

# Chapitre 4

## Modélisation de la maquette du pont avec un actionneur électromécanique

### 4.1 Introduction

Dans les deux derniers chapitres précédents, nous avons étudié la modélisation et la conception de l'actionneur de référence pour contrôler une poutre encastree-libre. Dans ce chapitre on adopte la même démarche pour modéliser une maquette d'un pont en construction contrôlée par l'actionneur électromécanique. Les équations dynamiques de la maquette sont obtenues par application du principe des puissances virtuelles et les modes propres sont calculés par éléments finis. Les équations du pendule sont réécrites à partir des équations de Lagrange, alors que les équations mécanique et électrique de l'alternateur sont données dans le deuxième chapitre.

Les paramètres optimaux de l'actionneur, paramètre de synchronisation et taux d'amortissement réduit, pour amortir un seul mode de vibration, sont obtenus dans ce chapitre en développant la même idée : application du critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel. Ces paramètres optimaux sont calculés analytiquement et numériquement pour amortir d'une manière optimale le mode de torsion de la maquette du pont (deuxième mode de vibration). Les expressions analytiques de ces paramètres sont définis en fonction de la masse du pendule et de la masse totale de l'actionneur.

Ces paramètres, obtenus en appliquant le critère de maximisation de ETDR, sont comparés aux paramètres obtenus en littérature. En particulier, les paramètres obtenus dans cette étude sont comparés aux paramètres donnés par [39] lorsque la structure est en vibration libre.

Pour amortir le mode de torsion de la maquette, l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier. La simulation numérique de la réponse de la maquette du pont a montré l'efficacité de l'actionneur et l'importance de ses paramètres optimaux à amortir le mode de torsion lorsque la maquette est en vibration libre ou également en vibration harmonique. Par contre, pour contrôler passivement plusieurs modes on a utilisé plusieurs actionneurs. En particuliers, trois actionneurs dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémités du pylône de la maquette du pont ont été utilisés pour amortir les trois premiers modes de vibration.

Enfin, l'amortissement de la contribution modale du mode de torsion en résolvant le système d'équations linéaires est comparé à l'amortissement de la contribution modale du même mode en résolvant le système d'équations non-linéaires.

## 4.2 Modèle de la maquette du pont

La maquette du pont est un démonstrateur d'un pont en construction. Pour cela, elle est réalisée de manière à avoir des fréquences propres similaires à celles d'un ouvrage réel : de l'ordre de 1Hz. La géométrie de la maquette est constituée par :

- Un tube cylindrique inférieur de diamètre extérieur 45 mm, d'épaisseur 2 mm et de hauteur 1035 mm.
- Une barre cylindrique supérieure pleine de diamètre 45 mm et de hauteur 1215 mm.
- Une masse cylindrique mobile, située sur le tube supérieur, de diamètre 100 mm et de longueur 200 mm, soit une masse de 12,25 kg.
- Une poutre creuse, à section rectangulaire de dimension 150 mm x 50 mm, avec une épaisseur de 3 mm et une longueur de 6 m.
- Une plaque de base de dimension 22 mm x 40 mm x 15 mm.

La masse totale de la maquette est d'environ 108 kg. La liaison entre le pylône et le sol est réalisée par l'intermédiaire d'une plaque bien fixée au sol au moyen de quatre vis ; cette liaison est modélisée par une liaison d'encastrement. La liaison entre le tablier et le pylône est réalisée au moyen d'un profilé en U ; aussi cette liaison sera modélisée par un encastrement figure (4.1). Pour obtenir, dans la suite, un modèle simple à simuler, on considère que la maquette du pont est constituée de poutres droites qui vérifient les hypothèses d'Euler-Navier-Bernoulli et on suppose que les transformations restent petites. Par ailleurs, on considère que la maquette du pont est formée des quatre poutres d'Euler-Navier-Bernoulli soumises à la compression-traction, à la torsion et à la flexion dans les

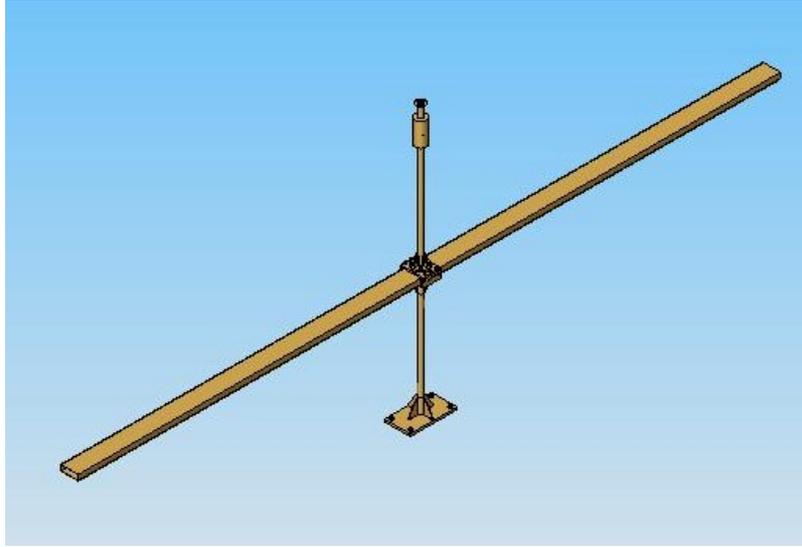


FIG. 4.1 – Maquette du pont.

deux plans. Les numéros des poutres sont indiqués sur la figure (4.2). La première et la troisième poutre représentent le tablier, la deuxième et la quatrième poutre représentent le pylône de la maquette. On associe à chaque poutre un repère local  $(o_k, x_k)$  dirigé vers la droite pour les poutres horizontales et vers le haut pour les poutres verticales. On désigne par  $\rho(x_k)$  la masse linéique,  $E(x_k)$  le module d'Young,  $A_k(x_k)$  la section de la k-ième poutre,  $G(x_k)$  le module de cisaillement de la structure,  $J_k(x_k)$ ,  $I_k^y(x_k)$  et  $I_k^z(x_k)$  les inerties d'une section de la k-ième poutre. Les inconnues du problème sont représentées par le champ des déplacements  $\underline{U} = \underline{U}_k(x_k, t)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  indique le numéro des poutres de la maquette du pont. Ce vecteur champ déplacement est formé des quatre composantes  $\underline{U}_k(x_k, t) = [u_k(x_k, t), \gamma_k(x_k, t), v_k(x_k, t), w_k(x_k, t)]$ , où  $u_k$  désigne le déplacement longitudinal de la k-ième poutre,  $\gamma_k$  la rotation de la k-ième poutre selon son axe propre,  $v_k$  le déplacement selon l'axe Y et  $w_k$  le déplacement selon l'axe Z de la k-ième poutre.

### 4.3 Formulation du problème dynamique

La maquette est modélisée par l'assemblage des quatre poutres. Elle sera contrôlée en lui attachant un pendule, par exemple, à l'une des deux extrémités libres du tablier. Le pendule est couplé avec un alternateur. On suppose que le pendule vibre autour de l'axe du tablier ( $OX$ ), c'est à dire dans le plan vertical ( $OYZ$ ). On note par  $\underline{f} = \underline{f}_k(x_k, t)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , l'effort d'excitation extérieur réparti sur la structure. Ce vec-

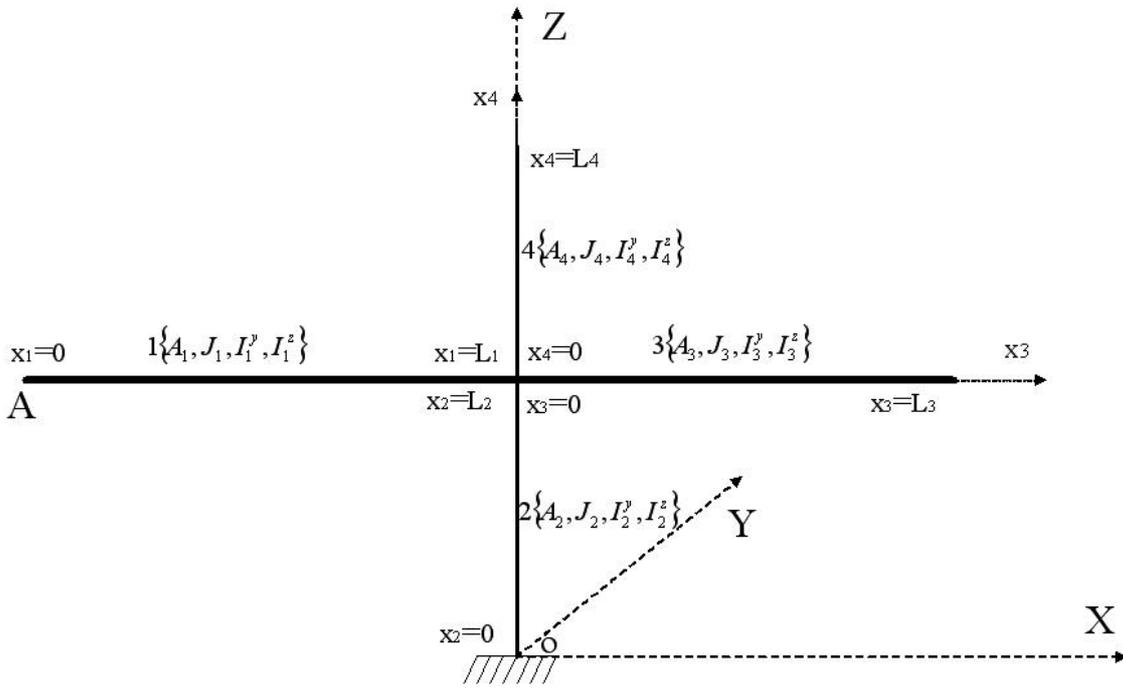


FIG. 4.2 – Modélisation de la maquette du pont.

teur,  $\underline{f}_k(x_k, t) = [f_k^x(x_k, t), m_k(x_k, t), f_k^y(x_k, t), f_k^z(x_k, t)]$ , est formé de quatre composantes : la première représente la force d'excitation longitudinale linéique sur la k-ième poutre, la deuxième le moment de torsion réparti sur la longueur de la k-ième poutre, la troisième et la quatrième les efforts extérieurs répartis selon, respectivement, les directions Y et Z de la k-ième poutre. La mise en équation sera effectuée à l'aide du principe des puissances virtuelles (PPV) qui requiert le calcul de la puissance des efforts intérieurs  $P_{int}(\hat{U})$ , de la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}(\hat{U})$  et de la puissance des quantités d'accélération  $P_{acc}(\hat{U})$  dans tout champ de vitesse virtuelle  $\hat{U}$ . Ce principe des puissances virtuelles s'énonce comme suit :

$$P_{int}(\hat{U}) + P_{ext}(\hat{U}) = P_{acc}(\hat{U}) \quad (4.1)$$

On a choisi cette méthode pour décrire les équations car elle présente l'avantage de mettre en relief la cohérence entre la modélisation géométrique et la modélisation des efforts.

### 4.3.1 Puissance des efforts extérieurs

En plus des efforts répartis sur toute la structure, le pont est soumis aux efforts concentrés à l'extrémité gauche du tablier, notée A : point d'accrochage de l'actionneur. On note, par la suite,  $\underline{R}(t)$  le vecteur des efforts concentrés en A. Par ailleurs, la puissance des efforts extérieurs a pour expression :

$$P_{ext}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} \underline{f}_k(x_k, t) \hat{\underline{U}}_k(x_k) dx - \underline{R}(t) \hat{\underline{U}}_1(x_1 = 0). \quad (4.2)$$

Le vecteur des efforts concentrés  $\underline{R}(t) = [v_L(t), \Gamma(t), v_H(t), v_V(t)]$  est formé des quatre composantes non nulles :  $v_L(t)$  la force longitudinale,  $\Gamma(t)$  le couple de torsion,  $v_H(t)$  la force horizontale et  $v_V(t)$  la force verticale. Ces forces représentent les efforts appliqués par l'actionneur sur le pont au point d'accrochage : extrémité gauche de la première poutre du tablier.

En tenant compte de l'expression du champ des vitesses virtuelles et de l'expression des efforts extérieurs, la puissance des efforts extérieurs aura la forme suivante :

$$P_{ext}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [f_k^x(x_k, t) \hat{u}_k(x_k) + m_k(x_k, t) \hat{\gamma}_k(x_k) + f_k^y(x_k, t) \hat{v}_k(x_k) + f_k^z(x_k, t) \hat{w}_k(x_k)] dx - v_L(t) \hat{u}_1(x_1 = 0) - \Gamma(t) \hat{\gamma}_1(x_1 = 0) - v_H(t) \hat{v}_1(x_1 = 0) - v_V(t) \hat{w}_1(x_1 = 0). \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Puissance des quantités d'accélération

La puissance des quantités d'accélération de la structure complète, pour tout champ de vitesses virtuelles a la forme suivante :

$$P_{acc}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{u}_k(x_k, t) \hat{u}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho J_k \ddot{\gamma}_k(x_k, t) \hat{\gamma}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{v}_k(x_k, t) \hat{v}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{w}_k(x_k, t) \hat{w}_k(x_k)] dx. \quad (4.4)$$

### 4.3.3 Puissance des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs de la structure étudiée sont l'effort normal  $N_k$ , le moment de torsion  $M_k^x$  et les moments de flexion  $M_k^y$  et  $M_k^z$  selon les axes y et z de la k-ième poutre. Par ailleurs, la puissance de ces efforts intérieurs est

$$P_{int}(\hat{\underline{U}}) = - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EA_k \frac{\partial u_k}{\partial x}(x_k, t) \frac{d\hat{u}_k}{dx}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [GJ_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial x}(x_k, t) \frac{d\hat{\gamma}_k}{dx}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EI_k^z \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}(x_k, t) \frac{d^2 \hat{v}_k}{dx^2}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EI_k^y \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(x_k, t) \frac{d^2 \hat{w}_k}{dx^2}(x_k)] dx \quad (4.5)$$

La formulation variationnelle est déterminée, en remplaçant les équations (4.3-4.5) dans la formule (4.1), sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}} \text{ champ de vitesse virtuel } \in \mathbf{V} \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = \mathbf{c}(\underline{f}, \hat{\underline{U}}) - v_L(t)\hat{u}_1(x_1 = 0) - \Gamma(t)\hat{\gamma}_1(x_1 = 0) \\ \qquad \qquad \qquad - v_H(t)\hat{v}_1(x_1 = 0) - v_V(t)\hat{w}_1(x_1 = 0) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$\mathbf{b}$  est la puissance des efforts d'accélération,  $\mathbf{a}$  est défini à partir de la puissance des efforts intérieurs et  $\mathbf{c}$  est la puissance des efforts extérieurs linéiques répartis sur toute la structure.  $\mathbf{V}$  est l'espace des champs cinématiquement admissible :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \{ \hat{\underline{U}} = \{ \hat{\underline{U}}_k = \{ \hat{u}_k, \hat{\gamma}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k \}, k = 1..4 \} \in \bigotimes_{k=1}^4 [(H^1[0, L_k])^2 \times (H^2[0, L_k])^2] \\ \text{tel que } \hat{u}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \hat{\gamma}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \hat{v}_2(x_2 = 0) = 0 \\ \hat{w}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \frac{d\hat{v}_2}{dx}(x_2 = 0) = 0, \quad \frac{d\hat{w}_2}{dx}(x_2 = 0) = 0, \\ \hat{v}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{v}_3(x_3 = 0, t) = \hat{v}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{v}_4(x_4 = 0, t), \\ \hat{w}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{u}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{w}_3(x_3 = 0, t) = \hat{u}_4(x_4 = 0, t), \\ \hat{w}_2(x_1 = L_2, t) = \hat{u}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{w}_4(x_3 = 0, t) = \hat{u}_3(x_3 = 0, t), \\ \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial \hat{w}_4}{\partial x}(x_4 = 0, t), \\ \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \hat{\gamma}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{\gamma}_4(x_4 = 0, t), \quad \text{et} \\ \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial \hat{v}_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = \hat{\gamma}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{\gamma}_3(x_3 = 0, t) \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Avec  $\bigotimes_{k=1}^4 H^i[0, L_k] = H^i[0, L_1] \times H^i[0, L_2] \times H^i[0, L_3] \times H^i[0, L_4]$

Dans la conception de la maquette du pont, le pylône a été encasté au sol et le tablier au pylône. D'où le champ de déplacement  $\underline{U}_k(x_k, t)$ ,  $k=1, \dots, 4$  vérifie les conditions aux limites suivantes :

- Extrémité gauche de la première poutre : en ce point sont attachés le pendule et l'alternateur.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1 = 0, t) = v_L(t), \quad GJ_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_1 = 0, t) = \Gamma(t) \\ EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x_1 = 0, t) = 0, \quad EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x_1 = 0, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2})(x_1 = 0, t) = v_H(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2})(x_1 = 0, t) = v_V(t) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

- Extrémité inférieure de la deuxième poutre : cette extrémité est encastée.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(x_2 = 0, t) = 0, \quad \gamma_2(x_2 = 0, t) = 0 \quad v_2(x_2 = 0, t) = 0 \\ w_2(x_2 = 0, t) = 0 \quad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x_2 = 0, t) = 0 \quad \frac{\partial w_2}{\partial x}(x_2 = 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

– Extrémité droite de la troisième poutre : cette extrémité est libre.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_3 = L_3, t) = 0, \quad GJ_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial x}(x_3 = L_3, t) = 0 \\ EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}(x_3 = L_3, t) = 0, \quad EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}(x_3 = L_3, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = L_3, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2})(x_3 = L_3, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

– Extrémité supérieure de la quatrième poutre : cette extrémité est aussi libre.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_4 \frac{\partial u_4}{\partial x}(x_4 = L_4, t) = 0, \quad GJ_4 \frac{\partial \gamma_4}{\partial x}(x_4 = L_4, t) = 0 \\ EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2}(x_4 = L_4, t) = 0, \quad EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2}(x_4 = L_4, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2})(x_4 = L_4, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2})(x_4 = L_4, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

– Conditions de raccordement au noeud : ce noeud représente un encastrement entre le tablier et le pylône. En ce point on a continuité du déplacement, de la rotation, des efforts et des moments [14].

– Continuité du déplacement

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(x_1 = L_1, t) = v_3(x_3 = 0, t) = v_2(x_2 = L_2, t) = v_4(x_4 = 0, t), \\ w_1(x_1 = L_1, t) = u_2(x_2 = L_2, t) = w_3(x_3 = 0, t) = u_4(x_4 = 0, t), \\ w_2(x_1 = L_2, t) = u_1(x_1 = L_1, t) = w_4(x_3 = 0, t) = u_3(x_3 = 0, t), \end{array} \right. \quad (4.12)$$

– Continuité de la rotation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial w_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial w_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial v_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \gamma_2(x_2 = L_2, t) = \gamma_4(x_4 = 0, t) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial v_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = \gamma_1(x_1 = L_1, t) = \gamma_3(x_3 = 0, t) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

– Continuité des efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} -EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) + \frac{\partial}{\partial x}(EI_2^y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})(x_2 = L_2, t) - \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2})(x_4 = 0, t) \\ + EA_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = 0, t) + \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2})(x_1 = L_1, t) - EA_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) \\ + EA_4 \frac{\partial u_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = 0, t) = \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2})(x_1 = L_1, t) \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2})(x_4 = 0, t) = \frac{\partial}{\partial x}(EI_2^z \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2})(x_2 = L_2, t) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

– Continuité des moments

$$\left\{ \begin{array}{l} GJ_4 \frac{\partial \gamma_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = GJ_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) + EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x_1 = L_1, t) \\ -EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) \\ GJ_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = GJ_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) + EI_2^z \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(x_2 = L_2, t) \\ -EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2}(x_4 = 0, t) \\ -EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x_1 = L_1, t) + EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) + EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) \\ = EI_2^y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x_2 = L_2, t) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

## 4.4 Approximation modale du déplacement

Afin de déterminer les modes propres de la structure, on cherche des solutions de la forme :

$$\underline{U}(x_k, t) = \underline{\varphi}(x_k) e^{i\omega t} \quad (4.16)$$

$\underline{\varphi}(x_k) = (\varphi^x(x_k), \varphi^\gamma(x_k), \varphi^y(x_k), \varphi^z(x_k))$  est le vecteur des modes propres de la structure. Le problème aux valeurs propres sera formulé sous la forme suivante [14] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{V} \text{ tel que } \forall \hat{U} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}, \hat{U}) = \lambda \mathbf{b}(\underline{\varphi}, \hat{U}) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite  $\mathbf{V}_N$ , l'espace engendré par les N premiers modes propres de la maquette. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = m_j^* \delta_{ij} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = k_j \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$m_j^*$  est la j-ième masse modale,  $k_j$  est la j-ième rigidité modale et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Vu que  $\underline{\varphi}_i(x_1 = 0) \neq 0$ , on normalise alors les modes propres par amplification en imposant la condition suivante :

$$\text{Max} \underline{\varphi}_i(x_1 = 0) = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (4.19)$$

Avec  $\forall \underline{a} \in \mathbf{IR}^n$  on pose  $\text{Max}(\underline{a}) = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ . Cette condition de normalisation est toujours possible car  $\underline{\varphi}_i(x_1 = 0) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

L'approximation modale du déplacement sur ces  $N$  modes, solution du problème (4.6) dans l'espace de dimension finie  $\mathbf{V}_N$ , se décompose ainsi :

$$\underline{U}_N(x_k, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \underline{\varphi}_i(x_k) \quad (4.20)$$

où  $k$  indique le numéro de la poutre et  $\alpha_i(t)$  l' $i$ ème contribution modale du déplacement. Après le remplacement du déplacement par son estimation (4.20) et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité (4.18) et de normalisation (4.19) on obtient le problème discrétisé suivant :

$$\begin{aligned} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) &= f_i(t) - v_{LN}(t) \varphi_i^x(x_1 = 0) - \Gamma_N(t) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \\ &- v_{HN}(t) \varphi_i^y(x_1 = 0) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $f_i(t) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} \underline{f}_k(x_k, t) \underline{\varphi}_i(x_k) dx$ ,  $\varphi_i^x(x_1 = 0)$  est la composante longitudinale de l' $i$ ème mode,  $\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)$  la composante de torsion de l' $i$ ème mode,  $\varphi_i^y(x_1 = 0)$  et  $\varphi_i^z(x_1 = 0)$  les composantes de l' $i$ ème mode, respectivement, selon les directions Y et Z de l'extrémité gauche de la première poutre de la maquette du pont : point d'accrochage de l'actionneur. Les forces de liaison et les équations du pendule seront déterminées à partir des équations de Lagrange et leurs discrétisations seront obtenues en appliquant l'approximation modale du déplacement (4.20).

## 4.5 Equations du pendule et de l'alternateur

Pour contrôler le mode de torsion de la maquette du pont, on propose d'utiliser un amortisseur à masse accordée de type pendulaire couplé à un alternateur. Cet actionneur est attaché à l'extrémité de la première poutre de la maquette sous le tablier figure (4.3). Le principe de fonctionnement de ce système est le même que celui expliqué dans le deuxième chapitre : la vibration de la maquette induit la vibration du pendule qui entraîne l'alternateur en rotation. Le rôle de ce dernier est de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance. On adopte les mêmes notations indiquées dans le cas de la modélisation d'une poutre avec un actionneur, on suppose que le pendule est formé d'une boule de masse  $m_s$  et de rayon  $R_s$  fixée à l'extrémité libre d'une barre de masse  $m_b$  et de longueur  $l_b$ . On note par  $m_2 = m_s + m_b$  la masse totale du pendule et par  $I_2$  son inertie totale par rapport à l'axe parallèle à (OX) déterminée à partir du théorème d'Huygens, par  $l$  la position de centre de gravité du pendule et par  $m_a$  et  $I_a$  la masse totale et le moment d'inertie total de l'alternateur avec

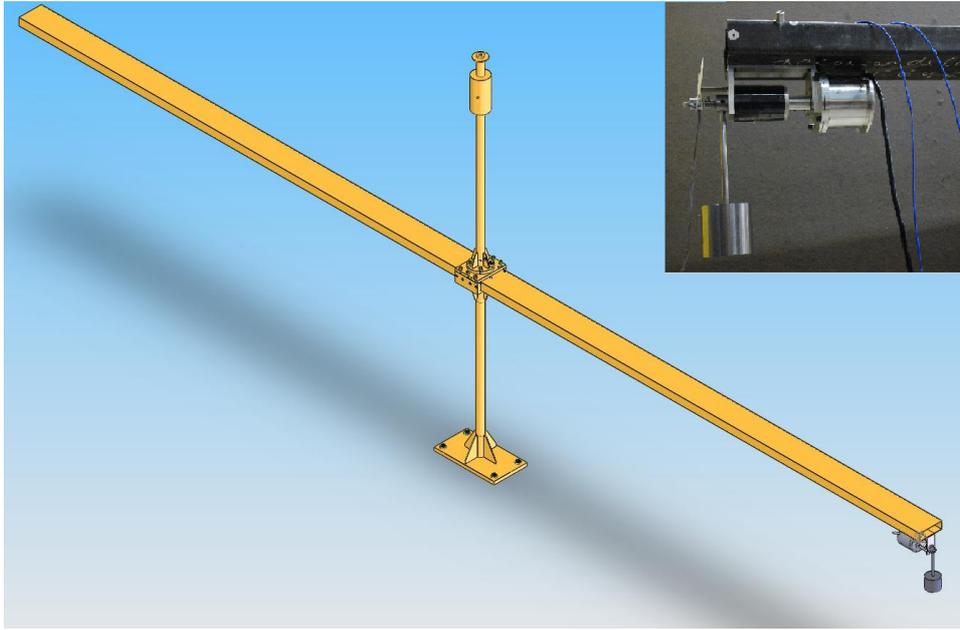


FIG. 4.3 – Modélisation de la maquette du pont avec l'actionneur.

le réducteur. Afin de déterminer les équations du pendule, lorsque le pont est soumis à des vibrations, on propose une écriture énergétique du système en appliquant les équations de Lagrange.

#### Remarque

Dans ce cas, le pendule est formé d'un seul système de masse  $m_2$  et d'inertie  $I_2$  et pour rester cohérent avec les notations du deuxième chapitre on pose que la masse totale du pendule est  $M_p = m_2$  et que l'inertie totale du pendule est  $I_p = I_2$ .

Le vecteur champ déplacement de la maquette du pont, comme il a déjà été précisé dans le paragraphe précédent, est formé des quatre composantes : déplacement longitudinal, angle de torsion, déplacement horizontal et déplacement vertical. Par ailleurs, le vecteur position d'un élément de la première poutre du tablier noté  $\mathbf{r}_T$  et le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté  $\mathbf{r}_A$  peuvent être définis en petit déplacement dans le repère global des coordonnées orthonormales  $(O, X, Y, Z)$  des vecteurs unitaires notés, respectivement,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  comme est indiqué dans la figure (4.4) :

$$\mathbf{r}_T = u_1(x_1, t)\mathbf{a}_1 + v_1(x_1, t)\mathbf{a}_2 + w_1(x_1, t)\mathbf{a}_3 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A = & u_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [v_1(x_1 = 0, t) + e\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_2 \\ & + [w_1(x_1 = 0, t) - e\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

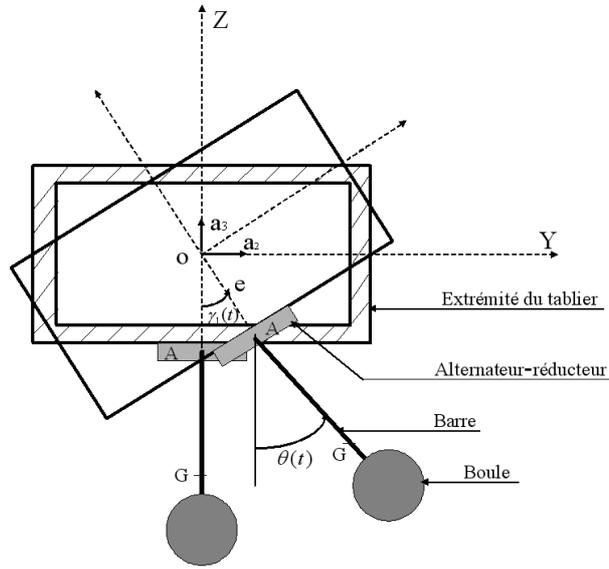


FIG. 4.4 – Modèle mécanique : vibration du pendule.

Avec l'excentricité  $e = OA$ ,  $l$  la longueur équivalente du pendule,  $\theta$  l'angle de rotation du pendule et  $\gamma_1$  l'angle de torsion de la première poutre du tablier de la maquette du pont. De même, le vecteur position du centre de gravité du pendule, noté  $\mathbf{r}_G$ , est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_G = & u_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [v_1(x_1 = 0, t) + e\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 \\ & + [w_1(x_1 = 0, t) - e\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) - l\cos(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_T = & \dot{u}_1(x, t)\mathbf{a}_1 + \dot{v}_1(x, t)\mathbf{a}_2 + \dot{w}_1(x, t)\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_A = & \dot{u}_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [\dot{v}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_2 \\ & + [\dot{w}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_G = & \dot{u}_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [\dot{v}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 \\ & + [\dot{w}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\dot{\mathbf{r}}_A$  est la vitesse de vibration de l'alternateur et du réducteur, de masse  $m_a$  et de moment d'inertie  $I_a$ , et  $\dot{\mathbf{r}}_G$  la vitesse de vibration du pendule, de masse  $m_2$  et de moment d'inertie

$I_2$ . L'énergie cinétique totale du pendule est  $T = T_A + T_G$ . Avec

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{1}{2}m_a[(\dot{u}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{v}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{w}_1(x_1 = 0, t))^2] + \frac{1}{2}m_a e^2(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \\
&+ m_a e \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_a e \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
T_G &= \frac{1}{2}m_2[(\dot{u}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{v}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{w}_1(x_1 = 0, t))^2] + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta})^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_2 e^2(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 + m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta \\
&+ m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ m_2 e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))
\end{aligned} \tag{4.26}$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = m_a g[w_1(x_1 = 0, t) - e \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))] + m_2 g[w_1(x_1 = 0, t) - e \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) - l \cos \theta] \tag{4.27}$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p(\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \tag{4.28}$$

$C_p$  est le coefficient d'amortissement propre du pendule. Les équations du pendule seront déterminées en appliquant les équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, r \tag{4.29}$$

Les coordonnées généralisées  $q_k$  et les forces extérieures  $Q_k$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
q_k &= \{u_1(x_1 = 0) \quad v_1(x_1 = 0) \quad w_1(x_1 = 0) \quad \gamma_1(x_1 = 0) \quad \theta\} \\
Q_k &= \{v_L(t) \quad v_H(t) \quad v_V(t) \quad \Gamma(t) \quad -C_m\}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$v_L$ ,  $v_H$  et  $v_V$  sont, respectivement, les forces de liaison longitudinale, horizontale et verticale entre le tablier et le pendule,  $\Gamma$  le couple de torsion du tablier sur le pendule et  $C_m$  le couple mécanique de l'alternateur sur le pendule, figure (4.5).

Soient les équations suivantes :

Pour  $q_1 = u_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) &= (m_a + m_2) \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \\
\frac{\partial U}{\partial u_1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour  $q_2 = v_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}_1} \right) &= (m_a + m_2) \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&\quad - (m_a + m_2) e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\
\frac{\partial U}{\partial v_1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial v_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{v}_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

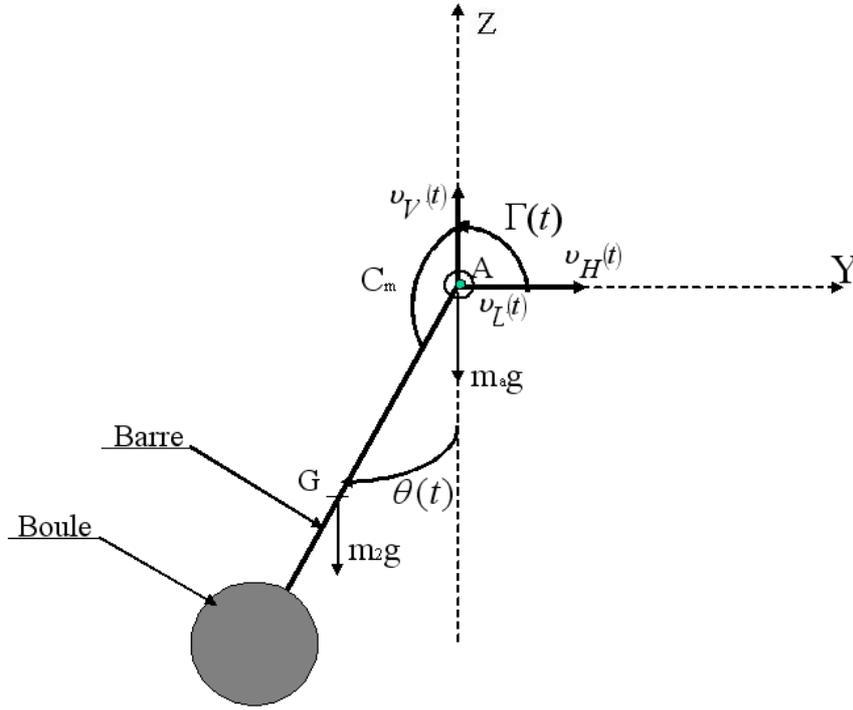


FIG. 4.5 – Les forces appliquées sur le pendule.

Pour  $q_3 = w_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_1} &= (m_a + m_2) \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \\
 &+ (m_a + m_2) e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + (m_a + m_2) e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ m_2 l \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta \\
 \frac{\partial U}{\partial w_1} &= (m_a + m_2) g \\
 \frac{\partial T}{\partial w_1} &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour  $q_4 = \gamma_1$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1} &= (m_a + m_2) e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + (m_a + m_2) e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &- (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + (m_a + m_2) e \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 \frac{\partial T}{\partial \gamma_1} &= m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} &= (m_a + m_2) g e \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)), \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\gamma}_1} = C_p(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta})
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Pour  $q_5 = \theta$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= I_2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta - m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 l \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta \\
&+ m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta + m_2 e l \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ m_2 e l (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
\frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= m_2 g l \sin \theta \\
\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= C_p (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))
\end{aligned} \tag{4.35}$$

On remplace l'équation (4.31) dans l'équation de Lagrange (4.29) on trouve l'équation de la force de liaison longitudinale :

$$v_L(t) = M_{ap} \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \tag{4.36}$$

Avec  $M_{ap} = m_a + m_2$  la masse totale de l'actionneur "pendule-alternateur". On remplace maintenant l'équation (4.32) dans l'équation de Lagrange (4.29) on trouve l'équation de la force de liaison horizontale :

$$\begin{aligned}
v_H(t) &= M_{ap} \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&- M_{ap} e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Puis, on remplace l'équation (4.33) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation de la force de liaison verticale :

$$\begin{aligned}
v_V(t) &= M_{ap} g + M_{ap} \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ M_{ap} e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ensuite, on remplace l'équation (4.34) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation du couple de torsion suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= M_{ap} e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ M_{ap} e \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&- m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + M_{ap} g e \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + C_p (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Enfin, on remplace l'équation (4.35) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation de rotation du pendule.

$$\begin{aligned}
I_p \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta + m_2 l \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 e l \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
+ m_2 e l (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + C_p (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)) + m_2 g l \sin \theta = -C_m
\end{aligned} \tag{4.40}$$

A ces équations on ajoute les équations, électrique et mécanique, de l'alternateur en considérant que l'angle de torsion du tablier de la maquette du pont est très faible.

$$\begin{cases} \beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} &= -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) + C_m \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) &= K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta\theta(t)) \end{cases} \quad (4.41)$$

Ces équations sont déterminées dans le deuxième chapitre.  $\beta$  est le rapport d'engrenage,  $K_e$  la constante de la force électromotrice et  $K_c$  la constante du couple électromécanique.  $L_e$  est l'inductance d'une bobine de l'alternateur,  $r$  sa résistance et  $R(t)$  la résistance variable externe.

A partir du modèle éléments finis de la maquette du pont réalisé sur Openfem, on remarque que la torsion n'est couplée qu'avec les déplacements horizontaux. Et par suite dans le modèle théorique on peut considérer, à titre d'une première approximation, qu'il n'y a pas de couplage entre les déplacements verticaux et la rotation d'axe vertical. De plus, on suppose que l'angle de torsion du tablier est très faible, et en négligeant les termes quadratiques, les équations des efforts de liaisons peuvent être écrites sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} v_L(t) = M_{ap} \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \\ v_H(t) = M_{ap} \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ v_V(t) = M_{ap} g + M_{ap} \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) + m_2 l \ddot{\theta} \sin\theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ \Gamma(t) = M_{ap} e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta) \\ - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + M_{ap} g e \gamma_1(x_1 = 0, t) + C_p (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta}) \end{cases} \quad (4.42)$$

Les équations discrétisées des efforts de liaisons sont déterminées à partir de l'estimation du déplacement sur les  $N$  premiers modes définis par l'équation (4.20) comme suit :

$$\begin{cases} v_{LN}(t) &= M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j^x(x_1 = 0) \\ v_{HN}(t) &= M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) (\varphi_j^y(x_1 = 0) + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0)) + m_2 l [\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2(t) \sin\theta] \\ v_{VN}(t) &= M_{ap} g + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j^z(x_1 = 0) + m_2 l [\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2(t) \cos\theta] \\ \Gamma_N(t) &= M_{ap} e \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) (\varphi_j^y(x_1 = 0) + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta) \\ &\quad - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + C_p (\sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) - \dot{\theta}) \\ &\quad + M_{ap} e g \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \end{cases} \quad (4.43)$$

De même pour l'équation mécanique de rotation du pendule-alternateur :

$$\begin{aligned} I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) [\varphi_j^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_j^z(x_1 = 0) \sin\theta + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \\ + C_{ap} \dot{\theta} - C_p \sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + m_2 g l \sin\theta = -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Avec  $I_{ap} = I_p + \beta I_a$  le moment d'inertie total de l'actionneur et  $C_{ap} = C_p + \beta C_a$  le coefficient d'amortissement mécanique total de l'actionneur. D'où le système complet simplifié pont-pendule-alternateur discrétisé couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) = f_i(t) - v_{LN}(t) \varphi_i^x(x_1 = 0) - \Gamma_N(t) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \\ \quad - v_{HN}(t) \varphi_i^y(x_1 = 0) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) [\varphi_j^y(x_1 = 0) \cos \theta + \varphi_j^z(x_1 = 0) \sin \theta + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \cos \theta] \\ + C_{ap} \dot{\theta} - C_p \sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + m_2 g l \sin \theta = -K_c i(t) \sin(\beta \theta(t)) \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t)) i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

où les forces  $v_{LN}(t)$ ,  $v_{HN}(t)$  et  $v_{VN}(t)$  et le couple  $\Gamma_N(t)$  sont définis par la formule (4.43). Ce système non linéaire, en regroupant les termes en accélération ensemble, peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$M(X) \ddot{X} + C(R(t)) \dot{X} + KX = f(t, X, \dot{X}) \quad (4.46)$$

On ne s'intéresse, par la suite, qu'aux six premiers modes ( $N=6$ ), le vecteur inconnu du système sera  $X^T = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_6(t), \theta(t), q(t)]$ ,  $q(t)$  est la charge électrique, et les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  seront définies comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{12T} & M^{22} \end{bmatrix},$$

$M^{11}$  est une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$M_{ii}^{11} = m_i^* + M_{ap} ((\varphi_i^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_i^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_i^z(x_1 = 0))^2 + e^2 (\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 + 2e \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$

$$M_{ij}^{11} = M_{ap} [\varphi_i^x(x_1 = 0) \varphi_j^x(x_1 = 0) + \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_j^y(x_1 = 0) + \varphi_i^z(x_1 = 0) \varphi_j^z(x_1 = 0) + e^2 \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + e \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + e \varphi_j^y(x_1 = 0) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)] \\ \text{pour } i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j$$

$M^{12}$  est une matrice (6,2) dont les éléments sont :

$$M_{i1}^{12} = m_2 l [\cos \theta \varphi_i^y(x_1 = 0) + \sin \theta \varphi_i^z(x_1 = 0) + e \cos \theta \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)] \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \\ M_{i2}^{12} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$

$M^{12T}$  est la matrice transposée de  $M^{12}$ .

$$M^{22} \text{ est une matrice (2,2), } M^{22} = \begin{bmatrix} I_{ap} & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{12T} & C^{22} \end{bmatrix}$ ,  $C^{11}$  est une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} C_{ii}^{11} &= C_p(\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6, \\ C_{ij}^{11} &= C_p\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)\varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j. \end{aligned}$$

$C^{12}$  est une matrice (6,2) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} C_{i1}^{12} &= -C_p\varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \\ C_{i2}^{12} &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$C^{12T}$  est la matrice transposée de  $C^{12}$ .

$C^{22}$  est une matrice (2,2),  $C^{22} = \begin{bmatrix} C_{ap} & 0 \\ 0 & r + R(t) \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} K^{11} & O_{6,2} \\ O_{2,6} & O_{22} \end{bmatrix}$ ,  $O$  est la matrice nulle et  $K^{11}$  une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} K_{ii}^{11} &= k_i + M_{ap}eg(\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 \quad i = 1, \dots, 6 \\ K_{ij}^{11} &= M_{ap}eg\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)\varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j \end{aligned}$$

Le vecteur  $f(t, X, \dot{X})$  est défini comme suit :

$$f(t, X, \dot{X}) = \left( \begin{array}{l} (f_i(t) - M_{ap}g\varphi_i^z(x_1 = 0) + m_2l\dot{\theta}^2[\sin\theta\varphi_i^y(x_1 = 0) - \cos\theta\varphi_i^z(x_1 = 0) \\ + e\sin\theta\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)])_{i=1, \dots, 6}, -m_2gl\sin\theta - K_c\dot{q}(t)\sin(\beta\theta), K_e\beta\dot{\theta}(t)\sin(\beta\theta) \end{array} \right)^T$$

## 4.6 Calcul des modes propres de la maquette en utilisant une modélisation par éléments finis

Pour obtenir les modes propres de la maquette du pont  $(\lambda, \varphi)$ , on choisit d'utiliser un modèle éléments finis de la structure. Pour cela on a utilisé le logiciel Matlab muni du module Openfem. La maquette est modélisée par l'assemblage des poutres soumises à la traction-compression, à la torsion et à la flexion dans les deux plans. La liaison entre le pylône et le tablier est considérée comme une liaison d'encastrement. Les déformées modales de la maquette du pont sont représentées par la figure (4.6) où sur chaque déformée est indiquée la fréquence propre correspondante. Ces fréquences sont calculées lorsque la masse mobile est à l'extrémité supérieure du pylône. Les fréquences propres des deux premiers modes ; premier mode vertical et mode de torsion, sont très proches. Par ailleurs, la position de la masse mobile a une influence sur le couplage de ces deux premiers modes : lorsque la masse est en bas de la quatrième poutre les deux modes sont découplés.

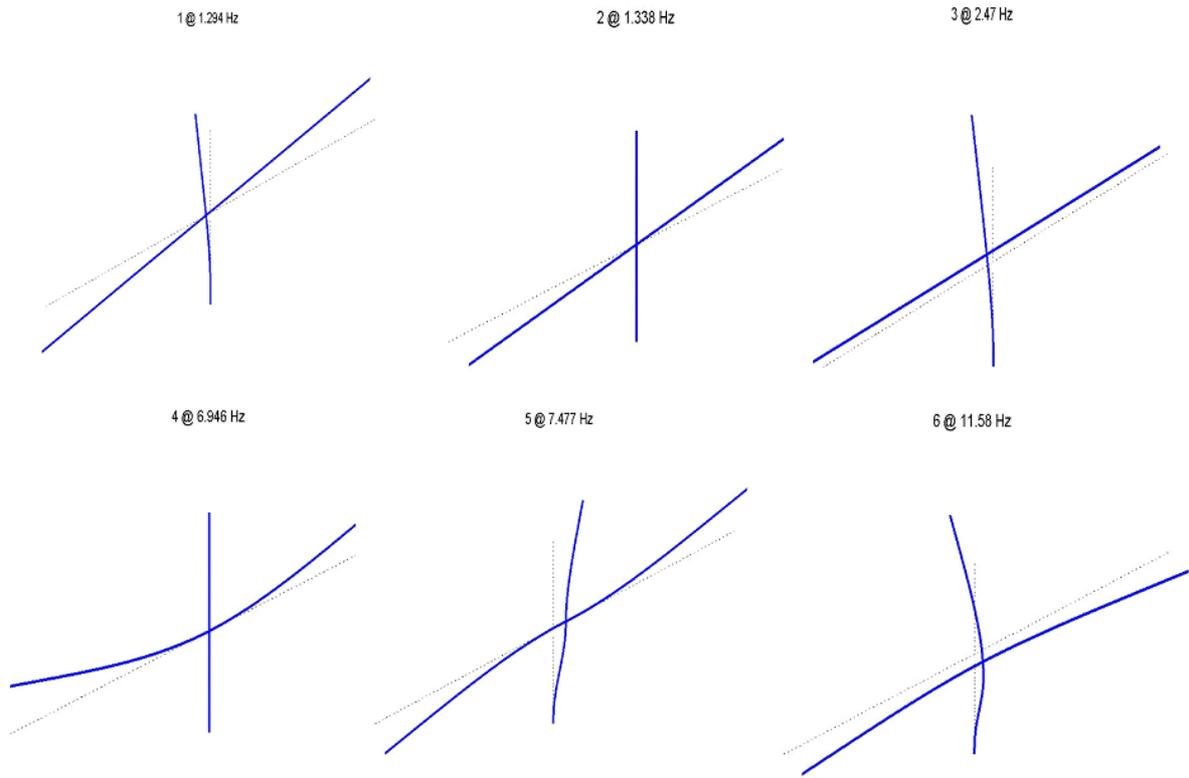


FIG. 4.6 – Les déformées modales de la maquette du pont.

## 4.7 Contrôlabilité de la maquette du pont

Contrôler un système nécessite de pouvoir contrôler chaque mode. En particulier, on peut montrer que certaines positions des actionneurs ne permettent pas de contrôler certains modes. Il est donc nécessaire d'étudier la capacité d'une structure à être contrôlée par une configuration d'actionneurs [20, 86]. Dans ce paragraphe on quantifie la contrôlabilité des six premiers modes de la maquette à partir de la matrice grammienne de contrôlabilité. Pour cela, on suppose que la maquette du pont est soumise seulement à une action de contrôle à l'extrémité du tablier. Cette action représente les forces du pendule sur le pont. Le système formé par les équations du pont avec les forces de contrôle, en supposant dans le modèle éléments finis seulement pour ce cas une normalisation par rapport à la masse, peut être écrit sous la forme d'un système d'état :

$$\dot{Z} = [\mathbf{A}]Z + [\mathbf{B}]v_N(x_1 = 0). \quad (4.47)$$

Avec  $Z = [\alpha_i(t), \dot{\alpha}_i(t)]^T$  pour  $i=1, \dots, 6$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} O_{6,6} & I_{6,6} \\ -\lambda_i & O_{6,6} \end{bmatrix}$

$$v_N(x_1 = 0) = [-v_{LN}(x_1 = 0), -\Gamma_N(x_1 = 0), -v_{HN}(x_1 = 0), -v_{VN}(x_1 = 0)]^T \text{ et}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} O_{6,4} \\ (\underline{\varphi}_i(x_1 = 0))_{i=1,\dots,6} \end{bmatrix}$$

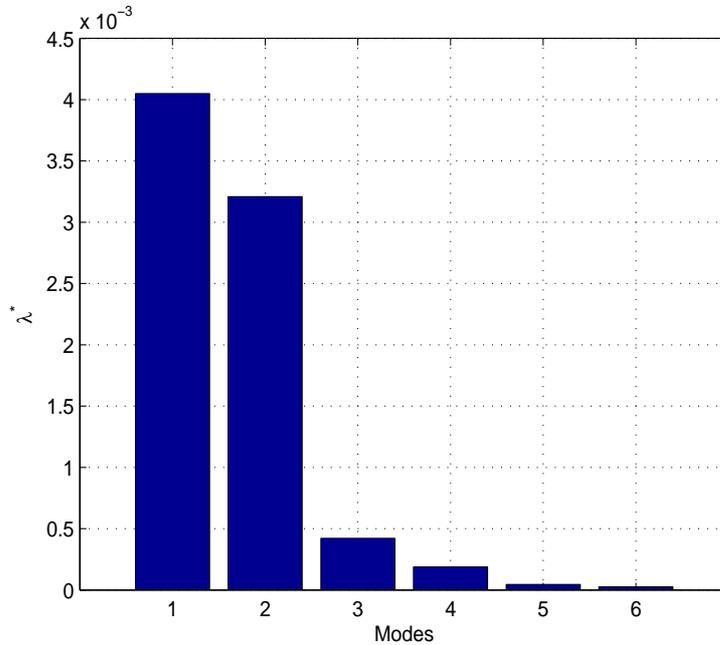


FIG. 4.7 – Grammien de contrôlabilité des six modes de la maquette du pont.

La matrice grammienne de contrôlabilité du système (4.47)

$$G(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{B}^T \mathbf{B} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (4.48)$$

permet de quantifier l'énergie fournie au système. Pour observer la contrôlabilité mode par mode lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier, il est possible de calculer un quotient de Rayleigh associé à chaque mode et défini comme suit :

$$\lambda_i^* = \frac{1}{\lambda_i} (\underline{\psi}_i(x_1 = 0))^T G \underline{\psi}_i(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \quad (4.49)$$

Avec  $\underline{\psi}_i(x_1 = 0) = (\underline{\varphi}_i(x_1 = 0), O_{1,8})^T$ . De la figure (4.7) on observe que les deux premiers modes de la maquette du pont sont bien contrôlables alors que les autres sont très peu contrôlables lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier.

## 4.8 Conception des paramètres optimaux de l'actionneur

Après la formulation du problème dynamique et la discrétisation des équations continues, il reste à déterminer les paramètres optimaux de l'actionneur : masses, longueur du pendule et valeur de la résistance externe. Pour cela, on applique le même critère d'optimisation introduit dans le cas de la modélisation d'une poutre avec un actionneur de référence, qui consiste à maximiser le taux de décroissance exponentiel. Pour chercher ces paramètres, on considère le système mécanique formé de la maquette du pont et de l'actionneur de référence. Comme la performance d'un TMD est très dépendante de la pulsation du mode à amortir et pour des raisons de simplification, on considère premièrement le cas d'un seul mode de vibration : mode de torsion du tablier. Par ailleurs, le système se réduit à un système à deux degrés de liberté : mode de vibration du pont et angle de vibration du pendule. Les paramètres optimaux adimensionnels qui sont liés aux paramètres de l'actionneur sont déterminés analytiquement, en écrivant les équations qui décrivent le comportement de ce système sous une forme adimensionnelle linéaire, lorsque les pôles du système coïncident [10, 45]. Ces paramètres seront déterminés aussi numériquement au moyen de la technique de placement des pôles. Pour étudier l'influence du pendule sur la stabilité des autres modes du système, on calcule les pôles de tous les modes considérés de la maquette. Les paramètres optimaux de l'actionneur de référence trouvés, en appliquant ce critère d'optimisation, seront comparés aux paramètres donnés par [39]. De même, l'oscillation en vibration libre du deuxième mode de la maquette du pont, obtenue par l'utilisation des paramètres trouvés à partir du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel, est comparée à celle obtenue en introduisant les paramètres donnés par [39]. Lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique, ces paramètres ont été donnés par [29] en appliquant le critère de minimisation du déplacement de la structure principale.

### 4.8.1 Equations adimensionnelles

Le système discret qui décrit le modèle mécanique est formé de deux équations : la première est l'équation de vibration du mode de torsion de la maquette du pont en considérant que l'amortissement propre est nul et la deuxième est l'équation de vibration de

l'actionneur de référence.

$$\left\{ \begin{array}{l} [m_2^* + M_{ap}((\varphi_2^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^z(x_1 = 0))^2 + e^2(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \\ + 2e\varphi_2^y(x_1 = 0)\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))] \ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0) \sin\theta \\ + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \ddot{\theta} + C_p (\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \dot{\alpha}_2(t) - C_p \varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \dot{\theta} + (k_2 + M_{ap} e g (\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2) \alpha_2(t) \\ = -M_{ap} g \varphi_2^z(x_1 = 0) + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \sin\theta - \varphi_2^z(x_1 = 0) \cos\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \sin\theta] \dot{\theta}^2 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0) \sin\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \ddot{\alpha}_2(t) \\ - C_p \varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \dot{\alpha}_2(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \sin\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.50)$$

D'après le calcul éléments finis, les formes propres, au point d'accrochage de l'actionneur, verticale  $\varphi_2^z(x_1 = 0)$ , longitudinale  $\varphi_2^x(x_1 = 0)$  et de torsion  $\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)$  sont nulles. D'après la condition de normalisation (4.19), la forme propre horizontale  $\varphi_2^y(x_1 = 0)$  est unitaire pour le mode de torsion. Si on suppose que l'angle de vibration du pendule est faible, le système précédent peut être écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_2^* + M_{ap}) \ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l \ddot{\theta} + k_2 \alpha_2(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_2(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Ce système linéaire a la même forme que celui étudié dans le troisième chapitre. Par ailleurs, en suivant la même démarche et en introduisant les notations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{ap}^2 = \frac{m_2 g l}{I_{ap}}, \quad k = \frac{M_{ap}}{m_2^*} \quad et \quad \mu = \frac{m_2}{m_2^*} \\ p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_2} \quad et \quad \zeta = \frac{C_{eq}}{2I_{ap}\omega_{ap}} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

le système linéaire (4.51) s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + k) \ddot{\alpha}_2 + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p \dot{\Theta} + p^2 \Theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

$\omega_2$  est la pulsation propre du mode de torsion de la maquette du pont,  $\omega_{ap}$  la pulsation propre de l'actionneur,  $p$  le rapport entre la deuxième pulsation propre de la maquette et la pulsation de l'actionneur et  $\zeta$  le taux d'amortissement réduit de l'actionneur. On rappelle que les quatre paramètres adimensionnels  $\mu$ ,  $k$ ,  $p$  et  $\zeta$  relient les quatre paramètres dimensionnels de l'actionneur : la masse du pendule  $m_2$ , la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la longueur équivalente du pendule  $l$  et le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$ . L'inertie totale de l'actionneur est définie en fonction de la longueur équivalente et de la masse du pendule  $m_2$ . Pour des raisons des simplifications on suppose, dans ce premier cas, que  $I_{ap} = m_2 l^2$ .

### 4.8.2 Solution du système des équations adimensionnelles

Pour appliquer le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel il convient d'écrire le système linéaire des deux équations différentielles ordinaires du second ordre (4.53) sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0. \quad (4.54)$$

Avec  $M = \begin{bmatrix} 1+k & \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta p \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}$  et  $X = [\alpha_2, \Theta]^T$ . La matrice M étant inversible, le système peut être écrit sous la forme d'un système d'état

$$\dot{Z} = \mathbf{A}Z \quad (4.55)$$

de quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre avec la variable d'état  $Z = [X, \dot{X}]^T$  et la matrice d'état  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$ . La solution de l'équation (4.55) est de la forme  $Z = Z_0 e^{\mathbf{A}\tau}$ . Avec  $Z_0$  est la condition initiale. Cette solution peut être écrite explicitement en terme de combinaison linéaire des exponentielles  $e^{\lambda_i \tau}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en utilisant  $\lambda_i$  les valeurs propres de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ . Le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$ , dont les racines sont les valeurs propres de ladite matrice, est le suivant :

$$P(\lambda) = \frac{1}{1+k-\mu} [(1+k-\mu)\lambda^4 + 2\zeta p(1+k)\lambda^3 + (1+p^2(1+k))\lambda^2 + 2\zeta p\lambda + p^2] \quad (4.56)$$

Les paramètres optimaux de l'actionneur comme on a signalé seront obtenus par application du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel qui est défini comme suit :

$$ETDR = \min_i | \operatorname{Re}(\lambda_i) |, \quad (4.57)$$

où Re est la partie réelle des racines du polynôme  $P(\lambda)$ .

Par analogie à ce qui a été fait dans le troisième chapitre, la maximisation du ETDR est obtenue pour des valeurs fixées de k, de  $\mu$  et des valeurs optimales de  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$ . Ces paramètres optimaux sont obtenus, lorsque le polynôme (4.56) a deux racines doubles complexes conjugués qui ont la même partie réelle [10, 45].

Les expressions analytiques des paramètres optimaux  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$  ainsi que le taux de décroissance exponentiel

$$\begin{cases} p_{k\mu} = \frac{\sqrt{1+k-\mu}}{1+k} \\ \zeta_{k\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{1+k}} \\ ETDR = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1+k}\sqrt{1+k-\mu}} \end{cases} \quad (4.58)$$

sont données en fonction des paramètres adimensionnels  $k$  et  $\mu$ .

A partir de ces paramètres adimensionnels optimaux on peut déterminer les paramètres dimensionnels de l'actionneur : masse totale de l'actionneur, masse du pendule, longueur équivalente du pendule et coefficient d'amortissement équivalent total et par conséquent, la valeur de la résistance externe en contrôle passif et semi-actif. Les valeurs optimales définies par les expressions analytiques (4.58) peuvent être trouvées numériquement au moyen de la technique de placement des pôles. Dans la figure (4.8) est représenté le lieu des racines du polynôme (4.56) en variant le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives pour des valeurs de  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour une valeur optimale de  $p$  donnée lorsque  $p = p_{k\mu}$ . Pour cette valeur optimale de synchronisation, les deux pôles coïncident et au point de coïncidence (point x) correspond le taux d'amortissement réduit optimal  $\zeta_{k\mu}$ . Lorsque la valeur de  $p$  n'est pas prise en condition de synchronisation, le problème d'optimisation du taux d'amortissement réduit n'a pas été étudié dans la littérature. Ce problème peut être rencontré lors d'une application pratique, notamment à la condition de synchronisation où il est difficile de réaliser la longueur du pendule calculée ; trop courte ou trop grande. On a déjà rencontré ce problème dans le cas d'amortissement de vibration d'une simple poutre dans le chapitre 3 : la longueur du pendule obtenue, en synchronisant la fréquence du pendule à la première fréquence de la poutre, est très faible, sa réalisation pratique es très difficile.

En utilisant ce critère d'optimisation, le coefficient d'amortissement optimal est obtenu pour chaque valeur de  $p$ . Dans la figure (4.9) est représenté le lieu des racines du polynôme (4.56) en faisant varier le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives pour des valeurs de  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour une valeur de  $p$  non optimale ;  $p = 0,95p_{k\mu}$ . Au point x, indiqué sur cette figure, correspond le maximum de ETDR, et par suite, la condition de maximum d'amortissement est atteinte en ce point.

La valeur de  $k$  est presque fixée à partir de la masse de l'alternateur. La valeur de  $\mu$  est déterminée en se basant sur le travail fait dans le troisième chapitre, où on a montré l'influence du rapport  $\frac{\mu}{k}$  sur la réponse de la poutre ; l'amortissement est une fonction croissante de la masse oscillante  $m_2$ .

L'étude qui vient d'être exposée s'intéresse à la détermination des paramètres de l'actionneur pour amortir d'une manière optimale le mode de torsion de la maquette du pont. Pour voir l'influence de ces paramètres sur les autres modes de vibration, on trace le lieu des pôles de tous les modes de la maquette en supposant que le coefficient d'amortissement propre du pendule est nul. Le lieu de ces pôles est représenté, en faisant varier le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives, par la figure

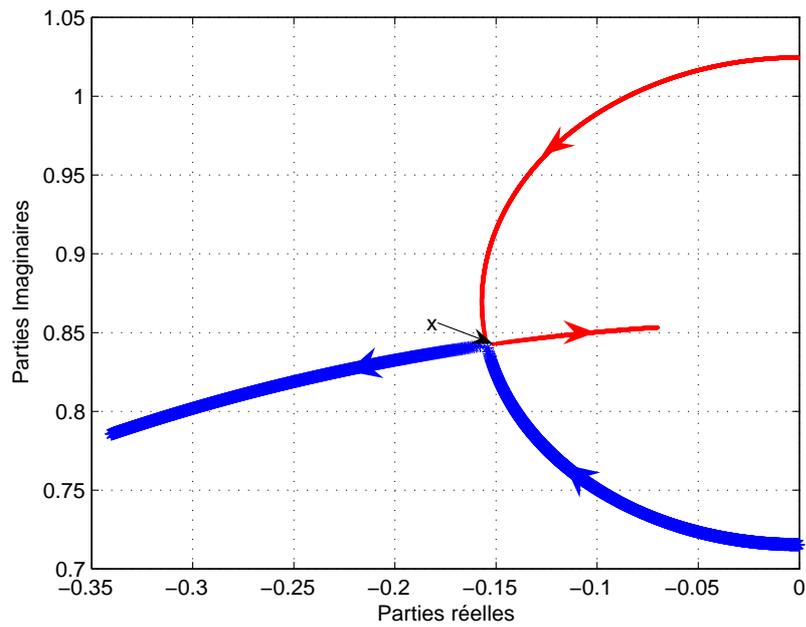


FIG. 4.8 – Lieu des pôles en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et  $p = p_{k\mu}$ .

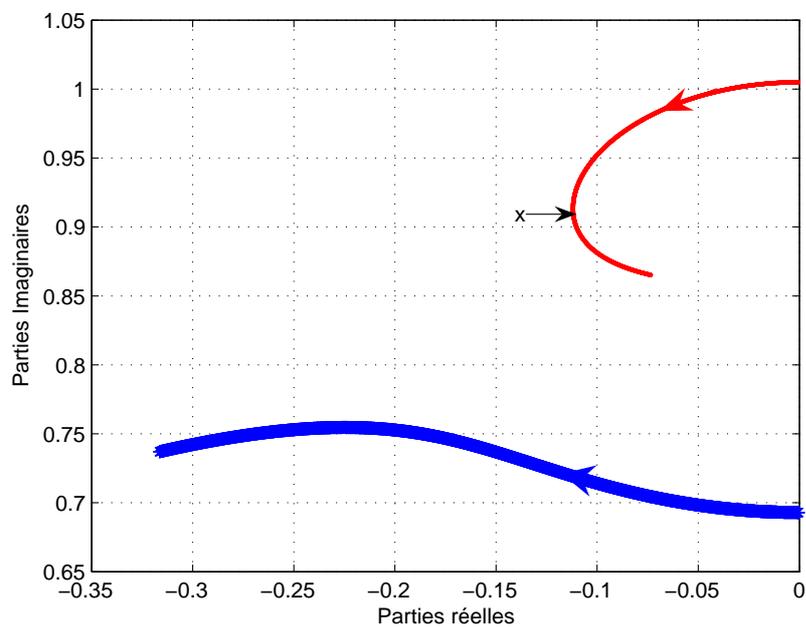


FIG. 4.9 – Lieu des pôles en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et  $p = 0,95p_{k\mu}$ .

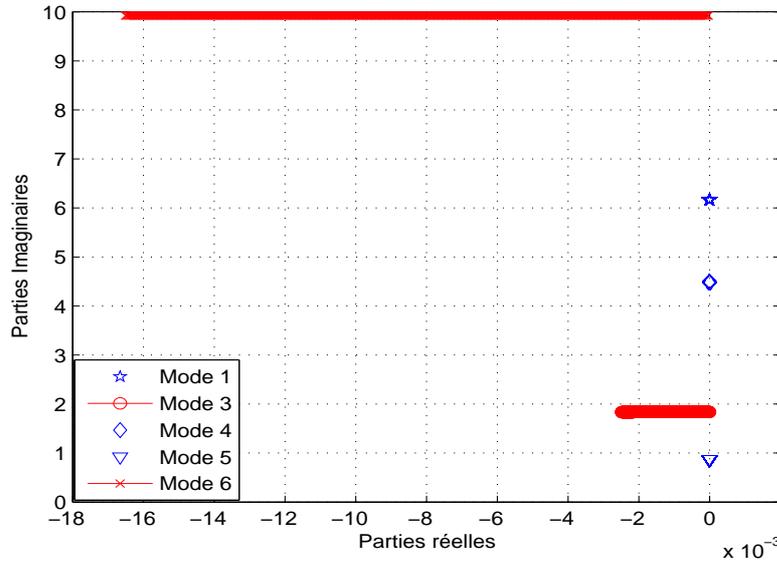


FIG. 4.10 – Lieu des pôles de la maquette du pont en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour  $p = p_{k\mu}$ .

(4.10). Le paramètre  $p$  est pris en condition de synchronisation  $p = p_{k\mu}$ . On constate que les pôles correspondants aux trois modes verticaux (1, 4 et 5) sont à parties réelles nulles. C'est-à-dire que l'amortissement équivalent de ces modes est nul. On peut comprendre, alors, que les modes verticaux ne sont pas contrôlables pour une telle fixation de l'actionneur : le pendule vibre dans le plan (OYZ). Dans le paragraphe (4.7), on a remarqué que le premier mode vertical est très bien contrôlable lorsque l'actionneur est attaché à l'une des extrémités libres du tablier. Par ailleurs, ces modes verticaux seront contrôlés en mettant un autre actionneur électromécanique dont le pendule vibre dans le plan de la maquette : plan vertical (OXZ), ou en utilisant un simple TMD (masse-ressort-amortisseur).

On remarque, sur la même figure, que la partie réelle du sixième mode est très supérieure à celle du troisième mode (mode de balancement). La réponse du mode 6 est donc mieux amortie que celle du mode de balancement. Cette remarque sera réétudiée dans le prochain paragraphe en traçant la réponse des deux modes pour une même excitation. Par ailleurs, l'actionneur est plus efficace sur le mode de torsion que sur les deux autres modes horizontaux : sixième et troisième mode. Cela justifie le résultat trouvé dans le chapitre 3 : le meilleur emplacement du TMD est dans la zone du déplacement maximal. Par ailleurs, pour obtenir un amortissement optimal passif du mode de balancement, le mieux est de placer l'actionneur à l'extrémité du pylône de telle façon que le pendule vibre dans le plan (OYZ).

Les paramètres optimaux donnés par le système (4.58) sont déterminés à partir du critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel. Ces paramètres ont été trouvés dans la littérature pour un simple TMD et selon différents types d'excitations. On rappelle ici les expressions de ces paramètres données par [39] lorsque la structure est en vibration libre, comme le cas étudié, et les expressions données par [29] lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique dont la méthode a été rappelée dans le chapitre 3. Pour comparer les paramètres obtenus dans ce chapitre aux paramètres donnés dans la littérature, on adopte les mêmes notations.

Par ailleurs, lorsque la structure à amortissement propre nul est en vibration libre et par application du critère de minimisation du déplacement de la structure principale, le paramètre de synchronisation et le taux d'amortissement réduit optimaux sont définis selon [39] par le système suivant :

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \\ \zeta^{opt} = \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \end{cases} \quad (4.59)$$

Ces paramètres ont été donnés par [89] en 1981, en maximisant aussi que possible la valeur du décrement logarithmique, lorsque l'amortissement propre de la structure est négligeable. Plus tard en 1993, ont été retrouvés par [39], dans le cas général, lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul.

Ces paramètres sont définis en fonction de la masse du pendule  $m_2$  mais ils ne tiennent pas compte de la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ . Par suite, ces formules sont bien adaptées pour un simple TMD ou pour un simple pendule (pendule sans alternateur). Par contre, les paramètres adimensionnels donnés par le système (4.58) offrent cet avantage et tiennent compte de tous les paramètres de l'actionneur et ils sont aussi optimaux pour un simple TMD. Il est facile de vérifier qu'on retrouve les paramètres optimaux (4.59) à partir des paramètres définis par le système (4.58) en supposant que  $k = \mu$  ; la masse de l'alternateur est nulle.

## Remarque

*Lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul, noté  $\xi$ , les expressions des paramètres optimaux (4.59) sont données par le système suivant [39] :*

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} - \frac{\xi\sqrt{\mu}}{(1 + \mu)\sqrt{1 + \mu - \xi^2}} \\ \zeta^{opt} = \frac{\xi}{1 + \mu} + \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1 + \mu - \xi^2}}{1 + \mu} \end{cases} \quad (4.60)$$

Ce système coïncide avec le système (4.59) lorsque l'amortissement est nul;  $\xi = 0$ . On remarque aussi que ces paramètres coïncident avec les paramètres (3.17) donnés dans le troisième chapitre en supposant que  $k = \mu$ .

Lorsque la structure principale à amortissement propre nul est soumise à une excitation harmonique, les expressions des paramètres adimensionnels seront définies par le système suivant [29]:

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \\ \zeta^{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \end{cases} \quad (4.61)$$

Ces paramètres ont été trouvés en appliquant la méthode rappelée dans le troisième chapitre.

## 4.9 Réponses des modes de la maquette du pont

Pour pouvoir juger de l'efficacité des paramètres optimaux de l'actionneur de référence obtenus dans le paragraphe précédent, on compare la réponse en vibration libre du deuxième mode de la maquette du pont obtenue en utilisant les paramètres du système (4.58) et la réponse du même mode de vibration obtenue en introduisant les paramètres donnés par [39].

Les valeurs du coefficient de synchronisation et du coefficient d'amortissement réduit du système (4.58) sont calculées pour  $k = 36\%$  et  $\mu = 15,7\%$ ; ces coefficients sont donnés à partir du critère de maximisation de ETDR. On utilise la même valeur de  $\mu$  pour le calcul des valeurs de  $p^{opt}$  et de  $\zeta^{opt}$  selon le système (4.59) donné par [39]. Le choix de la valeur de  $k$  est fixé à partir de la masse de l'alternateur.

Dans la figure (4.11) sont représentées les deux contributions modales du déplacement en vibration libre du mode de torsion. La première est calculée en utilisant les paramètres optimaux (4.58) donnés à partir du critère de maximisation de ETDR et la deuxième en utilisant les paramètres optimaux (4.59) donnés par [39]. Ces contributions modales ont été obtenues en résolvant le système linéaire aux équations différentielles ordinaires,

$$\begin{cases} (1 + k)\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p\dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

en introduisant à chaque fois les paramètres optimaux correspondants. On constate que

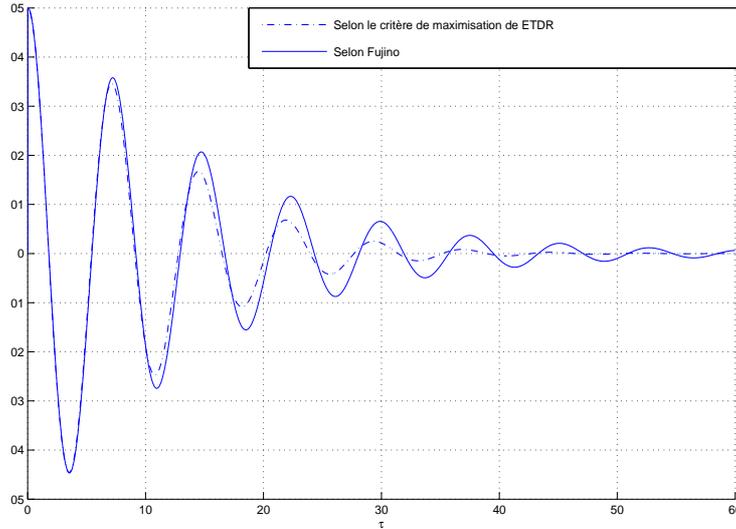


FIG. 4.11 – Réponse libre de la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour  $p$  et  $\zeta$  calculées premièrement à partir du critère de maximisation de ETDR puis à partir du critère donné par [39].

l'amortissement de la contribution modale du déplacement du mode de torsion obtenu à partir du critère de maximisation de ETDR est plus important que celui obtenu selon le critère donné par [39].

On constate aussi, que la décroissance de la réponse en déplacement dans les deux cas n'est pas exponentielle, vu que la contribution modale n'oscille pas sur son mode propre. En effet, pour quantifier cet amortissement on peut identifier le taux d'amortissement équivalent  $\xi_{eq}$  associé à chaque cas selon la formule suivante :

$$\xi_{eq} = 2\xi_2 + \sqrt{\mu} \frac{\langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle}{\langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle}, \quad (4.63)$$

$\langle . \rangle$  est un produit scalaire,  $\xi_2$  le taux d'amortissement propre du mode de torsion,  $\dot{\alpha}_2$  la vitesse de contribution modale et  $\ddot{\Theta}$  l'accélération de l'angle de vibration du pendule. Ce coefficient est trouvé en réécrivant la première équation du système (4.62) sous la forme d'une équation d'équilibre énergétique.

$$(1 + k) \langle \ddot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_2 \rangle + \sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle + 2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle + \langle \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle \quad (4.64)$$

Dans cette équation, on a considéré que l'amortissement propre associé à ce mode de vibration est non nul et que la structure est soumise à une excitation extérieure. Pendant

un cycle de vibration,  $\tau$  varie entre 0 et  $2\pi$ , la contribution modale vérifie les relations suivantes :  $\langle \ddot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = 0$ . L'équation (4.64) devient l'équation d'équilibre des puissances :

$$2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle + \sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle \quad (4.65)$$

$2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle$  est la puissance dissipative due à l'amortissement propre de la structure,  $\langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle$  la puissance d'effort extérieur et  $\sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle$  le flux de puissance de la structure principale au système d'amortissement. Donc, plus le flux est important mieux est l'amortissement de la structure principale. Par suite, ce flux de puissance peut être défini comme une puissance dissipative supplémentaire de la structure principale, d'où l'expression de l'amortissement total équivalent du mode de torsion (4.63).

En négligeant l'amortissement propre de la maquette du pont du mode de torsion, dans le cas étudié, l'amortissement est identifié à 4,67% pour la réponse de la contribution modale du déplacement selon le critère [39] et à 7% pour la réponse de la contribution modale selon le critère de maximisation de ETDR. On a trouvé les mêmes valeurs en utilisant le toolbox COSMAD. Cette différence est due au paramètre  $k$  qui non seulement n'a pas été pris en compte dans les paramètres donnés par [39], mais qui n'a pas été non plus introduit par aucun critère d'optimisation dans la littérature. De plus, cette différence entre les deux taux d'amortissement identifiés augmente si on diminue la masse du pendule  $m_2$  : le rapport  $\frac{\mu}{k}$  diminue. Cela peut expliquer l'intérêt d'introduire un critère d'optimisation qui tient compte de tous les paramètres d'un tel actionneur électromécanique. Pour confirmer l'avantage donné par le critère de maximisation de ETDR : de mieux amortir la contribution modale du déplacement en vibration libre du mode de torsion de la maquette du pont et de tenir compte de tous les paramètres de l'actionneur, on effectue une comparaison entre les réponses des autres modes de la maquette du pont. On souhaite faire la comparaison entre les réponses des six premiers modes. Pour bien voir l'influence du pendule sur les modes verticaux (1, 4 et 5), on résout le système simplifié complet non linéaire (4.45) en considérant que le coefficient d'amortissement propre du pendule est nul et en utilisant un actionneur de référence. Les paramètres dimensionnels utilisés sont déterminés pour chaque critère à partir des paramètres adimensionnels correspondant. La résolution de ce système non linéaire se fait à partir du schéma d'intégration de Newmark dont la procédure de calcul est résumée par l'organigramme de la figure (4.12). Dans la figure (4.13) sont représentées les contributions modales des six premiers modes de la maquette du pont en utilisant des paramètres optimaux dimensionnels. Ces paramètres sont calculés premièrement à partir du critère de maximisation de ETDR (4.58) (courbes pointillés), puis à partir du système (4.59) (courbes en traits pleins). La condition initiale :

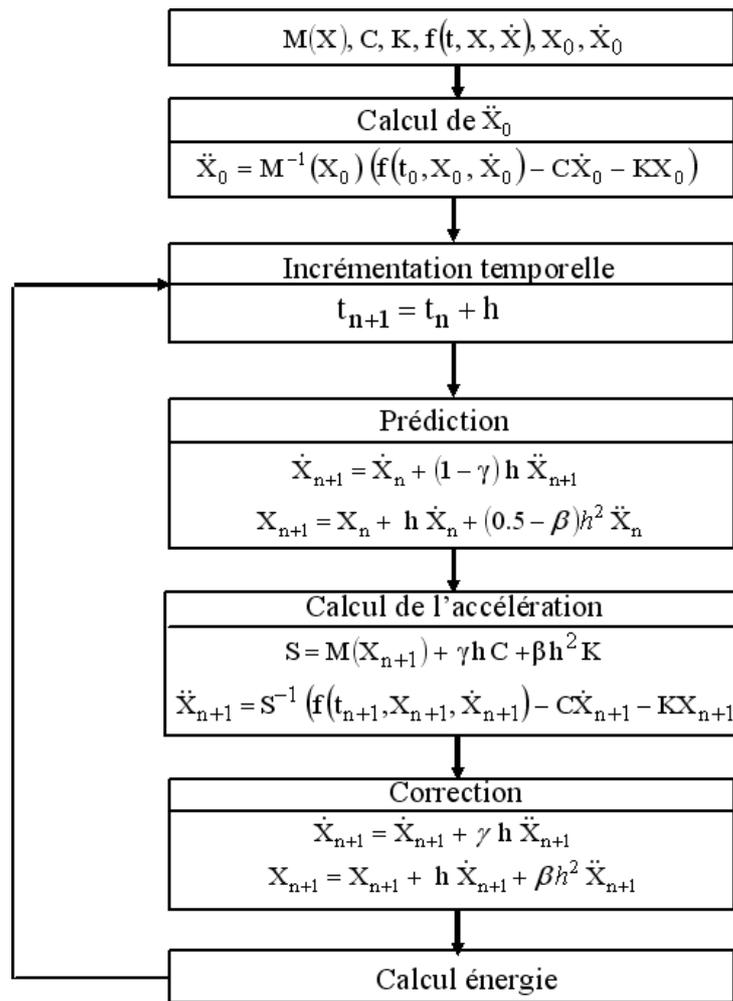


FIG. 4.12 – Algorithme d'intégration de Newmark.

état initial déformé seulement du mode de torsion, est considérée la même pour les deux critères.

De cette figure on constate que les courbes, selon les deux méthodes, du troisième mode et du sixième mode sont presque confondues. On peut, donc interpréter que la masse totale  $M_{ap}$  n'a pas un effet important sur ces deux modes de vibration.

Le mode de balancement converge vers des oscillations constantes: il est très sensible à l'excitation horizontale du tablier vu que le déplacement horizontal et la torsion sont couplés.

On constate aussi une bonne superposition des contributions pour les modes verticaux. Ces modes oscillent autour d'une position d'équilibre déformée. Ces modes verticaux ne sont pas amortis, conformément à ce qu'il a été remarqué dans le paragraphe précédent en traçant le lieu des pôles.

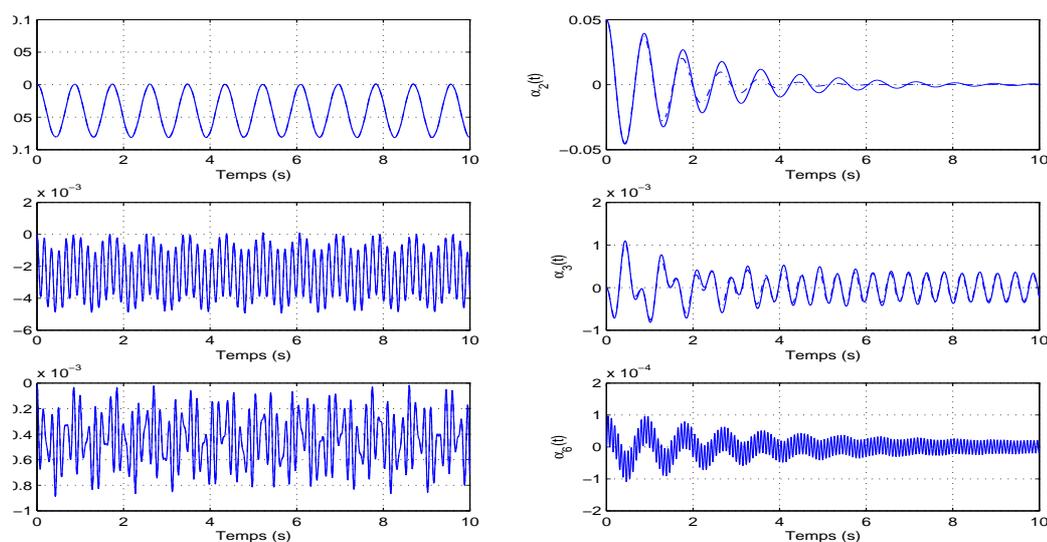


FIG. 4.13 – Contributions modales des modes verticaux (à gauche) et des modes horizontaux (à droite) en utilisant des paramètres dimensionnels. Les contributions en pointillés sont obtenues selon le critère de maximisation de ETDR et les contributions en traits pleins sont obtenues selon le critère donné par [39].

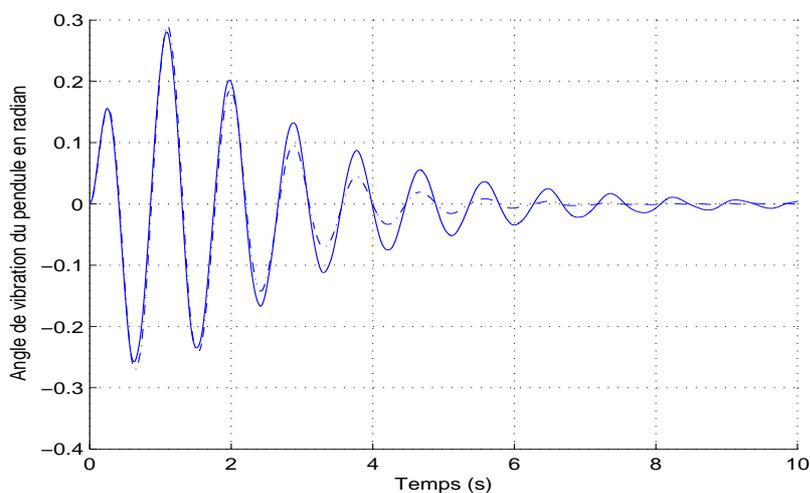


FIG. 4.14 – Angle de vibration du pendule obtenu selon le critère de maximisation de ETDR (en pointillé) et angle de vibration obtenu selon le critère donné par [39] (en trait plein).

Enfin, pour analyser le comportement de l'actionneur, on représente dans la figure (4.14) l'angle de vibration du pendule. Cet angle est excité principalement par le déplacement horizontal de la maquette du pont. On remarque qu'il a presque le même tracé que la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont mais en retard de phase. Cet angle se stabilise lorsque le déplacement horizontal de la maquette se stabilise. Pour cela, l'amortissement de l'angle de vibration du pendule dont les paramètres donnés à partir du critère de maximisation de ETDR est plus important que celui de l'angle de vibration du pendule dont les paramètres obtenus selon [39].

### 4.10 Amortissement multimodale de vibration de la maquette du pont

L'actionneur électromécanique attaché à l'extrémité du tablier de telle façon que le pendule vibre dans le plan (OYZ) permet d'amortir seulement la vibration du mode de torsion. Dans cette section, on cherche à amortir le premier mode et le mode de balancement en utilisant la même idée développée dans ce travail. Comme on a signalé dans le paragraphe (4.8.2), le premier mode est amorti lorsque le pendule de l'actionneur vibre dans le plan (OXZ) et le mode de balancement est amorti lorsque l'actionneur est placé à l'extrémité du pylône dont le pendule vibre dans le plan (OYZ). Pour simplifier, on propose d'amortir premièrement le mode vertical ensuite le mode de balancement.

#### 4.10.1 Amortissement du premier mode de vibration de la maquette du pont

On considère que l'actionneur électromécanique est placé à l'extrémité supérieure du pylône de telle façon que le pendule vibre dans le plan de la maquette du pont (OXZ). Le système mécanique est formé de l'équation de vibration du premier mode de la maquette du pont et de l'équation de vibration de l'actionneur "linéarisé". L'équation de vibration discrétisée du premier mode est définie comme suit :

$$m_1^* \ddot{\alpha}_1(t) + k_1 \alpha_1(t) = -v_{HN}(t) \varphi_1^x(x_4 = L_4), \quad (4.66)$$

où  $\varphi_1^x(x_4 = L_4)$  est la composante selon la direction X de la déformée modale du premier mode. Cette équation est la première équation du système (4.21) avec une seule force

horizontale de liaison appliquée à l'extrémité de la quatrième poutre de la maquette. L'expression de cette force de liaison et l'équation de vibration du pendule

$$\begin{cases} v_H(t) = M_{ap}\ddot{u}_4(x_4 = L_4, t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ I_p\ddot{\theta} + m_2l\ddot{u}_4(x_4 = L_4, t)\cos\theta + C_p\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange. La discrétisation de ce système est déterminée à partir de l'estimation du déplacement sur le premier mode. Au système (4.67) on ajoute les équations de l'alternateur. D'où le système formé des deux degrés de libertés suivant, on considère l'actionneur "linéarisé" :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap}(\varphi_1^x(x_4 = L_4))^2)\ddot{\alpha}_1(t) + k_1\alpha_1(t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta\varphi_1^x(x_4 = L_4) \\ = m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta\varphi_1^x(x_4 = L_4) \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_1(t)\varphi_1^x(x_4 = L_4)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

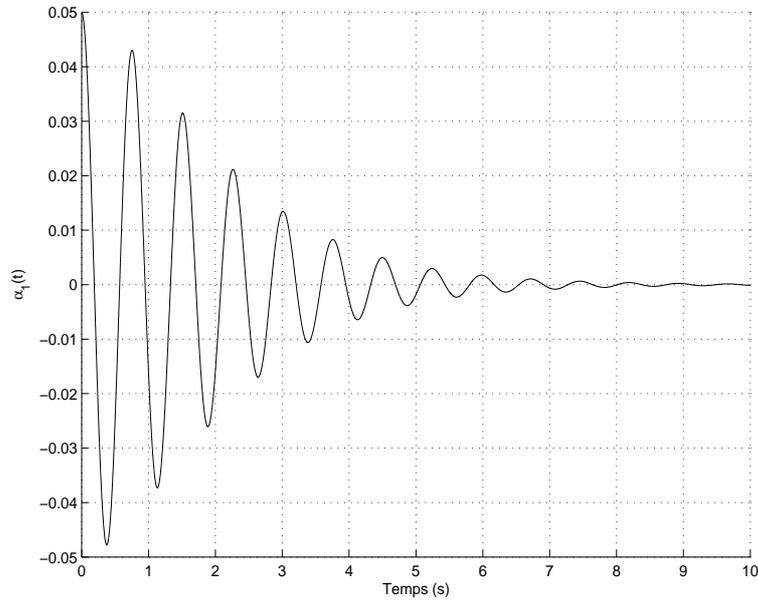


FIG. 4.15 – Réponse libre de la contribution modale du premier mode de vibration de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.1) .

Les paramètres optimaux du pendule sont déterminés, en appliquant le critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel, à partir du système (4.58). On représente dans la figure (4.15) l'oscillation libre de la contribution modale du premier mode en fonction du temps. On remarque qu'en utilisant une telle configuration de l'actionneur le premier mode vertical de la maquette du pont est amorti et l'amortissement équivalent est identifié à 6%.

### 4.10.2 Amortissement du troisième mode de vibration de la maquette du pont

Pour amortir le mode de balancement, on considère que l'actionneur électromécanique est placé à l'extrémité supérieure du pylône dont le pendule vibre dans le plan de la maquette du pont (OYZ). Par raison de simplification, on suppose que le système mécanique est formé seulement de l'équation de vibration du mode de balancement de la maquette du pont et de l'équation de vibration de l'actionneur "linéarisé". Ce système, a la même forme que le système (4.68), définit comme suit :

$$\begin{cases} (m_3^* + M_{ap}(\varphi_3^y(x_4 = L_4))^2)\ddot{\alpha}_3(t) + k_3\alpha_3(t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta\varphi_3^y(x_4 = L_4) \\ = m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta\varphi_3^y(x_4 = L_4) \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_3(t)\varphi_3^y(x_4 = L_4)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

où  $\varphi_3^y(x_4 = L_4)$  est la composante selon la direction Y de la déformée modale du mode de balancement. Les paramètres optimaux de l'actionneur "linéarisé" sont déterminés à partir du système (4.58). On représente dans la figure (4.16) l'oscillation libre de la contribution modale du troisième mode en fonction du temps. On remarque que le mode

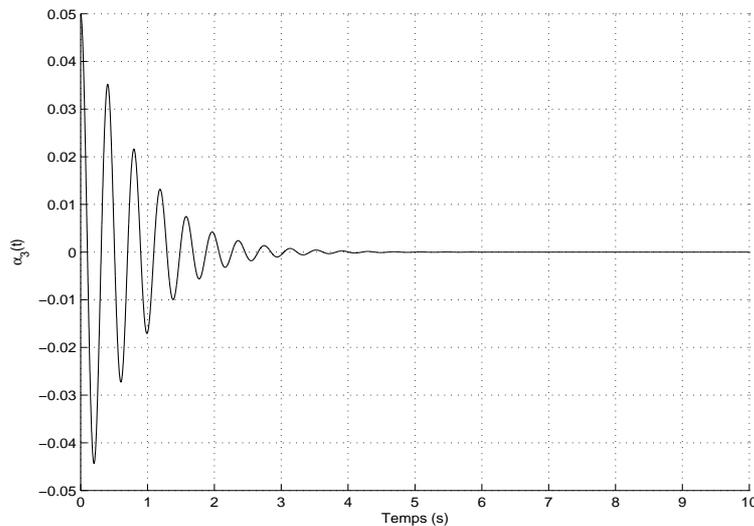


FIG. 4.16 – Réponse libre de la contribution modale du troisième mode de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.2).

de balancement de la maquette du pont, lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité supérieure du pylône de façon à ce que le pendule vibre dans le plan (OYZ), est bien amorti.

En effet, pour amortir les trois premiers modes de vibration il suffit d'équiper la maquette de trois actionneurs électromécaniques dont deux sont attachés à l'extrémité du pylône et le troisième est attaché à l'une des deux extrémités du tablier comme indiqué sur la figure (4.17).

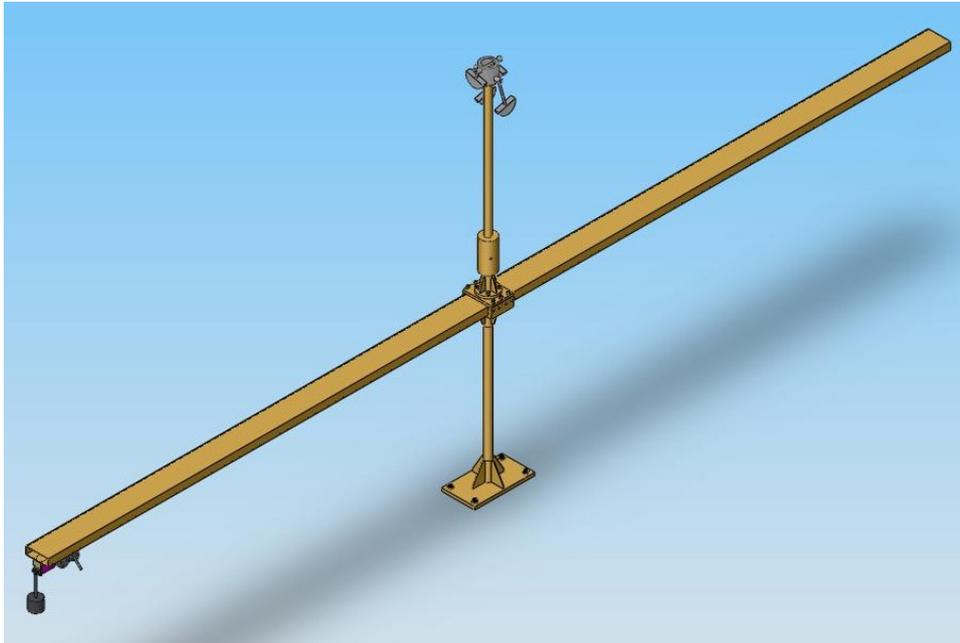


FIG. 4.17 – Maquette du pont équipé par trois actionneurs.

## 4.11 Réponse du mode de torsion sous excitation harmonique

Après la comparaison entre les contributions modales du déplacement en vibration libre, on étudie dans ce paragraphe la comparaison entre la contribution modale du mode de torsion en utilisant les paramètres donnés par le système (4.58) et la contribution modale du même mode en utilisant les paramètres donnés par (4.61). La structure, dans les deux cas, est soumise à une excitation harmonique. On considère que cette excitation est horizontale et qu'elle est concentrée à l'autre extrémité du tablier de la maquette du

pont. Le système à résoudre est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} [m_2^* + M_{ap}((\varphi_2^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^z(x_1 = 0))^2 + e^2(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \\ + 2e\varphi_2^y(x_1 = 0)\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)]\ddot{\alpha}_2(t) + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0)\sin\theta \\ + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\cos\theta]\ddot{\theta} + C_p(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2\dot{\alpha}_2(t) - C_p\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\dot{\theta} \\ + (k_2 + M_{ap}eg(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2)\alpha_2(t) = f_2(t) - M_{ap}g\varphi_2^z(x_1 = 0) \\ + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\sin\theta - \varphi_2^z(x_1 = 0)\cos\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\sin\theta]\dot{\theta}^2 \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0)\sin\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\cos\theta]\ddot{\alpha}_2(t) \\ + C_{eq}\dot{\theta} + m_2g\sin\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.70)$$

$f_2(t) = a_0 \cos(\omega_2 t)\varphi_2^y(x_3 = L_3)$  est la force d'excitation harmonique, où  $a_0$  son amplitude et  $\omega_2$  sa pulsation propre prise à la résonance du mode de torsion de la maquette du pont. D'après le calcul éléments finis, les formes propres, au point d'accrochage de l'actionneur, verticale  $\varphi_2^z(x_1 = 0)$ , longitudinale  $\varphi_2^x(x_1 = 0)$  et de torsion  $\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)$  sont nulles et d'après la condition de normalisation (4.19), la forme propre horizontale  $\varphi_2^y(x_1 = 0)$  est unitaire pour le mode de torsion.

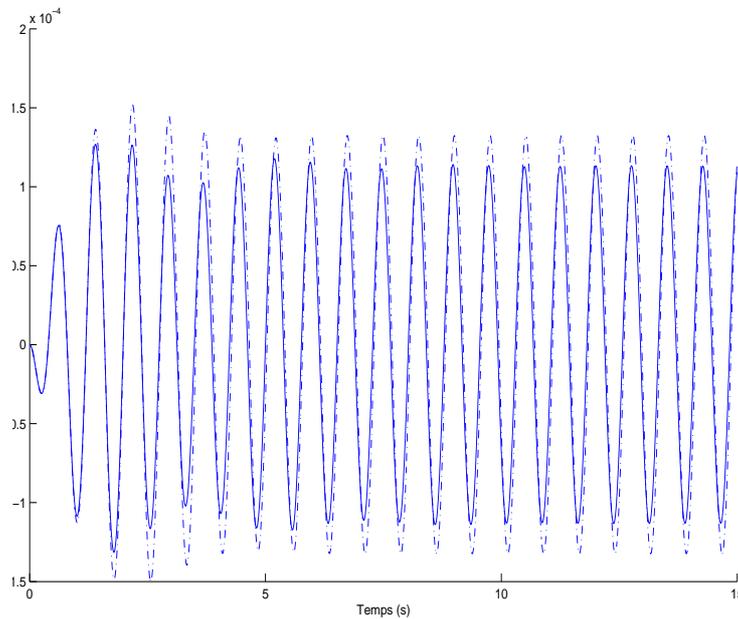


FIG. 4.18 – Contribution modale du mode de torsion obtenue selon le critère de maximisation de ETDR (en trait pointillé) et la contribution du même mode obtenu selon le critère donné par [29] (en trait plein).

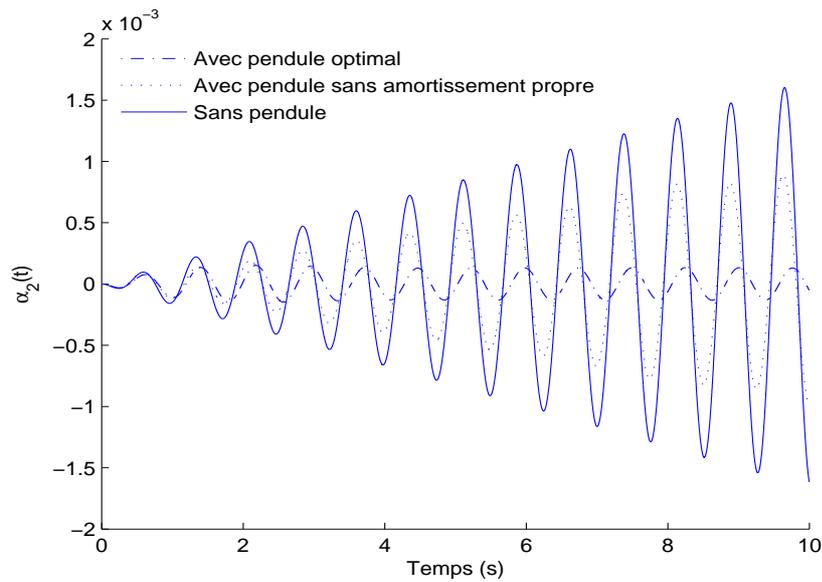


FIG. 4.19 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion sans contrôle et la contribution modale du même mode avec l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier.

De la figure (4.18) on observe que la contribution modale obtenue en utilisant les paramètres donnés par (4.61) est mieux amortie que celle obtenue en utilisant les paramètres donnés par (4.58). D'où l'intérêt, comme on verra dans le prochain chapitre, d'introduire une loi de contrôle semi-actif qui permet de faire varier les paramètres de l'actionneur selon les types d'excitations.

De plus, dans la figure (4.19) est représentée la contribution modale du déplacement du mode de torsion sans contrôle, puis contrôlée en utilisant premièrement un actionneur à paramètres optimaux ensuite un actionneur à paramètres non optimaux : actionneur à coefficient d'amortissement équivalent nul. On observe l'influence majeure de l'actionneur à paramètres optimaux à réduire l'amplitude de vibration de la contribution modale à la résonance.

L'étude faite jusqu'à présent est la conception des paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont. On étudiera par la suite l'amortissement du mode de torsion de la maquette du pont lorsqu'on considère le système réel (non-linéaire).

## 4.12 Réponse du mode de torsion de la maquette du pont en résolvant le système non linéaire

L'étude faite jusqu'à maintenant se base sur l'hypothèse fondamentale que l'amortissement électrique peut être obtenu par un amortissement mécanique visqueux équivalent ; actionneur de référence. Les paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont ont été obtenus en utilisant le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel au moyen des placement des pôles après linéarisation du système d'équations différentielles. Dans cette section en considérant que l'amortissement est la somme d'un amortissement mécanique et d'un amortissement électrique, système réel, on cherche à déterminer la valeur de la résistance externe afin d'amortir toujours le mode de torsion de la maquette du pont, en résolvant le système d'équations non linéaires (4.45).

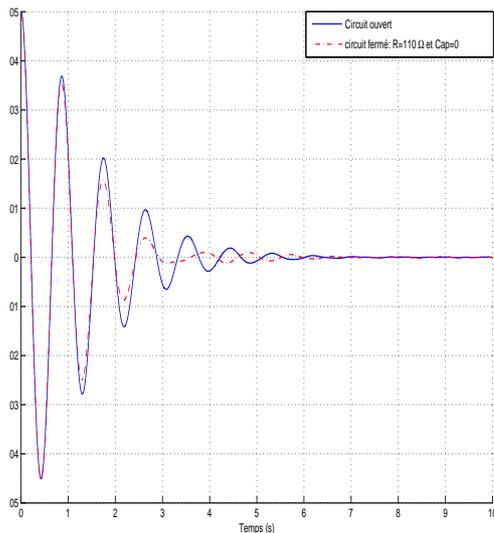


FIG. 4.20 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec  $C_{ap} = 0$ .

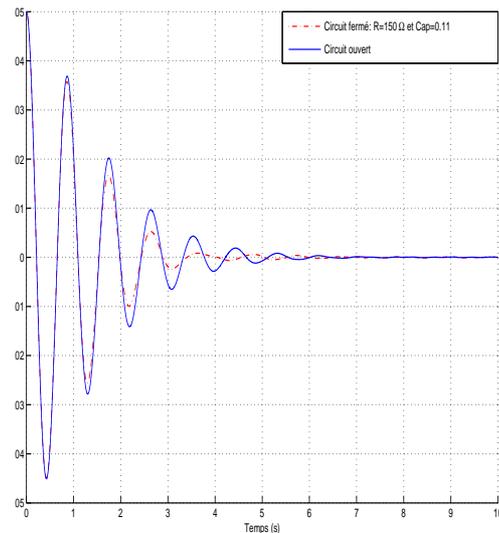


FIG. 4.21 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec  $C_{ap} \neq 0$ .

Pour cela, on maintient la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la masse du pendule  $m_2$  et la longueur équivalente optimale du pendule obtenues dans les paragraphes précédents et on cherche premièrement une valeur de la résistance externe à  $C_{ap}$  nul, tel que l'amortissement du mode de torsion soit optimal. Lorsque l'amortissement mécanique de l'actionneur est non nul, on cherche une valeur de la résistance et une valeur de  $C_{ap}$  tel que l'amortis-

sement du mode de torsion soit optimal. Les paramètres électriques, la résistance interne, l'inductance de la bobine et les constantes  $K_e$  et  $K_c$ , sont identifiés dans le deuxième chapitre. Le rapport d'engrenage est pris dans ce cas à  $\beta = 252$  de manière que l'alternateur produise du courant pour des petites oscillations.

Pour comparer l'amortissement du mode de torsion en résolvant le système linéaire avec l'actionneur de référence (4.51) à l'amortissement en résolvant le système non linéaire avec l'actionneur en circuit fermé (4.45), on représente, dans les figures (4.20) et (4.21), la contribution modale en vibration libre du mode de torsion de la maquette du pont en résolvant le système linéaire (4.51) à paramètres optimaux (courbes pointillées) et la contribution modale du même mode de vibration en résolvant le système non linéaire (4.45) (courbes en traits pleins). Dans la figure (4.20) la contribution modale lorsque l'actionneur est en circuit fermé est tracée pour une valeur de résistance externe  $R = 110\Omega$  et un coefficient d'amortissement mécanique nul. Comme dans la pratique l'amortissement propre est non nul, la valeur de la résistance est prise à  $R = 150\Omega$  pour un coefficient  $C_{ap} = 0,11Kg/s$ , figure (4.21). De ces deux figures, on constate que l'amortissement est plus important en résolvant le système non linéaire (4.45) que le système linéaire (4.51) à paramètres optimaux.