

# Chapitre 3

## Conception des paramètres optimaux d'un amortisseur à masse accordée pendulaire et un alternateur : actionneur de référence

### 3.1 Introduction

Un contrôle purement passif consiste à disposer sur la structure un système qui stabilise les vibrations comme pour le contrôle actif, mais sans apport d'énergie de l'extérieur. Ce type de contrôle est plus simple et ne présente aucun problème d'instabilité. D'autre part, il consiste en une réduction des vibrations moins consistante que celle obtenue avec le contrôle actif et sur une bande de fréquence plus serrée. Parmi les amortisseurs les plus utilisés en génie civil, on peut citer l'amortisseur à masse accordée (TMD). La raideur et la masse d'un tel système sont choisies pour que l'oscillateur ainsi constitué dissipe le maximum d'énergie de l'ouvrage que l'on souhaite contrôler. Ce système est utilisé pour amortir la vibration d'un seul mode de vibration de la structure en synchronisant la fréquence de vibration de l'amortisseur sur le mode à amortir. Le problème d'amortissement d'une manière passive des vibrations relatives à plusieurs modes d'une structure mécanique en utilisant plusieurs amortisseurs à masse accordée est traité dans [94], où l'auteur a utilisé deux amortisseurs à masse accordée pour réduire les vibrations causées par l'activité humaine des deux premiers modes propres du plancher.

La performance d'un amortisseur à masse accordée passif est très liée aux réglages de ses paramètres qui ont été le sujet de nombreuses recherches. La première méthode de conception est introduite par Den Hartog (1947) [29] qui applique un critère d'optimisation consiste à la minimisation du déplacement de la structure principale, lorsque son amortissement propre est nul et lorsqu'elle est soumise à une excitation harmonique. Il a été déterminé les paramètres optimaux du TMD en fonction du rapport de la masse du TMD sur la masse modale du mode à amortir. Lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul, ces paramètres ont été obtenus par [103] en appliquant un critère qui consiste à la minimisation de la vitesse de la structure principale. Une étude détaillée a été réalisée par [105]; lorsque la structure est soumise à une excitation aléatoire, les paramètres optimaux du TMD ont été donnés en appliquant un critère d'optimisation qui consiste à minimiser l'accélération de la structure principale. Par contre, lorsque la structure principale est en vibration libre, les paramètres optimaux du TMD ont été donnés par [89] en appliquant un critère d'optimisation qui consiste à la maximisation du décrétement logarithmique. Ces paramètres ont été obtenus, plus tard, lorsque l'amortissement propre est non nul par [39]. Tous ces critères, et plusieurs autres, ont déterminé les paramètres optimaux du TMD en fonction du rapport de la masse du TMD sur la masse modale du mode à amortir. Mais, l'actionneur introduit dans cette étude contient la masse du TMD pendulaire et la masse totale de l'actionneur. D'où, l'intérêt d'introduire un critère qui tient compte de tous les paramètres de cet actionneur.

Dans ce chapitre on considère un modèle mécanique à un seul degré de liberté reporté dans le deuxième chapitre et dérivé, à travers réduction modale, d'un modèle à plusieurs degrés de liberté obtenu par discrétisation modale d'une poutre encastrée libre. A cette équation on ajoute l'équation de l'actionneur de référence; système formé par une poutre et par un actionneur de référence. Une étude paramétrique de ce système est effectuée et afin d'amortir le premier mode propre de la poutre, les paramètres optimaux de l'actionneur sont déterminés en appliquant un critère d'optimisation. Ce critère est basé sur la maximisation du taux de décroissance exponentiel au moyen de la technique de placement des pôles après linéarisation du système couplé. Cette technique a été introduite pour déterminer les paramètres optimaux d'un circuit électrique afin d'amortir la vibration d'une structure à travers des éléments piézoélectriques [10, 22, 23]. On a défini un paramètre indicatif de l'amortissement du système, correspondant au taux de décroissance exponentiel des oscillations libres du système, et on a réalisé une étude détaillée de l'amortissement obtenue en variant les paramètres de l'actionneur. Cette étude est analysée sur le premier mode propre de la vibration horizontale de la poutre et il est la même pour tout autre

mode sélectionné.

La comparaison entre les paramètres optimaux de l'actionneur obtenus selon le critère de la maximisation du taux de décroissance exponentiel et les paramètres optimaux selon d'autres critères donnés en littérature ainsi la réponse de la structure correspondante sera étudiée dans le prochain chapitre.

## 3.2 Modèle mécanique

Après l'écriture des équations discrétisées du modèle et l'identification des paramètres de l'alternateur dans le chapitre précédent, on introduit dans ce chapitre un critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel pour obtenir les paramètres optimaux de l'actionneur. Pour chercher ces paramètres, on considère un système mécanique formé d'une poutre encastree-libre ; de longueur  $L$ , de section  $A$  et de masse volumique  $\rho$ , à son extrémité libre est attaché l'actionneur électromécanique qui sera supposé dans la suite de ce chapitre comme actionneur de référence. Cet actionneur est utilisé pour amortir la vibration de la poutre. Comme la performance d'un TMD, en contrôle passif, est très dépendante du mode à amortir de la structure, on considère seulement le premier mode de vibration horizontale de la poutre. Le système de ce contrôle passif est à deux degrés de liberté ; la première contribution modale de la poutre et l'angle de vibration du pendule. Pour obtenir un amortissement passif optimal du premier mode de cette poutre il faut choisir des valeurs optimales de la longueur du pendule et du coefficient d'amortissement total équivalent de l'actionneur indiqué par la figure (3.1). Le comportement de ce système, en considérant seulement le premier mode de vibration horizontale de la poutre, est complètement décrit, après discrétisation, par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_1(t) + m_2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + c_1\dot{\alpha}_1(t) + k_1\alpha_1(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_1(t)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $m_1^*$ ,  $c_1$ ,  $k_1$  et  $\alpha_1$  sont, respectivement, la première masse modale, le premier amortissement modal, la première rigidité modale et la première contribution modale de la poutre.  $\theta$  est l'angle de rotation de la barre du pendule. On rappelle que  $m_2$  est la masse de la barre et de la boule,  $l$  est la distance entre le point A et le centre de gravité ( $l = AG$ ) : longueur équivalente du pendule,  $M_{ap}$  et  $I_{ap}$  sont, respectivement, la masse et le moment d'inertie total de l'actionneur électromécanique.

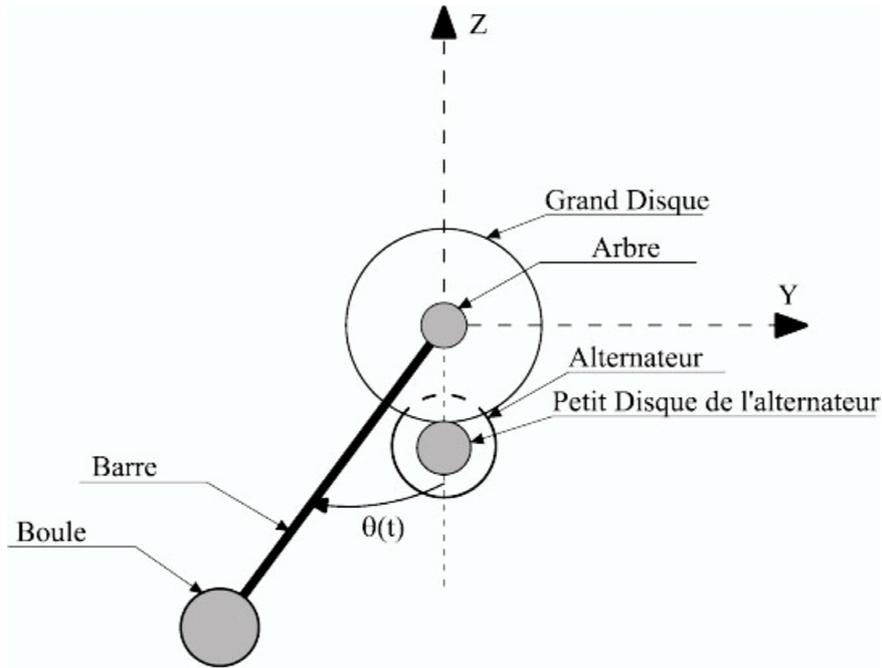


FIG. 3.1 – Représentation schématique de l'actionneur.

Si nous supposons que l'angle de rotation du pendule est faible, le système (3.1) peut être écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_1(t) + m_2 l \ddot{\theta} + c_1 \dot{\alpha}_1(t) + k_1 \alpha_1(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_1(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.3 Equations adimensionnelles

Dans le but d'optimiser les paramètres du pendule : masse, longueur équivalente et coefficient d'amortissement mécanique, pour obtenir un amortissement optimal de la vibration horizontale de la poutre, il convient de manipuler des paramètres adimensionnels. Les grandeurs fondamentales  $\theta$  et  $t$  sont écrites sous la forme adimensionnelle suivante [22] :

$$\theta = \check{\theta} \Theta, \quad t = \check{t} \tau, \quad (3.3)$$

où les grandeurs majuscules sont adimensionnelles alors que celles avec le tilde sont les échelles relatives. Le système d'équations linéaires (3.2), en introduisant ces paramètres adimensionnels sera écrit comme suit :

$$\begin{cases} (1 + \frac{M_{ap}}{m_1^*})\ddot{\alpha}_1 + \frac{m_2}{m_1^*}l\check{\theta}\ddot{\Theta} + 2\xi_1\omega_1\check{t}\dot{\alpha}_1 + \lambda_1\check{t}^2\alpha_1 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \frac{m_2l}{I_{ap}}\frac{1}{\check{\theta}}\ddot{\alpha}_1 + \frac{C_{eq}}{I_{ap}}\check{t}\dot{\Theta} + \frac{m_2gl}{I_{ap}}\check{t}^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1^*}}$  est la première pulsation modale,  $\lambda_1$  la première valeur propre et  $\xi_1$  le taux d'amortissement réduit du premier mode de la poutre. Les dérivées sont maintenant par rapport au temps adimensionnel  $\tau$ .  $\check{t}$  est choisi tel que le coefficient de  $\alpha_1$  dans la première équation du système (3.4) soit unitaire ; par conséquent on a

$$\check{t} = \frac{1}{\omega_1}. \quad (3.5)$$

Par raison de symétrie,  $\check{\theta}$  sera fixé en supposant que le coefficient de  $\ddot{\Theta}$  dans la première équation soit égal au coefficient de  $\ddot{\alpha}_1$  dans la deuxième équation du système précédent. Par ailleurs, le système linéaire (3.4) s'écrit sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} (1 + k)\ddot{\alpha}_1 + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\Theta} + 2\xi_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\alpha}_1 + 2\zeta p \dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

avec adaptation des notations suivantes [96] :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1^*k_1}}, & \omega_{ap}^2 = \frac{m_2gl}{I_{ap}} & \text{et} & p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_1} \\ \zeta = \frac{C_{eq}}{2I_{ap}\omega_{ap}}, & k = \frac{M_{ap}}{m_1^*} & \text{et} & \mu = \frac{m_2}{m_1^*} \end{cases} \quad (3.7)$$

$\omega_{ap}$  est la pulsation propre du système pendule-alternateur,  $p$  le rapport entre la pulsation propre de la poutre et la pulsation du pendule-alternateur et  $\zeta$  le taux d'amortissement propre de l'actionneur de référence. Les quatre paramètres adimensionnels  $\mu$ ,  $k$ ,  $p$  et  $\zeta$  relient les quatre paramètres dimensionnels de l'actionneur de référence ; la masse du pendule  $m_2$ , la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la longueur équivalente du pendule  $l$  et le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$ . L'inertie totale de l'actionneur est définie en fonction de la longueur équivalente et de la masse du pendule  $m_2$ . Par raison de simplification on suppose que  $I_{ap} = m_2l^2$ .

Si  $\mu = 0$ , le système mécanique couplé poutre-pendule-alternateur revient à l'étude d'une poutre avec une masse concentrée à son extrémité libre.

### 3.4 Solution du système des équations adimensionnelles

On procède maintenant en écrivant le système linéaire des deux équations différentielles ordinaires de seconde ordre (3.6) sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0. \quad (3.8)$$

Avec  $M = \begin{bmatrix} 1+k & \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta p \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}$  et  $X = [\alpha_1, \Theta]^T$ . La matrice  $M$  est toujours inversible car son déterminant,  $(1+k-\mu)$ , est non nul puisque la masse du pendule  $m_2$  est inférieure à la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ . Ce système peut être écrit sous la forme d'un système d'état

$$\dot{Z} = \mathbf{A}Z \quad (3.9)$$

des quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre.

$Z = [X, \dot{X}]^T$  est la variable d'état et  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$  la matrice d'état. La solution de l'équation (3.9) est de la forme  $Z = Z_0 e^{\mathbf{A}\tau}$  où  $Z_0$  est la condition initiale. Cette solution peut être écrite explicitement comme combinaison linéaire des exponentielles  $e^{\lambda_i \tau}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en utilisant les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ . Les coefficients de cette combinaison linéaire dépendent des conditions initiales. Le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$ , dont les racines sont les valeurs propres de ladite matrice, est le suivant :

$$P(\lambda) = \frac{1}{1+k-\mu} \{ (1+k-\mu)\lambda^4 + [2\zeta p(1+k) + 2\xi_1]\lambda^3 + [1+p^2(1+k) + 4\xi_1\zeta p]\lambda^2 + [2\zeta p + 2\xi_1 p^2]\lambda + p^2 \} \quad (3.10)$$

En appliquant le critère de Routh ; un système linéaire est stable si est seulement si ses valeurs propres sont à parties réelles négatives,  $Re(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en accord avec le fait que le système utilisé est purement dissipatif. La solution du système couplé (3.6) est alors constituée de la somme des exponentiels des racines du polynôme (3.10).

### 3.5 Optimisation des paramètres adimensionnels

Afin d'obtenir les paramètres adimensionnels optimaux, on applique un critère d'optimisation qui consiste à maximiser le taux de décroissance exponentiel de la solution de la vibration libre du système mécanique linéaire (3.9). La maximisation de ce taux de

décroissance peut être obtenue au moyen de l'application de la technique de placement des pôles après linéarisation du système différentiel du modèle mécanique couplé [10]. On suppose en premier cas que le coefficient d'amortissement propre de la poutre est nul ;  $\xi_1 = 0$ . Les pôles du système mécanique couplé  $\lambda_i$  sont les racines du polynôme  $P(\lambda)$  (3.10). Ces racines ont des parties réelles non positives. L'optimisation de l'amortissement du système est réalisée en fixant les valeurs de  $\mu$  et de  $k$  dans l'intervalle  $[0,1]$  et en cherchant les valeurs de  $p_{k\mu}$  et de  $\zeta_{k\mu}$  de  $p$  et  $\zeta$  qui maximisent le taux de décroissance exponentiel (ETDR) de la vibration libre de la poutre donnée par :

$$ETDR = \min_i | \operatorname{Re}(\lambda_i) |, \quad (3.11)$$

où  $\operatorname{Re}$  est la partie réelle des racines du polynôme  $P(\lambda)$ . Cette procédure d'optimisation, en paramètres dimensionnels, revient à fixer les valeurs de  $m_2$  et de  $M_{ap}$  et à chercher les valeurs de la longueur équivalente du pendule et de la résistance externe qui maximisent le taux de décroissance exponentiel. La recherche des racines du polynôme  $P(\lambda)$  revient à la recherche des racines du polynôme suivant :

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)\lambda^4 + 2\zeta p(1 + k)\lambda^3 + [1 + p^2(1 + k)]\lambda^2 + 2\zeta p\lambda + p^2 \quad (3.12)$$

Ce polynôme a la même forme que le polynôme obtenu par [10, 22] lorsqu'un circuit RL est attaché aux bornes d'un élément piézoélectrique pour amortir une poutre. Dans ce cas et en ordre de maximiser le taux de décroissance exponentiel, les valeurs optimales de  $p$  et de  $\zeta$  sont obtenues lorsque le polynôme a deux racines doubles complexes conjuguées. Par analogie, on suppose que le polynôme (3.12) a deux racines doubles complexes conjuguées :

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)[\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2]^2, \quad (3.13)$$

où  $x_1 \in \mathbf{R}^-$  et  $x_2 \in \mathbf{R}$  sont, respectivement, la partie réelle et imaginaire des racines complexes conjuguées. En identifiant les coefficients des deux polynômes (3.12) et (3.13), les valeurs des paramètres adimensionnels optimaux et de ETDR

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{k\mu} = \frac{\sqrt{1 + k - \mu}}{1 + k} \\ \zeta_{k\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{1 + k}} \\ ETDR = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1 + k}\sqrt{1 + k - \mu}} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

sont définies en fonction des paramètres  $\mu$  et  $k$ . On revient lors de la résolution du système adimensionnel sur la validité de l'optimalité de ces paramètres dont on étudie la réponse

de la poutre en variant à chaque fois une paramètre.

Lorsque le polynôme (3.12) a une racine réelle d'ordre quatre, une valeur optimale de  $k$  peut être obtenue en fonction de  $\mu$

$$k = \frac{5\mu - 4}{4}. \quad (3.15)$$

Comme la valeur de  $\mu$  est faible [29], alors à partir de l'équation (3.15), il est presque impossible de trouver une valeur optimale de  $k$ . Par ailleurs, pour fixer les paramètres  $\mu$  et  $k$  on étudie leurs influences sur les autres paramètres de l'actionneur.

Pour voir l'influence de la masse du pendule  $m_2$  et de la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$  sur la réponse du pendule, on trace l'évolution du taux de décroissance exponentiel en fonction de  $k$  et de  $\mu$  en variant l'un et en maintenant l'autre fixe. De la figure (3.2) il résulte que, pour une valeur fixe de  $k$ , ETDR augmente en fonction de  $\mu$  et, pour une valeur fixe de  $\mu$ , diminue en fonction de  $k$ . On remarque aussi, à partir du système (3.14),

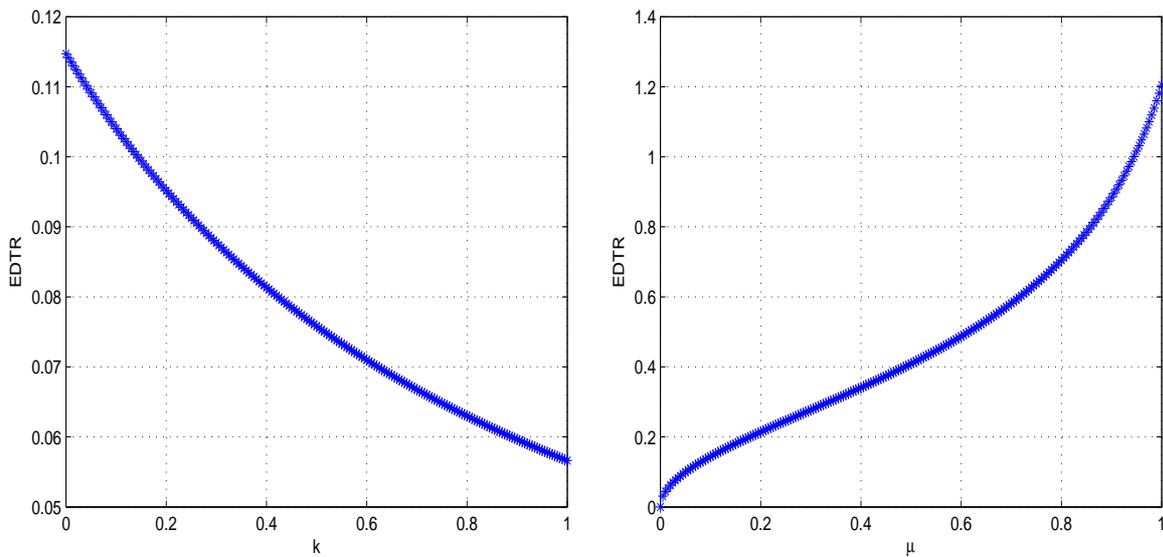


FIG. 3.2 – Evolution de ETDR en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

que pour toutes valeurs de  $k$  et de  $\mu$ , le coefficient ETDR est positif. Par ailleurs, la partie réelle des racines du polynôme (3.12) est négative et donc d'après le critère de Routh, le système linéaire mécanique (3.6) est stable.

De même, pour voir l'influence des masses de l'actionneur ( $m_2$  et  $M_{ap}$ ) sur le paramètre de synchronisation et sur le taux d'amortissement réduit, on trace l'évolution de  $p$  et de  $\zeta$  en fonction de  $k$  et de  $\mu$  en fixant à chaque fois l'un et en faisant varier l'autre. De la

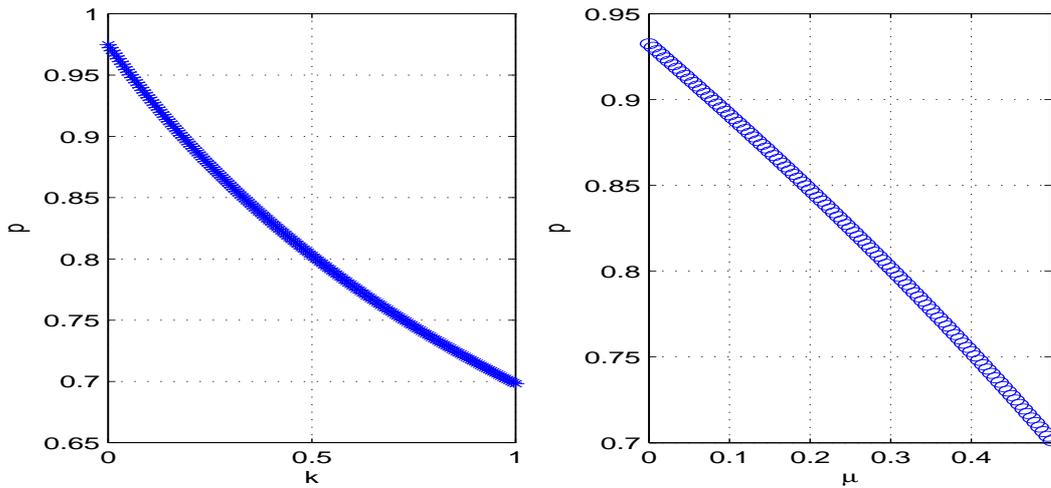


FIG. 3.3 – Evolution de  $p$  en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

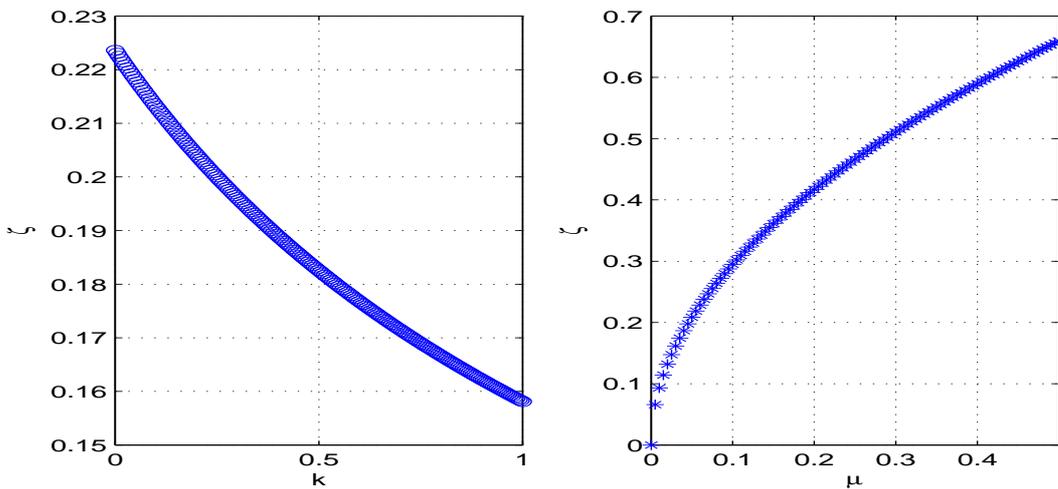


FIG. 3.4 – Evolution de  $\zeta$  en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

figure (3.3) il résulte que le paramètre de synchronisation diminue en fonction des masses de l'actionneur. Et par suite, plus les masses de l'actionneur augmentent plus l'influence sur l'amortissement du paramètre de synchronisation diminue. Cette remarque coïncide avec celle donnée par [29]. Mais, en [29] le paramètre de synchronisation modale est défini seulement en fonction de  $\mu$ .

De la figure (3.4) il résulte que le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  diminue en fonction de  $k$  mais il augmente en fonction de  $\mu$ . Par ailleurs, à partir de ces courbes, on ne peut pas définir des valeurs optimales des masses de l'actionneur. Mais, on peut tirer une

constatation : l'amortissement est meilleur lorsqu'on augmente  $\mu$  et on diminue  $k$ . Vu que  $k$  est toujours plus grand que  $\mu$ , on prend dans la suite de ce chapitre  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ . Par contre, pour chaque valeur de  $k$  et de  $\mu$  il existe une valeur optimale du paramètre de synchronisation  $p$  et une valeur optimale de  $\zeta$  définies par (3.14). Mais lorsque la valeur de  $p$  est prise d'une manière non optimale elle correspond aussi une valeur du taux d'amortissement réduit  $\zeta$  qui dépend de  $k$ ,  $\mu$  et de  $p$ . La signification des valeurs optimales introduites par les expressions analytiques (3.14) peut être mieux comprise si on introduit le lieu des racines du polynôme (3.12) en variant le taux d'amortissement réduit  $\zeta$ . Dans les figures (3.5) et (3.6) le lieu des racines du polynôme (3.12), dans le demi-plan d'ordonnée positive, est représenté pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ , en variant  $\zeta$  et pour des valeurs de  $p$  respectivement égales à  $0,9p_{k\mu}$  et  $1,1p_{k\mu}$ ; la condition d'amortissement maximal est atteinte au point  $x$ , pour lequel la partie réelle du pôle, à partie réelle minimale en valeur absolue, est stationnaire [22]. De même, dans la figure (3.7) est représenté le lieu des racines du polynôme (3.12) pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ , en variant  $\zeta$  et pour  $p$  pris en condition de synchronisation  $p = p_{k\mu}$ . Le point optimal, indiqué par  $x$ , lorsque les deux parties imaginaires des pôles coïncident ; racine complexe double, correspond au maximum d'amortissement de la poutre. La valeur optimale de  $\zeta$  trouvée numériquement est conforme à celle donnée par son expression analytique définie par le système (3.14).

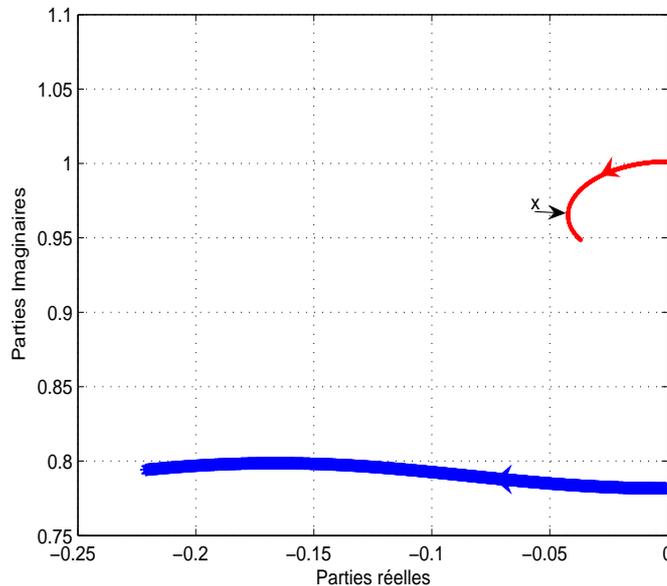


FIG. 3.5 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = 0,9p_{k\mu}$ .

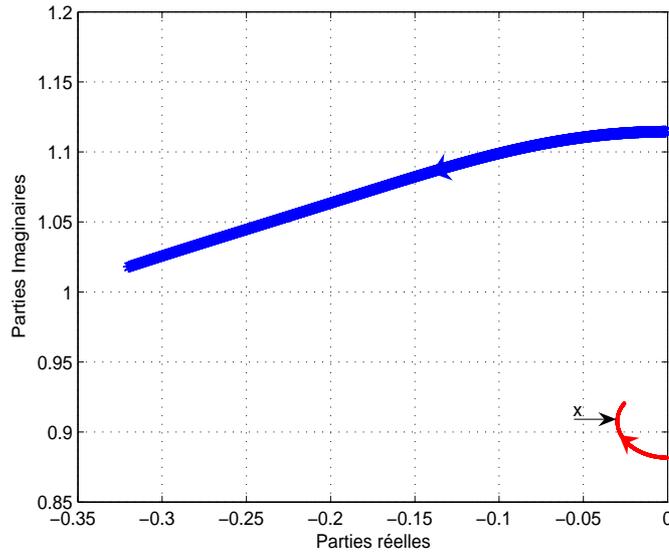


FIG. 3.6 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = 1,1p_{k\mu}$ .

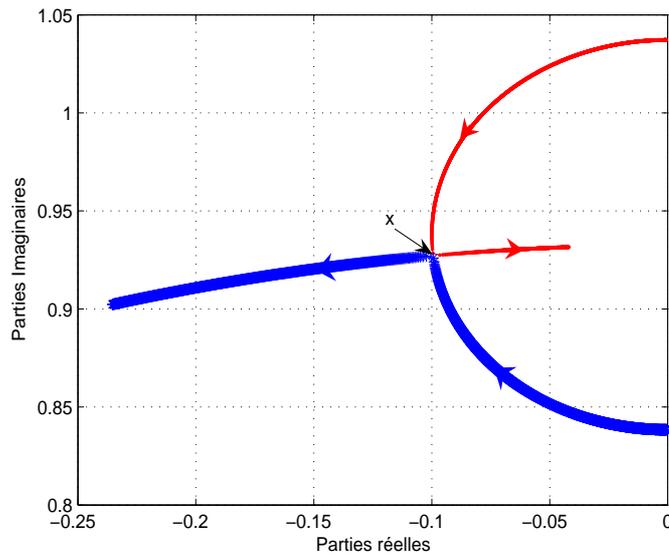


FIG. 3.7 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = p_{k\mu}$ .

Dans le cas où  $p$  est différent de  $p_{k\mu}$ , une expression analytique du taux d'amortissement réduit  $\zeta$  peut être aussi obtenue en supposant que le polynôme (3.12) a deux racines complexes conjuguées à même partie réelle,

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_3^2), \quad (3.16)$$

où  $x_1 \in \mathbf{R}^-$  est la partie réelle et  $(x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2$  sont les parties imaginaires des racines complexes conjuguées. Le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  et le taux de décroissance exponentiel seront déterminés par identification des coefficients des polynômes (3.12) et (3.16) en fonction des trois paramètres adimensionnels du système  $k$ ,  $\mu$  et  $p$ . La recherche de la valeur de ETDR, coïncide toujours avec la partie réelle  $-x_1$ .

On peut considérer aussi le cas où le coefficient d'amortissement propre de la poutre n'est plus négligeable. Les valeurs  $p_{k\mu}$ ,  $\zeta_{k\mu}$  et la correspondante valeur du taux de décroissance exponentiel, lorsque le polynôme caractéristique de la matrice d'état a deux racines doubles complexes conjuguées pour des valeurs fixées de  $k$  et  $\mu$ , sont dans ce cas définies par les relations implicites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{k\mu\xi_1} = \frac{-\mu\xi_1 + \sqrt{1+k-\mu}\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}}{(1+k)\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}} \\ \zeta_{k\mu\xi_1} = \frac{\xi_1\sqrt{1+k-\mu} + \sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}}{1+k} \\ ETDR_{k\mu\xi_1} = \frac{\mu(1+k-2\xi_1^2)\sqrt{1+k-\mu} + 2\xi_1(1+k-\mu)\sqrt{\mu(1+k-\xi_1^2)}}{2(1+k)(1+k-\mu)\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Il est facile de vérifier que le système (3.17) coïncide avec le système (3.14) lorsque  $\xi_1 = 0$ . Confrontant en outre la troisième équation du (3.17) avec la troisième équation du (3.14) résulte que l'amortissement maximal obtenu dans le cas de dissipation propre de la poutre non nul ( $\xi_1 \neq 0$ ) est supérieur à celui obtenu dans le cas où ( $\xi_1 = 0$ ) pour les mêmes valeurs de  $k$  et  $\mu$ .

### Optimisation basée sur la considération de la fonction de transfert

Comme on a indiqué au début de ce chapitre, ils existent plusieurs autres critères pour obtenir les valeurs optimales d'un amortisseur à masse accordée tels que [98] :

- La minimisation du déplacement de la structure principale.
- La maximisation de la rigidité dynamique de la structure principale.
- La maximisation du coefficient d'amortissement équivalent de l'ensemble structure-TMD.
- La minimisation de la vitesse de la structure principale.
- La minimisation de l'accélération de la structure principale.

On rappelle ici la méthode basée sur l'analyse en fréquence de  $\alpha_1$ . Cette méthodologie a été illustrée en [98], appliquée à un système mécanique à un seul degré de liberté amorti par un amortisseur à masse accordée et soumis à une excitation harmonique, et a été illustrée

en [22] pour un système électromécanique en utilisant un élément piézoélectrique. On considère la réponse en fréquence de  $\alpha_1$  obtenue du système

$$\begin{cases} (1+k)\ddot{\alpha}_1(t) + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_1(t) = 1 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_1(t) + 2\zeta p\dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

correspond à (3.6) dans lequel est considéré nul le coefficient d'amortissement propre de la poutre et ayant une force externe adimensionnelle unitaire. La réponse en fréquence de  $\alpha_1$  est donnée par l'expression suivante :

$$\alpha_1(\Omega) = \frac{-\Omega^2 + 2j\zeta p\Omega + p^2}{(1+k-\mu)\Omega^4 - 2j\zeta p(1+k)\Omega^3 - (1+p^2(1+k))\Omega^2 + 2j\zeta p\Omega + p^2} \quad (3.19)$$

où  $\Omega$  est la pulsation adimensionnelle et  $j = \sqrt{-1}$ . L'optimisation se fait en cherchant les valeurs des paramètres adimensionnels qui minimisent la quantité :

$$\|\alpha_1(\Omega)\|_\infty = \sup_{\Omega} |\alpha_1(\Omega)| \quad (3.20)$$

Une telle minimisation optimise la réponse du système, sollicitée par une force externe sur une large bande de fréquence.

Dans la figure (3.8) est reportée la réponse en fréquence de  $|\alpha_1(\Omega)|$  pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et  $p = 0,97$  et pour différentes valeurs de  $\zeta$ . On note qu'il existe deux valeurs de  $\Omega$ , respectivement  $\Omega = \Omega_1$  et  $\Omega = \Omega_2$ , pour les quelles  $|\alpha_1(\Omega)|$  ne dépend pas de  $\zeta$ . La valeur optimale de  $p$ , en fixant les autres paramètres et en déterminant les expressions analytiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , selon cette méthode se détermine en imposant  $|\alpha_1(\Omega_1)| = |\alpha_1(\Omega_2)|$ . Pour établir la valeur optimale de  $\zeta$ , il existe plusieurs méthode, on peut par exemple adopter le critère suivant :

$$\frac{\partial |\alpha_1(\Omega)|}{\partial \Omega}(\Omega_1) = 0. \quad (3.21)$$

Des expressions analytiques de  $p$  et de  $\zeta$  ont été données par Den Hartog [29] pour un système à un seul degré de liberté amorti par un amortisseur à masse accordée lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique. Plusieurs autres expressions analytiques ont été établies pour différents types d'excitations extérieures sur la structure principales dans le cas d'un simple TMD. En particuliers et comme pour le cas étudié, lorsque la structure est en oscillation libre, les expressions analytiques de  $p$  et de  $\zeta$  ont été données par [39] et seront aussi rappelées dans le prochain chapitre dont une comparaison sera faite entre ces paramètres et les paramètres obtenus dans ce chapitre par le système (3.14).

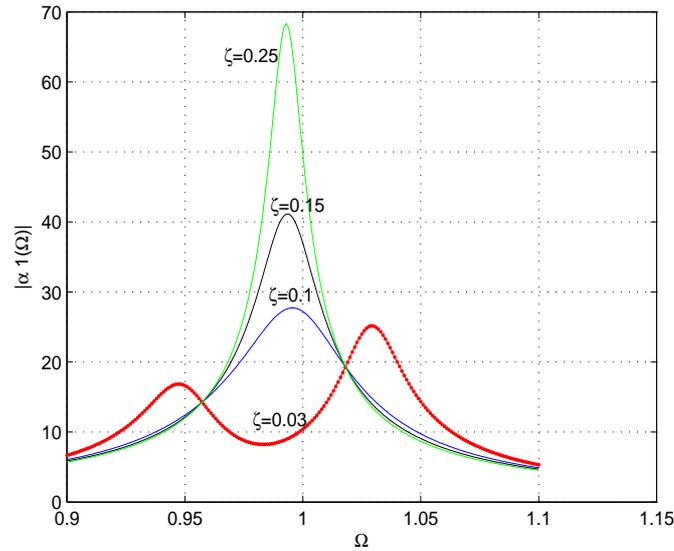


FIG. 3.8 – Réponse en fréquence de  $|\alpha_1(\Omega)|$  pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = 0.97$  et pour différentes valeurs de  $\zeta$ .

### 3.6 Résolution du système adimensionnel

Afin de déterminer numériquement les paramètres adimensionnels du pendule qui permettent d'amortir passivement et d'une manière optimale un seul mode de vibration d'une poutre encastree libre, On considère dans cette section une poutre qui a les caractéristiques suivantes: masse volumique  $\rho = 7800\text{kg}/\text{m}^3$ , section  $A = 1,14610^{-3}\text{m}^2$ , longueur  $L = 3\text{m}$  et taux d'amortissement propre considéré nul,  $\xi_1 = 0$ . On choisit d'amortir le premier mode de vibration horizontale de la poutre dont  $f_1 = 6,95\text{Hz}$ . L'oscillation libre du premier mode de la poutre, à un état initial déformé, est représenté par les figures (3.9) et (3.10), en fixant les valeurs de  $k$  et de  $\mu$  dans l'intervalle  $[0,1[$  et en choisissant en premier  $p = 0,9p_{k\mu}$  puis  $p = 1,1p_{k\mu}$ , les valeurs de  $\zeta$  correspondantes sont déterminées respectivement à partir des courbes (3.5) et (3.6). Le cas où  $p = p_{k\mu}$  est représenté par la figure (3.11), avec les mêmes valeurs de  $k$ , de  $\mu$  et avec  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ . La comparaison entre les simulations des figures (3.9) et (3.10) avec celle de la figure (3.11) montre l'influence majeure du paramètre de synchronisation  $p$  sur l'amortissement de la réponse de la vibration du premier mode de la poutre.

Dans les figures (3.12) et (3.13), et pour montrer l'influence du paramètre  $\zeta$  sur la réponse de la structure, est représenté l'oscillation libre du premier mode propre  $\alpha_1$  pour des

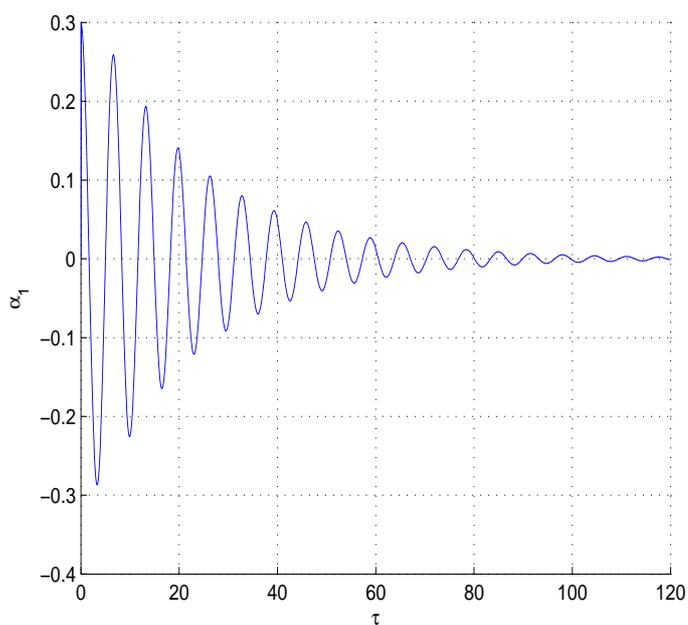


FIG. 3.9 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = 0,9p_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

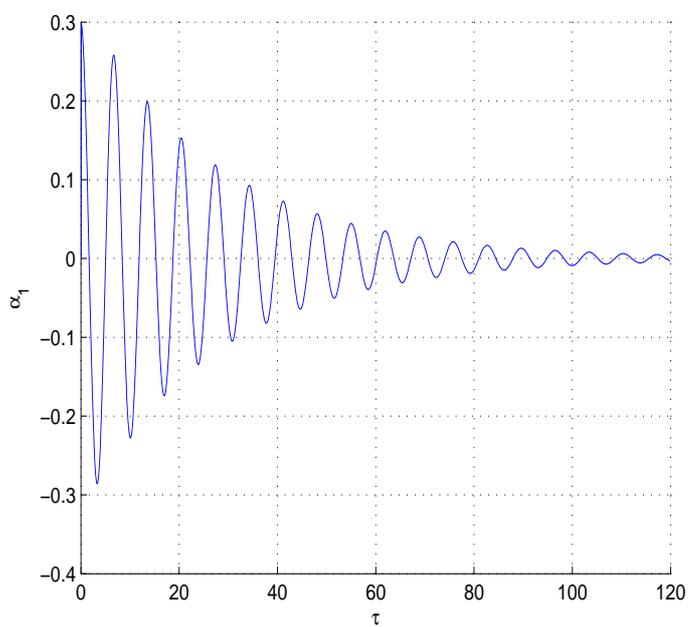


FIG. 3.10 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = 1,1p_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

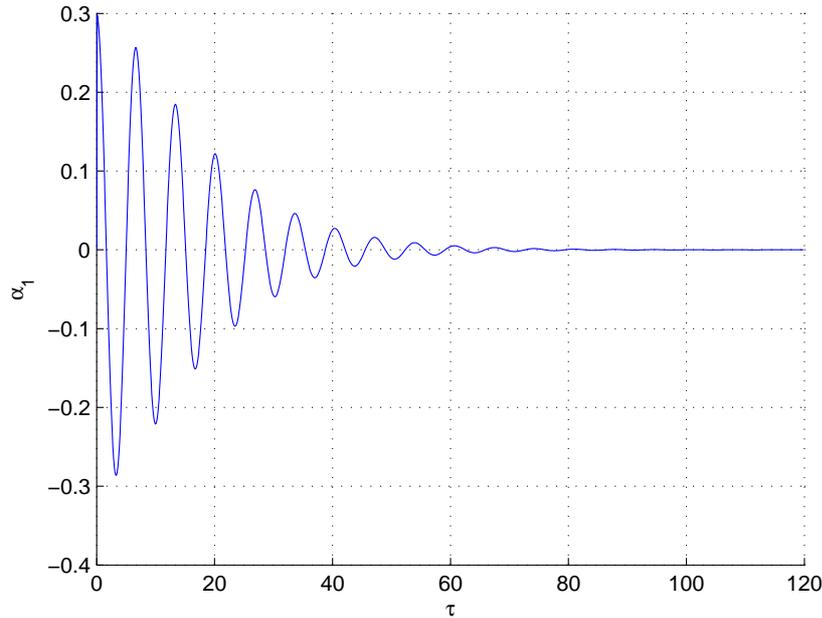


FIG. 3.11 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = p_{k\mu}$ ,  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

valeurs de  $k$  et de  $\mu$  fixées,  $p = p_{k\mu}$  et en variant à chaque fois la valeur de  $\zeta$  ; dans la figure (3.12) on augmente le taux d'amortissement  $\zeta = 2\zeta_{k\mu}$  et dans la figure (3.13) on prend  $\zeta = \frac{1}{2}\zeta_{k\mu}$ . De même, de la comparaison entre les simulations des figures (3.12) et (3.13) avec celle de la figure (3.11) résulte évident l'influence majeure du taux d'amortissement  $\zeta_{k\mu}$  sur l'amortissement de la réponse de vibration du premier mode de la poutre. Par suite à partir de ces comparaisons, on peut constater que l'amortissement passif optimal du premier mode de vibration horizontal de la poutre est obtenu lorsqu'on utilise les paramètres  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = \zeta_{k\mu}$  donnés par le système (3.14) qui seront considérés dans la suite comme paramètres optimaux de l'actionneur électromécanique.

On peut en outre observer des battements dans la simulation de la figure (3.13), qui sont dus à la présence de doubles pôles complexes conjugués dont les parties réelles presque coïncident et dont les parties imaginaires sont très peu éloignées [22].

Pour montrer l'influence du paramètre adimensionnel  $\mu$  sur l'amortissement du premier mode de la poutre, on représente par la figure (3.14) la simulation numérique de la réponse de ce mode à  $k$  fixé et avec  $p$  et  $\zeta$  optimaux. La comparaison de cette simulation avec celle de la figure (3.11) montre que l'amortissement augmente en fonction de  $\mu$ .

À partir des paramètres adimensionnels  $k$  et  $\mu$  on peut déduire respectivement la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$  et la masse du pendule  $m_2$  et à partir des paramètres optimaux

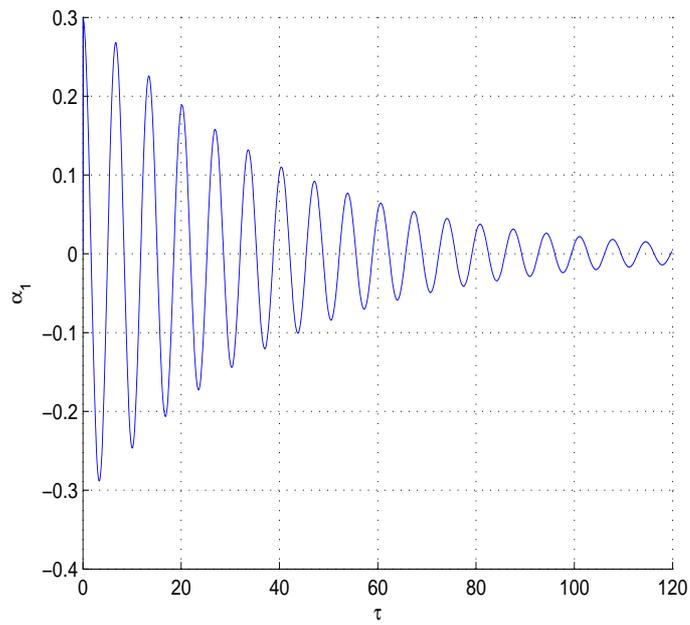


FIG. 3.12 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = 2\zeta_{k\mu}$ .

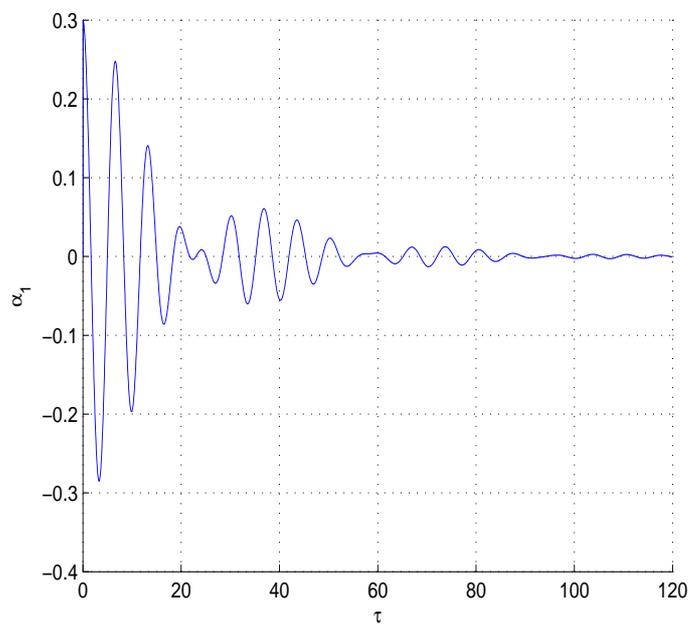


FIG. 3.13 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = 1/2\zeta_{k\mu}$ .

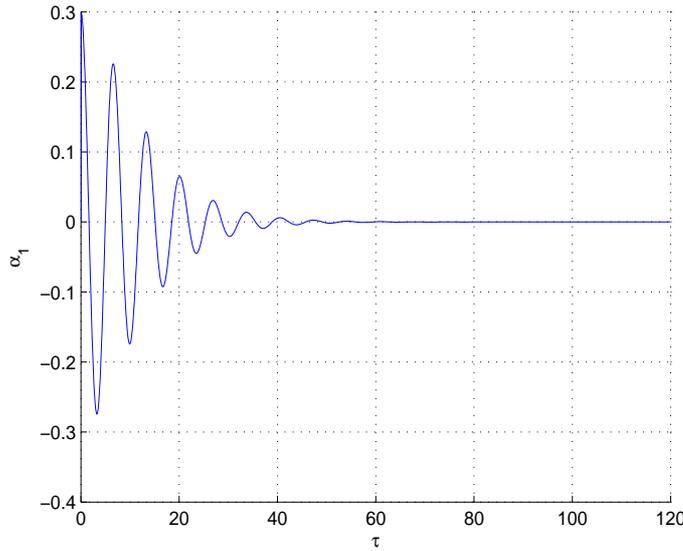


FIG. 3.14 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $p = p_{k\mu}$ ,  $\zeta = \zeta_{k\mu}$  et  $\mu = 10\%$ .

adimensionnels  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$  on peut déduire respectivement la longueur équivalente optimale du pendule  $l^{opt}$  et le coefficient d'amortissement total équivalent optimal de l'actionneur de référence  $C_{eq}^{opt}$  en utilisant le système (3.7). Enfin, à partir de ces paramètres on détermine les masses de la boule  $m_s$ , en négligeant son rayon, et de la barre  $m_b$  ainsi que sa longueur  $l_b$ .

### 3.7 Paramètres optimaux du pendule

Dans ce paragraphe, on détermine les paramètres physiques du pendule-alternateur qui permettent un amortissement optimal du premier mode de la vibration libre de la poutre. Ces paramètres optimaux seront directement déduits à partir des paramètres adimensionnels optimaux trouvés dans le paragraphe précédent. Soient  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ . A partir de  $k$  on peut déterminer la masse totale  $M_{ap}$ . La masse de la barre et de la boule  $m_2$  est déterminée à partir de  $\mu$ . A partir de la valeur optimale de  $p$ , on déduit la longueur équivalente du pendule optimale et le coefficient d'amortissement total équivalent optimal est déterminé à partir de  $\zeta$ . Ces grandeurs optimales, avec  $M_{ap} = 1 \text{ Kg}$  et  $m_2 = 0,35 \text{ Kg}$ , auront les valeurs suivantes :  $l^{opt} = 0,0062m \text{ cm}$  et  $C_{eq}^{opt} = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ Kg/s}$ . L'oscillation libre du premier mode de la poutre, en utilisant ces paramètres optimaux, est représentée par la figure (3.15). La longueur optimale du pendule obtenue est très

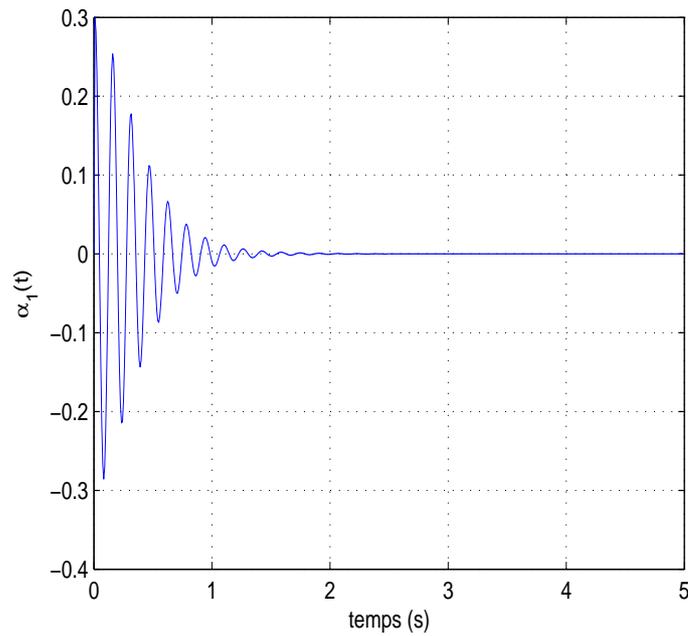


FIG. 3.15 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $M_{ap} = 1 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 0,35 \text{ Kg}$   $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  et  $l = l^{opt}$ .

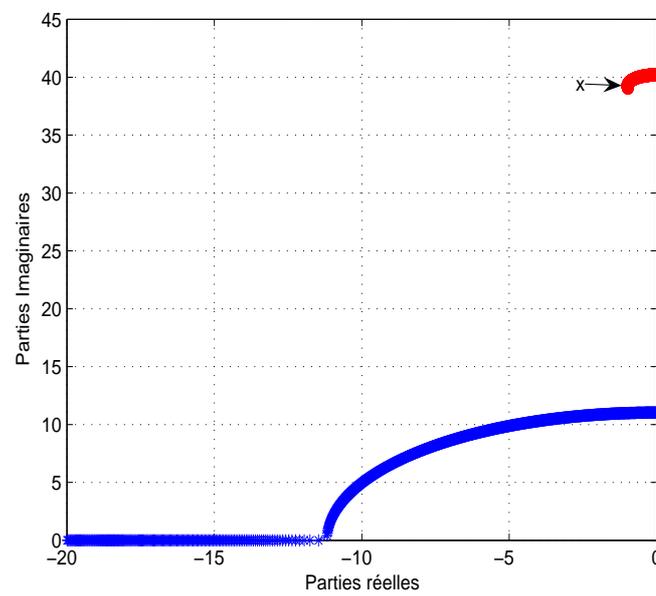


FIG. 3.16 – Lieu des pôles à  $M_{ap} = 2,05 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 1,02 \text{ Kg}$  et  $l = 6 \text{ cm}$ .

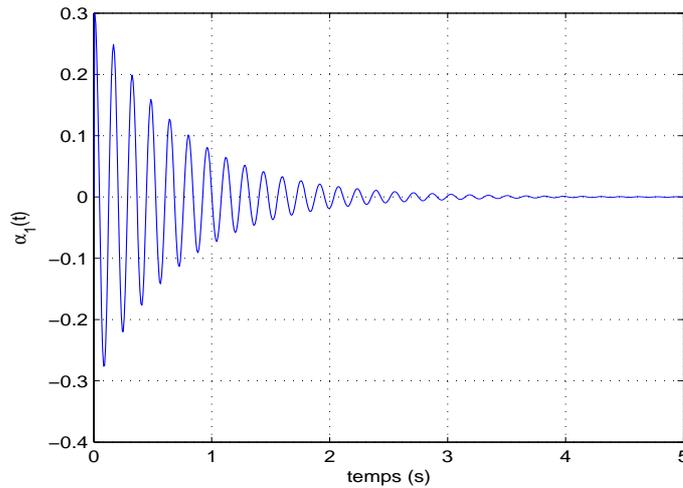


FIG. 3.17 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $M_{ap} = 2,05Kg$ ,  $m_2 = 1,02Kg$ ,  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  et  $l = 6cm$ .

petite. Pour avoir une longueur réalisable, on augmente la valeur de  $k$  et de  $\mu$  et on trace le lieu des pôles pour une valeur fixe de la longueur du pendule afin d'obtenir le coefficient d'amortissement équivalent correspondant optimal. Dans la figure (3.16) est représenté le lieu des pôles à  $M_{ap} = 2,05Kg$  et à  $m_2 = 1,02Kg$ ; la condition d'amortissement optimal est atteinte au point x. Dans la figure (3.17) est représentée la réponse de la première contribution modale de la poutre pour un pendule de longueur  $l = 6cm$ . Il est nettement clair que la décroissance maximale dans le temps de l'oscillation libre du premier mode de la poutre est très inférieure à celle obtenue en condition optimale. D'où l'importance de la longueur optimale du pendule sur l'amortissement.

### 3.8 Bilan Energétique du système

Dans cette section sont évalués les échanges énergétiques entre les différents organes du système capables de dissiper l'énergie. En particulier est confronté, de point de vue énergétique, le comportement du système relatif à un actionneur à paramètres optimaux à celui à paramètres non optimaux. Pour évaluer les différentes contributions énergétiques du système, il convient d'écrire la formulation Lagrangienne du système (3.2) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{ki}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2 \quad (3.22)$$

où  $q_i$  sont les coordonnées généralisées, avec  $q_1 = \alpha_1$  et  $q_2 = \theta$ ,  $T$  l'énergie cinétique,  $U$  l'énergie potentielle et  $D$  le potentiel de dissipation ; dans le cas spécifique examiné on a

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(m_1^* + M_{ap})\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}I_{ap}\dot{\theta}^2 + m_2l\dot{\theta}\dot{\alpha}_1 \\ U = \frac{1}{2}(k_1\alpha_1^2 + m_2gl\theta^2) \\ D = \frac{1}{2}\xi_1\omega_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}C_{eq}\dot{\theta}^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans les figures (3.18) et (3.19) sont reportées les simulations de l'oscillation libre du système dimensionnel évaluées pour  $l = 6cm$  et  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  respectivement  $l = l^{opt}cm$  et  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  ; plus précisément sont reportées les allures de l'énergie potentielle élastique  $\frac{1}{2}k_1\alpha_1^2$  et du potentiel de dissipation  $\frac{1}{2}C_{eq}\dot{\theta}^2$ .

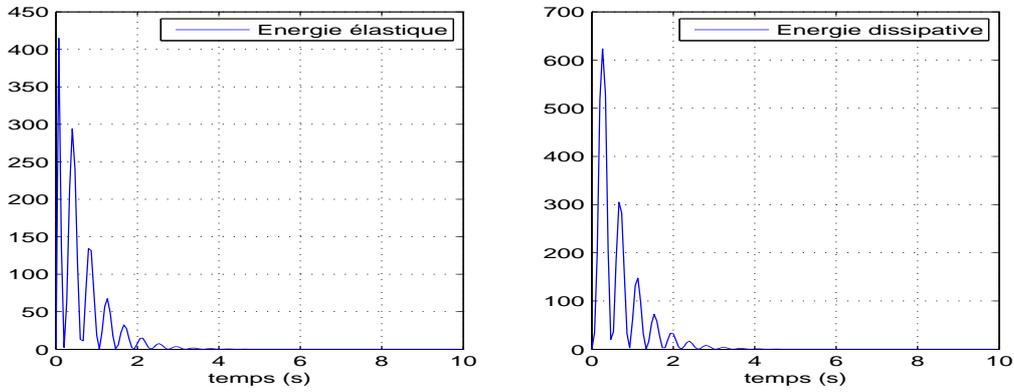


FIG. 3.18 – Energie élastique et potentiel de dissipation pour  $M_{ap} = 2,05Kg$ ,  $m_2 = 1,02Kg$ ,  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  et  $l = 6cm$ .

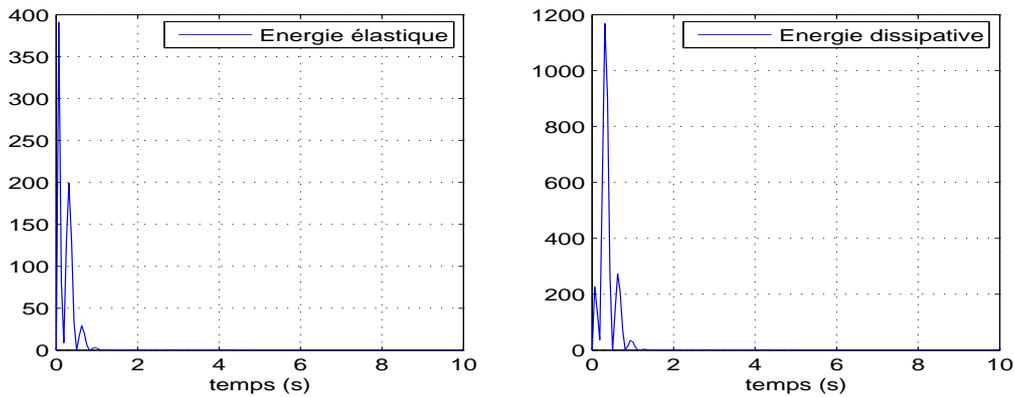


FIG. 3.19 – Energie élastique et potentiel de dissipation pour  $M_{ap} = 1Kg$ ,  $m_2 = 0,35Kg$ ,  $l = l^{opt}$  et  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ .

De ces deux figures on observe que l'énergie potentielle, proportionnelle au carré de la première contribution modale, a une allure oscillante et dont la décroissance exponentielle est maximale lorsque les paramètres sont optimaux.

### 3.9 Influence de la masse totale de l'actionneur $M_{ap}$ sur la réponse de la poutre

On a étudié dans les paragraphes précédents l'influence des différents paramètres de l'actionneur sur l'amortissement du premier mode de la poutre tels que la longueur du pendule équivalente  $l$ , le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$  et la masse  $m_2$ . On a aussi montré que le paramètre de synchronisation ainsi que ETDR diminuent en fonction de la masse totale de l'actionneur. Pour cela, on étudie dans ce paragraphe

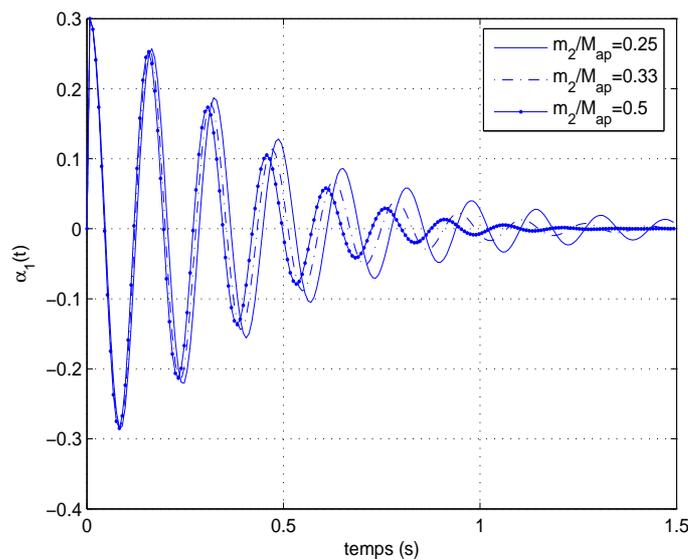


FIG. 3.20 – Effet de la variation de la masse totale  $M_{ap}$  du pendule sur la réponse de la poutre à  $l = l^{opt}$ ,  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  et  $m_2 = 0,35$ .

l'influence de la masse totale de l'actionneur sur la réponse de la vibration de la poutre. On considère l'actionneur de référence avec ces paramètres optimaux précités et on varie la masse  $M_{ap}$ . La simulation numérique est représentée par la figure (3.20) pour différentes valeurs du rapport  $\frac{m_2}{M_{ap}}$  à  $m_2$  fixé. Il résulte que, à taux d'amortissement propre nul, la réponse de la première contribution modale de la poutre diminue avec l'augmentation

du rapport  $\frac{m_2}{M_{ap}}$  : diminution de la masse totale du système pendule-alternateur  $M_{ap}$ . Par ailleurs, il est nécessaire de tenir compte de ce paramètre dans la conception d'un tel actionneur. Le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel, appliqué ci-dessus, offre l'avantage d'introduire la masse totale dans la conception de l'actionneur.

### 3.10 Emplacement optimal du pendule

Après la détermination des paramètres optimaux de l'actionneur électromécanique pendule-alternateur qui ont pour but d'amortir l'oscillation libre du premier mode propre de la poutre, nous analysons numériquement dans ce paragraphe l'emplacement optimal de cet actionneur sur la poutre en faisant la comparaison entre l'oscillation de la première contribution modale de la poutre pour différents emplacements. Pour cela, nous considérons une longueur équivalente du pendule  $l = l^{opt} cm$ , un coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ , une masse totale  $M_{ap} = 1Kg$  et une masse  $m_2 = 0,35Kg$  et en variant le rapport  $\frac{x}{L}$ . Avec  $x$  est l'abscisse d'emplacement du pendule et  $L$  est la longueur de la poutre.

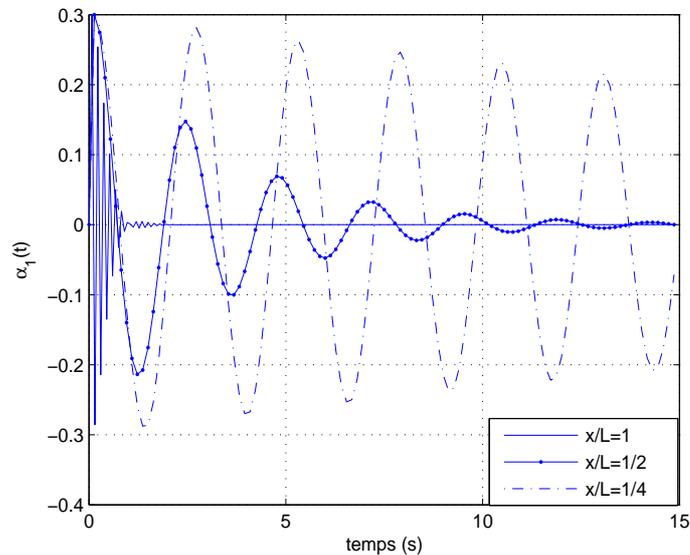


FIG. 3.21 – Différents emplacements de l'actionneur optimal sur la poutre.

Dans la figure (3.21) est représentée l'oscillation libre de la première contribution modale de la poutre, à taux d'amortissement propre nul, tel que le rapport  $\frac{x}{L} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ . De cette

figure on observe que l'amortissement est maximal lorsque le rapport  $\frac{x}{L} = 1$  : le pendule est placé à l'extrémité de la poutre. Il est minimal lorsque  $\frac{x}{L} = \frac{1}{4}$  et il sera évidemment nul si le pendule est attaché à l'encastrement, c'est à dire le rapport  $\frac{x}{L} = 0$ . Et par suite, on remarque que l'amortissement augmente avec l'augmentation du rapport  $\frac{x}{L}$ .

Si on reprend les valeurs optimales de la longueur du pendule et du coefficient d'amortissement total équivalent pour chaque emplacement. Les valeurs de la masse totale  $M_{ap}$  et de la masse  $m_2$  sont figées. Les oscillations libres de la première contribution modale pour différents emplacements sont représentés dans la figure (3.22).

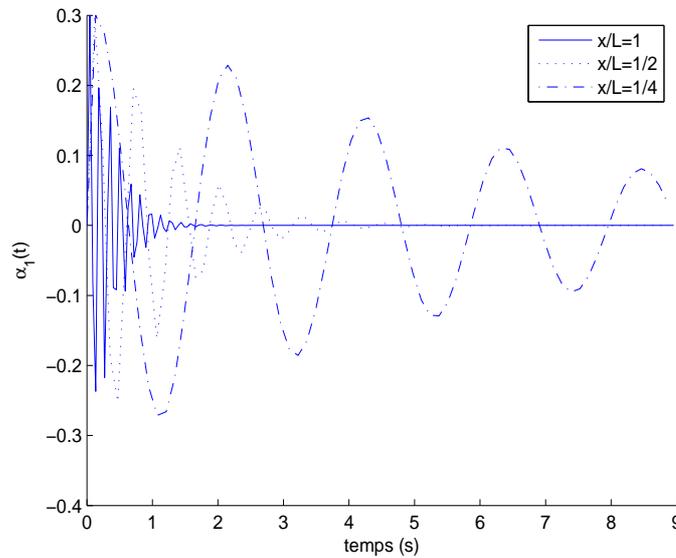


FIG. 3.22 – *Emplacement optimal de l'actionneur sur la poutre.*

Plusieurs études ont été faites pour déterminer l'emplacement optimal de l'actionneur lors du contrôle passif ; par exemple le meilleur emplacement d'un élément piézoélectrique est dans la zone d'encastrement pour diminuer la courbure de la structure [22]. Alors que l'amortisseur à masse accordée agit pour diminuer le déplacement de la structure [94] et par suite son meilleur emplacement est dans la zone à déplacement maximal. Pour le système étudié ci-dessus, le déplacement maximal est à l'extrémité libre de la poutre. Par suite, le meilleur emplacement du système TMD pendulaire, comme le montre la figure (3.22) et conformément aux études développées par [71, 94], est à l'extrémité libre de la poutre  $x = L$ .