{\partial_s \Omega} \mathbf{s_o} \cdot \mathbf{w}. \\ \int_\Omega \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla \zeta &= -\int_\Omega (\mathbb{c}\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{e}(\phi)) \cdot \mathbf{e}(\zeta) \\ &= -\int_\Omega \gamma_o \zeta - \int_{\partial_d \Omega} \omega_o \zeta.\end{aligned} \tag{5.47}$$

Sottraendo alla (5.46) la (5.44), portando a destra l'integrale relativo al termine $\mathbf{d}(\mathbf{w}, \zeta) \cdot \mathbf{e}(\zeta)$ ed integrando su Ω, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{w}), \mathbf{e}(\zeta)) &= \Theta\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\phi}\} - \Theta\{\mathbf{u}, \phi\} \\ &\quad + \int_\Omega \mathbf{d}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \bar{\phi} - \phi) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi} - \phi)\end{aligned} \tag{5.48}$$

poiché l'energia imagazzinata non è mai negativa, ne segue

$$\Theta\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\phi}\} \geq \Theta\{\mathbf{u}, \phi\} - \int_\Omega \mathbf{d}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \bar{\phi} - \phi) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi} - \phi), \tag{5.49}$$

per $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}$ e $\bar{\phi} \in \bar{\Phi}$.

Se $\bar{\mathbf{u}} \in U$ per l'unicità della soluzione si ha $\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e di conseguenza si ottiene:

$$\mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{0}), \bar{\phi} - \phi) = \frac{1}{2}\mathbf{Ce}(\bar{\phi} - \phi) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi} - \phi) > 0$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{0}, \bar{\phi} - \phi) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi} - \phi) = \mathbf{Ce}(\bar{\phi} - \phi) \cdot \mathbf{e}(\bar{\phi} - \phi) = 2\mathrm{W}(\mathbf{E}(\mathbf{0}), \bar{\phi} - \phi)$$

segue dalla (5.48)

$$\Theta\{\mathbf{u}, \bar{\phi}\} \leq \Theta\{\mathbf{u}, \phi\} \qquad \mathbf{u} \in U, \quad \bar{\phi} \in \bar{\Phi}. \tag{5.50}$$

Se $\bar{\phi} \in \Phi$ per l'unicità della soluzione si ha $\bar{\phi} - \phi = 0$ e di conseguenza si ottiene:

$$\mathrm{W}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), 0) = \frac{1}{2}\mathbb{C}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) > 0$$

$$\mathbf{d}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, 0) \cdot \mathbf{e}(0) = 0$$

segue dalla (5.48)

$$\Theta\{\bar{\mathbf{u}}, \phi\} \geq \Theta\{\mathbf{u}, \phi\} \qquad \bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}, \quad \phi \in \Phi. \tag{5.51}$$

Dunque abbiamo dimostrato che il funzionale (5.41) ha un punto di sella in un'eventuale soluzione forte; se $\mathbf{u} \in U$ il funzionale assume un massimo per $\phi \in \Phi$ e viceversa se consideriamo $\phi \in \Phi$ il funzionale assume un minimo per $\mathbf{u} \in U$.

Osservazione 5.1. Oltre alla definita positività di W, l'ipotesi chiave per provare questo ultimo risultato è che $(\mathbf{u}, \phi)$ appartenga allo spazio $U \times \Phi$ per garantire l'appartenenza di $(\mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi), \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi))$ ad $\tilde{S} \times \tilde{D}$.

Osservazione 5.2. La variazione seconda del funzionale (5.41) rappresenta una forma quadratica indefinita

$$\delta^2\Theta\{\mathbf{u}, \phi\}[\mathbf{v}, \psi] = \int_\Omega \mathbb{C}\mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) - 2\mathbb{c}\mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}(\psi) - \mathbf{Ce}(\psi) \cdot \mathbf{e}(\psi),$$

dato che i minori principali della matrice ad essa associata non hanno tutti uguale segno ($\mathbb{C}$ e $\mathbf{C}$ sono definite positive per cui segue che $\det \mathbb{C} > 0$ e $\det(-\mathbf{C}) < 0$).

6. Compatibilità tra operatori di campo e di bordo

Dato un operatore di campo, è di cruciale importanza la scelta delle condizioni di bordo affinché il problema *al contorno* risulti ben posto. Osserviamo che quando un problema ammette una formulazione variazionale è la stessa formulazione a imporre gli operatori al bordo compatibili. L'operatore di campo del problema dell'elettroelasticità tridimensionale

$$\mathcal{L}[(\mathbf{u},\phi)] := \begin{pmatrix} -\Big(\mathrm{Div}(\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] + \mathbb{c}^{\mathrm{t}}[\nabla\phi])\Big) \\ -\Big(\mathrm{Div}(\mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] - \mathbf{C}[\nabla\phi])\Big) \end{pmatrix}, \tag{6.52}$$

può essere associato alle condizioni di bordo *geometriche*

$$\mathcal{B}_0[(\mathbf{u},\phi)] := (\mathbf{u},\ \phi), \tag{6.53}$$

o alle condizioni di bordo *naturali*[1]

$$\mathcal{B}_1[(\mathbf{u},\phi)] := \big(\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] + \mathbb{c}^{\mathrm{t}}[\nabla\phi])\mathbf{n},\ \mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] - \mathbf{C}[\nabla\phi]) \cdot \mathbf{n}\big). \tag{6.54}$$

Osservazione 6.1. La forma di $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ si può giustificare valutando, per $\mathbf{u}$ e ϕ in $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, la variazione prima del funzionale quadratico

$$(\mathbf{u},\phi) \to \tfrac{1}{2}\int_\Omega \big(\mathbb{C}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] + \mathbb{c}^{\mathrm{t}}[\nabla\phi]\big)\cdot\nabla\mathbf{u} - \big(\mathbb{c}[\mathrm{sym}(\nabla\mathbf{u})] - \mathbf{C}[\nabla\phi]\big)\cdot\nabla\phi.$$

In tutte le formulazioni dell'equilibrio elettroelastico che abbiamo dato fino ad ora si è sistematicamente incluso la condizione geometrica

$$\mathcal{B}_0[\mathbf{u},\phi] = (\mathbf{u}_o,\phi_o) \qquad in \quad (\partial_u\Omega, \partial_\phi\Omega),$$

nelle definizioni degli spazi di soluzione e di variazione; e abbiamo stipulato la condizione statica

$$\mathcal{B}_1[\mathbf{u},\phi] = (\mathbf{s}_o, -\omega_o) \qquad in \quad (\partial_s\Omega, \partial_d\Omega).$$

[1] Le condizioni al bordo relative agli operatori $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ sono frequentemente chiamate, per ragioni storiche, rispettivamente condizioni al bordo *di tipo Dirichlet* e *di tipo Neumann*.

Tuttavia in elettroelasticità tridimensionale si danno condizioni al bordo che non rientrano nella classe di condizioni viste finora, ma sono essere *di tipo misto.* In quest'ultimo caso sulla stessa porzione di frontiera di Ω vengono assegnate sia condizioni geometriche che statiche, purchè per ogni punto della frontiera si abbia che la combinazione $\big(\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\mathbf{n},\ \phi(\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{n})\big)$ ammetta una specificazione complementare di $(\mathbf{u},\phi)$ e di $(\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\mathbf{n},\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{n})$.[2] Vedremo questa alternativa nel prossimo paragrafo.

7. Condizioni al bordo generalizzate

Le condizioni al bordo che frequentemente capitano nella teoria delle strutture, almeno per la parte meccanica, non sono né di tipo geometrico né di tipo statico, condizioni che abbiamo discusso fino ad ora, ma di tipo *misto.* Così, le porzioni di frontiera $(\partial_u\Omega,\partial_\phi\Omega)$ e $(\partial_s\Omega,\partial_d\Omega)$ dove sono assegnate le condizioni geometriche e statiche non sono più disgiunte ma viene specificata una combinazione complementare di componenti sia di $(\mathbf{u},\phi)$ e sia di $(\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\mathbf{n},\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{n})$ per ogni punto di $\partial\Omega$. In questo modo si formula un problema al contorno misto.

Per modellare questo noi introduciamo un campo tensoriale $\mathbf{P}_\text{o}$, per i dati meccanici, e un campo scalare P_o, per i dati elettrici, definiti su $\partial\Omega$. Il campo tensoriale $\mathbf{P}_\text{o}$ assume, per ogni punto di $\partial\Omega$, la forma di un proiettore ortogonale.[3] Segue che

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_\text{o}(p)\in\{\mathbf{I},\ \mathbf{O};\ \mathbf{n}(p)\otimes\mathbf{n}(p),\ \mathbf{I}-\mathbf{n}(p)\otimes\mathbf{n}(p)\}\\ &P_\text{o}(p)\in\{1,\ 0\}\end{aligned}\qquad p\in\partial\Omega. \tag{7.55}$$

Scriviamo allora in un punto di $\partial\Omega$ le combinazioni $\big(\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sn},\ \phi(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\big)$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sn}=\mathbf{P}_\text{o}\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sn}+(\mathbf{I}-\mathbf{P}_\text{o})\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sn}=\mathbf{P}_\text{o}\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sn}+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P}_\text{o})\mathbf{Sn},$$

$$\phi(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})=P_\text{o}\phi(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})+(1-P_\text{o})\phi(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})=P_\text{o}\phi(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})+\phi\big((1-P_\text{o})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\big),$$

[2] Queste considerazioni hanno valore solo per la parte meccanica, ma si estendono anche alla parte elettrica, dove le condizioni sono ben distinte naturalmente, per uniformare la scrittura.

[3] Le proprietà di un proiettore ortogonale $\mathbf{P}$ sono: *i)* $\mathbf{P}\in\text{Sym}$, *ii)* $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$.

e di conseguenza possiamo riscrivere le (6.53) e (6.54) rispettivamente come

$$\mathcal{B}_0[(\mathbf{u},\phi)] := (\mathbf{P}_o\mathbf{u},\ P_o\phi), \tag{7.56}$$

e

$$\mathcal{B}_1[(\mathbf{u},\phi)] := \big((\mathbf{I}-\mathbf{P}_o)\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)\mathbf{n},\ (1-P_o)(\mathbf{d}(\mathbf{u},\phi)\cdot\mathbf{n})\big). \tag{7.57}$$

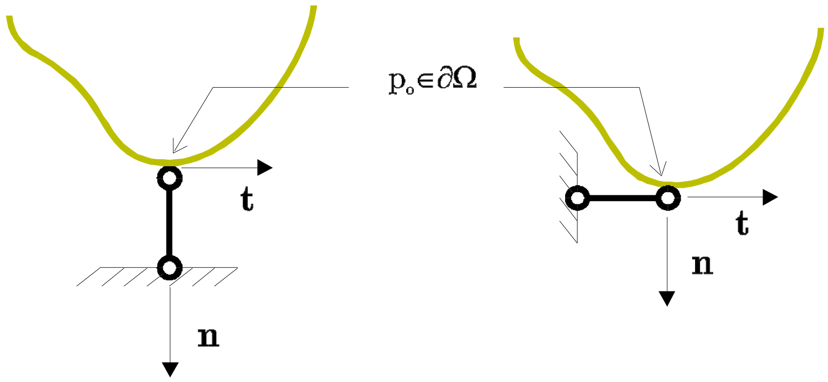

Figura II.1 Condizioni al bordo generalizzate.

In questo modo la maniera classica di assegnare i dati al bordo viene sostituita dall'assegnazione di due triplette, $(\mathbf{u}_o,\mathbf{s}_o,\mathbf{P}_o)$ e (ϕ_o,ω_o,P_o), di campi su $\partial\Omega$, che soddisfa la seguente condizione di mutua consistenza

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}-\mathbf{P}_o)\mathbf{u}_o = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{P}_o\mathbf{s}_o = \mathbf{0}, \\ (1-P_o)\phi_o = 0\,, \qquad P_o\omega_o = 0, \end{aligned} \tag{7.58}$$

seguita da

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0[(\mathbf{u},\phi)] = (\mathbf{u}_o,\ \phi_o), \\ \mathcal{B}_1[(\mathbf{u},\phi)] = (\mathbf{s}_o,\ \omega_o). \end{aligned} \tag{7.59}$$

È facile verificare che, in un punto $p\in\partial\Omega$, dare $(\mathbf{P}_o(p)=\mathbf{I},\ P_o(p)=1)$ e $(\mathbf{P}_o(p)=\mathbf{O},\ P_o(p)=0)$, equivale a dare le usuali condizioni geomeriche e statiche. Le altre due scelte complementari di $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{P}_o(p)=\mathbf{n}(p)\otimes\mathbf{n}(p)$ e $\mathbf{P}_o(p)=\mathbf{I}-\mathbf{n}(p)\otimes\mathbf{n}(p)$, danno le *condizioni di contatto*

$$(\mathbf{u}-\mathbf{u}_o)\cdot\mathbf{n}=0\,, \qquad (\mathbf{I}-\mathbf{n}(p)\otimes\mathbf{n}(p))(\mathbf{S}(\mathbf{u},\phi)-\mathbf{s}_o)=0,$$

e, rispettivamente

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n}(p) \otimes \mathbf{n}(p))(\mathbf{u} - \mathbf{u}_o) = 0\,, \qquad (\mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) - \mathbf{s}_o) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

esemplificate in fig.II.1.

Per poter ammettere una formulazione variazionale, i principi energetici *etc.*, con le condizioni al bordo generalizzate bisogna ridefinire gli spazi delle soluzioni deboli, delle variazioni, staticamente ammissibili come segue

lo spazio $\bar{U}_o \times \bar{\Phi}_o$ delle *soluzioni deboli*, con

$$\bar{U}_o := \{\mathbf{u} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{P}_o\mathbf{u} = \mathbf{u}_o \quad in \quad \partial\Omega\},$$

$$\bar{\Phi}_o := \{\phi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad P_o\phi = \phi_o \quad in \quad \partial\Omega\};$$

lo spazio $V_o \times \Psi_o$ delle *variazioni*, con

$$V_o := \{\mathbf{v} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{P}_o\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad in \quad \partial\Omega\},$$

$$\Psi_o := \{\psi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad P_o\psi = 0 \quad in \quad \partial\Omega\};$$

lo spazio $\tilde{S}_o \times \tilde{D}_o$ degli sforzi e spostamenti elettrici *staticamente ammissibili*, con

$$\tilde{S}_o := \{\mathbf{S} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{S} \in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega},$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{S} + \mathbf{b}_o = \mathbf{0} \quad in \quad \Omega, \quad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s}_o \quad in \quad \partial\Omega\},$$

$$\tilde{D}_o := \{\mathbf{d} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{d} - \gamma_o = 0 \quad in \quad \Omega,$$

$$(1 - P_o)\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = -\omega_o \quad in \quad \partial\Omega\}.$$

Allora, le equazioni dei lavori virtuali diventano

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v}, \qquad (\mathbf{S}, \mathbf{v}) \in \tilde{S}_o \times V_o, \\ \int_\Omega \mathbf{d} \cdot \nabla\psi &= -\int_\Omega \gamma_o\psi - \int_{\partial\Omega} \omega_o\psi, \qquad (\mathbf{d}, \psi) \in \tilde{D}_o \times \Psi_o, \end{aligned} \tag{7.60}$$

e la formulazione debole del problema dell'equilibrio elettroelastico consiste nel cercare una coppia $(\mathbf{u}, \phi) \in \bar{U}_o \times \bar{\Phi}_o$ tale che

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla\mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v} \in V_o, \\ \int_\Omega \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \nabla\psi &= -\int_\Omega \gamma_o\psi - \int_{\partial\Omega} \omega_o\psi, \qquad \psi \in \Psi_o, \end{aligned} \tag{7.61}$$

(confronta rispettivamente la (1.11) e la (1.13)).[4]

Analogamente, per la formulazione debole complementare bisogna ridefinire gli spazi delle soluzioni deboli complementari, delle variazioni complementari, cinematicamente ammissibili come segue

lo spazio $\bar{S}_o \times \bar{D}_o$ delle *soluzioni deboli complementari*, con

$$\begin{aligned}\bar{S}_o &:= \{\mathbf{S} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{S} \in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega}, \\ &\qquad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s}_o \quad in \quad \partial\Omega\}, \\ \bar{D}_o &:= \{\mathbf{d} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad (1 - P_o)\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = -\omega_o \quad in \quad \partial\Omega\};\end{aligned}$$

lo spazio $T_o \times G_o$ delle *variazioni complementari*, con

$$\begin{aligned}T_o &:= \{\mathbf{T} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{T} \in \mathrm{Sym} \quad in \quad \overline{\Omega}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad in \quad \Omega, \\ &\qquad (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad in \quad \partial\Omega\}, \\ G_o &:= \{\mathbf{g} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{g} = 0 \quad in \quad \Omega, \\ &\qquad (1 - P_o)\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad in \quad \partial\Omega\};\end{aligned}$$

lo spazio $K_o \times L_o$ degli spostamenti e dei potenziali elettrici *cinematicamente ammissibili*, con

$$\begin{aligned}K_o &:= \{(\mathbf{u}, \mathbf{E}) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad \mathbf{E} \in Sym \quad in \quad \overline{\Omega}, \\ &\qquad \mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{u} = \mathbf{E} \quad in \quad \Omega, \quad \mathbf{P}_o\mathbf{u} = \mathbf{u}_o \quad in \quad \partial\Omega\}, \\ L_o &:= \{(\phi, \mathbf{e}) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}) \quad | \quad -\nabla\phi = \mathbf{e} \quad in \quad \Omega, \\ &\qquad P_o\phi = \phi_o \quad in \quad \partial\Omega\}.\end{aligned}$$

Allora, le equazioni dei lavori virtuali complementari diventano

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}, \qquad ((\mathbf{u}, \mathbf{E}), \mathbf{T}) \in K_o \times T_o, \\ \int_\Omega \mathbf{e} \cdot \mathbf{g} &= -\int_{\partial\Omega} \phi_o(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}), \qquad ((\phi, \mathbf{e}), \mathbf{g}) \in L_o \times G_o,\end{aligned} \tag{7.62}$$

[4] Si noti che, per le seconde relazioni delle (7.58) si ha

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{v}, \qquad \int_{\partial\Omega} (1 - P_o)\omega_o\psi = \int_{\partial\Omega} \omega_o\psi.$$

e la formulazione debole complementare del problema dell'equilibrio elettroelastico consiste nel cercare una coppia $(\mathbf{S}, \mathbf{d}) \in \bar{S}_o \times \bar{D}_o$ tali che

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\mathbf{S}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{T} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{T} \in T_o, \\ &\int_\Omega \nabla\phi(\mathbf{S}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{g} = \int_{\partial\Omega} \phi_o(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}), \qquad \mathbf{g} \in G_o, \end{aligned} \tag{7.63}$$

(confronta rispettivamente la (2.14) e la (2.16)).[5]

Infine, introducendo il funzionale Π generalizzato definito sullo spazio $\bar{U}_o \times \bar{D}_o$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{d}) \to \Pi\{\mathbf{u}, \mathbf{d}\} := \int_\Omega \hat{\mathrm{W}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{d}) + \int_{\partial\Omega} P_o(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\phi_o \\ - \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{7.64}$$

e il funzionale Θ generalizzato definito sullo spazio $\bar{U}_o \times \bar{\Phi}_o$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \phi) \to \Theta\{\mathbf{u}, \phi\} = \int_\Omega \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{d}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{e}(\phi)) \\ \int_\Omega \gamma_o\phi + \int_{\partial\Omega} (1 - P_o)\omega_o\phi - \int_\Omega \mathbf{b}_o \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{7.65}$$

possiamo costruire due nozioni di soluzione variazionale, discutere il ruolo delle soluzioni forti, e così via.

[5] Si noti che, per le prime relazioni delle (7.58) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{P}_o\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{T}\mathbf{n} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}, \qquad \int_{\partial\Omega} P_o\phi_o(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\partial\Omega} \phi_o(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}).$$