

---

## **CAPITOLO 7**

### ***Conclusioni***

---

<b>7.1 Conclusioni.....</b>	<b>7-2</b>
<b>7.1.1 Scelta di una definizione di stabilità materiale.....</b>	<b>7-4</b>
<b>7.1.2 Conseguenze della stabilità del materiale sui fenomeni d'instabilità e realizzabilità di uno stato instabile per il materiale.....</b>	<b>7-12</b>
<b>7.1.3 Connessioni tra i criteri di stabilità materiale .....</b>	<b>7-23</b>

---

## **7.1 CONCLUSIONI**

---

In questo lavoro di tesi è stato studiato il problema della stabilità del materiale in relazione ai fenomeni d'instabilità e biforcazione dell'equilibrio. La stabilità del materiale viene analizzata come una particolare condizione che caratterizza l'influenza della rappresentazione del legame costitutivo, su alcuni fenomeni relativi al comportamento globale di un solido, quali l'instabilità e la biforcazione. Il problema della descrizione della risposta del materiale è, infatti, di fondamentale interesse nello studio dei problemi di stabilità e della risposta non-lineare di solidi soggetti a stati di deformazione finita. In quest'ambito è essenziale caratterizzare il comportamento stabile o meno del materiale, poiché i fenomeni d'instabilità materiale sono spesso responsabili, accanto agli effetti geometrici, dell'instabilità strutturale e, quindi, possono innescare il collasso.

Nel presente lavoro di tesi sono state discusse le diverse definizioni di stabilità del materiale, allo scopo di individuare quale tra esse sia la più adatta a rappresentare la risposta intrinseca del materiale. Sono state analizzate condizioni di stabilità materiale basate su criteri statici, dinamici, e sul fenomeno della localizzazione della deformazione. Adottata la definizione di stabilità intrinseca del materiale, sono stati quindi investigati gli effetti di tale condizione sui fenomeni d'instabilità e biforcazione di un corpo continuo, e la realizzabilità effettiva di uno stato d'instabilità materiale lungo processi di deformazione stabili. Lo studio è stato poi rivolto a sottolineare l'importanza di un'appropriata descrizione del legame costitutivo, per una corretta interpretazione dei fenomeni d'instabilità e biforcazione. Inoltre, si è ritenuto opportuno indagare su possibili connessioni tra i diversi criteri di stabilità materiale evidenziando quali sono i fattori che regolano il passaggio tra i vari criteri.

I risultati ottenuti in ambito generale per un continuo tridimensionale, sono illustrati analizzando in dettaglio alcuni esempi rappresentativi. L'attenzione è rivolta principalmente a solidi caratterizzati da un legame incrementale lineare (materiali elastici ed ipoelastici) o lineare a tratti (materiali elasto-plastici con legge di flusso associata e non associata), sebbene alcuni risultati sono estesi a materiali con legame incrementale positivamente omogeneo di grado uno.

Lo studio ha mostrato come una definizione di stabilità materiale basata su di un criterio statico e sulla scelta di forze superficiali che rappresentano uno stato tensionale costante relativamente alla misura di deformazione di Biot, sia una scelta particolarmente opportuna. Le forze superficiali associate al tensore di Biot, seguono il materiale nella sua rotazione e sono quindi adatte a rappresentare lo stato di tensione costante nell'elemento,

non introducendo effetti estranei al materiale. I risultati hanno indicato come la condizione di stabilità del materiale, che rappresenta efficacemente l'effetto del solo materiale nella condizione di stabilità, abbia una notevole influenza sui fenomeni d'instabilità e biforcazione. Agendo, infatti, esclusivamente sul materiale stesso si è dimostrato come, in alcuni casi, sia possibile escludere la perdita di unicità e di stabilità.

Inoltre, sia per problemi omogenei sia per problemi non omogenei, si è dimostrato come il legame costitutivo, caratterizzato attraverso un'opportuna condizione di stabilità materiale, influenzi fortemente i fenomeni di instabilità e biforcazione di un solido. Tale influenza è regolata strettamente dalla particolare rappresentazione della condizione di stabilità materiale. Risulta, pertanto, essenziale adottare un'appropriata definizione di stabilità materiale, per una corretta interpretazione dei fenomeni di instabilità e biforcazione.

Infine, si è evidenziato come i criteri di stabilità materiale basati sulla propagazione delle onde e sulla localizzazione della deformazione includano l'effetto dei carichi morti presenti nella configurazione di equilibrio, che rappresenta un effetto instabilizzante o stabilizzante di tipo geometrico. Come si è visto, questa conclusione è supportata da due considerazioni. La prima è basata sull'interpretazione secondo un criterio statico della condizione di stabilità materiale dinamica. La seconda emerge dal risultato che solo agendo sullo stato tensionale presente nella configurazione di equilibrio in esame (ossia sugli effetti geometrici), la condizione di stabilità materiale in senso statico è capace di assicurare la condizione di stabilità materiale basata sulla propagazione delle onde o sulla localizzazione della deformazione. E' chiaro, quindi, che il criterio statico adottato nel presente lavoro appare maggiormente idoneo a caratterizzare la risposta intrinseca del materiale.

Di seguito vengono sintetizzati i principali risultati ottenuti nel presente lavoro.

---

### 7.1.1 SCELTA DI UNA DEFINIZIONE DI STABILITÀ MATERIALE

---

In questa tesi i materiali considerati sono caratterizzati da una relazione tra l'incremento del primo tensore di tensione di Piola-Kirchhoff e l'incremento del gradiente della deformazione incrementale, positivamente omogenea di grado uno:

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R(\dot{\mathbf{F}}) \quad (7.1)$$

Un legame incrementale di questo tipo è adatto a rappresentare materiali incrementalmente lineari (materiali elastici ed ipoelastici) o lineari a tratti (materiali elasto-plastici con legge di flusso associata e non associata). Si noti che nel caso di materiali incrementalmente lineari o lineari a tratti,  $\mathbf{C}^R$  rappresenta il tensore del quarto ordine dei moduli tangenti nominali.

Il panorama bibliografico sul tema della stabilità del materiale risulta particolarmente articolato. Lo studio effettuato in questo lavoro, ha evidenziato come le diverse analisi della stabilità del materiale proposte letteratura possano essere ricondotte al concetto di stabilità dell'equilibrio secondo un criterio statico, al fenomeno di localizzazione della deformazione ed al criterio di propagazione delle onde.

Nel presente lavoro si è dimostrato come nell'ambito di un criterio statico (detto anche energetico), si considera un elemento di materiale omogeneo in una configurazione  $B$  caratterizzata da uno stato di deformazione e di tensione uniformi. Le condizioni al contorno dell'elemento materiale sono di sole forze, imposte in modo da corrispondere allo stato di tensione uniforme presente nell'elemento (il problema di stabilità è detto così "omogeneo"). La condizione di stabilità del materiale corrisponde alla condizione di stabilità di questa particolare configurazione d'equilibrio espressa secondo un criterio energetico. Imponendo deformazioni addizionali omogenee di tipo infinitesimo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ , con  $0 < \tau < t$  e piccoli valori di  $t$ , con gradiente uniforme  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}(\tau)$ , il materiale si definisce stabile se l'approssimazione al secondo ordine della differenza tra il lavoro di deformazione addizionale ed il lavoro delle forze superficiali  $\mathbf{t}_R^* = \mathbf{T}_R^*(\mathbf{F}(\tau), \mathbf{T}_0) \mathbf{n}_R$ , è positivo:

$$W(t) - L(t) = \int_0^t \left\{ [\mathbf{T}_R(\tau) - \mathbf{T}_R^*(\tau)] \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau) \right\} d\tau = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{T}}_R - \dot{\mathbf{T}}_R^*] \cdot \mathbf{L} t^2 + o(t^2), \quad (7.2)$$

con  $\mathbf{L}$  gradiente della deformazione incrementale  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$  valutata per  $\tau=0$ .

Il tensore uniforme  $\mathbf{T}_R^*$  corrisponde ad uno stato tensionale fittizio in equilibrio statico con le tensioni superficiali posizionali e dipende dal gradiente della deformazione addizionale

$F(\tau)$ , oltre che da  $T_0$ . Inoltre,  $T_R^*$  definisce un insieme di forze superficiali su  $\partial B$  a risultante nulla ma con momento risultante diverso da zero.

Si è evidenziato come la descrizione delle forze superficiali agenti sul contorno dell'elemento materiale nella definizione di stabilità materiale, è una questione particolarmente delicata. Il meccanismo di carico deve essere definito in modo che il criterio di stabilità del materiale, dovendo descrivere una proprietà intrinseca al materiale stesso, non sia affetto da non-linearità geometriche. Ne consegue che le forze superficiali sono inizialmente corrispondenti alle tensioni superficiali  $T_0 n_R$  ( $T_R^*(1, T_0) = T_0$ ), e variano nel processo di deformazione addizionale che perturba lo stato di equilibrio in  $B$ .

A seconda del meccanismo di carico scelto per rappresentare lo stato di tensione uniforme, dalla (7.2) è possibile giungere a differenti condizioni di stabilità del materiale che corrispondono alla condizione di definitezza positiva del prodotto scalare

$$\dot{T}_f \cdot D = C_0^f(D) \cdot D > 0 \quad \forall D \mid D \neq 0, \quad (7.3)$$

relativo ad una coppia tensione-deformazione ( $T_f, F(U)$ ) lavoro coniugata (Hill, 1968).  $D$  è la parte simmetrica di  $L$ . La (7.3) per materiali lineari o lineari a tratti rappresenta la condizione di definitezza positiva del tensore del quarto ordine dei moduli istantanei  $C_0^f$ , relativo alla particolare misura di deformazione. Per materiali incompressibili la (7.3) è ancora valida purché si introduca una funzione di risposta del materiale  $\bar{C}_0^f(D)$  opportunamente modificata per tenere conto dell'incremento di tensione indeterminata dipendente linearmente dal gradiente della deformazione incrementale, associato al vincolo di incompressibilità:

$$\dot{T}_f \cdot D = \bar{C}_0^f(D) \cdot D > 0 \quad \forall D \neq 0 \quad \text{con} \quad \text{tr} D = 0. \quad (7.4)$$

A questo proposito si noti, la connessione del concetto di stabilità materiale con le disequaglianze costitutive (Hill, 1968; Truesdell e Noll, 1965; Wang e Truesdell, 1973; Ogden, 1984) che possono essere assimilate a particolari condizioni statiche (o energetiche) di stabilità materiale.

Le prime disequaglianze costitutive formulate risalgono a Drucker (1950, 1951), che propose una disequaglianza del tipo (7.3) per materiali elasto-plastici. L'analisi di Drucker porterebbe ad intendere che l'incremento di tensione utilizzato nella (7.3) sia quello corotazionale del tensore di Cauchy.

Truesdell e Toupin (1963), in seguito, analizzando nell'ambito di materiali elastici le conseguenze delle principali disequaglianze costitutive proposte in letteratura per assicurare un comportamento fisico ammissibile, derivarono una condizione incrementale appartenente alla famiglia (7.3). Tale condizione, indicata come GCN<sup>+</sup> (poiché deriva dalla

generalizzazione della condizione di Coleman e Noll) corrisponde a scegliere nella famiglia (7.3) il tensore delle tensioni di Biot  $\mathbf{T}^{(1)}$ .

Le restrizioni espresse dalla (7.3), sono state introdotte da Hill (1968) attraverso una famiglia monoparametrica di disuguaglianze (disuguaglianze di Hill) delle quali la GCN<sup>+</sup> ne è un caso particolare. Hill sulla base di considerazioni riguardanti materiali elastici incompressibili ed in contrasto con la disuguaglianza incrementale GCN<sup>+</sup>, ha indicato la disuguaglianza incrementale basata sulla derivata corotazionale (o di Jaumann) del tensore di Kirchhoff (valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale), che è coniugato con la misura di deformazione logaritmica, quale disuguaglianza più plausibile per delle restrizioni a priori del legame costitutivo. Questa impone, in pratica, la condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti  $\mathbf{C}_0^{(0)}$  associato alla misura di deformazione logaritmica:

$$\dot{\mathbf{T}}^{(0)} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}_0^{(0)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (7.5)$$

Seguendo la direzione del lavoro di Hill e Hutchinson (1975), tali restrizioni sono state utilizzate in diverse analisi di stabilità e biforcazione in materiali incrementalmente lineari o non lineari (Ariaratnam & Dubey, 1969; Miles, 1970, 1971, 1975; Hill & Hutchinson, 1975; Young, 1976; Needleman, 1979; Rice & Rudnicki, 1980; Triantafyllidis & Maker, 1985; Chau & Rudnicki, 1990; Benallal & Tvergaard, 1995, Alcaraz et al., 1997, Radi et al., 2001). Hill e Hutchinson (1975) esaminarono i fenomeni d'instabilità e biforcazione per deformazioni piane di un blocco rettangolare in trazione monoassiale, costituito da un materiale incompressibile ed incrementalmente ortotropo. I due moduli istantanei di Jaumann coinvolti nel legame incrementale furono assunti strettamente positivi in accordo con la condizione (7.5). Tale legame costitutivo può essere opportunamente esteso per rappresentare materiali elasto-plastici con legge di flusso plastico di tipo associato e non associato.

E' stato evidenziato come per formulare completamente il criterio energetico di stabilità materiale, occorra rimuovere l'indeterminatezza lasciata nella definizione delle forze superficiali  $\mathbf{t}_R^* = \mathbf{T}_R^*(\mathbf{F}(\tau), \mathbf{T}_0) \mathbf{n}_R$ , che entrano in gioco nella condizione di stabilità materiale.

Un tensore  $\mathbf{T}_R^*$  che rappresenti uno stato di tensione costante relativamente alla misura della deformazione di Biot  $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{1}$ , nel senso che deve valere la relazione:

$$\mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(1)} \quad \forall \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau) \quad (7.6)$$

è una scelta opportuna per definire le forze superficiali nel criterio di stabilità materiale (Grimaldi e Luciano, 1999; Greco et al., 2001). Supponendo che il tensore  $\mathbf{T}_R^*(\tau)$  soddisfi

l'equilibrio rotazionale e che  $\mathbf{T}_0$  è coassiale con  $\mathbf{U}$ , è possibile dimostrare che la (7.6) definisce il tensore delle forze superficiali secondo la seguente relazione

$$\mathbf{T}_R^* = \mathbf{R}\mathbf{T}_0. \quad (7.7)$$

Le forze superficiali associate al tensore  $\mathbf{T}_R^*$  definito nella (7.7), seguono il materiale nella sua rotazione e sono quindi adatte a rappresentare lo stato di tensione costante nell'elemento, non introducendo effetti estranei al materiale. Come si è dimostrato nel presente lavoro esaminando la stabilità di un corpo soggetto a carichi applicati del tipo morto, queste forze superficiali rappresentano l'aliquota dei carichi morti che compie lavoro esclusivamente per la deformazione pura dell'elemento materiale.

Si noti che, se la deformazione  $\mathbf{F}(\tau)$  non è tale da assicurare la coassialità tra  $\mathbf{T}_0$  ed  $\mathbf{U}$ , allora le tensioni superficiali non ammettono una semplice espressione. Limitatamente al primo ordine è però possibile ottenere l'espressione del tensore  $\mathbf{T}_R^*$  dalla (7.6) (vedi cap.3)

$$\mathbf{T}_R^* = \mathbf{T}_0 + \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{D}) + \mathbf{W}\mathbf{T}_0 \right] \tau + \mathbf{o}(\tau). \quad (7.8)$$

Se  $\mathbf{T}_0$  non è coassiale con  $\mathbf{D}$ , infatti, nascono le tensioni tangenziali  $\frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{D})$  che assicurano l'equilibrio alla rotazione. La (7.8), conduce, banalmente, alla versione incrementale della (7.7)

$$\dot{\mathbf{T}}_R^* = \mathbf{W}\mathbf{T}_0, \quad (7.9)$$

nell'ipotesi di coassialità di  $\mathbf{T}_0$  e  $\mathbf{D}$  necessaria ai fini del soddisfacimento dell'equilibrio rotazionale incrementale.

Con le forze superficiali (7.8), dalla (7.2) si ottiene la seguente condizione di stabilità materiale (di seguito indicata con SM):

$$\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (7.10)$$

che corrisponde alla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti istantanei associato alla coppia lavoro-coniugata tensione-deformazione  $(\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)})$  con  $\mathbf{T}^{(1)}$  tensore delle tensioni di Biot. Per materiali incompressibili la condizione di stabilità materiale (7.10) si trasforma nella seguente:

$$\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0} \text{ con } tr \mathbf{D} = 0. \quad (7.11)$$

Nel caso di materiali elastici, la (7.10) coincide con la condizione GCN<sup>+</sup>. Nel cap. 3 è stata riportata in dettaglio la formulazione del criterio di stabilità materiale SM e sono state riportate le motivazioni e le caratterizzazioni di un tale criterio. Inoltre, si è analizzato il confronto con altre possibili formulazioni in ambito energetico.

Nel presente lavoro si assume la (7.10) (o la (7.11) per materiali incompressibili) quale definizione di stabilità materiale. Questa è basata essenzialmente su un criterio statico e sulla scelta di forze superficiali che rappresentano uno stato tensionale costante relativamente alla misura di deformazione di Biot.

Un approccio alternativo a quello proposto nel seguente lavoro per definire un criterio statico di stabilità materiale, è dovuto a Hill (1962) ed ha ricevuto un enorme interesse per la sua interpretazione nell'ambito della propagazione delle onde e del fenomeno della localizzazione della deformazione in "shear bands". Tale criterio, introdotto per materiali incrementalmente lineari, sembra svincolare la condizione di stabilità materiale dall'interazione con le forze superficiali associate ai carichi morti. Quest'approccio è stato ripreso da Petryk (1992) estendendolo a materiali incrementalmente non-lineari. Essenzialmente si considera il contorno dell'elemento materiale rigidamente vincolato e si introducono modi di deformazione non omogenei che interessano solo una piccola porzione del corpo nel criterio energetico di stabilità. Poiché i carichi morti non compiono lavoro sul contorno esterno, la condizione di stabilità di questa particolare configurazione di equilibrio, secondo Hill (1962), viene identificata con quella del materiale. La condizione di stabilità materiale alla quale si giunge corrisponde alla condizione SSE. Alla luce dei risultati conseguiti in questa tesi, si è verificato come tale approccio non sembra rappresentare adeguatamente la risposta intrinseca del materiale poiché coinvolge effetti geometrici estranei al materiale. Tale conclusione è riportata al capitolo 6, dove si è dimostrato anche che tali effetti geometrici nascono come conseguenza delle rotazioni rigide del materiale e sono analoghi a quelli che nascono per effetto di deformazioni del tipo shear-bands.

Un altro criterio statico di stabilità materiale è stato introdotto in un recente lavoro di Reese & Wriggers (1997). La condizione di instabilità materiale per un materiale iperelastico viene associata alla definitezza negativa del tensore costitutivo tangente  $\mathbf{C}_0^{(2)}$  relativo alla misura di deformazione di Green-Lagrange. Si è dimostrato però che le forze superficiali  $\mathbf{t}_R^* = \mathbf{T}_R^*(\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{T}_0) \mathbf{n}_R$  associate alla misura di deformazione di Green-Lagrange non corrispondono a quelle che seguono il materiale nella sua rotazione rigida e che compiono lavoro per la sola deformazione pura. Limitatamente a deformazioni infinitesime, è stato dimostrato come le forze superficiali (7.8) siano le uniche a seguire il materiale nella sua rotazione rigida, ossia ad avere la rappresentazione (7.9) se  $\mathbf{T}_0$  è coassiale con  $\mathbf{D}$ .

Nel cap. 3 con riferimento alle possibili suddivisioni del funzionale di stabilità, e nel cap. 5 con riferimento a soluzioni analitiche di problemi di stabilità omogenei per materiali



iperelastici e carichi di trazione, è stato dimostrato come la scelta della misura di deformazione di Green-Lagrange nella formulazione del criterio di stabilità del materiale implichi che all'atto della perdita di stabilità strutturale (e di biforcazione per materiali lineari che ammettono un potenziale, tra i quali i materiali iperelastici) il materiale possa essere instabile. Viceversa, la scelta della misura di deformazione logaritmica (Hill, 1968) implica che all'atto della perdita di stabilità, il materiale sia stabile. E' chiaro quindi come la scelta del criterio di stabilità possa influire in maniera assai differente sui fenomeni di instabilità.

Secondo il criterio dinamico, un materiale omogeneamente deformato di estensione infinita è considerato stabile se le velocità di propagazione per onde piane di ampiezza infinitesima superimposte sono reali e non nulle per ogni direzione di polarizzazione e propagazione. Il criterio dinamico di stabilità del materiale risale al lavoro di Hayes e Rivlin, 1961. Data l'analogia formale tra le proprietà delle onde di ampiezza infinitesima sovrapposte ad uno stato di deformazione finita e le onde di propagazione per discontinuità del secondo ordine, o onde di accelerazione (Ericksen, 1953), la suddetta condizione di stabilità del materiale può essere analogamente interpretata in termini di onde di accelerazione. Tale caratterizzazione della stabilità del materiale è strettamente legata alla condizione di ellitticità forte per il tensore dei moduli tangenti associato alla misura nominale di tensione di Piola-Kirchhoff (SE). Diversi studiosi hanno utilizzato la condizione di ellitticità forte per ottenere possibili restrizioni a priori sul legame costitutivo (Sawyers e Rivlin, 1974, Ogden, 1984, F. Pan e M. Beatty, 1999).

La condizione di stabilità in senso dinamico, data la sua connessione alla condizione SE, ha ricevuto una possibile interpretazione statica in relazione a deformazioni incrementali del tipo a bande di taglio (Hill, 1962). Hill dimostra che in presenza di un autovalore negativo del tensore acustico per una particolare direzione  $\mathbf{n}$ , un corpo omogeneo e deformato omogeneamente con spostamenti nulli su tutto il contorno è instabile in relazione a modi del tipo a bande di taglio con spessore infinitesimo (dette anche bande di Lüders). Questo comportamento, secondo Hill, indica un'instabilità intrinseca poiché il corpo non è influenzato dai carichi morti. Si è dimostrato invece che l'instabilità, in questo caso, è da ascrivere anche ad effetti geometrici.

La condizione di ellitticità forte per un materiale omogeneo in uno stato di deformazione omogenea, d'altro canto, che assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde infinitesime soddisfacenti la condizione di propagazione, può essere interpretata come una condizione di esclusione di modi di biforcazione del tipo "shear-band" o come una condizione di stabilità ristretta a deformazioni incrementali di rango uno. Quindi, come nel

caso della condizione di stabilità strutturale, deve contenere degli effetti estranei al materiale stesso.

Il fenomeno della localizzazione della deformazione, sia per la connessione all'instabilità dinamica sia perché considerato spesso come un meccanismo precursore della frattura in un mezzo continuo, è stato interpretato come un sintomo di instabilità materiale. In quest'ambito la condizione SE per il tensore costitutivo nominale tangente è sufficiente per la stabilità materiale in relazione a possibili fenomeni di localizzazione.

Le considerazioni precedenti portano a considerare la condizione SE:

$$\mathbf{C}_0^R [m \otimes n] \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0 \quad (7.12)$$

quale condizione di stabilità materiale in senso dinamico (SD). Per materiali incrementalmente lineari la (7.12) assicura, infatti, velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime con polarizzazioni reali in un corpo indefinito omogeneamente deformato in uno stato di tensione uniforme, e per onde di accelerazione. Per materiali incrementalmente non lineari la condizione analoga alla (7.12)

$$\mathbf{C}_0^R (m \otimes n) \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0 \quad (7.13)$$

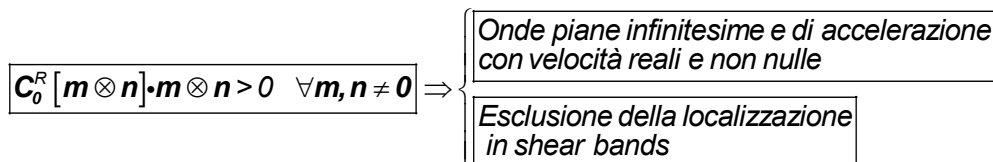
assicura invece velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su un lato del piano di discontinuità. La stessa, esclude la possibilità di biforcazioni shear bands, per problemi con condizioni di sole forze morte nulle applicate al contorno e deformazioni omogenee. La condizione di ellitticità forte per il solido di confronto

$$*\mathbf{C}_0^R [m \otimes n] \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0, \quad (7.14)$$

invece, esclude la localizzazione in shear bands nel solido reale ed assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione.

Per convenienza si riordinano le condizioni di stabilità materiale nel seguente specchio

*Materiali incrementalmente lineari*



*Materiali incrementalmente non - lineari*

$$\begin{array}{l}
 \boxed{C_0^R (m \otimes n) \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Onde di accelerazione con velocità reali e non nulle} \\ \text{con gradiente delle velocità nullo su di un lato} \\ \text{Esclusione della localizzazione in shear bands} \\ \text{per problemi omogenei con sole forze imposte} \end{array} \right. \\
 \\
 \boxed{*C_0^R (m \otimes n) \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{C_0^R (m \otimes n) \cdot m \otimes n > 0 \quad \forall m, n \neq 0} \\ \text{Onde di accelerazione con velocità reali e non nulle} \\ \text{Esclusione della localizzazione in shear bands} \\ \text{nel solido reale} \end{array} \right.
 \end{array}
 \tag{7.15}$$

In definitiva la scelta del criterio di stabilità proposto nel presente lavoro quale criterio più adatto a rappresentare la risposta intrinseca del materiale rispetto ad altri proposti in letteratura, è motivata dalle seguenti considerazioni:

- il criterio statico adottato è stato definito esaminando la condizione di stabilità di un elemento materiale omogeneamente deformato e soggetto a forze superficiali che rappresentano opportunamente lo stato di tensione costante presente nell'elemento nella configurazione di equilibrio in esame. Tali forze superficiali non introducono effetti estranei al materiale poiché seguono il materiale nella sua rotazione rigida e compiono lavoro esclusivamente per la deformazione pura dell'elemento materiale. Nel caso della stabilità della configurazione di equilibrio di un corpo soggetto a carichi morti, inoltre, le forze superficiali in oggetto rappresentano l'aliquota dei carichi morti che compie lavoro unicamente per la deformazione pura dell'elemento materiale.
- la condizione di ellitticità forte, spesso considerata come una condizione di stabilità materiale basata sul criterio di propagazione delle onde o sul fenomeno di localizzazione della deformazione, è essenzialmente una condizione di esclusione di modi di biforcazione del tipo "shear-band" e, quindi, una condizione di stabilità strutturale ristretta a deformazioni incrementali di rango uno. Pertanto, la condizione di stabilità materiale associata alla SE non è in grado di caratterizzare esclusivamente la risposta intrinseca del materiale contenendo effetti geometrici estranei al materiale stesso che gli derivano dalla stretta connessione con la condizione di stabilità strutturale.
- alla luce della definizione di stabilità materiale adottata nel presente lavoro, l'interpretazione statica della condizione di stabilità materiale dinamica fornita da Hill (1962) attraverso la stabilità dell'equilibrio di un corpo omogeneamente deformato e rigidamente vincolato al contorno, non sembra liberare il criterio di stabilità materiale da effetti geometrici. Esaminando la stabilità di un corpo soggetto a carichi morti si dimostra,

infatti, come i carichi responsabili dell'effetto stabilizzante-instabilizzante geometrico siano dipendenti dalla deformazione e, quindi, non coincidano con quelli di tipo morto associati allo stato di tensione  $T_0$ . Di conseguenza, pur se per il corpo vincolato rigidamente sul contorno il lavoro dei carichi morti è nullo, ciò non implica che anche gli effetti geometrici siano nulli.

---

### **7.1.2 CONSEGUENZE DELLA STABILITÀ DEL MATERIALE SUI FENOMENI D'INSTABILITÀ E REALIZZABILITÀ DI UNO STATO INSTABILE PER IL MATERIALE**

---

Adottato un criterio di stabilità di materiale è interessante così analizzare gli effetti del comportamento intrinseco del materiale sul comportamento globale di un corpo continuo. Ad esempio, risulta di interesse investigare se lo stato di softening intrinseco del materiale (associato quindi alla descrizione del legame costitutivo basata sulla deformazione di Biot), sia realizzabile durante una prova di carico, prima che intervengano fenomeni di instabilità e di biforcazione che disturbano l'uniformità della deformazione necessaria per misurare le proprietà del materiale.

L'instabilità del materiale può condurre all'instabilità di una configurazione di equilibrio (accompagnata eventualmente dalla biforcazione). Limitandosi alla stabilità infinitesima (Hill, 1958), per un corpo che occupa nello stato di equilibrio corrente la regione  $B$  dello spazio tridimensionale Euclideo, la condizione:

$$\frac{1}{2}t^2 \left\{ \int_B \underbrace{[C_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}]}_{\text{effetto del materiale}} dv + \int_B \underbrace{T_0 \cdot [L^T L - \mathbf{D}\mathbf{D}]}_{\text{effetto geometrico}} dv \right\} > 0, \quad (7.16)$$

per ogni velocità  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$  cinematicamente ammissibile, garantisce la stabilità della configurazione del corpo. Se il materiale è stabile in tutti i punti del corpo  $B$ , il primo termine è positivo e l'instabilità avviene per effetti instabilizzanti geometrici. In questo caso si parla di instabilità per effetti geometrici. Se il materiale non è più stabile, questo termine può essere negativo causando così l'instabilità anche in assenza di effetti instabilizzanti geometrici. Ovviamente esistono diversi casi per i quali l'instabilità avviene a causa dell'interazione tra effetti geometrici e del materiale.

Fenomeni di instabilità legati agli effetti geometrici governano il comportamento dei corpi sottili (esempi di corpi sottili sono le travi, le piastre ed i gusci). Considerando materiali incrementalmente lineari o lineari a tratti, infatti, quando la geometria del corpo è

compatibile con campi di spostamenti incrementali ammissibili, definiti nel criterio (7.16), caratterizzati da componenti di deformazione  $D_{ij}$  trascurabili nei confronti delle rotazioni  $W_{ij}$  (corpi sottili, quindi), allora l'instabilità può avvenire in presenza di tensioni piccole nei confronti dei moduli tangenti. In tal caso, al secondo ordine, la differenza tra le varie misure di deformazione lavoro-coniugate scompare assieme alla differenza tra i moduli costitutivi istantanei  ${}_0C_{ijhk}^f$  associati. Nel funzionale di stabilità (7.16) al termine del materiale può essere sostituito un qualsiasi tensore  $C_o^f$ , mentre il termine geometrico si riduce a  $T_o \cdot W^T W$ . In tale circostanza il materiale è in genere stabile e la perdita di stabilità avviene per tensioni prevalentemente di compressione, cui corrisponde un effetto instabilizzante dei carichi. Si ha di conseguenza un'instabilità per effetti geometrici.

Perdite di stabilità legate al materiale avvengono in genere in corpi non sottili e principalmente in presenza di tensioni positive. In questo caso le tensioni possono avere grandezza paragonabile ai moduli tangenti e per lo studio di questo tipo di instabilità è indispensabile, quindi, considerare la differenza tra le misure di deformazione e dei moduli costitutivi tangenti associati. La perdita di stabilità del materiale può avvenire, ad esempio, in materiali quali le gomme che manifestano un softening di tipo elastico o in materiali strutturali (acciaio, calcestruzzo, alluminio) in presenza di deformazioni plastiche.

Un caso che permette un'analisi più approfondita dell'influenza del comportamento del materiale sulla perdita di stabilità di una configurazione di equilibrio, è quello di un corpo soggetto a condizioni al contorno di sole forze morte ed omogeneamente deformato (il cosiddetto problema "all-round dead load"). In tale circostanza, la condizione integrale (7.16) si trasforma in una condizione puntuale ed è evidente che se il materiale è stabile l'instabilità strutturale avviene necessariamente per effetti geometrici. Le seguenti implicazioni valgono per un corpo omogeneo di materiale incrementalmente non-lineare omogeneo di grado uno, deformato omogeneamente e con condizioni al contorno di sole forze ("problema omogeneo"):

$$\begin{array}{l}
 \text{Stabilità infinitesima} \Rightarrow \text{SM} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Stabilità infinitesima} \\
 f''(1) < 0 \\
 t_i > 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SM}^f \quad (7.17) \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Stabilità infinitesima} \\
 f''(1) > 0 \\
 t_i < 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SM}^f
 \end{array}$$

Tali relazioni sono state esaminate in dettaglio nel capitolo 3. Nella (7.17) con SM si è indicata la condizione di stabilità materiale basata sulla positività di  $C_o^{(1)}(D) \cdot D$ , mentre con

SM<sup>f</sup> si è indicata la condizione di stabilità materiale basata sulla positività di  $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$ . Ovviamente nei problemi omogenei i casi interessanti dal punto di vista della stabilità materiale sono quelli di trazione. Per carichi di compressione, infatti, la condizione di stabilità è violata indipendentemente dalla risposta del materiale per rotazioni rigide incrementali. Dalla (7.17) si deduce che la perdita di stabilità del materiale (o softening) in termini di  $\mathbf{C}_0^{(1)}$  e di  $\mathbf{C}_0^f$  per  $f''(1) \leq 0$  e  $t_i > 0$ , non è realizzabile prima della perdita di stabilità, mentre può essere realizzabile in termini di  $\mathbf{C}_0^f$  per  $f''(1) > 0$  e  $t_i > 0$ . È possibile dimostrare, inoltre, che la perdita di stabilità per trazione avviene necessariamente in presenza di una risposta positiva del materiale nel caso delle misure di deformazione caratterizzate da  $f''(1) < 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} \geq 0 \\ f''(1) < 0 \\ t_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (7.18)$$

Dalla (7.18) emerge un risultato assai interessante: le condizioni di stabilità materiale secondo misure caratterizzate da  $f''(1) < 0$  (ad esempio, la condizione di stabilità del materiale di Hill) non possono escludere a priori la stabilità e l'unicità. Esistono, al contrario, dei casi nei quali la condizione di stabilità del materiale associata a misure con  $f''(1) \geq 0$ , è tanto forte da poter escludere a priori la perdita di stabilità. In questi casi l'influenza della particolare descrizione del legame costitutivo o, equivalentemente, della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità, è *particolarmente evidente*.

Le connessioni tra la stabilità del materiale, stabilità strutturale e la perdita di unicità per i problemi omogenei sono riportate in dettaglio al capitolo 5. In questo capitolo, inoltre, sono riportati alcuni esempi per i quali la condizione SM assicura la stabilità ed unicità.

Per *materiali incrementalmente lineari* che ammettono un potenziale del gradiente della deformazione incrementale, la perdita di stabilità del materiale avviene non prima della perdita di stabilità e di unicità. Le stesse conclusioni valgono anche per *materiali incrementalmente non lineari* che ammettono un potenziale, nell'ipotesi che le forze esterne incrementali siano nulle su tutto il contorno (dati omogenei).

Queste relazioni sono espresse nel seguente specchio:

$$\text{CSU} \equiv \text{Stabilità infinitesima} \Rightarrow \begin{cases} \text{SM} \\ \text{Unicità} \end{cases}, \quad (7.19)$$

*Perdita di Stabilità*  $\Rightarrow$  *Biforcazione*

nel quale con CSU si è indicata la condizione sufficiente di unicità.

Come detto in precedenza, in alcuni casi, può accadere che la condizione SM assicuri la condizione di stabilità e di unicità:

$$SM \Rightarrow \text{Stabilità (unicità)} . \quad (7.20)$$

In questi casi, quindi, la perdita della condizione SM deve coincidere con la perdita della condizione di stabilità e, quindi, la condizione SM è necessaria e sufficiente per la stabilità del corpo. Tale situazione si verifica quando la perdita di stabilità avviene per modi che rendono nullo il contributo dell'effetto dei carichi morti (misurato, ovviamente, attraverso la deformazione di Biot) nella condizione di stabilità. L'effetto dei carichi morti è nullo, in particolare, quando la perdita di stabilità avviene per modi simmetrici.

Ad esempio, la (7.20) vale per un corpo generico di materiale lineare o non lineare soggetto ad uno stato di tensione idrostatica uniforme. In tal caso la perdita di stabilità avviene per modi simmetrici e coincide con la perdita della condizione SM. Se il materiale è lineare e deriva da un potenziale, o non-lineare derivante da un potenziale ma con dati omogenei, la biforcazione, inoltre, deve necessariamente coincidere con la perdita di stabilità materiale. Gli effetti geometrici, infatti, sono sempre stabilizzanti. Per questo caso, quindi, la condizione SM è necessaria e sufficiente per la stabilità:

$$\text{Tensioni uniformi} : SM \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} \text{Stabilità} .$$

Se si utilizza una generica misura di deformazione, la perdita di stabilità strutturale e materiale avviene con materiale  $f$ -instabile se  $f''(1) > 0$ , ed  $f$ -stabile per  $f''(1) < 0$ . In particolare, la perdita di stabilità materiale e strutturale avviene invece con la forma  $\mathbf{C}_0^{(2)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$  negativa in corrispondenza del modo di biforcazione. Anche in questo caso, le conseguenze della particolare scelta di rappresentazione della risposta stabile del materiale sono particolarmente evidenti.

Un secondo esempio riguarda i materiali incrementali lineari caratterizzati da un tensore costitutivo tangente simmetrico e da una simmetria ortotropa dei moduli tangenti rispetto agli assi principali di tensione. I materiali iperelastici ed isotropi appartengono a tale classe. Per questi materiali avviene di frequente che la perdita di stabilità sia caratterizzata da modi simmetrici o da modi che rendono nullo l'effetto geometrico, per il disaccoppiamento tra modi di biforcazione coassiali agli assi principali e di taglio nei piani principali. In tale circostanza, quindi, vale la (7.20), mentre l'analoga condizione di stabilità materiale definita in termini della misura di deformazione logaritmica non è abbastanza forte da assicurare la stabilità e l'unicità. Nel capitolo 5 si è esaminato in quali circostanze la perdita di stabilità coincida con la perdita di stabilità del materiale. In particolare si esamina il caso nel quale due tensioni principali sono uguali a zero e la terza è positiva,

$t_1=t_2=0$  e  $t_3>0$  ad esempio. I modi di taglio  $D_{12}$  sono ammissibili quando il modulo  ${}_0C_{1212}^{(1)}$  è nullo ma non portano contributo all'effetto geometrico. La  $D_{13}$  ( $D_{23}$ ) può essere un possibile modo quando  ${}_0C_{1313}^{(1)} - t_3/4$  ( ${}_0C_{2323}^{(1)} - t_3/4$ ) diventa nullo. In questo caso il termine caratterizzante l'effetto geometrico nel criterio di stabilità  $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D})$  è negativo e pari a

$$-t_3(D_{23}^2 + D_{13}^2).$$

Per la trazione monoassiale, in corrispondenza di modi di taglio del tipo  $D_{13}$  o  $D_{23}$ , la perdita di stabilità del materiale, quindi, avviene dopo la perdita di stabilità. Per materiali iperelastici, è possibile inoltre, rendere esplicita la condizione che assicura l'esistenza dei modi di taglio. Essendo

$${}_0C_{1212}^{(1)} = {}_0C_{1212}^R + \frac{1}{4}(t_1 - 3t_2),$$

con

$${}_0C_{1212}^R = \frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \lambda_2^2,$$

si ottiene che i modi del tipo  $D_{12}$ , ad esempio, sono ammissibili quando

$${}_0C_{1212}^{(1)} - \frac{1}{4} \frac{(t_1 - t_2)^2}{(t_1 + t_2)} = \frac{\lambda_2^2 t_1^2 - \lambda_1^2 t_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(t_1 + t_2)} = 0,$$

ossia quando

$$\frac{t_1}{\lambda_1} = \frac{t_2}{\lambda_2} \quad \text{o} \quad \frac{t_1}{\lambda_1} = -\frac{t_2}{\lambda_2}.$$

Nel caso in cui  $\lambda_1 = \lambda_2$  ci si riconduce al caso  $t_1=t_2$  per il quale la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità del materiale. Per la trazione monoassiale ( $t_1=t_2=0$  e  $t_3>0$ ) accade che la quantità  ${}_0C_{1313}^{(1)} - t_3/4$  sia pari al modulo  ${}_0C_{3131}^R$  che non può mai annullarsi. La perdita di stabilità coincide, quindi, sempre con la perdita di stabilità del materiale.

Per materiali *incrementalmente non-lineari* con dati non omogenei, la perdita di stabilità materiale avviene non prima della perdita di stabilità. Inoltre, la perdita di stabilità del materiale avviene necessariamente con la condizione sufficiente di unicità non più soddisfatta. Se il materiale ammette un solido lineare di confronto e deriva da un potenziale, quando la procedura di confronto è critica, nel senso che la biforcazione e perdita di stabilità del solido di confronto coincide con la biforcazione del solido reale (non necessariamente accompagnata da perdita di stabilità), la perdita di stabilità materiale non avviene prima della perdita di unicità. Valgono quindi le seguenti implicazioni:



$$\text{Stabilità solido di confronto} \Rightarrow \text{CSU solido reale} \Rightarrow \begin{cases} \text{Stabilità solido reale} \Rightarrow \text{SM} \\ \text{Unicità solido reale} \end{cases} \quad (7.21)$$

I risultati sopra discussi sono stati illustrati con l'ausilio anche di alcune applicazioni, nel capitolo 5. Qui, si riportano alcuni esempi di analisi di stabilità e biforcazione di corpi rettangolari costituiti da materiali iperelastici, isotropi ed incompressibili. Gli esempi mostrano chiaramente l'influenza del legame costitutivo e della condizione di stabilità del materiale sul comportamento globale del corpo. Da questi, infatti, si deduce che:

*-a partire da uno stato di equilibrio stabile, per un solido di materiale Neo-Hookiano generalizzato in uno stato di deformazione piano in trazione monoassiale, il softening, inteso come instabilità del materiale, si può raggiungere solo dopo la perdita di stabilità strutturale e della biforcazione. La biforcazione e la perdita di stabilità, inoltre, avvengono non appena il  $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$  diventa semidefinito positivo, perciò la perdita di stabilità materiale coincide con quella strutturale. In particolare, se il materiale è Neo-Hookiano, la perdita di stabilità strutturale e materiale non può mai essere raggiunta;*

*-analogamente, per un materiale Neo-Hookiano in deformazione 3D, la perdita di stabilità strutturale (biforcazione) e materiale non può mai essere raggiunta;*

*-si è verificato che in presenza di tensioni uniformi di trazione per un materiale Neo-Hookiano, la biforcazione e la perdita di stabilità strutturale avvengono quando  $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$  diventa semidefinito positivo. Il tensore  $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$  è invece negativo in corrispondenza del modo di biforcazione;*

*-per un materiale alla Ogden valgono analoghe considerazioni. Anche per questo materiale la perdita di stabilità avviene con modi simmetrici e coincide con la perdita di stabilità materiale. Il tensore  $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$  è invece negativo alla biforcazione.*

Gli esempi riportati evidenziano particolarmente l'influenza della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione per problemi caratterizzati da deformazioni omogenee. Nei casi esaminati, la perdita di stabilità del materiale non è ammissibile lungo un processo stabile di carico a partire da uno stato naturale, e la perdita di stabilità dell'equilibrio avviene in corrispondenza della perdita di stabilità del materiale. Questa condizione particolare avviene poiché in corrispondenza dello stato di equilibrio critico, la perdita di stabilità avviene con campi di velocità caratterizzati da un gradiente simmetrico ( $\mathbf{L} \in \text{Sym}$ ) che annullano il termine rappresentante gli effetti geometrici dei carichi morti nella configurazione in esame. E' evidente, quindi, come in tutti i casi esaminati, le restrizioni sul legame costitutivo imposte attraverso la condizione SM, escludano a priori fenomeni di instabilità e biforcazione.

Gli esempi riportati, infatti, ricadono in quella classe di problemi caratterizzati dal disaccoppiamento tra modi coassiali e di taglio nei piani principali.

I risultati mostrano come la condizione di stabilità del materiale, che rappresenta efficacemente l'effetto del solo materiale nella condizione di stabilità, abbia una notevole influenza sui fenomeni di instabilità e biforcazione: agendo, infatti, esclusivamente sul materiale stesso si dimostra come sia possibile escludere la perdita di unicità e di stabilità. Viceversa, per problemi nei quali la perdita di stabilità avviene per modi non uniformi (i cosiddetti problemi "non omogenei"), la perdita di stabilità del materiale può avvenire prima della perdita di stabilità (ed eventualmente, della biforcazione) ed il softening in termini di  $\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$  è, quindi, realizzabile.

Un esempio di tale evenienza è stato analizzato al cap. 3 nel caso di un corpo deformato omogeneamente con spostamenti imposti su tutto il contorno. In queste ipotesi, infatti, è possibile utilizzare i due teoremi di Hadamard e Van Hove (Truesdell & Noll, 1965; Hill, 1962) e le loro generalizzazioni ai materiali lineari a tratti con legge plastica di tipo associato (Ryzhak, 1987). Per un materiale incrementalmente lineare, in particolare, la condizione di ellitticità forte (SE) per il tensore costitutivo tangente nominale assicura la stabilità della configurazione di equilibrio e l'unicità della soluzione incrementale, ma in genere non assicura la SM. Se vale, quindi, la condizione SE il materiale può raggiungere il softening prima di perdere la stabilità e l'unicità.

Un esempio specifico può essere costruito considerando un materiale convenzionale per il quale il tensore costitutivo  $\mathbf{C}_0^{(1)}$  sia formalmente uguale a quello relativo alla legge di Hooke:

$$\mathbf{C}_0^{(1)} = 2\mu \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + k \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (7.22)$$

con  $k = \lambda + 2/3\mu$  modulo di comprimibilità volumetrica e  $\lambda, \mu$  i classici moduli di Lamè misurati rispetto alle variabili lavoro-coniugate ( $\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}$ ).

Infatti, condizioni sufficienti per la SE sono

$$\left[ \mu + \min \{t_i\} - \frac{1}{2} \max \{t_i\} \right] > 0, \quad (7.23)$$

$$\left[ (\lambda + 2\mu) - \max \{t_i\} + \min \{t_i\} \right] = \left[ k + \frac{4}{3} \mu - \max \{t_i\} + \min \{t_i\} \right] > 0,$$

mentre il softening avviene se uno dei moduli  $k$  o  $\mu$  è negativo.

Se  $\left[ \frac{1}{2} \max \{t_i\} - \min \{t_i\} \right] < 0$ , allora per

$$\left[ \frac{1}{2} \max \{t_i\} - \min \{t_i\} \right] < \mu < 0, \quad (7.24)$$

e

$$k > \left[ \max\{t_i\} - \min\{t_i\} - \frac{4}{3}\mu \right] > 0$$

valgono le condizioni (7.23) sufficienti per la SE, e per il teorema di Van Hove lo stato di deformazione è stabile ed unico ma con il materiale in softening.

La condizione SE non implica la SM poiché contiene degli effetti geometrici stabilizzanti-instabilizzanti. Al contrario, la SM dipende intrinsecamente dal materiale. E' quindi possibile dimostrare che sotto opportune limitazioni sulle tensioni (riportate al capitolo 6) la condizione SM implichi la SE. Sotto queste limitazioni il softening del materiale per un corpo vincolato su tutto il contorno non è più realizzabile prima della perdita di unicità e stabilità:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0 : \\ SM \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{ \mathbf{C}_0^{(1)} \left( \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SE \Rightarrow \text{Stabilità(Unicità)} \quad (7.25)$$

Per un materiale incrementalmente lineare a tratti (elasto-plastico associato e non) la condizione SE per il tensore costitutivo nominale del solido di confronto (di Hill per leggi associate o di Raniecki per leggi non-associate) assicura la stabilità del solido di confronto (e la condizione SE per il tensore costitutivo reale). Questa a sua volta implica l'unicità e la stabilità per il solido reale, ma in genere non assicura la stabilità del materiale, di conseguenza il raggiungimento del softening nel range di validità della SE e, quindi, prima della perdita della stabilità e dell'unicità, non può essere escluso.

Analogamente al caso lineare, riguardo alla realizzabilità del softening, si può affermare che:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0 : \\ SM \text{ Solido confronto} \Rightarrow SM \text{ Solido reale} \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{ {}^* \mathbf{C}_0^{(1)} \left( \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} SE \\ \text{Solido di confronto } ({}^* \mathbf{C}_0^R) \end{array}}, \quad (7.26)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{Stabilità(Unicità)} \\ \text{Solido confronto} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{Stabilità(Unicità)} \\ \text{Solido reale} \end{array}}$$

quindi il softening del materiale di confronto, sotto le opportune restrizioni sulle tensioni, non è realizzabile prima della perdita di stabilità e di unicità.

Analoghe conclusioni possono essere raggiunte per corpi elasto-plastici omogeneamente deformati di forma parallelepipedica con spostamenti solo tangenziali sulle facce e per una

particolare classe di tensori costitutivi, in virtù del teorema di Van Hove modificato (Ryzhak, 1993).

Gli effetti della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione per problemi non omogenei, sono stati presi in considerazione al cap.4, illustrandoli attraverso il classico esempio proposto da Hill & Hutchinson (1975). Viene quindi esaminato il problema di biforcazione a partire da uno stato di deformazione omogeneo, per un blocco rettangolare di materiale incompressibile vincolato a mantenere condizioni di deformazioni piane e soggetto a spostamenti imposti agli estremi. Il materiale ha un legame costitutivo incrementale di tipo lineare, che mantiene la simmetria ortotropa fino alla biforcazione. Il legame costitutivo incrementale in seguito ad una trazione monoassiale, è espresso attraverso due soli moduli istantanei di Jaumann,  $\mu$  e  $\mu^*$ :

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}^{(0)} - \dot{T}_{22}^{(0)} &= 2\mu^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}_{12}^{(0)} &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Il modulo  $\mu$  caratterizza il legame tra incrementi di tensione e deformazione tangenziali paralleli assi geometrici, mentre il modulo  $\mu^*$  il legame tra incrementi di tensione e deformazione tangenziali inclinati a  $45^\circ$  rispetto agli assi geometrici. La condizione di stabilità materiale secondo Hill ((7.5)) impone la positività stretta dei moduli di Jaumann:

$$\mu^* > 0, \quad \mu > 0. \quad (7.28)$$

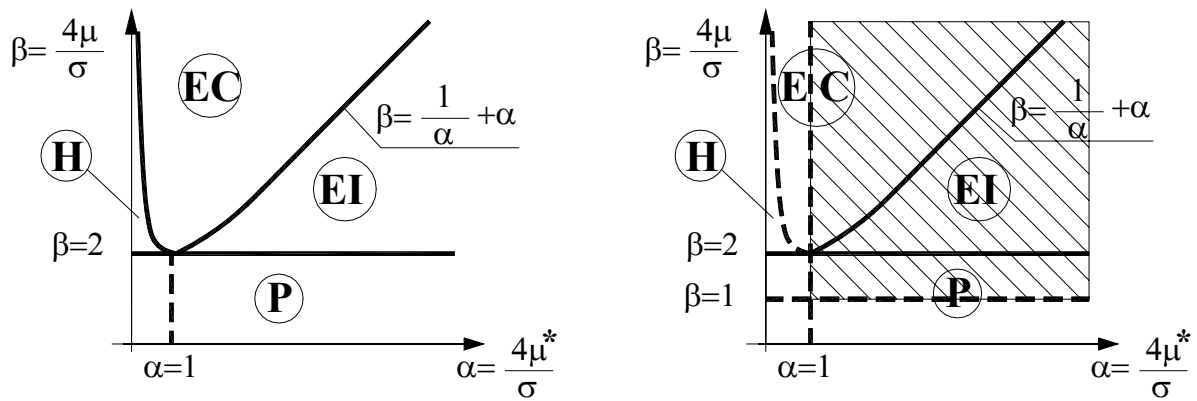
Il legame (7.27) può essere rappresentato equivalentemente nella forma associata alla coppia tensione deformazione lavoro-coniugata ( $\mathbf{T}^{(1)}$ ,  $\mathbf{E}^{(1)}$ )

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}^{(1)} - \dot{T}_{22}^{(1)} &= 2\bar{\mu}_B^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}_{12}^{(1)} &= 2\bar{\mu}_B D_{12} \end{aligned}, \quad (7.29)$$

per cui la condizione SM impone la positività stretta dei moduli associati alla misura di deformazione di Biot:

$$\bar{\mu}_B^* > 0, \quad \bar{\mu}_B > 0. \quad (7.30)$$

Sono state analizzate le restrizioni che la condizione di stabilità materiale espressa dalle (7.30), impone sui possibili regimi dei moduli istantanei per i quali le equazioni di equilibrio incrementali sono di tipo ellittico, parabolico o iperbolico. Queste sono confrontate con le restrizioni (7.28) imposte da Hill e Hutchinson, derivanti dalla condizione di positività del tensore dei moduli tangenti  $\mathbf{C}_0^{(0)}$  associato alla misura di deformazione logaritmica (condizione di stabilità o diseuguaglianza di Hill). Ovviamente, le conseguenze sono estremamente differenti: mentre le condizioni di Hill e Hutchinson, infatti, non escludono nessun regime caratteristico per i moduli istantanei, quelle imposte dalla condizione di stabilità materiale escludono a priori il regime iperbolico (vedi Fig. 7.1a).



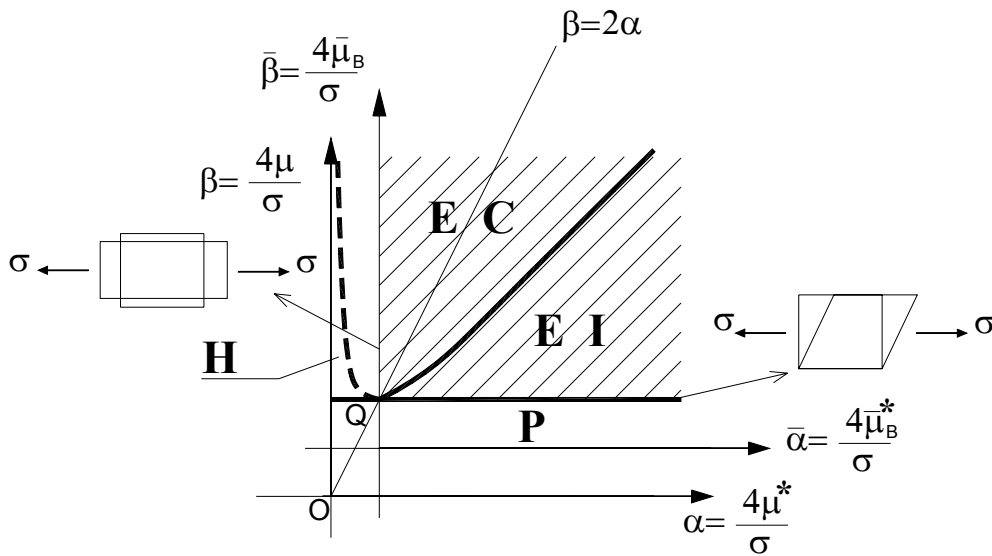
**Fig. 7.1a** Classificazione dei regimi a) sotto la condizione di stabilità materiale di Hill ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ) e b) sotto la condizione di stabilità materiale SM ( $\alpha > 1, \beta > 1$ , parte tratteggiata).

Ne consegue che le tensioni minime di biforcazione calcolate sotto le restrizioni imposte dalla condizione SM sono differenti da quelle calcolate da Hill e Hutchinson. Anche in questo caso è possibile la realizzabilità del softening del materiale secondo Biot prima della perdita di unicità e stabilità. Si nota anche che la perdita di stabilità del materiale può avvenire nonostante il tensore  $\mathbf{C}_0^{(0)}$  sia ancora definito positivo. Sono infine riportati alcuni risultati ottenuti specializzando la legge costitutiva ortotropa a particolari materiali iperelastici isotropi.

La trasformazione dai moduli  $\mu^*, \mu$  ai moduli  $\bar{\mu}_B, \bar{\mu}_B^*$  corrisponde alla seguente traslazione

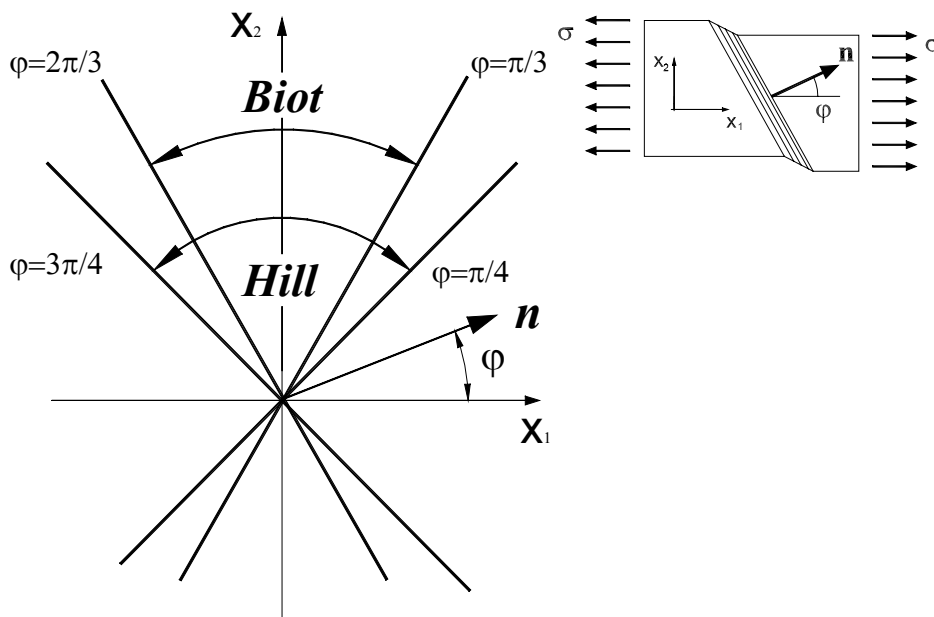
$$\bar{\alpha} = \alpha - 1, \quad \bar{\beta} = \beta - 1,$$

essendo  $\bar{\alpha} = 4\bar{\mu}_B^* / \sigma, \bar{\beta} = 4\bar{\mu}_B / \sigma$ . La Fig. 7.1b illustra tale situazione. La regione di stabilità materiale (SM) è rappresentata, quindi, da  $\bar{\alpha} > 0, \bar{\beta} > 0$ . Se si considerano modi di biforcazione del tipo omogeneo (i.e. con gradiente della deformazione incrementale uniforme) è possibile dimostrare che i modi di biforcazione primari possibili sotto le condizioni  $\bar{\alpha} > 0, \bar{\beta} > 0$ , sono del tipo a taglio e ricadono lungo l'interfaccia E-P ( $\bar{\beta} = 1$ ) in corrispondenza di una tensione pari a  $\sigma = 4\bar{\mu}_B = 2\mu$ . Sotto le condizioni  $\alpha > 0, \beta > 0$ , invece, per  $\beta > 2\alpha$  i modi di biforcazione primari sono coassiali alle direzioni coordinate, si trovano nel regime E o P ( $\alpha = 1$ ) e sono caratterizzati da una tensione  $\sigma = 4\mu^*$  che corrisponde all'annullarsi del modulo  $\bar{\mu}_B^*$ , mentre per  $\beta < 2\alpha$  i modi di biforcazione primari sono del tipo a taglio e ricadono lungo l'interfaccia E-P in corrispondenza di una tensione pari a  $\sigma = 2\mu$ . Le limitazioni imposte dalla condizione di stabilità di Hill non escludono modi di biforcazione coassiali.



**Fig. 7.1b.** Trasformazione tra i moduli  $\mu^*, \mu$  ed moduli  $\bar{\mu}_B, \bar{\mu}_B^*$  e modi di biforcazione primari omogenei. Nella zona tratteggiata sono esclusi modi di biforcazione.

Come per i modi di biforcazione diffusi, anche per modi di biforcazione del tipo shear bands gli effetti delle limitazioni (7.28) e (7.30) sono differenti. Infatti, le inclinazioni possibili sotto le limitazioni (7.28) sono comprese tra  $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ , mentre sotto le limitazioni (7.30) sono comprese tra  $\pi/3 < \varphi < 2\pi/3$ . In questo esempio la condizione di stabilità materiale SM è, quindi, più forte di quella di Hill.



**Fig. 7.2** Inclinazioni delle shear bands conseguenti alla condizione di stabilità materiale SM (indicata con "Biot") ed alla condizione di stabilità materiale secondo Hill.

Sia per problemi omogenei sia per problemi non omogenei, pertanto, è chiaro come il legame costitutivo, caratterizzato attraverso un'opportuna condizione di stabilità materiale, influenzi fortemente i fenomeni di instabilità e biforcazione di un solido. Tale influenza è regolata strettamente dalla particolare rappresentazione della condizione di stabilità materiale. In particolare, la condizione di stabilità del materiale adottata da Hill, associata alla misura di deformazione logaritmica, e quella SM, associata invece alla deformazione di Biot, portano a risultati assai differenti. Risulta, pertanto, essenziale adottare un'appropriata definizione di stabilità materiale, per una corretta interpretazione dei fenomeni di instabilità e biforcazione.

---

### 7.1.3 CONNESSIONI TRA I CRITERI DI STABILITÀ MATERIALE

---

Esaminando le connessioni tra il criterio statico e quello dinamico di stabilità materiale si evidenzia ulteriormente come il criterio dinamico includa l'effetto delle tensioni presenti nella configurazione di equilibrio e quindi effetti instabilizzanti o stabilizzanti di tipo geometrico. La stabilità materiale statica ed opportune limitazioni sullo stato di tensione della configurazione di equilibrio in esame, infatti, possono assicurare la stabilità materiale in senso dinamico. La seguente condizione è *sufficiente affinché una configurazione del materiale stabile in senso statico (SM) sia stabile anche in senso dinamico (SD)*:

$$\left. \begin{array}{c} SM \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{C_o^{(1)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}\right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SD, \quad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{t_i\} \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \max\{t_i\} \leq 0 \end{cases} \quad (7.31)$$

Per materiali incomprimibili ( $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ ), essendo la sommatoria sui termini  $\alpha_i^2$  pari ad  $\frac{1}{2}$ , il valore di  $\gamma$  nella (7.31) è sempre pari ad  $\frac{1}{2}$ . Stime meno accurate del limite inferiore, ma basate su di una sola tensione principale, possono essere trovate considerando che  $\min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} \geq -\frac{3}{2} \max\{|t_i|\}$ . Pertanto la seguente limitazione sul modulo della massima tensione principale:

$$\max\{|t_i|\} < \frac{2}{3} \min\left\{C_o^{(1)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}\right\}, \quad (7.32)$$

assicura che una configurazione stabile in senso statico risulta stabile anche in senso dinamico. Nella (7.31) con SD si è intesa la condizione SE, che per materiali

incrementalmente lineari assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime e di accelerazione ed esclude la localizzazione in shear bands. Per materiali incrementalmente non-lineari, SD indica la condizione (7.13) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su di un lato del fronte di propagazione ed esclude la localizzazione per problemi omogenei con sole forze morte imposte sul contorno. Per materiali incrementalmente non-lineari la (7.31) può essere sostituita da

$$\left. \begin{array}{l} SM^* \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{ {}^*C_0^{(t)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SE^* \Rightarrow SD, \quad (7.33)$$

nella quale  $SM^*$  indica la condizione di stabilità materiale in senso statico per il solido di confronto:

$${}^*C_0^{(t)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}.$$

Si noti che la condizione  $SM^*$  per il solido di confronto implica la  $SM$  per il solido reale:

$$SM^* \Rightarrow SM.$$

Nella (7.33) SD indica la (7.14) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione ed esclude localizzazioni in shear bands per il solido reale.

Riguardo alle possibili limitazioni indotte sullo stato tensionale dalla condizione di stabilità dinamica del materiale, si deduce che la seguente condizione è *necessaria affinché una configurazione di stabilità materiale in senso statico sia anche stabile in senso dinamico*:

$$\left. \begin{array}{l} SM \\ SD \end{array} \right\} \Rightarrow \max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} > -\max(\min)\left\{ {}^*C_0^{(t)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\}, \quad \delta = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \min\{t_i\} \geq 0 \\ 1 & \text{se } \min\{t_i\} \leq 0 \end{cases}. \quad (7.34)$$

In generale, la condizione necessaria (7.34) non fornisce alcuna informazione sullo stato tensionale poiché è identicamente soddisfatta. Per materiali incomprimibili ( $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ ), invece, il valore di  $\delta$  nella (7.34) è sempre pari ad  $\frac{1}{2}$ , e la condizione (7.34) può fornire informazioni utili. Analogamente al caso della condizione sufficiente, stime meno accurate del limite superiore, ma basate su di una sola tensione principale, possono essere trovate considerando che  $\max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} \leq 2\max\{|t_i|\}$ .

Per materiali incrementalmente lineari nella (7.34) SD indica la condizione SE, che assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime e di accelerazione ed esclude la localizzazione in shear bands. Per materiali incrementalmente non-lineari, SD indica la condizione (7.13), che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su di un lato del fronte



di propagazione ed esclude la localizzazione per problemi omogenei, con sole forze morte imposte sul contorno. Per materiali incrementalmente non-lineari la (7.34) può essere sostituita da

$$\left. \begin{array}{l} SM^* \\ SD \end{array} \right\} \Rightarrow \max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} > -\max(\min) \left\{ {}^*C_0^{(t)} \left( \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\}, \quad (7.35)$$

nella quale SD indica la (7.14) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione ed esclude localizzazioni in shear bands per il solido reale.

Non è semplice, invece, ricavare una restrizione sullo stato tensionale che sia sufficiente per la condizione di stabilità materiale in senso statico, supposto che la condizione di stabilità dinamica sia verificata. Questo può però accadere per particolari materiali o particolari percorsi di carico, (vedi esempi al capitolo 6).

Dai precedenti risultati, è evidente che il criterio statico basato su un'opportuna scelta delle forze superficiali posizionali presenti nella configurazione di equilibrio (in modo, cioè, da seguire il materiale nella sua rotazione rigida), appare maggiormente idoneo a caratterizzare la risposta intrinseca del materiale.

La stabilità materiale in senso dinamico e la sua interpretazione nel contesto della localizzazione è stata trattata al capitolo 6. In questo capitolo, inoltre, sono state stabilite le connessioni tra i diversi criteri partendo da un semplice esempio monodimensionale per analizzare poi il caso generale tridimensionale. Sono infine riportate delle applicazioni a corpi soggetti a stati di tensione uniforme ed a materiali iperelastici in deformazione omogenea, analizzando le relazioni tra la condizione di stabilità strutturale, il criterio di stabilità materiale statico e dinamico e l'unicità.