

Chapitre 2

Modélisation du système de contrôle d'une poutre avec TMD pendulaire et un alternateur

2.1 Introduction

Les appareils d'amortissement de vibrations mécaniques les plus utilisés dans la pratique sont les amortisseurs à masse accordée (TMDs) qui sont couramment utilisés dans différents champs d'applications en génie civil, par exemple, l'amortissement des vibrations des bâtiments, des ouvrages souples tels que les passerelles, les ponts suspendus les ponts à Haubans... Les efforts des recherches entamés par Frahm (1911) [38], Ormondroyd et Den Hartog (1928) [78] et Den Hartog (1947) [29] sont parmi les premières études d'application de cet appareil aux différents systèmes mécaniques.

Les TMDs peuvent être implémentés principalement sous deux formes [98] dont la plus connue est celle formé par une masse attachée à la structure principale par un ressort et un amortisseur (masse-ressort-amortisseur), tel que le bloc de béton qui a été installé au sommet du bâtiment Citicorp à New York dans les années 1970 et qui se déplace sur une surface lisse lubrifiée avec de l'huile. La deuxième forme, où se limite notre étude, est l'amortisseur à masse accordée pendulaire. L'utilisation la plus connue de ce type d'amortisseur est l'installation d'un pendule de 800 tonnes dans un bâtiment de 508 m de hauteur (Taipei 101) pour stabiliser le tour en présence d'un chargement externe d'origine tremblement de terre ou vent.

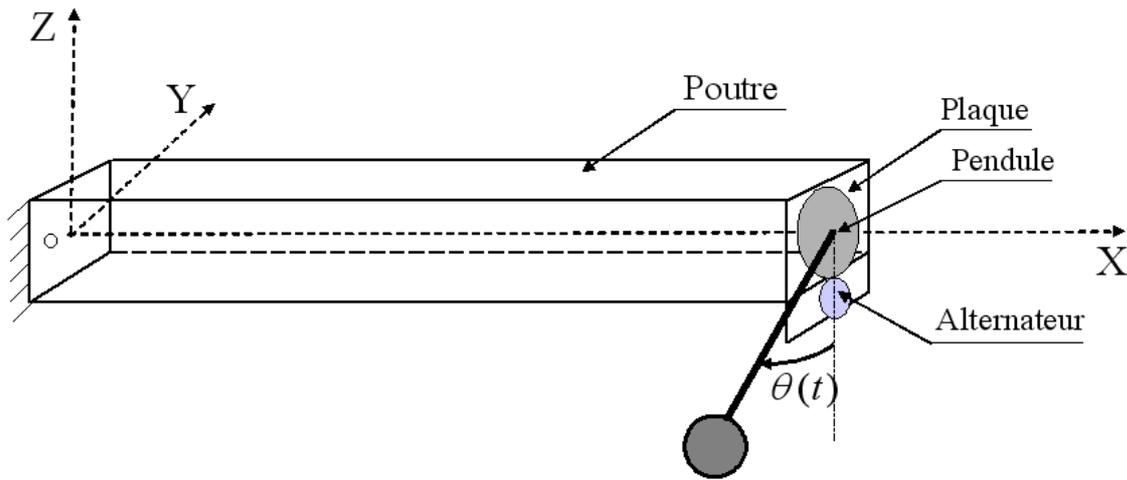
Pour un simple pendule, la fréquence de vibration dépend seulement de la longueur du fil

du pendule qui souvent exige un grand espace pour qu'on puisse le synchroniser avec la fréquence du système à amortir [98]. Pour diminuer la longueur du pendule, on introduit un pendule tel que sa fréquence dépend de sa longueur et de sa masse ; le bras du pendule est conçu comme une barre rigide à son extrémité libre est attachée une boule rigide. Ce type du pendule a été introduit, comme système passif, dans plusieurs travaux pour réduire la vibration d'une structure en grande déformation. Il a été introduit par [77] pour amortir les modes de flexion d'une poutre, encastrée-libre, tridimensionnelle avec grand déplacement et grande rotation. Le pendule est attaché à l'extrémité de la poutre dans le but d'amortir la vibration verticale. Le système d'équations aux dérivées partielles trouvé est non linéaire et les termes de non linéarité sont dues à la grande déformation de la poutre et au couplage entre la poutre et le pendule. Une discrétisation de ce système est faite par utilisation de la méthode de Galerkin en introduisant un seul mode de vibration de la poutre. En [71] a été déterminé l'efficacité du pendule à réduire passivement la vibration de la poutre, introduite par [77], pour différentes orientations. Le même système a été étudié par [70] mais en utilisant la méthode des éléments finis. Pour introduire le couplage bidirectionnel entre la poutre et le pendule, [76] a considéré le cas d'un pendule qui vibre dans deux plans et qui se déplace selon l'axe de la poutre. Plusieurs autres types de systèmes pendulaires peuvent être utilisés pour réduire les vibrations des structures [98].

Tous les systèmes de TMDs pendulaire introduits sont des amortisseurs passifs. Nous présentons dans ce chapitre un nouveau système d'amortissement TMD pendulaire couplé à un alternateur "actionneur électromécanique". Ce système consiste en un pendule couplé à un alternateur qui à sa sortie est liée une résistance. Lorsque cette résistance varie dans le temps selon une loi de contrôle, l'actionneur électromécanique devient un amortisseur semi-actif. Afin d'étudier un tel actionneur, on propose de contrôler, en utilisant cet actionneur, premièrement la vibration horizontale puis les vibrations horizontale et verticale d'une poutre encastrée-libre.

2.2 Modèle mécanique

Pour étudier l'amortissement semi-actif des vibrations en utilisant un amortisseur à masse accordée de type pendulaire, on considère un système mécanique couplé à un circuit électrique. Ce modèle est constitué d'une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, qui à son extrémité est collée une plaque à laquelle sont attachés un pendule et un alternateur comme est indiqué sur la figure (2.1). Le pendule est couplé à l'alternateur qui à sa sortie

FIG. 2.1 – *Modèle mécanique : vibration horizontale.*

est liée une résistance. Ce modèle, à résistance constante, est considéré comme un système passif. Pour obtenir un amortissement semi-actif des vibrations de la poutre on fait varier la résistance dans le temps. Le rôle de l'alternateur dans ce système est de transformer l'énergie mécanique du pendule en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans la résistance variable. L'énergie mécanique du pendule est due à la vibration de la poutre. Le pendule est couplé à l'alternateur, il a alors un seul degré de liberté ; il peut pivoter selon un seul axe de rotation. Son plan de vibration dépend de la position de fixation sur l'extrémité de la poutre. Si le pendule vibre dans le plan (OYZ) il sera conçu pour amortir la vibration horizontale, mais lorsqu'il vibre dans le plan (OXZ) il sera conçu pour amortir la vibration verticale de la poutre. Nous considérons dans cette étude que le plan de vibration du pendule est (OYZ). Nous écrivons par la suite les équations qui décrivent le comportement mécanique et électrique de ce système en analysant, premièrement, le cas où la poutre vibre seulement dans le plan horizontal puis le cas, plus général, où il y a une combinaison entre les vibrations horizontale et verticale de la poutre.

2.3 Vibration horizontale

On considère seulement le cas de la vibration horizontale de la poutre, vibration dans le plan (OXY), qui induit une vibration du pendule dans le plan (OYZ), en faisant un angle θ par rapport à l'axe (OZ), comme est montré sur la figure (2.1). La rotation du pendule entraîne en rotation le rotor de l'alternateur avec un angle $\beta\theta$, β est le rapport d'engrenage, constant, entre l'alternateur et le pendule. On écrit, dans ce cas de vibration, les équations

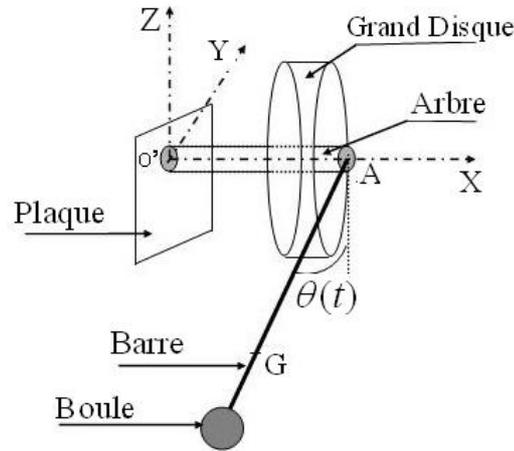


FIG. 2.2 – Composantes du pendule.

qui décrivent le comportement du système en considérant le cas de discrétisation puis couplage.

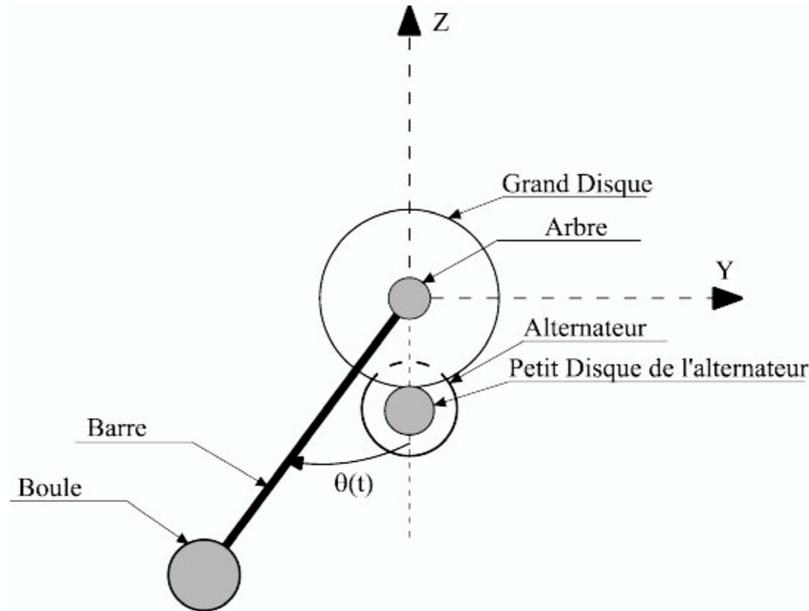
On considère une poutre de longueur L en flexion simple fixée à l'une de ses extrémités par une liaison encastrement et à l'autre extrémité est attachée une plaque de masse m_p à laquelle sont accrochés un pendule et un alternateur. Le pendule est formé d'une boule de masse m_s et de rayon R_s fixée à l'extrémité libre d'une barre de masse m_b et de longueur l_b , d'un grand disque de rayon R_d de masse m_d et de moment d'inertie I_d d'axe X et d'un arbre de masse m_{arb} et de moment d'inertie I_{arb} d'axe X comme est montré sur la figure (2.2). Supposons que ce pendule est formé simplement de deux sous systèmes ; un premier sous systèmes "disque-arbre-plaque" formé par le disque, l'arbre et la plaque de masse totale $m_1 = m_p + m_d + m_{arb}$ et de moment d'inertie $I_1 = I_d + I_{arb}$ et un deuxième sous système "barre-boule" formé par la barre et la boule de masse totale $m_2 = m_s + m_b$ et de moment d'inertie I_2 par rapport à l'axe (AX) qui est déterminé à partir du théorème d'Huygens

$$I_2 = \frac{1}{3}m_b l_b^2 + \frac{2}{5}m_s R_s^2 + m_s (R_s + l_b)^2. \quad (2.1)$$

Le centre de gravité de ce deuxième système est déterminé par la formule suivante :

$$l = AG = \frac{m_s (R_s + l_b) + \frac{1}{2}m_b l_b}{m_s + m_b}. \quad (2.2)$$

Le moment d'inertie total I_p et la masse totale M_p du pendule sont respectivement la somme des moments d'inerties et des masses de deux sous systèmes ; $I_p = I_1 + I_2$ et

FIG. 2.3 – *Système pendule-alternateur.*

$M_p = m_1 + m_2$. L'alternateur de masse m_a et de moment d'inertie I_a est en engrenage avec le disque du pendule, figure (2.3). On note dans la suite par M_{ap} la masse totale du système électromécanique ; pendule-alternateur. Pour obtenir un système d'équations discrétisées couplées, nous introduisons le cas de discrétisation spatiale du déplacement de la poutre puis couplage entre les différentes équations d'équilibre [19].

2.3.1 Equations du mouvement de la poutre et du pendule

La mise en équation d'équilibre d'un problème dynamique est une étape très importante pour analyser la réponse d'une structure. Ces équations dynamiques peuvent être obtenues à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et Principe des Puissances Virtuelles (PPV). La première consiste à identifier le torseur des efforts qui s'exerce sur la structure à étudier et à écrire qu'il est égal à la variation de la quantité de mouvement du système ; cette formulation est connue sous le nom de seconde loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique. La deuxième, à l'opposé de la méthode directe, ne fait intervenir que des grandeurs scalaires. La troisième est particulièrement bien adaptée à la mise en équation des milieux continus pour lesquels masses et raideurs sont distribuées dans tout le système.

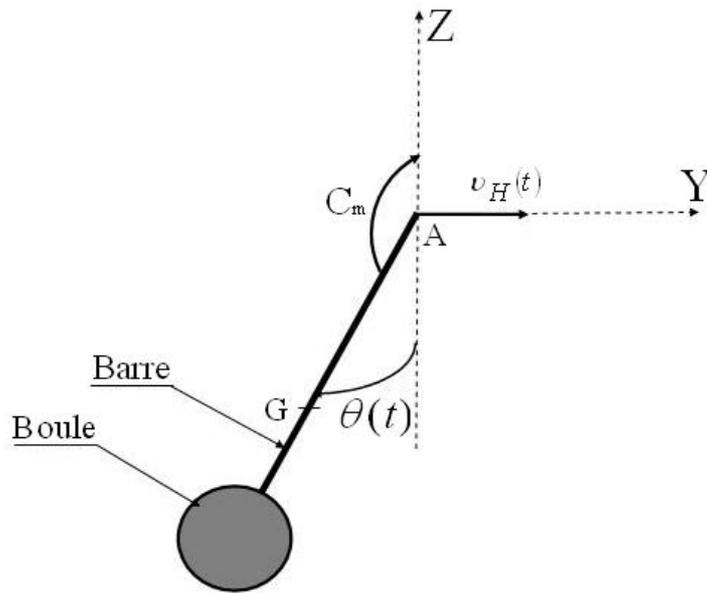


FIG. 2.4 – Les forces appliquées sur le pendule.

Le système étudié est formé d'une poutre, d'un pendule et d'un alternateur. Les équations mécaniques du pendule seront déterminées en appliquant la méthode énergétique, l'équation mécanique de l'alternateur sera trouvée à partir de la méthode directe et son équation électrique sera obtenue à partir de la loi des mailles, alors que la formulation de la poutre est celle obtenue dans le chapitre précédent avec une force horizontale concentrée à son extrémité libre [13]. Cette force est la réaction de la liaison horizontale interne entre le pendule et la poutre. Nous supposons dans ce cas que la poutre vibre seulement dans le plan horizontal, en faisant un déplacement $y(x,t)$, qui induit la translation du pendule et de l'alternateur, en faisant un déplacement horizontal $y(L,t)$, et la rotation du deuxième sous système du pendule avec un angle noté θ . Le pendule est soumis, comme indiqué sur la figure (2.4), à la force de liaison horizontale entre poutre et pendule notée par $v_H(t)$ et au couple mécanique C_m qui agit par le petit pignon de l'alternateur sur le grand pignon du pendule. Le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté \mathbf{r}_p , le vecteur position du centre de gravité de la barre noté \mathbf{r}_b et le vecteur position de la boule du pendule noté \mathbf{r}_s peuvent être définis en petit déplacement, dans le système des coordonnées orthonormales (O,X,Y,Z) des vecteurs unitaires, respectivement, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$,

comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p &= L\mathbf{a}_1 + y(L,t)\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{r}_b &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + \frac{l_b}{2}\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 - \frac{l_b}{2}\cos(\theta)\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{r}_s &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + (l_b + R_s)\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 - (l_b + R_s)\cos(\theta)\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_p &= \dot{y}(L,t)\mathbf{a}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_b &= [\dot{y}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_s &= [\dot{y}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + (l_b + R_s)\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\dot{\mathbf{r}}_p$ est la vitesse de vibration du premier sous système du pendule, de masse m_1 et de moment d'inertie I_1 , $\dot{\mathbf{r}}_b$ et $\dot{\mathbf{r}}_s$ sont, respectivement, les vitesses de vibration de la barre et de la boule du pendule. L'énergie cinétique totale du pendule est $T = T_p + T_b + T_s$. Avec

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \\ T_b &= \frac{1}{2}m_b(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{6}m_b l_b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta \\ T_s &= \frac{1}{2}m_s(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}m_s(l_b + R_s)^2 \dot{\theta}^2 + m_s(l_b + R_s)\dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'énergie cinétique du centre de gravité du pendule $T_G = T_b + T_s$, en introduisant les équations (2.1) et (2.2), sera défini comme suit :

$$T_G = \frac{1}{2}m_2(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta. \quad (2.6)$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = -m_2 g l \cos\theta. \quad (2.7)$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p \dot{\theta}^2. \quad (2.8)$$

C_p est le coefficient d'amortissement du pendule. Pour obtenir les équations du pendule, on utilise les équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, r \quad (2.9)$$

Avec les coordonnées généralisées q_k et les forces extérieures Q_k sont définies comme suit :

$$q_k = \{y(L) \quad \theta\} \quad \text{et} \quad Q_k = \{v_H \quad -C_m\}. \quad (2.10)$$

Soient les équations suivantes :

Pour $q_1 = y(L)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= (m_1 + m_a + m_2) \ddot{y}(L, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour $q_1 = \theta$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= (I_1 + I_2) \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{y}(L, t) \cos \theta - m_2 l \dot{y}(L, t) \sin \theta \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m_2 l \dot{y}(L, t) \sin \theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= m_2 g l \sin \theta \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= C_p \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

On remplace l'équation (2.11) dans l'équation de Lagrange (2.9) on trouve l'équation de la force de liaison horizontale suivante :

$$M_{ap} \ddot{y}(L, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta = v_H(t). \quad (2.13)$$

Avec $M_{ap} = M_p + m_a$. On remplace maintenant l'équation (2.12) dans l'équation de Lagrange (2.9) on trouve l'équation de rotation du pendule

$$I_p \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{y}(L, t) \cos \theta + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = -C_m. \quad (2.14)$$

g est l'intensité de la pesanteur, $\ddot{y}(L, t)$ l'accélération de l'extrémité libre de la poutre et $\omega_p = \sqrt{\frac{m_2 g l}{I_p}}$ la pulsation propre du pendule. On suppose que la console en flexion est constituée d'un matériau élastique, homogène et isotrope ; soit ρ sa masse volumique, L sa longueur, A sa section, E son module d'Young et I_z son moment d'inertie de flexion selon l'axe Z . L'excitation de cette poutre est modélisée par une densité linéique de force répartie sur toute sa longueur $f(x, t)$ variable dans le temps. La réponse de la poutre, déplacement horizontal, notée $y(x, t)$ et en adoptant l'hypothèse de petite perturbation (HPP) : en négligeant le déplacement longitudinal, vérifie les équations d'évolution dynamique en utilisant la théorie d'Euler Navier Bernoulli [18, 86] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \ddot{y}(x, t) + EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = f(x, t) & \text{dans} \quad (0, L) \times [0, T] \\ y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{sur} \quad [0, T] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad EI_z \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = v_H(t) & \text{sur} \quad [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) & \text{dans} \quad (0, L) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$y^0(x)$ et $y^1(x)$ définissent les conditions d'évolutions initiales supposées suffisamment régulières. $v_H(t)$ est la force de liaison entre la poutre et le pendule appliquée à l'extrémité

libre de la poutre. Pour obtenir un modèle discrétisé de dimension finie du déplacement que l'on pourra utiliser numériquement, on souhaite discrétiser le déplacement horizontal sur la base modale tronquée au rang N . Pour cela, on projette le déplacement sur ces formes modales, ceci au moyen d'une formulation variationnelle en espace.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } y(x,t) \text{ tel que} \\ \forall \psi \in \mathbf{V} = \{\psi \in H^2(0,L) \text{ tel que } \psi(0) = \frac{d\psi}{dx}(0) = 0\} \\ \rho A \int_0^L \ddot{y}(x,t)\psi(x) dx + EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = -v_H(t)\psi(L) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Cette formulation variationnelle a été obtenue par multiplication de l'équation d'équilibre dynamique du système (2.15) par une fonction test puis par double intégration par parties par rapport à la variable espace. Dans cette formulation on n'a pas tenu compte de la densité linéique de la force répartie $f(x,t)$: vibration libre de la poutre.

Pour calculer les valeurs propres et les modes propres de la poutre, on cherche les solutions de la forme $y(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ du système homogène conservatif associé au système (2.15). Le terme "homogène" signifie que les actions extérieures agissant sur la poutre sont considérées nulles. Le problème aux valeurs propres peut être formulé sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{V} \text{ tel que } \forall \psi \in \mathbf{V} \\ EI_z \int_0^L \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \lambda \rho A \int_0^L \varphi(x)\psi(x) dx \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite \mathbf{V}_N , l'espace engendré par les N premiers modes propres de la poutre. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = m_j^* \delta_{ij} \\ EI_z \int_0^L \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(x) \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2}(x) dx = k_j \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

m_j^* est la j -ième masse modale et k_j est la j -ième rigidité modale. On impose aussi de normaliser les modes propres en imposant la condition suivante :

$$\varphi_i(L) = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

Cette normalisation est toujours possible car $\varphi_i(L) \neq 0$ pour $i=1, \dots, N$.

L'approximation de la solution du problème (2.16) consiste simplement à introduire le sous-espace de dimension finie \mathbf{V}_N qui est formé par les N premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale nous permet de déterminer une estimation modale du déplacement sur les N premiers modes propres sous la forme suivante :

$$y_N(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\varphi_i(x), \quad (2.20)$$

$\varphi_i(x)$ est l'ième mode propre de la poutre et $\alpha_i(t)$ la composante de la projection du vecteur déplacement sur $\varphi_i(x)$, souvent appelée la contribution modale du mode i .

Le déplacement estimé défini par l'équation (2.20) est solution de la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } y_N \in \mathbf{V}_N \text{ tel que } \forall \psi_N \in \mathbf{V}_N \\ \rho A \int_0^L \ddot{y}_N(x,t) \psi_N(x) dx + EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y_N}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi_N}{dx^2}(x) dx = -v_{HN}(t) \psi_N(L) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où $v_{HN}(t)$ est la force de liaison horizontale discrétisée

$$v_{HN}(t) = M_{ap} \ddot{y}_N(L,t) + m_2 [l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta] \quad (2.22)$$

déterminée à partir de l'estimation du déplacement de la poutre sur les N premiers modes. De même, l'équation du pendule (2.14) peut être écrite sous la forme discrétisée

$$I_p \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = -m_2 l \ddot{y}_N(L,t) \cos \theta - C_m. \quad (2.23)$$

Après le remplacement du déplacement par son estimation (2.20) dans la formulation variationnelle (2.21), en faisant varier la fonction test N fois, en la remplaçant à chaque fois par φ_i et en utilisant les conditions d'orthogonalité (2.18) et de normalisation (2.19) des modes propres, on obtient les équations suivantes :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta = m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.24)$$

Dans l'équation d'équilibre de la poutre (2.15) on n'a pas introduit le terme d'amortissement qui est le siège de dissipation d'énergie. Mais pour être plus proche de la réalité, on prend en compte la présence de l'amortissement propre de la poutre dans la modélisation de son mouvement même s'il est très faible. La majeure partie de la dissipation peut être modélisée par une dissipation visqueuse, c'est à dire une force proportionnelle à la vitesse mais de signe contraire. Et afin d'éviter le problème de couplage entre les équations en α_i , on adopte l'hypothèse de Rayleigh qui rend la matrice d'amortissement diagonale. En introduisant le taux d'amortissement modal ξ_i , l'équation (2.24) sera écrite comme suit :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + c_i \dot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta = m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.25)$$

pour $i = 1, \dots, N$

Le système formé par les équations discrétisées (2.25) et (2.23) est un système couplé non linéaire. Le terme de couplage vient de la continuité, au point $x = L$, du déplacement entre la poutre et le pendule. A ce système, on ajoute les équations mécanique et électrique de l'alternateur.

2.3.2 Equations de l'alternateur

L'alternateur est une machine électrique permettant de convertir l'énergie mécanique en énergie électrique ou inversement. L'alternateur comme toutes les machines tournantes, on distingue la partie fixe appelée stator de la partie tournante appelée rotor, figure (2.5). La partie séparant les deux est appelée entrefer. Le stator porte le bobinage polyphasé qui permet de créer un champ tournant. Le rotor crée un moment magnétique \mathbf{M} , soit à partir d'un aimant permanent soit à partir d'une bobine en rotation parcourue par un courant continu. Dans les deux cas, le rotor comprend un circuit magnétique qui permet de canaliser le flux afin d'avoir un meilleur couplage possible entre rotor et stator. Lors de la rotation de la machine, le flux envoyé par le rotor dans les bobines fixées sur le stator varie au cours de la rotation et y crée des forces électromotrices d'induction triphasées. D'une manière générale, le stator et le rotor ont le même nombre de pôles [27], qui satisfont la relation entre la vitesse de la machine et la fréquence propre du courant induit dans la bobine

$$f = P \frac{n}{60}, \quad (2.26)$$

où P est le nombre de paire de pôles, f la fréquence propre du courant du stator et n le nombre des tours par minute que nous imposons à la machine. Considérons le cas

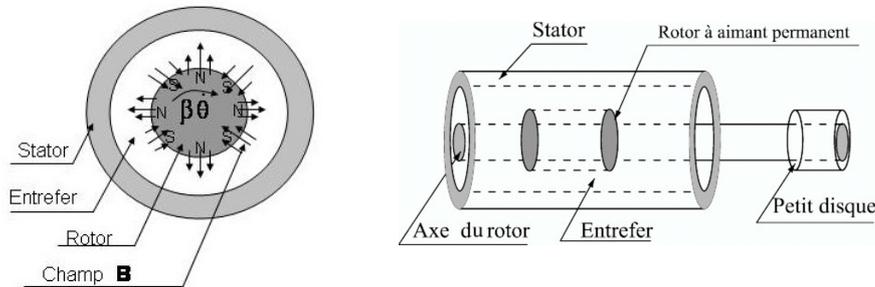


FIG. 2.5 – Composantes de l'alternateur.

d'un alternateur dont le rotor est à aimant permanent à quatre pôles et le stator est à bobinage triphasé en branchement étoile. Les trois bobines sont décalées de 120° . Le champ magnétique uniforme, noté par \mathbf{B} , est créé par l'aimant fixé sur l'axe du rotor. Le flux magnétique au niveau d'une spire de la bobine fixée sur le stator est donné par la formule suivante :

$$\phi(t) = \int \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.27)$$

Pour simplifier, nous supposons que le champ magnétique \mathbf{B} est homogène sur toute la surface de la spire S et ne varie pas au cours du temps. \mathbf{S} est le vecteur surface de la spire.

Le champ \mathbf{B} tourne avec la rotation de l'aimant qui est engendrée par la rotation du pendule en faisant un angle $\theta(t)$ variable dans le temps. L'angle de rotation de l'aimant, angle entre les vecteurs \mathbf{B} et \mathbf{S} , est proportionnel à $\theta(t)$ en le multipliant par le rapport d'engrenage, noté β , entre le petit disque fixé sur l'axe du rotor de l'alternateur et le grand disque du pendule. Le flux d'une seule spire défini par (2.27) peut être simplifié comme suit :

$$\phi(t) = BS\cos(\beta\theta(t)). \quad (2.28)$$

Le mouvement du pendule entraîne en rotation l'aimant qui provoque une variation de ce flux magnétique dans les bobines. Cette variation, d'après la loi de Lenz, induit une force électromotrice triphasée d'induction aux bornes des bobines. Cette force dépend de la répartition des bobinages, de la forme de l'induction dans l'entrefer créée par l'inducteur et son amplitude est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. La force électromotrice (f.e.m) pour une simple phase, entre l'extrémité d'une bobine et le neutre,

$$\mathbf{e}(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (2.29)$$

est créée pour s'opposer à la variation de flux dans les bobines. Le signe moins "-" dans la formule (2.29) indique cette opposition. Si la bobine comporte N spires, la f.e.m pour une phase, f.e.m simple, est égale à la somme des f.e.m induites dans chacune des spires

$$\mathbf{e}(t) = -N\frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (2.30)$$

En dérivant l'équation (2.28) par rapport au temps et en la remplaçant dans l'équation (2.30), l'expression de la f.e.m simple devient

$$\mathbf{e}(t) = K_e\beta\dot{\theta}\sin(\beta\theta(t)). \quad (2.31)$$

$K_e = BNS$ est une constante électrique qui dépend des paramètres de construction de la machine (construction, géométrie, matériaux...) et $\beta\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation de l'aimant à l'intérieur de la bobine. Cette f.e.m est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'aimant (donc à la vitesse de la variation de flux dans la bobine). L'alternateur est considéré à quatre pôles et donc à chaque quart de tour la tension induite change de sens, il s'agit d'un courant alternatif. Cet alternateur, comme toute machine électrique, peut être modélisé par un circuit électrique. Par ailleurs, l'équation électrique est déterminée en écrivant l'équation d'équilibre du circuit électrique défini par la figure (2.6.a), en lui appliquant la loi des mailles,

$$u(t) = e(t) - L_e\frac{di}{dt} - ri(t), \quad (2.32)$$

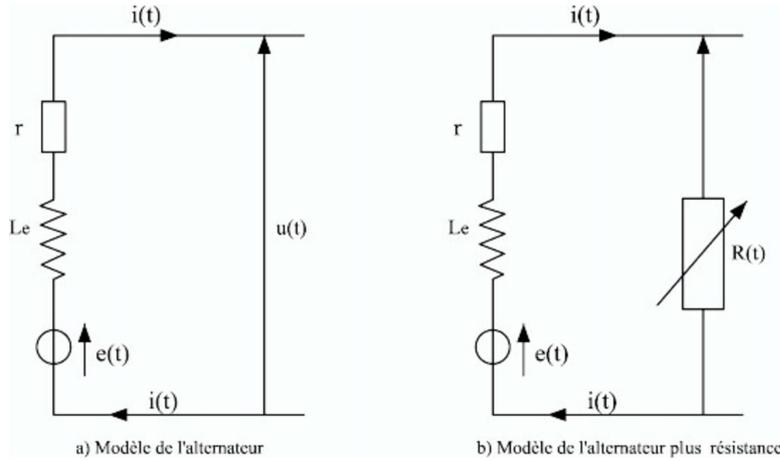


FIG. 2.6 – Modèle électrique de l'alternateur.

où $u(t)$ est la tension simple à la sortie de l'alternateur, L et r sont respectivement l'inductance et la résistance d'une bobine et $i(t)$ est le courant induit. Lorsqu'à la sortie de l'alternateur est attachée une résistance variable notée $R(t)$, figure (2.6.b), l'équation électrique (2.32) devient

$$L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)). \quad (2.33)$$

A cette équation électrique on peut ajouter une équation mécanique. En plus de la force d'inertie, le rotor est soumis à la force de frottement $f = C_a \beta \dot{\theta}$, supposé visqueux, à un couple mécanique externe C_m exercé par le grand pignon du pendule sur le petit pignon de l'alternateur et à un couple électromagnétique, C_{em} . La force électromotrice produit un courant induit dans chaque bobine qui provoque lui-même la formation d'un champ magnétique tournant. D'après la loi de Laplace, le couple électromagnétique est défini comme suit :

$$C_{em} = S B^r i(t) \sin(\beta \theta(t)), \quad (2.34)$$

B^r est le champ magnétique résultant qui traverse une spire. Ce couple électromagnétique total est un couple résistant sur l'aimant qui sera défini sous cette forme :

$$C_{em} = K_c i(t) \sin(\beta \theta(t)), \quad (2.35)$$

K_c est une constante mécanique.

Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation mécanique qui régit

le mouvement du rotor est

$$\beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} = C_m - C_{em}. \quad (2.36)$$

I_a est le moment d'inertie total de la partie en rotation de l'alternateur ; aimant, axe du rotor et de petit disque fixé sur l'extrémité de cet axe, comme est indiqué sur la figure(2.5). C_a est un coefficient de frottement interne de l'alternateur. Cette équation mécanique de l'alternateur peut être ajoutée à l'équation du pendule (2.23), vu qu'ils ont le même axe de rotation. Le système d'équations du modèle complet formé par la poutre, le pendule et l'alternateur dans le cas de discrétisation puis couplage peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + c_i \dot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2(l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \\ \quad \text{pour } i = 1 \dots N \\ (I_p + \beta I_a) \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \cos \theta + (C_p + \beta C_a) \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta + K_e i(t) \sin(\beta \theta(t)) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) - K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

On notera dans la suite $I_{ap} = I_p + \beta I_a$ et $C_{ap} = C_p + \beta C_a$, respectivement, le moment d'inertie et le coefficient d'amortissement total de l'actionneur pendule-alternateur. Pour simuler ce système, il faut identifier les paramètres de l'actionneur.

2.3.3 Identification du coefficient d'amortissement

Afin de simuler le système (2.37), il est nécessaire de déterminer le coefficient d'amortissement propre de l'actionneur C_{ap} . Ce coefficient sera calculé dans la configuration où l'actionneur n'est pas lié à la poutre. Pour cela, on considère un simple pendule couplé avec un alternateur en circuit ouvert, avec le moment d'inertie total $I_{ap} = 1,3657 \text{Kg}m^2$, la masse $m_2 = 3,3 \text{Kg}$ et la longueur équivalente $l = 0,5525 \text{m}$. Le pendule est attaché à un support fixe et il est équipé par un capteur potentiométrique qui consiste à mesurer l'évolution de l'angle de vibration θ au cours du temps. Celui ci est solidaire mécaniquement de l'axe de rotation du pendule. Ce capteur potentiométrique est constitué d'une résistance totale R_0 sur laquelle peut se déplacer un contact électrique. La valeur de la résistance variable est déterminée en fonction du nombre de tours du capteur par la formule suivante [42] :

$$R(t) = \frac{\theta(t)}{\theta_{max}} R_0. \quad (2.38)$$

Avec $\theta_{max} = 2\pi N$, N est le nombre de tours pris égal à 10 dans notre cas. Dans la figure (2.7) est représenté le schéma du capteur et du circuit électronique qui nous permet d'avoir

une image de la trajectoire du pendule. E est la tension fournie au capteur, $V_p(t) = \frac{\theta(t)}{\theta_{max}} E$ est la tension aux bornes du potentiomètre. La tension à la sortie $V_s(t)$ est égale à la tension $V_p(t)$ multipliée par le gain $\frac{R_2}{R_1}$

$$V_s(t) = \frac{ER_2}{2\pi NR_1} \theta(t). \quad (2.39)$$

Avec $E = 24V$, $R_1 = 1K\Omega$ et $R_2 = 15K\Omega$. L'idée de cette expérimentation consiste

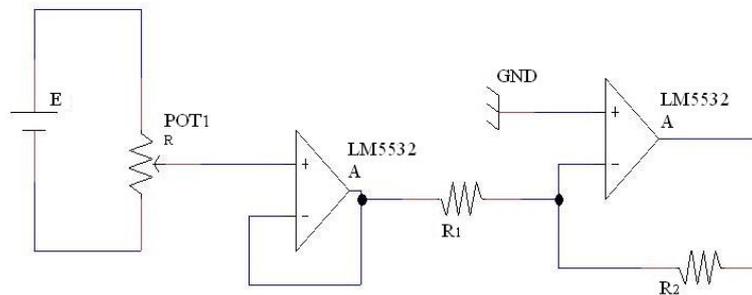


FIG. 2.7 – Représentation du capteur potentiométrique et du circuit électronique.

à mesurer la tension à la sortie du circuit au cours du temps qui est proportionnelle à l'angle de vibration du pendule en vibration libre comme est indiqué par l'équation (2.39). Puis de chercher numériquement le coefficient d'amortissement propre C_{ap} . Ce coefficient d'amortissement est celui qui minimise une fonctionnelle représentant l'écart entre l'angle de vibration expérimentale et l'angle de vibration numérique,

$$J(C_{ap}) = \int_0^T (\theta_{exp}(t) - \theta_{num}(C_{ap}, t))^2 dt. \quad (2.40)$$

L'angle de vibration numérique est déterminée en résolvant l'équation différentielle suivante :

$$I_{ap} \ddot{\theta} + C_{ap} \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = 0. \quad (2.41)$$

Un algorithme de gradient permet d'identifier, en minimisant la fonctionnelle (2.40), le coefficient d'amortissement C_{ap} . La valeur de ce coefficient identifiée est $C_{ap} = 0,18Kg/s$ qui correspond à un amortissement réduit de 2%. En utilisant cette valeur du coefficient d'amortissement, on a représenté dans le même graphe (2.8) la tension numérique $V_s(t)$, liée à l'angle de vibration numérique par la relation (2.39), et la tension $V_s(t)$ expérimentale

mesurée directement à la sortie du circuit électronique. On constate que les deux courbes sont presque confondues. Après l'identification du coefficient d'amortissement C_{ap} , il reste à identifier les paramètres de l'alternateur ; les coefficients K_e et K_c , la résistance interne et l'inductance de bobine.

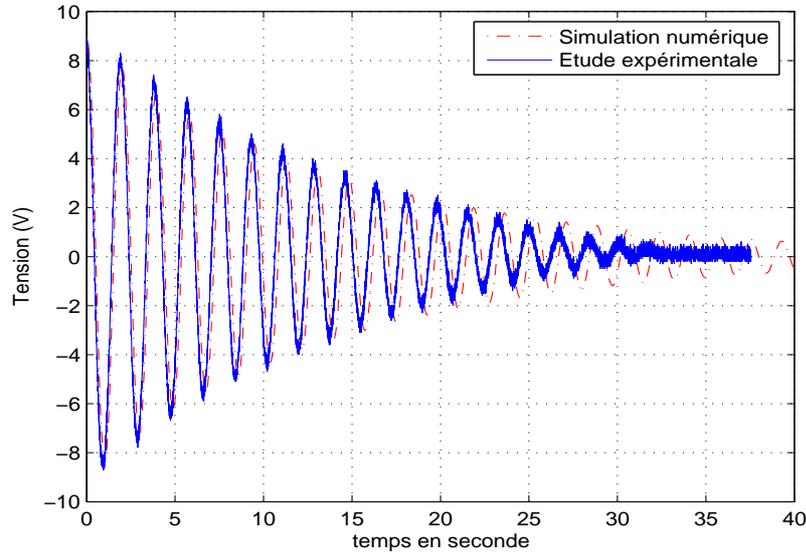


FIG. 2.8 – Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique en circuit ouvert.

2.3.4 Identification de l'alternateur

Après l'identification du coefficient d'amortissement propre de l'actionneur pendule-alternateur, on utilise le même essai et les mêmes valeurs indiquées dans le paragraphe précédent pour identifier le coefficient K_e de la f.e.m. On mesure par un oscilloscope la tension à vide composée de l'alternateur lorsque le pendule est lâché d'un angle θ_0 en vibration libre, figure (2.9).

La valeur de K_e est celle qui minimise la fonctionnelle représentant l'écart entre la f.e.m à vide expérimentale et la f.e.m à vide numérique,

$$\check{J}(K_e) = \int_0^T (E_v^{exp}(t) - E_v^{num}(K_e, t))^2 dt. \quad (2.42)$$

Cette valeur est fixée à $K_e = 0,06 V rad^{-1} s$ en appliquant l'algorithme du gradient. Dans la figure (2.10) est représentée la force électromotrice en résolvant numériquement le système

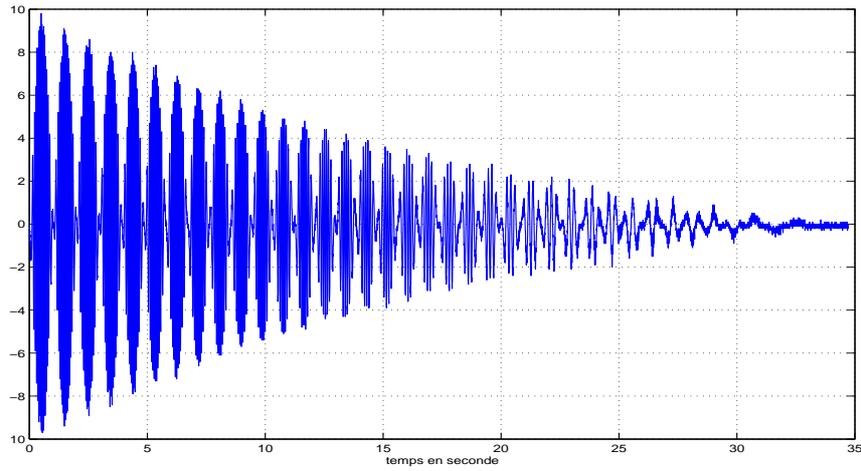


FIG. 2.9 – Représentation expérimentale de la force électromotrice à vide.

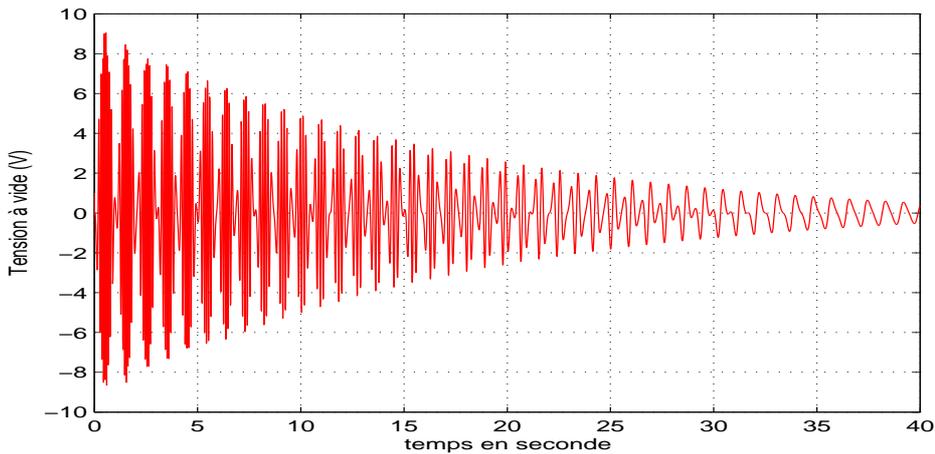


FIG. 2.10 – Représentation numérique de la force électromotrice à vide.

suisant :

$$\begin{cases} I_{ap}\ddot{\theta} + C_{ap}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \\ E_v(t) = \sqrt{3}K_e\beta\dot{\theta}\sin(\beta\theta(t)) \end{cases} \quad (2.43)$$

On remarque que la valeur de K_e précité est très proche de la valeur déterminée par un essai réalisé par le constructeur soit $K_e = 0,058Vrad^{-1}s$; en mesurant l'amplitude de la f.e.m à vide entre phase à 2000t/min.

La valeur de la résistance par phase a été mesurée par un Ohmmètre. D'où, la résistance d'un seul fil est $r = 0,85\Omega$.

Un autre essai est réalisé en mesurant les amplitudes de la tension simple et de l'intensité du courant à une vitesse angulaire constante 2000t/min qui correspond, d'après la formule (2.26), à une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = 66,67Hz$. Par suite, connaissant l'amplitude de la f.e.m à vide simple, la valeur de la résistance et la valeur de $\cos\varphi$, on peut déduire la valeur de la réactance ($L_e\omega$) à partir d'une simple représentation vectorielle: le diagramme de Behn-Eshenbourg. La tension par phase à la sortie de l'alternateur est $u(t) = Ue^{j\omega t}$ et le courant parcouru dans la bobine est $i(t) = Ie^{j\omega t + \varphi}$; φ est l'angle de déphasage entre la tension et l'intensité du courant. L'équation électrique de l'alternateur (2.32) peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$E_v = U + jL_e\omega I + rI. \quad (2.44)$$

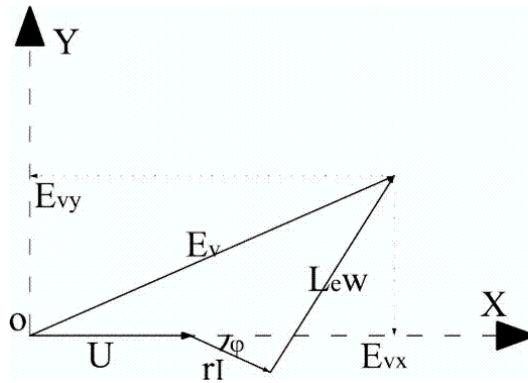


FIG. 2.11 – Diagramme vectoriel de Behn-Eshenbourg.

A partir du diagramme de Behn-Eshenbourg de cette équation défini par la figure (2.11), on déduit le système d'équations

$$\begin{cases} E_{vx} = U + rI\cos\varphi + L_e\omega I\sin\varphi \\ E_{vy} = -rI\sin\varphi + L_e\omega I\cos\varphi \end{cases} \quad (2.45)$$

par projection sur les axes X et Y. La résolution de ce système permet de déterminer la valeur de la réactance et par conséquent la valeur de l'inductance de la bobine : $L_e = 0,0036$ Henry.

Après l'identification des paramètres électriques, on peut identifier le coefficient mécanique du couple électromagnétique K_c , en proposant toujours la même expérience réalisée dans le paragraphe précédent. On lâche le pendule en vibration libre à partir d'un angle θ_0 et

on mesure expérimentalement la tension $V_s(t)$ en court-circuit. La constante du couple électromagnétique K_c est celle qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{J}(K_c) = \int_0^T (V_s^{exp}(t) - V_s^{num}(K_c, t))^2 dt. \quad (2.46)$$

La tension de sortie numérique $V_s^{num}(K_c, t)$ est donnée par la résolution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} I_{ap}\ddot{\theta} + C_{ap}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta + K_c i(t)\sin(\beta\theta(t)) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt} + ri(t) - K_e\beta\dot{\theta}\sin(\beta\theta(t)) = 0 \\ V_s(t) = \frac{ER_2}{2\pi NR_1}\theta(t) \end{cases} \quad (2.47)$$

La constante mécanique qui minimise la fonctionnelle (2.46), en utilisant l'algorithme du gradient, est $K_c = 5Vrad^{-1}s$. A cette valeur les deux courbes, la tension numérique $V_s^{num}(t)$ et la tension $V_s^{exp}(t)$ expérimentale, représentées dans la figure (2.12) sont confondues.

Une autre comparaison entre les résultats numérique et expérimental est faite lorsque une résistance est attachée aux bornes de l'alternateur de valeur $R = 6,8\Omega$. Pour la valeur de K_c indiquée ci-dessus, les deux courbes expérimentale et numérique sont aussi confondues, figure (2.13).

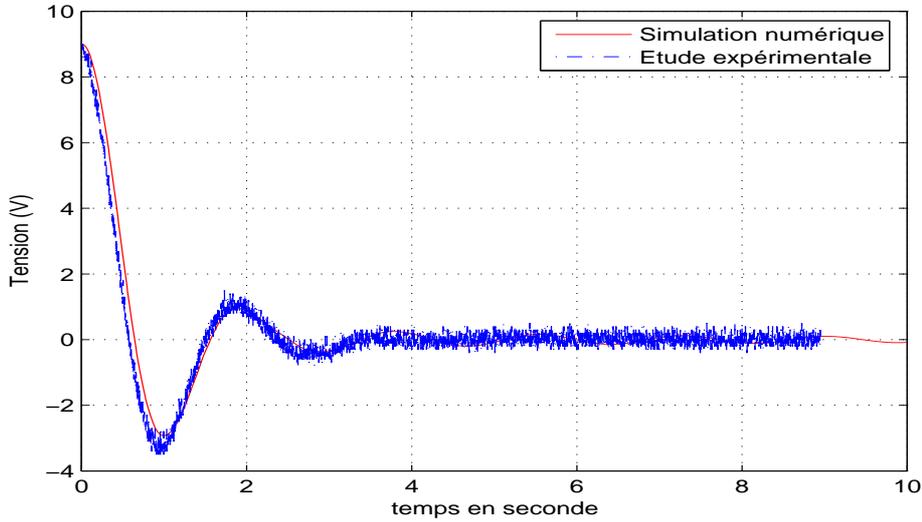


FIG. 2.12 – Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique en court-circuit.

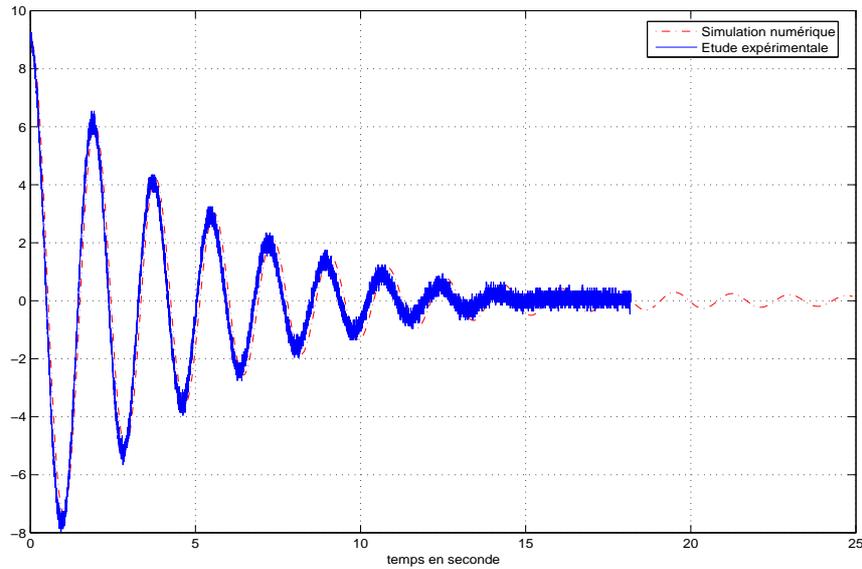


FIG. 2.13 – Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique à $R = 6,8\Omega$.

En effectuant ces essais, on a identifié les coefficients suivants : $C_{ap} = 0,18Kg/s$, $K_e = 0,06Vrad^{-1}s$, $r = 0,85\Omega$, $L_e = 0,0036$ Henry et $K_c = 5Vrad^{-1}s$.

2.4 Vibrations horizontale et verticale de la poutre

Dans le paragraphe précédent, on a considéré le cas où la poutre vibre seulement dans le plan horizontal. Par ailleurs, l'actionneur est destiné à amortir ce type de vibration. On considère dans ce paragraphe que la poutre est soumise à une combinaison de vibrations : vibration verticale, dans le plan (OXZ) , et vibration horizontale, dans le plan (OXY) . L'actionneur est toujours considéré fixé à l'extrémité libre de la poutre. Par ailleurs, les vibrations de la poutre induisent une vibration du pendule dans le plan (OYZ) , en faisant un angle θ par rapport à l'axe (OZ) , comme est montré sur la figure (3.1). La rotation du pendule entraîne la rotation du rotor de l'alternateur avec un angle $\beta\theta$, β est le rapport d'engrenage entre l'alternateur et le pendule. Pour simuler numériquement le système formé par les équations de la poutre, du pendule et de l'alternateur, on propose de discrétiser les équations de la poutre puis de coupler tous les équations du système. On commence à définir les équations des forces de liaison horizontale $v_H(t)$ et verticale $v_V(t)$ entre actionneur et poutre et l'équation de rotation du pendule. Ces équations

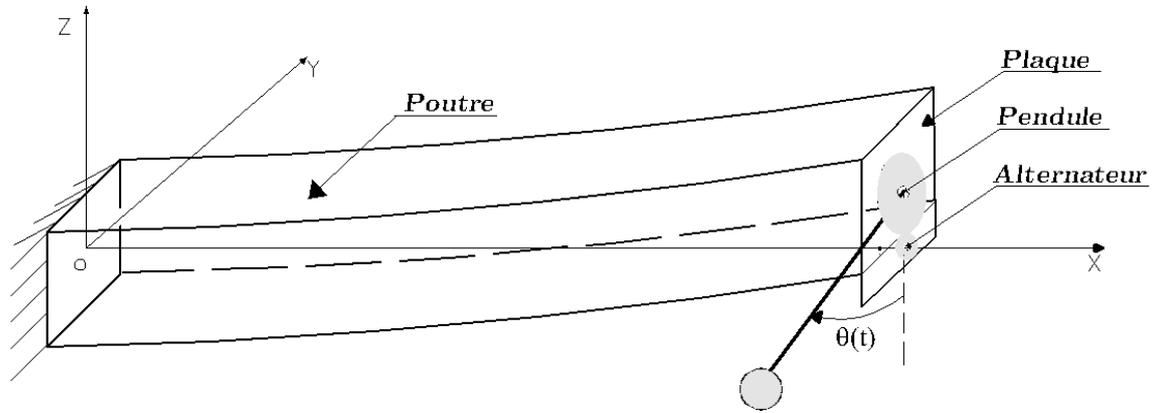


FIG. 2.14 – *Modèle mécanique : vibration horizontale et verticale de la poutre.*

seront obtenues en appliquant les équations de Lagrange. Les déplacements de l'extrémité supérieure "A" du pendule selon les axes (OY) et (OZ) seront notés, respectivement, $y(L,t)$ et $z(L,t)$. Le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté \mathbf{r}_p , le vecteur position du centre de gravité de la barre du pendule noté \mathbf{r}_b et le vecteur position de la boule du pendule noté \mathbf{r}_s peuvent être définis en petit déplacement, dans le système des coordonnées orthonormales (O,X,Y,Z) des vecteurs unitaires, respectivement, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p &= L\mathbf{a}_1 + y(L,t)\mathbf{a}_2 + z(L,t)\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{r}_b &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + \frac{l_b}{2}\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 + [z(L,t) - \frac{l_b}{2}\cos(\theta)]\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{r}_s &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + (l_b + R_s)\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 + [z(L,t) - (l_b + R_s)\cos(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_p &= \dot{y}(L,t)\mathbf{a}_2 + \dot{z}(L,t)\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_b &= [\dot{y}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + [\dot{z}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_s &= [\dot{y}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + [\dot{z}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'énergie cinétique totale du pendule est $T = T_p + T_b + T_s$.

Avec

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{z}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \\ T_b &= \frac{1}{2}m_b[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{6}m_b l_b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta \\ T_s &= \frac{1}{2}m_s[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{2}m_s(l_b + R_s)^2 \dot{\theta}^2 + m_s(l_b + R_s)\dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta \\ &\quad + m_s(l_b + R_s)\dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta \end{aligned} \quad (2.50)$$

L'énergie cinétique du centre de gravité du pendule $T_G = T_b + T_s$, en introduisant les équations (2.1) et (2.2) sera défini comme suit :

$$T_G = \frac{1}{2}m_2[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta + m_2 l \dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta. \quad (2.51)$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = (m_1 + m_a)gz(L,t) + m_2g(z(L,t) - l \cos\theta). \quad (2.52)$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p \dot{\theta}^2. \quad (2.53)$$

C_p est le coefficient d'amortissement du pendule. Les équations des forces de liaison et l'équation du pendule sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange (2.9). Où les coordonnées généralisées q_k et les forces extérieures Q_k sont définies comme suit :

$$q_k = \{y(L) \quad z(L) \quad \theta\} \quad \text{et} \quad Q_k = \{v_H \quad v_V \quad -C_m\}. \quad (2.54)$$

Le couple d'engrenage entre pendule et alternateur C_m et les forces de liaison horizontale v_H et verticale v_V sont donnés par le système suivant :

$$\begin{cases} v_H(t) = M_{ap}\ddot{y}(L,t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ v_V(t) = M_{ap}g + M_{ap}\ddot{z}(L,t) + m_2 l \ddot{\theta} \sin\theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ I_p \ddot{\theta} + m_2 l \dot{y}(L,t) \cos\theta + m_2 l \dot{z}(L,t) \sin\theta + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin\theta = -C_m \end{cases} \quad (2.55)$$

Les équations de vibration horizontale de la poutre, en négligeant la densité linéique de force répartie sur toute la longueur de la poutre et en se plaçant en HPP, sont définies par le système (2.15) et celles de vibration verticale sont :

$$\begin{cases} \rho A \ddot{z}(x,t) + EI_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(x,t) = 0 & \text{dans} \quad (0,L) \times [0,T] \\ z(L,t) = z_A(t), \quad EI_y \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(L,t) = v_V(t) & \text{sur} \quad [0,T] \\ z(0,t) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(L,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ z(x,0) = z^0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z^1(x) & \text{dans} \quad (0,L) \end{cases} \quad (2.56)$$

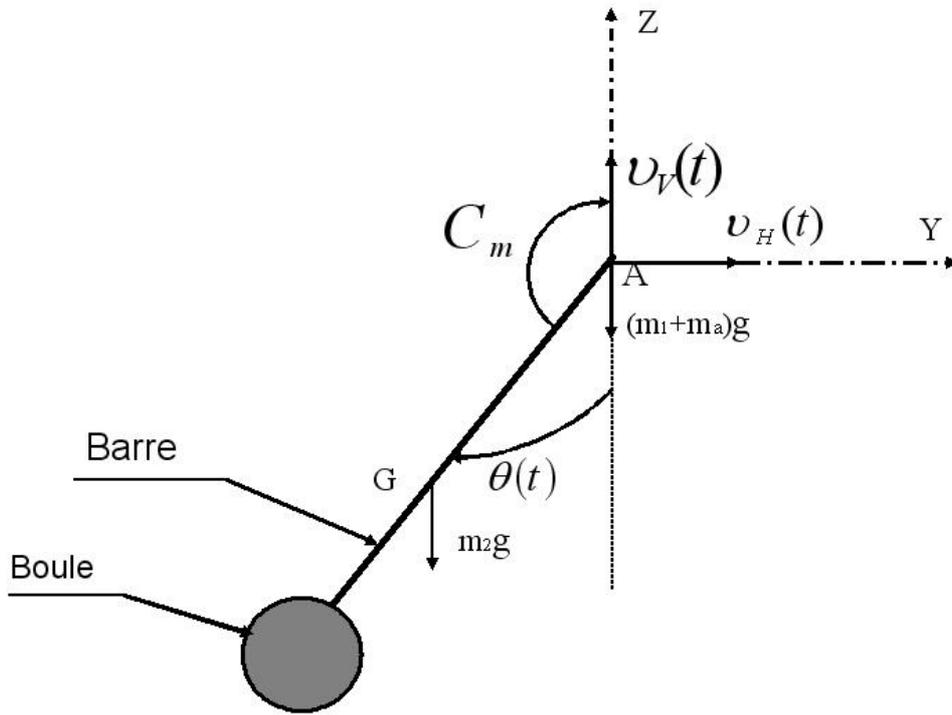


FIG. 2.15 – Les forces appliquées sur le pendule.

$z(x,t)$ est le déplacement de la poutre dans le plan vertical (OXZ) et I_y est le moment d'inertie de la poutre selon l'axe Y . Aux équations du pendule et de la poutre on ajoute les équations, électrique et mécanique, de l'alternateur.

$$\begin{cases} L_e \frac{di}{dt}(t) + (r + R(t))i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta\theta(t)) \\ \beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} = -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) + C_m \end{cases} \quad (2.57)$$

On adopte la même démarche qu'au paragraphe précédent pour déterminer un système discrétisé couplé. Ainsi, on obtient un nouveau système d'équations, d'inconnues $y(x,t)$, $z(x,t)$, $\theta(t)$ et $i(t)$.

On cherche le champ déplacement $\underline{U}(x,t) = (y(x,t), z(x,t))$ dans l'ensemble \mathbf{W} , défini comme suit [14]:

$$\mathbf{W} = \{ \hat{\underline{U}}(x) = (\hat{y}(x), \hat{z}(x)) \in (H^2(0,L))^2 \text{ tel que } \hat{\underline{U}}(0) = 0, \frac{d\hat{\underline{U}}}{dx}(0) = 0 \}$$

D'où la formulation variationnelle suivante:

$$\begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = -v_H(t)\hat{y}(L) - v_V(t)\hat{z}(L) \end{cases} \quad (2.58)$$

Avec $\mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) = \rho A \int_0^L \ddot{y}(x,t) \hat{y}(x) dx + \rho A \int_0^L \ddot{z}(x,t) \hat{z}(x) dx$
 et $\mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(x) dx + EI_y \int_0^L \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \hat{z}}{dx^2}(x) dx$. Dans cette formulation on n'a pas tenu compte de la densité linéique des forces réparties sur la poutre.

Les modes propres de la poutre sont trouvés en cherchant des solutions de la forme $\underline{U}(x,t) = \underline{\varphi}(x)e^{i\omega t}$ du système homogène conservatif associé à la formulation (2.58).

$\underline{\varphi}(x) = (\varphi^y(x), \varphi^z(x))$ est le vecteur des modes propres de la poutre formé par les modes horizontaux et verticaux. Le problème aux valeurs propres peut être formulé sous la forme suivante [14]:

$$\begin{cases} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{W} \text{ tel que } \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}, \hat{\underline{U}}) = \lambda \mathbf{b}(\underline{\varphi}, \hat{\underline{U}}) \end{cases} \quad (2.59)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite \mathbf{W}_N , l'espace engendré par les N premiers modes propres de la poutre. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = m_j^* \delta_{ij} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = k_j \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.60)$$

m_j^* est la j-ième masse modale et k_j est la j-ième rigidité modale. Vu que $\underline{\varphi}_i(L) \neq 0$ pour $i=1, \dots, N$, on impose aussi de normaliser les modes propres par amplification en imposant la condition suivante :

$$\text{Max} \underline{\varphi}_i(L) = 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.61)$$

Avec $\forall \underline{a} \in \mathbf{IR}^n$ on pose $\text{Max}(\underline{a}) = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$.

L'approximation de la solution du problème (2.58) consiste simplement à introduire le sous espace de dimension finie \mathbf{W}_N qui est formé par les N premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale nous permet de déterminer une estimation modale du déplacement sur les N premiers modes propres sous la forme suivante :

$$\underline{U}_N(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \underline{\varphi}_i(x), \quad (2.62)$$

où $\alpha_i(t)$ est l'ième contribution modale du déplacement.

Le déplacement estimé (2.62) est solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \forall \hat{\underline{U}}_N \in \mathbf{W}_N \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}_N, \hat{\underline{U}}_N) + \mathbf{a}(\underline{U}_N, \hat{\underline{U}}_N) = -v_{HN}(t) \hat{y}(LN) - v_{VN}(t) \hat{z}(L) \end{cases} \quad (2.63)$$

$v_{HN}(t)$ et $v_{VN}(t)$ sont les forces de liaisons discrétisées horizontale, respectivement, verticale, $\underline{U}_N(x,t) = (y_N(x,t), z_N(x,t))$ et $\hat{\underline{U}}_N(x,t) = (\hat{y}_N(x,t), \hat{z}_N(x,t))$.

Après le remplacement des déplacements par leurs estimations (2.62) dans le système (2.63) et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité (2.60) et de normalisation (2.61) on obtient le problème discrétisé suivant :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) = -v_{HN}(t) \varphi_i^y(L) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(L) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.64)$$

Les expressions discrétisées de ces forces ainsi que l'équation discrétisée du pendule sont obtenues en remplaçant les déplacements horizontal et vertical du système (2.55) par leurs approximations définis par l'équation (2.62). On ajoute les équations du pendule et de l'alternateur au système (2.64), il vient que les contributions modales des déplacements, l'angle de rotation de la barre du pendule et le courant électrique vérifient le système différentiel d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j(L) \varphi_i(L) + m_2 l \ddot{\theta} (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) \\ + k_i \alpha_i(t) = -M_{ap} g \varphi_i^z(L) + m_2 l \dot{\theta}^2 (\sin \theta \varphi_i^y(L) - \cos \theta \varphi_i^z(L)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t) (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) + C_{ap} \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta + K_e i(t) \sin(\beta \theta) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt}(t) + (r + R(t)) i(t) - K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta) = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Durant le phénomène de vibration mécanique, la poutre excite le pendule qui vibre en faisant un angle de rotation d'axe (OX) et entraîne l'alternateur en rotation. Lors de sa rotation, l'alternateur transforme une partie de l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance, l'autre partie est dissipée par frottement dont on rend compte par le coefficient d'amortissement mécanique C_{ap} . Pour mieux comprendre et afin de déterminer le coefficient d'amortissement total, on suppose que la partie inductive de l'alternateur de la dernière équation du système (2.65) est négligeable ; on revient à la vérification de la validité de cette hypothèse simplificatrice dans le cinquième chapitre. On en déduit l'expression du courant électrique

$$i(t) = \frac{\beta K_e}{r + R(t)} \dot{\theta} \sin(\beta \theta). \quad (2.66)$$

Puis on remplace cette expression dans l'équation de la rotation de l'actionneur qui sera définie comme suit :

$$I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t) (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) + [C_{ap} + \frac{\beta K_e K_c}{r + R(t)} \sin^2(\beta \theta)] \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = 0. \quad (2.67)$$

A partir de cette équation il est clair que l'amortissement est la somme d'un amortissement purement mécanique et d'un amortissement purement électrique qui est une fonction

décroissante de la résistance à ajouter : **système réel**.

L'amortissement total varie entre une valeur minimale et une valeur maximale : lorsque $R = \infty$, l'alternateur est en circuit ouvert, pas de courant électrique, et l'amortissement est purement mécanique et lorsque $R = 0$, l'alternateur est en court-circuit et l'amortissement est maximal.

Lorsque la résistance extérieure attachée aux bornes de l'alternateur est fixe, on parle du contrôle passif et lorsqu'elle est variée en temps réel selon une loi de contrôle, on parle du contrôle semi-actif. On verra dans le cinquième chapitre comment on peut faire varier cette résistance en temps réel selon une loi de contrôle.

Afin de déterminer les paramètres optimaux du TMD pendulaire, on suppose que l'amortissement électrique est équivalent à un amortissement visqueux. L'actionneur électromécanique sera appelé, dans ce cas, **actionneur de référence**, le système d'équations sera appelé **système de référence**, et l'équation (2.67) sera écrit comme suit :

$$I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t)(\cos\theta\varphi_i^y(L) + \sin\theta\varphi_i^z(L)) + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (2.68)$$

$C_{eq} = C_{ap} + C_{eq}^{électrique}$ est le coefficient d'amortissement visqueux total équivalent.

Avec $C_{eq}^{électrique}\dot{\theta}$ est l'amortissement visqueux équivalent à l'amortissement électrique dû à la résistance fixe externe attachée aux bornes de l'alternateur.

En contrôle passif, la valeur optimale de la constante de la résistance externe R , est déterminée en minimisant la différence entre l'amortissement optimal du système de référence et l'amortissement du système réel par la méthode des moindres carrées.

En contrôle semi-actif, le coefficient d'amortissement varie en temps réel selon une loi de contrôle et sera noté $\tilde{C}_{eq}(t)$. Ce coefficient d'amortissement est déterminé tel que la réponse du système réel soit égale à la réponse du système de référence à chaque étape de construction comme on verra en détail dans le chapitre 5.