

CAPITOLO

# I

## Materiali piezoelettrici

La meccanica dei continui studia le interazioni tra corpi, siano esse meccaniche, elettromagnetiche, gravitazionali, o di altra natura. Occorre conoscere le proprietà del materiale costituente il corpo per capire quali interazioni ne influenzano l'evoluzione o, in particolare, l'equilibrio. Occorre, ad esempio, conoscere la distribuzione di massa per valutare l'azione gravitazionale, o la densità di carica elettrica per capire l'effetto di un campo elettrico esterno.

Di un corpo di materiale piezoelettrico è richiesta la conoscenza sia delle caratteristiche meccaniche che di quelle elettriche. Infatti, nei materiali piezoelettrici lo stato tensionale e deformativo è legato alla propria polarizzazione elettrica. La teoria dei campi elettromagnetici fornisce la relazione tra la polarizzazione elettrica nel corpo e grandezze quali il *campo elettrico* ed il campo di *spostamento elettrico*.

Si richiamano nel seguito alcuni elementi di elettrodinamica e di meccanica dei continui. Per una esauriente trattazione degli argomenti si rimanda, per la elettrodinamica dei continui, ai testi di Eringen e Maugin [31], di Maugin [62] e di Landau e Lifšits [50]; per la meccanica dei continui, ai testi di Truesdell e Toupin [96], di Gurtin [35] e [36] e di Podio-Guidugli [73]. In particolare, per la piezoelettricità si rimanda ai testi di Ikeda [42] e di Tiersten [90].

## 1. Dielettrici

In relazione alle proprietà elettriche i materiali si dividono in due gruppi principali: *conduttori* e *dielettrici* [50]. I primi differiscono dai secondi per il fatto che, nel caso elettrostatico, l'intensità del campo elettrico  $\mathbf{e}$  dentro il conduttore è nulla (cioè, un campo elettrico esterno non riesce a penetrare dentro il conduttore e di conseguenza non incide sulle sue proprietà termodinamiche [86]). Nei dielettrici, invece, un campo elettrico applicato penetra dentro il dielettrico cambiandone così le proprietà termodinamiche. Nel caso dei materiali piezoelettrici il legame tra proprietà meccaniche ed elettriche si esprime, ad esempio, tramite l'entalpia  $\mathcal{H}$ , che può essere espressa in funzione del campo elettrico  $\mathbf{e}$  e del tensore della deformazione  $\mathbf{E}$ .<sup>1</sup>

Un dielettrico è costituito da molecole elettricamente neutre. Tuttavia una molecola, anche se elettricamente neutra nel suo insieme, può avere un momento di dipolo. I dielettrici si distinguono in due classi: i dielettrici le cui molecole hanno un momento di dipolo anche in assenza di campo elettrico esterno (dielettrici con molecole polari); i dielettrici le cui molecole in assenza di campo hanno un momento di dipolo nullo, ma all'applicazione del campo elettrico esterno si deformano ed acquistano un momento di dipolo (dielettrici con molecole non polari). In assenza di

---

<sup>1</sup> Un'altra distinzione equivalente è che nei dielettrici non può circolare una corrente elettrica continua.

un campo elettrico esterno i momenti di dipolo delle molecole polari sono orientati in modo casuale e il loro momento elettrico totale è nullo. Quando ad un dielettrico viene applicato un campo elettrico i momenti di dipolo delle molecole polari si orientano lungo la direzione del campo (il grado di orientamento aumenta al crescere dell'intensità del campo  $\mathbf{e}$ ) e il momento elettrico totale del dielettrico diventa diverso da zero. Lo stesso fenomeno accade nei dielettrici con molecole non polari ma dall'intensità del campo elettrico applicato dipende, oltre che l'orientamento dei momenti di dipolo indotti, anche il valore stesso del momento di dipolo.

Un dielettrico il cui momento elettrico totale è diverso da zero si dice *polarizzato*. I dipoli orientati lungo il campo, in seguito alla polarizzazione, generano nel dielettrico un campo elettrico diretto in verso opposto al campo elettrico esterno. Il campo elettrico generato dalle cariche polarizzate può portare ad una redistribuzione delle cariche che generano il campo elettrico esterno. Questa variazione porterà, a sua volta una variazione nel campo elettrico dovuto alle cariche polarizzate e così via. Infine, in un periodo di tempo assolutamente trascurabile, si stabilizza su uno stato di equilibrio nel quale il campo elettrico  $\mathbf{e}$  dentro il dielettrico è pari a

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{e}_p \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{e}_p$  rappresenta il campo elettrico totale dovuto alle cariche polarizzate e  $\mathbf{d}$  è il vettore *spostamento elettrico* o vettore *di induzione elettrostatica*.

Il grado di polarizzazione è caratterizzato dal valore del vettore *polarizzazione*  $\mathbf{p}$  pari al momento elettrico del dielettrico per unità di volume. È noto dall'elettrostatica che per un dielettrico isotropo  $\Omega$  si hanno le seguenti relazioni

$$\mathbf{e}_p = 4\pi\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \chi\mathbf{e},$$

dove  $\chi$  rappresenta il coefficiente di *polarizzazione elettrica* o *suscettività dielettrica* del dielettrico. Sostituendo questa relazione nella (1.1) otteniamo

$$\mathbf{d} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{e},$$

cioè

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\mathbf{e},$$

dove  $C$  rappresenta la *permeabilità dielettrica* del dielettrico. La suscettibilità dielettrica è sempre positiva di conseguenza per ogni dielettrico  $C > 1$  (per il vuoto  $C = 1$ ).

In un dielettrico anisotropo la dipendenza lineare tra lo spostamento elettrico e il campo elettrico è la seguente

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\mathbf{e}, \tag{1.2}$$

dove  $\mathbf{C}$  è un tensore simmetrico del secondo ordine chiamato *tensore dielettrico*.

## 2. L'effetto piezoelettrico

Analizziamo l'effetto della polarizzazione nel dielettrico dal punto di vista meccanico, cioè, in termini di deformazione e di sforzo. Sebbene elettricamente neutri, tutti i dielettrici sono composti da molecole costituite da particelle cariche (nuclei ed elettroni), che sono usualmente influenzate dalla presenza di un campo elettrico. Il campo sposta le cariche negative e positive in direzioni opposte a partire dalle loro posizioni di equilibrio, e ciò causa la polarizzazione elettrica della molecola. Lo spostamento medio è in genere limitato da forti azioni stabilizzanti, così che lo spostamento della carica è raramente maggiore di una frazione del diametro molecolare. In ogni caso, se si osserva un provino di materiale dielettrico polarizzato, si notano, come effetti del primo ordine, degli spostamenti dei reticoli cristallini caricati negativamente e positivamente; in tal modo viene a stabilirsi un nuovo bilancio di forze all'interno del dielettrico. Se si considerano effetti del secondo ordine, si osserva che lo spostamento longitudinale delle cariche genera una forza trasversale che produce una leggera contrazione laterale, ciò permette un allungamento del provino nella di-

reazione parallela al campo. Questo fenomeno è chiamato *elettrostrizione* ed è comune a tutti i solidi dielettrici. Il fenomeno inverso, chiamato *piezoelettricità* (dal greco 'πιεζεζειν'  $\equiv$  premere), di indurre una polarizzazione all'interno del dielettrico tramite una deformazione meccanica non è in generale sempre possibile ma si riscontra per quelle classi di materiali in cui manca un centro di simmetria per le proprie cariche,<sup>2</sup> vedi quarzo e sale di Rochelle. In questi cristalli gli sforzi e le deformazioni dovuti alla elettrostrizione sono effetti del primo ordine, e non più del secondo come nei normali dielettrici, cioè, sono proporzionali al campo elettrico. Lo stesso vale per l'effetto piezoelettrico (cioè, la deformazione del piezoelettrico è associata alla comparsa di un campo elettrico proporzionale alla deformazione stessa). Tali cristalli permettono la conversione dell'energia meccanica in energia elettrica e viceversa. I materiali piezoelettrici si prestano, pertanto, ad un utilizzo quali sensori ed attuatori e, in generale, come trasduttori di piccole potenze. Riepilogando, si definisce *effetto piezoelettrico* la variazione della polarizzazione di un dielettrico soggetto ad una deformazione meccanica; e si definisce *effetto elettrostrittivo* (o *effetto piezoelettrico inverso*) la variazione delle dimensioni di un dielettrico al variare dell'intensità del campo elettrico.

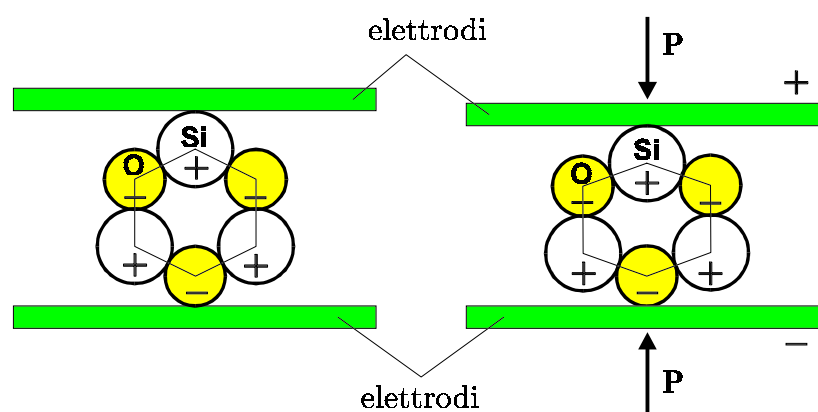


Figura I.1 Effetto piezoelettrico.

<sup>2</sup> L'effetto piezoelettrico non può esistere in un materiale isotropo perché questo possiede tutte le simmetrie possibili.

### 3. Storia ed applicazioni

L'effetto piezoelettrico fu scoperto dai fratelli Pierre e Jacques Curie<sup>3</sup> ([42] e [58]). Questa scoperta era attesa: infatti, i precedenti studi di Pierre Curie sulle relazioni tra fenomeni piroelettrici e simmetria dei cristalli avevano condotto i due fratelli non solo ad attendersi lo sviluppo di differenza di potenziale a seguito di pressioni sul materiale ma anche a capire in quale direzione la pressione dovesse essere applicata ed in quali classi di materiali l'effetto dovesse essere atteso. Essi trovarono l'effetto nella boracite, nel quarzo, nell'acido tartarico e nel sale Rochelle. I risultati furono resi noti in un articolo sui *Comptes Rendus de l'Academie des sciences de Paris* nel marzo del 1880.

L'effetto piezoelettrico inverso fu predetto teoricamente da Lippman sulla base di considerazioni termodinamiche; la predizione fu verificata dai Curie negli anni successivi.<sup>4</sup> Sebbene parte della relazione tra piezoelettricità e struttura cristallina sia stata stabilita dai Curie, essa fu rigorosamente determinata da Woldemar Voigt nel 1894. Combinando le nozioni di simmetria dei tensori elastici e dei vettori elettrici con le nozioni di simmetria geometrica dei cristalli, egli rese chiaro in quali delle 32 classi di cristalli gli effetti piezoelettrici potevano esistere, e per ogni classe mostrò quali dei 18 possibili coefficienti piezoelettrici potevano avere valore differente da zero.

Sebbene l'effetto piezoelettrico fosse utilizzato per misurare le cariche elettriche (per esempio, da Pierre Curie per misurare la carica emessa dal radio), esso non fu

---

<sup>3</sup> Questi constatarono l'apparizione di cariche elettriche sulla superficie di una lamina di quarzo soggetta a deformazione. Una compressione di  $10^5$  Pa ( $\sim 1$  Kg/cm<sup>2</sup>) produsse l'apparizione di una differenza di potenziale di alcuni centesimi di volt sulle facce del cristallo di quarzo.

<sup>4</sup> La variazione delle dimensioni di un dielettrico in seguito all'elettrostrizione generalmente non è grande; per esempio, nel caso del quarzo, per una differenza di potenziale di alcune centinaia di volt applicata su due facce opposte del cristallo si ha una variazione della dimensione, lungo l'asse ortogonale alle facce considerate prima, del cristallo di circa  $10^{-7}$  cm. Ha interesse per le applicazioni sviluppare materiali che esibiscono un effetto piezoelettrico marcato.

usato in applicazioni pratiche per circa trenta anni. Durante la prima guerra mondiale, a causa della grande perdita di navi da parte dell'Intesa dovuta ai sottomarini tedeschi, fu fatto uno sforzo per trovare un modo di localizzare i vascelli sommersi. Poiché le onde radio non penetrano nell'acqua marina, ci si rivolse alle onde acustiche. I migliori risultati furono ottenuti attraverso l'uso di cristalli piezoelettrici di quarzo per generare onde acustiche, un metodo sviluppato da Paul Langevin. Promettenti risultati furono ottenuti prima della fine della guerra ma non ci fu tempo per applicarli in modo concreto. I trasduttori, tipo quello di Langevin, furono utilizzati più tardi come apparecchiature di sondaggio dei fondali marini. L'apparato di Langevin consisteva di lamine di quarzo incollate a piastre di acciaio. Per determinare la profondità, un impulso elettrico generava un'onda acustica impulsiva verso il fondale. L'onda riflessa dal fondale veniva captata dal trasduttore sfasata di un lasso temporale rispetto a quella inviata; misurando tale lasso di tempo e conoscendo la velocità del suono in acqua, si determinava la distanza dal fondale.<sup>5</sup>

Attualmente i materiali piezoelettrici sono usati in molteplici applicazioni commerciali. I trasduttori piezoelettrici vengono utilizzati in molti dispositivi per trasformare azioni meccaniche in energia elettrica. Trasduttori di questo tipo si impiegano in manometri piezoelettrici, in misuratori e registratori di pressioni e di frequenze, in generatori e ricevitori (per esempio i microfoni, dove le onde di pressione sonore sono convertite in segnali elettrici) e in tanti altri strumenti. Nell'industria telefonica vengono utilizzati cristalli di quarzo come filtri molto selettivi, che permettono di avere molte conversazioni telefoniche su un unico cavo.

L'effetto piezoelettrico inverso può essere utilizzato per generare oscillazioni meccaniche di frequenza desiderata tramite l'applicazione di un campo elettrico alternato. È di particolare interesse il caso in cui la frequenza delle oscillazioni della tensione applicata coincide con la prima frequenza propria del dielettrico (risonan-

---

<sup>5</sup> Trasduttori di quarzo furono inoltre utilizzati per costruire interferometri.

za), perché l'ampiezza delle oscillazioni è particolarmente grande; questo fenomeno può essere utilizzato in dispositivi atti a generare oscillazioni di frequenza ultrasuona (ultrasuoni). In questa classe rientrano, come accennato nell'introduzione, i risonatori ad alta frequenza in cui vengono eccitati i modi di vibrazione di spessore. Gli emettitori piezoelettrici che usano l'effetto elettrostrittivo vengono utilizzati ampiamente nella radiotecnica. Altre applicazioni di interesse commerciale sono la stabilizzazione di frequenza dei generatori di oscillazioni elettromagnetiche ed il campione di frequenza di quarzo piezoelettrico (quest'ultimo viene utilizzato negli orologi al quarzo).

Facciamo infine cenno ai piezoelettrici ferroelettrici che esibiscono il fenomeno della *ferroelasticità*. Questi materiali sono quelli che presentano in modo eccezionalmente grande l'effetto piezoelettrico. I ferroelettrici sono caratterizzati da una permeabilità dielettrica che varia molto al variare dell'intensità del campo elettrico esterno, raggiungendo valori elevati in confronto ai dielettrici ordinari (i ferroelettrici occupano fra i dielettrici il posto che occupano i ferromagnetici fra i materiali magnetici). Un materiale ferroelastico può essere schematizzato come un materiale in cui esistono due stati caratteristici, nei quali le costanti piezoelettriche hanno valore diverso; nel passaggio da uno stato all'altro si ha una variazione nella simmetria cristallina. Il passaggio di stato può essere causato tramite l'applicazione di una tensione (in genere molto alta); un materiale ferroelastico è, per esempio, il quarzo. Con i materiali ferroelastici è dunque possibile realizzare trasduttori aventi diverse configurazioni di attivazione.



## 4. Equazioni di Maxwell per i piezoelettrici

Come abbiamo precedentemente detto, in un materiale piezoelettrico il comportamento meccanico e quello elettrico sono legati tra loro, perciò le equazioni che governano l'equilibrio meccanico ed elettrico si presentano in forma accoppiata. Nel capitolo II queste equazioni saranno illustrate nel dettaglio; in questa sezione invece si mostra come le equazioni elettriche della piezoelettricità siano derivate da quelle più generali dell'elettromagnetismo [49] e [90].

Le equazioni di Maxwell per un dielettrico  $\Omega$ , in unità Gaussiane, sono

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \operatorname{Div} \mathbf{b} &= 0, \\ \operatorname{Div} \mathbf{d} &= 4\pi \gamma_0. \end{aligned} \quad \text{in } \Omega \quad (4.3)$$

dove  $\mathbf{h}$  è il campo *magnetico*,  $\mathbf{b}$  è il vettore *flusso magnetico*,  $\mathbf{j}$  è il vettore *flusso elettrico* e  $\gamma_0$  è la *densità di carica elettrica*. I vettori presenti nelle (4.3) sono correlati tra loro tramite le equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{e} + 4\pi \mathbf{p}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}, \end{aligned} \quad \text{in } \Omega \quad (4.4)$$

dove  $\mathbf{m}$  è il vettore di *magnetizzazione*.

La (4.3)<sub>4</sub> rimane definita una volta nota  $\gamma_0$  dalla equazione di conservazione della carica elettrica in forma differenziale

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \operatorname{Div} \mathbf{j} = 0. \quad \text{in } \Omega$$

Le condizioni al bordo nel problema elettromagnetico sono determinate dalla forma integrale delle equazioni di Maxwell. In effetti le equazioni differenziali dell'elettromagnetismo possono essere determinate a partire dalle forme integrali quando sono assunte particolari condizioni di regolarità. Le forme integrali sono:

la legge di Ampere

$$\oint_l \mathbf{h} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_s \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n} + \frac{4\pi}{c} \int_s \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.5)$$

la legge di Faraday

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{e} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{1}{c} \int_s \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n}, \\ \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \int_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} &= 4\pi \int_\Omega \gamma_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove  $l$  denota un circuito chiuso generico e  $s$  una generica superficie aperta contenente  $l$ , mentre  $S$  denota una generica superficie chiusa. La forma integrale della conservazione della carica elettrica è:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\int_\Omega \dot{\rho}_0. \quad (4.7)$$

Come è noto, le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in termini di un potenziale vettore  $\mathbf{a}$  e di un potenziale scalare  $\phi$  definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \text{rot } \mathbf{a}, \\ \text{rot}(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{a}}) &= 0, \\ \mathbf{e} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{a}} &= -\nabla\phi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si deve notare che il potenziale vettore  $\mathbf{a}$  non è unico poiché ogni altro  $\bar{\mathbf{a}}$  definito da

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \nabla\psi,$$

dove  $\psi$  è un campo scalare arbitrario, può essere usato come potenziale vettore.

Quando si riscrivono le equazioni di Maxwell in termini di potenziale vettore e scalare si ottiene

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h} &= \frac{1}{c}\dot{\mathbf{d}} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \mathbf{b} &= \text{rot } \mathbf{a}, \\ \mathbf{e} &= \nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{a}}, \\ \text{Div } \mathbf{d} &= 4\pi\gamma_0, \end{aligned} \quad \text{in } \Omega \quad (4.9)$$

restando valide le equazioni (4.4). Sebbene  $\mathbf{a}$  e  $\phi$  non siano univocamente determinati,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{j}$  risultano unici.

Quando prendiamo in esame la piezoelettricità, consideriamo solo dielettrici polarizzabili e non magnetizzabili. Allora, si può a ragione porre

$$\mathbf{j} = 0 \quad \& \quad \mathbf{m} = 0, \quad (4.10)$$

in tutte le equazioni. In tali circostanze segue dalle (4.4) che

$$\mathbf{h} = \mathbf{b},$$

e che  $\mathbf{h}$  (e conseguentemente  $\mathbf{a}$ ) non può essere nullo, perché dalla  $(4.9)_1$  e  $(4.10)_1$  si ha

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{d}} \quad \& \quad \mathbf{d} \neq 0.$$

Fatte tali assunzioni le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{h} &= \text{rot } \mathbf{a} \\ \mathbf{e} &= \nabla \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{a}} \\ \text{Div } \mathbf{d} &= 4\pi\gamma_0 \end{aligned} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.11)$$

con

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + 4\pi\mathbf{p} \quad \text{in } \Omega.$$

L'assunzione di base usata per ottenere le equazioni della piezoelettricità è che ogni componente di  $\nabla\phi$  che entra nel problema soddisfa

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right| \ll |\nabla\phi|.$$

Tale assunzione, chiamata approssimazione *di campo elettrico quasi-statico*, è ben verificata sperimentalmente. Essa è valida quando le onde elettromagnetiche sono sostanzialmente disaccoppiate dalle onde elastiche, e quando si considerano lunghezze

d'onda elastica molto più corte delle lunghezze d'onda elettromagnetica della stessa frequenza ( $\lambda_{elettromagnetica} \approx 10^5 \lambda_{elastica}$ ). Ovvvia conseguenza della approssimazione quasi-statica è che si può derivare il campo elettrico da un potenziale scalare:

$$\mathbf{e} = -\nabla\phi.$$

Si deve notare che l'utilizzo delle unità Gaussiane in questo paragrafo è funzionale esclusivamente all'imposizione della approssimazione quasi-statica;  $\mathbf{a}$  e  $\phi$  hanno le stesse unità Gaussiane, ciò permette di fare l'approssimazione più facilmente in tali unità. In ogni caso, una volta che l'approssimazione è stata fatta, si è certamente liberi di utilizzare qualsiasi unità si voglia.

Riscriviamo l'equazione di Maxwell, in unità SI, valide per un materiale piezoelettrico

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\nabla\phi \\ \text{Div } \mathbf{d} &= \gamma_0 \end{aligned} \quad \text{in } \Omega. \quad (4.12)$$

La condizione al bordo relativa alla (4.12)<sub>2</sub>, che si determina dalla (4.6)<sub>3</sub>, si scrive

$$[\mathbf{d}] \cdot \mathbf{n} = \omega \quad \text{in } \partial_d\Omega, \quad (4.13)$$

dove con  $\partial_d\Omega$  indichiamo la frontiera di  $\Omega$  dove viene assegnato la carica superficiale  $\omega$ , e con  $[\mathbf{d}]$  si indica il salto<sup>6</sup> dello spostamento elettrico attraverso la frontiera di  $\Omega$  [31].

Nello scrivere la condizione di bordo (4.13) si assume che lo spostamento elettrico  $\mathbf{d}^+$  si annulli. Questo è rigorosamente vero se  $\Omega$  è circondato da conduttori, ma è di solito un'ipotesi accettabile, se  $\Omega$  si trova nel vuoto o nell'aria [90].

La (4.13)<sub>2</sub> diventa

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = -\omega, \quad (4.14)$$

dove  $\mathbf{d}$  indica lo spostamento elettrico all'interno di  $\Omega$ .

---

<sup>6</sup> L'operatore salto  $[\cdot]$  è così definito:  $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$ .

## 5. Elementi di meccanica dei continui

In questo paragrafo si danno alcuni elementi di meccanica dei continui relativi alla cinematica e alla dinamica, nell'ambito della teoria linearizzata, che ci saranno utili per formulare nel prossimo capitolo il problema dell'equilibrio elettroelastico. Queste note sono tratte da Podio-Guidugli [73].

Sia  $\mathcal{E}$  uno spazio euclideo tridimensionale, e sia  $\mathcal{V}$  lo spazio vettoriale ad esso associato, inteso dotato dell'usuale struttura di prodotto interno e orientato in uno dei due modi possibili. Sia  $\text{Lin}$  lo spazio vettoriale dei tensori del secondo ordine su  $\mathcal{V}$ ; indichiamo con  $\text{Sym}$  e  $\text{Skw}$  gli insiemi degli elementi, rispettivamente, simmetrici ed antisimmetrici di  $\text{Lin}$ . Sia inoltre  $\text{Orth}$  il gruppo delle trasformazioni ortogonali di  $\text{Lin}$ , con  $\text{Orth} := \{\mathbf{Q} \in \text{Lin} \mid \mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}\}$ , dove  $\mathbf{I}$  rappresenta il  *tensore identità*  di  $\mathcal{V}$ . Dotiamo  $\mathcal{E}$  di un sistema di riferimento cartesiano  $\{o; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  con una base ortogonale di vettori  $\mathbf{c}_i \in \mathcal{U}$ , dove indichiamo con  $\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid |\mathbf{v}| = 1\}$  la sfera dei vettori di lunghezza unitaria. Dato  $p \in \mathcal{E}$ ,  $(p - o) \in \mathcal{V}$  è il vettore posizione che lo individua ed in particolare la terna  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi^i = (p - o) \cdot \mathbf{c}_i$ , delle componenti del vettore posizione dà le coordinate cartesiane del punto  $p$ .

Consideriamo un generico corpo continuo, la cui *configurazione di riferimento* è identificata con una regione regolare limitata e connessa  $\Omega \subset \mathcal{E}$ .

Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(p) \equiv (u_1, u_2, u_3)$  un campo di spostamenti definito su un punto  $p$  di  $\Omega$ , definiamo il *tensore di deformazione infinitesima*  $\mathbf{E}$  come

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t). \quad (5.15)$$

Si considera in  $\Omega$  un *sistema di forze di Cauchy*  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  così definito

$$\mathbf{s} : \Omega \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \text{con } \mathbf{s}(\cdot, \mathbf{n}) \text{ regolare per ogni } \mathbf{n} \in \mathcal{U};$$

$$\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}, \quad \text{continuo,}$$

dove  $\mathbf{s}(p, \mathbf{n}(p))$  si interpreta come una forza per unità di superficie e  $\mathbf{b}(p)$  come una forza per unità di volume. Un sistema di forze si dice *bilanciato* in  $\Omega$ , se accade che,

che per ogni parte  $\Pi$  di  $\Omega$  si abbia

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\Pi, \Omega) &:= \int_{\partial\Pi} \mathbf{s}(p, \mathbf{n}(p)) + \int_{\Pi} \mathbf{b}(p) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}(\Pi, \Omega) &:= \int_{\partial\Pi} (p - o) \times \mathbf{s}(p, \mathbf{n}(p)) + \int_{\Pi} (p - o) \times \mathbf{b}(p) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Le (5.16) prendono il nome di *assiomi di Eulero*.

Un fondamentale teorema di Cauchy costruisce la nozione di sforzo per sistemi di forze bilanciati, provando che, per ogni punto fissato  $p \in \Omega$ , l'applicazione  $\mathbf{s}(p, \cdot)$  ha la rappresentazione:

$$\mathbf{s}(p, \mathbf{n}) = \mathbf{S}(p)\mathbf{n}, \quad \mathbf{S}(p) \in \text{Lin}.$$

$\mathbf{S}(p)$  è il  *tensore dello sforzo*  nel punto  $p$ ; se  $\mathbf{s}(p, \mathbf{c}_i)$  è il vettore di sforzo sulla giacitura di normale  $\mathbf{c}_i$  per  $q$ , vale per  $\mathbf{S}(p)$  la seguente formula di rappresentazione:

$$\mathbf{S}(p) = \sum_i \mathbf{s}(p, \mathbf{c}_i) \otimes \mathbf{c}_i. \quad (5.17)$$

Inoltre, il teorema di Cauchy contiene una caratterizzazione locale del bilancio delle forze:

$$\text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega; \quad (5.18)$$

mentre, se vale la (5.18), il bilancio dei momenti implica che

$$\mathbf{S} \in \text{Sym} \quad \text{in } \bar{\Omega}. \quad (5.19)$$

Sia

$$\wp(\mathbf{s}, \mathbf{b})[\dot{\mathbf{u}}] := \int_{\partial\Pi} \mathbf{s}(p, \mathbf{n}(p)) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \int_{\Pi} \mathbf{b}(p) \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (5.20)$$

la potenza spesa su una parte  $\Pi \subset \Omega$  dal sistema di forze  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  in presenza di un campo di velocità rigido  $\dot{\mathbf{u}}$ . Vale la seguente caratterizzazione unitaria degli assiomi di Eulero: un sistema di forze  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  è bilanciato in  $\Omega$  se e solo se è nulla la potenza spesa su ogni parte  $\Pi \subset \Omega$  per ogni campo di velocità rigido su  $\Omega$ .

Un *moto* di un corpo avente densità  $\rho$ , nella teoria linearizzata, è una famiglia ad un parametro di spostamenti  $\mathcal{M} = \{\mathbf{u}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Poniamo

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(ni)} + \mathbf{b}^{(in)}, \quad \mathbf{b}^{(in)} = -\rho\ddot{\mathbf{u}}.$$

Per moti che conservano la massa, il primo assioma di Eulero (5.16)<sub>1</sub> assume la forma:

$$\int_{\partial\Pi} \mathbf{s} + \int_{\Pi} \mathbf{b}^{(ni)} = \int_{\Pi} \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad \Pi \subset \Omega;$$

il secondo assioma (5.16)<sub>2</sub> si trasforma nella stessa maniera.

Una coppia  $(\mathbf{u}(t), \mathbf{S}(t))$ , è detta *processo dinamico*. Dato un processo dinamico, tramite il teorema di Cauchy possiamo in ogni istante costruire un sistema di forze di Cauchy  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  per  $\Omega$ :

$$(\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{n}, \mathbf{b} = -\text{Div } \mathbf{S}).$$

Per converso, data un'interazione (cioè, un sistema di forze) ad ogni istante di un moto, possiamo costruire il campo  $\mathbf{S}$  con la relazione (5.17), e quindi ottenere il corrispondente processo dinamico.<sup>7</sup> In generale, un *assunto costitutivo* è la prescrizione (magari parziale) di una classe di processi dinamici; ovvero la prescrizione di un sistema di forze; ovvero, infine, la prescrizione di un tipo di interazione corpo/ambiente.

Un *sistema di carico* per un corpo  $\Omega$  è una coppia  $(\mathbf{s}_o, \mathbf{b}_o)$ , con  $\mathbf{s}_o$  definito su  $\partial\Omega$  e  $\mathbf{b}_o$  su  $\Omega$ . Dato un sistema di carico, si dice che questo viene bilanciato da un campo di sforzo  $\mathbf{S}$ , definito su  $\overline{\Omega}$ , se quest'ultimo soddisfa le equazioni di equilibrio

$$\text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{b}_o = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (5.21)$$

e le condizioni al bordo

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s}_o \quad \text{in } \partial\Omega. \quad (5.22)$$

---

<sup>7</sup> Si noti che queste considerazioni non presuppongono la divisione delle forze di volume nella parte inerziale e nella parte non inerziale.

## 6. Assunzioni costitutive in elettroelasticità lineare

La teoria della elettroelasticità lineare studia l'effetto piezoelettrico sotto l'assunzione costitutiva che lo sforzo  $\mathbf{S}$  e lo spostamento elettrico  $\mathbf{d}$  dipendono linearmente dalla deformazione  $\mathbf{E}$  e dal campo elettrico  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbb{C}\mathbf{E} - \mathbf{c}^t\mathbf{e}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{c}\mathbf{E} + \mathbf{C}\mathbf{e}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Qui  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{C}$  sono, rispettivamente, il tensore del quarto ordine dell'*elasticità*, il tensore del terzo ordine *piezoelettrico* e il tensore del secondo ordine *dielettrico*; si considerano  $\mathbb{C}$  e  $\mathbf{C}$  simmetrici e definiti positivi; inoltre, per ogni vettore  $\mathbf{a}$  e tensore simmetrico  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{c}^t\mathbf{a}$  è assunto simmetrico, con l'operazione di trasposizione definita da

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}^t\mathbf{a} = \mathbf{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} \in \text{Lin}, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{V}.\tag{6.24}$$

I tensori  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{C}$  dipendono in generale rispettivamente da 21, 18 e 6 costanti indipendenti non nulle ma quando vengono prese in considerazione le simmetrie di un materiale piezoelettrico le costanti indipendenti diminuiscono.

Per tutte le trasformazioni ortogonali ammesse dalle simmetrie di un cristallo le componenti del tensore  $\mathbf{c}$  non debbono cambiare. Segue che se il cristallo ha un centro di simmetria, per una riflessione rispetto a questo le componenti di  $\mathbf{c}$  cambiano segno [50]. Questa è una proprietà dei tensori del terzo ordine.

Il gruppo di simmetria di un materiale piezoelettrico può essere così definito:

$$\mathcal{G} := \{\mathbf{Q} \in \text{Orth} : \mathbf{Q}\mathbf{S}(\mathbf{E}, \mathbf{e})\mathbf{Q}^t = \mathbf{S}(\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^t, \mathbf{Q}\mathbf{e}); \mathbf{Q}\mathbf{d}(\mathbf{E}, \mathbf{e}) = \mathbf{d}(\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^t, \mathbf{Q}\mathbf{e})\}.$$

Per un materiale piezoelettrico, la simmetria minima è quella monoclinica, con l'asse binario di simmetria parallelo, per esempio, all'asse corrispondente a  $\mathbf{c}_3$ ; invece, la simmetria massima è quella trasversalmente isotropa. Dunque, i tensori  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{C}$  avranno, rispettivamente 13, 8 e 4 costanti indipendenti nel caso monoclinico e 5, 3 e 2 costanti indipendenti nel caso trasversalmente isotropo.



L'energia immagazzinata per unità di volume è per definizione una forma quadratica definita positiva, che ha la seguente forma

$$2W(\mathbf{E}, \mathbf{e}) := \mathbf{S}(\mathbf{E}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{d}(\mathbf{E}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbb{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{C}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \quad (6.25)$$

Ha anche senso specificare la risposta del materiale in termini di deformazione  $\mathbf{E}$  e, in luogo del campo elettrico, spostamento elettrico  $\mathbf{d}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbb{D}\mathbf{E} - \mathbf{d}^{\mathbf{t}}\mathbf{d}, \\ \mathbf{e} &= -\mathbf{d}\mathbf{E} + \mathbf{D}\mathbf{d}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{C}^{-1}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{C}^{-1} \circ \mathbf{c}, \\ \mathbb{D} &= \mathbb{C} + \mathbf{c}^{\mathbf{t}} \circ \mathbf{C}^{-1} \circ \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

(il simbolo  $\circ$  indica la composizione di applicazioni). Viste le relazioni (6.27), sia  $\mathbb{D}$  che il  *tensore d'impermeabilità*   $\mathbf{D}$  risultano simmetrici e positivi; in termini delle variabili  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{d}$  la densità di energia ha la forma

$$2\hat{W}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \mathbf{S}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{e}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbb{D}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - 2\mathbf{d}[\mathbf{E}] \cdot \mathbf{d} + \mathbf{D}\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, \quad (6.28)$$

è evidente che la forma quadratica (6.28) è anch'essa definita positiva.

L'entalpia  $\mathcal{H}$  per unità di volume di un materiale piezoelettrico è definita come segue

$$\mathcal{H} = W - \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}. \quad (6.29)$$

Considerando la (6.23)<sub>1</sub> e la (6.25) si ha

$$\mathcal{H}(\mathbf{E}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2}\mathbb{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \quad (6.30)$$

mentre considerando le (6.26) e la (6.28) si ottiene

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{E}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}; \quad (6.31)$$

entrambe le espressioni prodotte evidenziano che il segno dell'entalpia è indefinito.

Il tensore di sforzo  $\mathbf{S}$  e lo spostamento elettrico  $\mathbf{d}$  sono determinabili, in funzione di  $\mathcal{H}$ , come segue

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{d} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{e}};$$

il tensore di sforzo  $\mathbf{S}$  e il campo elettrico  $\mathbf{e}$  sono determinabili, in funzione di  $\hat{\mathcal{H}}$ , come segue

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{e} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{d}}.$$