
CAPITOLO 6

Condizioni statiche e dinamiche di stabilità del materiale

6.1 Introduzione.....	6-3
6.2 Criteri dinamici di stabilità del materiale basati sulla propagazione di onde piane infinitesime	6-4
6.3 Criteri dinamici di stabilità del materiale basati sulla propagazione di onde di accelerazione.....	6-10
6.4 Analisi di alcune definizioni di stabilità materiale proposte in letteratura.....	6-13
6.5 Connessioni tra condizioni di stabilità materiale in senso statico e dinamico.....	6-15
6.5.1 Un esempio monodimensionale.....	6-17
6.5.2 Estensione al caso tridimensionale.....	6-20
6.6 Stabilità strutturale, materiale ed unicità lungo percorsi di deformazione omogenea.....	6-25
6.6.1 Applicazione ad un blocco di materiale iperelastico compressibile in trazione.....	6-29

6.1 INTRODUZIONE

Il problema della stabilità del materiale è stato affrontato con diversi approcci in letteratura. Le varie definizioni di stabilità materiale portano a conclusioni differenti sebbene tali definizioni, per essere plausibili, debbano necessariamente costituire punti di vista differenti di uno stesso problema fisico. Nonostante la notevole importanza dell'argomento, lo studio delle relazioni che intercorrono tra le diverse definizioni di stabilità materiale è stato scarsamente affrontato in letteratura. In questo capitolo, quindi, si intende prendere in esame i diversi criteri, allo scopo di evidenziare quali sono i fattori che regolano il passaggio tra le varie condizioni di stabilità materiale. Attraverso uno studio di questo tipo, sarà possibile sottolineare il significato delle diverse condizioni di stabilità materiale e, di conseguenza, mostrare quale tra i criteri formulati sia il più adatto a descrivere il comportamento intrinseco del materiale.

A meno che non sia diversamente specificato, faremo riferimento a materiali incrementalmente lineari.

Come è stato detto nell'introduzione, le varie interpretazioni della stabilità materiale seguono essenzialmente due strade: l'una basata su un criterio statico e l'altra su un criterio dinamico. Il criterio statico è stato introdotto nel capitolo 3. In entrambi i criteri si prende in esame la risposta meccanica del materiale a deformazioni infinitesime aggiuntive, prese a partire dallo stato di deformazione finita del quale si indaga il carattere di stabilità. Lo stato di deformazione finita considerato, corrisponde ad una configurazione di equilibrio di un elemento di materiale omogeneamente deformato e soggetto alle forze superficiali compatibili con la tensione uniforme presente nell'elemento. Il criterio statico e quello dinamico considerano la stabilità di questa particolare configurazione per definire la stabilità del materiale.

Nel primo caso, come si è visto nel capitolo 3, la stabilità del materiale corrisponde alla positività della differenza fra il lavoro di deformazione addizionale e quello compiuto dalle forze superficiali che possono essere variamente definite (ad esempio, in modo da rimanere compatibili con una certa misura di tensione coniugata costante lungo il generico percorso di deformazione).

Nel secondo caso, la stabilità del materiale corrisponde a velocità di propagazione reali per onde piane di ampiezza infinitesima che si propagano nell'elemento di materiale omogeneamente deformato.

Il criterio dinamico di stabilità del materiale risale al lavoro di Hayes e Rivlin (1961). Secondo questo criterio, il materiale si può definire stabile se la velocità delle onde piane infinitesime che si possono propagare nel materiale omogeneamente deformato è reale e non nulla. Data l'analogia formale tra le proprietà delle onde di ampiezza infinitesima sovrapposte ad uno stato di deformazione finita e le onde di propagazione per discontinuità del secondo ordine, o onde di accelerazione (Ericksen, 1953), la suddetta condizione di stabilità del materiale può essere analogamente interpretata in termini di onde di accelerazione. La condizione di ellitticità forte assicura velocità reali e non nulle per onde che soddisfano la condizione di propagazione.

Diversi studiosi hanno utilizzato la condizione di ellitticità forte per ottenere possibili restrizioni a priori sul legame costitutivo (Sawyers e Rivlin, 1974, Ogden, 1984, F. Pan, M. Beatty, 1999).

Tra le due formulazioni di criteri di stabilità materiale di cui sopra, si può collocare quella riportata in (Hill, 1962), in relazione all'interpretazione della propagazione delle onde di accelerazione in termini di stabilità del materiale, per materiali incrementalmente lineari o lineari a tratti. L'esistenza di tre onde per ogni direzione di propagazione (per un tensore acustico supposto simmetrico) è necessaria e sufficiente per la stabilità di un corpo rigidamente vincolato lungo il contorno ed omogeneamente deformato. Questa condizione corrisponde alla condizione di semidefinitezza positiva del tensore acustico (SSE). Poiché la stabilità del corpo rigidamente vincolato si identifica, secondo Hill (1962), con la stabilità del materiale, la SSE è quindi una condizione di stabilità del materiale. Tale approccio è stato ripreso da Petryk (1992), estendendolo a materiali incrementalmente non-lineari. Alla luce della definizione di stabilità materiale introdotta in questo lavoro, si mostrerà come tale approccio coinvolga degli effetti geometrici.

Come abbiamo visto nel capitolo 3, la condizione di stabilità strutturale in presenza di deformazioni omogenee se valutata per deformazioni incrementali simmetriche omogenee coincide con quella del materiale: la simmetrizzazione conduce ad eliminare così gli effetti estranei alle proprietà del materiale.

La condizione di ellitticità forte per un materiale omogeneo in uno stato di deformazione omogenea, d'altro canto, che assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde infinitesime soddisfacenti la condizione di propagazione, può essere interpretata come una condizione di esclusione di modi di biforcazione del tipo "shear-band" o come una condizione di stabilità ristretta a deformazioni incrementali di rango uno. Quindi, come nel caso della condizione di stabilità strutturale, deve contenere degli effetti estranei al materiale stesso.

Il fenomeno della localizzazione della deformazione, sia per la connessione all'instabilità dinamica sia perché considerato spesso come un meccanismo precursore della frattura in un mezzo continuo, è stato interpretato come un sintomo di instabilità materiale. In quest'ambito la condizione SE per il tensore costitutivo nominale tangente è sufficiente per la stabilità materiale in relazione a possibili fenomeni di localizzazione. Per materiali incrementalmente non-lineari, analogamente, la condizione SE per il solido di confronto esclude la biforcazione e la perdita di stabilità per shear bands.

Condizioni sufficienti di instabilità materiale di tipo integrale e puntuale, ottenute essenzialmente partendo dai risultati di Hill (1962), sono state formulate da Petryk (1992) per materiali incrementalmente non-lineari che ammettono un potenziale. Essenzialmente le condizioni di instabilità puntuali riportate da Petryk possono essere interpretate in termini di velocità immaginarie o nulle per onde di accelerazione o di possibilità di formazione di biforcazioni del tipo "shear band".

Le considerazioni precedenti, quindi, portano a considerare la condizione SE quale condizione di stabilità materiale per materiali incrementalmente lineari, sia secondo un criterio dinamico sia dal punto di vista della localizzazione della deformazione. Nel corso del capitolo si vedrà come per materiali incrementalmente non-lineari la condizione di stabilità materiale basata sulle onde o sulla localizzazione sia riconducibile a condizioni analoghe alla SE.

Analizzando le connessioni tra il criterio statico e quello dinamico di stabilità materiale, in questo capitolo si evidenzierà come il criterio di stabilità materiale basato sulle onde o sulla localizzazione della deformazione includa l'effetto delle tensioni presenti nella configurazione di equilibrio e quindi effetti instabilizzanti o stabilizzanti di tipo geometrico. E' evidente, quindi, che il criterio statico proposto al capitolo 3 caratterizzi in maniera più appropriata la stabilità intrinseca del materiale.

6.2 CRITERI DINAMICI DI STABILITÀ DEL MATERIALE BASATI SULLA PROPAGAZIONE DI ONDE PIANE INFINITESIME

Il problema degli spostamenti infinitesimi dipendenti dal tempo, superimposti ad uno stato iniziale di deformazione finita è stato affrontato da numerosi studiosi. Per citarne alcuni: Hill (1957); Truesdell e Noll (1965); Ogden (1974); Eringen e Suhubi (1974). In questo paragrafo si deriveranno le equazioni governanti il problema dei piccoli moti a partire da

una configurazione a deformazione finita, e sarà investigata la propagazione delle onde piane in mezzi infiniti omogeneamente deformati. Con riferimento al problema fisico della propagazione delle onde, saranno poi esaminate delle condizioni di stabilità materiale di tipo dinamico.

Consideriamo un corpo costituito di materiale incrementalmente lineare, occupante una configurazione di equilibrio deformata B , che si considera essere la configurazione di riferimento. Il tensore delle tensioni di Cauchy \mathbf{T} in B soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{b}_0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_0 \mathbf{n} &= \mathbf{t}_0 \quad \text{su } \partial B_\sigma, \end{aligned} \quad (6.1)$$

nelle quali il pedice 0 indica che le quantità corrispondenti sono valutate nella configurazione B .

Supponiamo di sovrapporre, a partire da questa configurazione di riferimento, un campo di spostamenti infinitesimo dipendente dallo spazio e dal tempo

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t),$$

che deforma il corpo in un'altra configurazione B' dipendente dal tempo, vicina alla configurazione B data la piccolezza degli spostamenti in questione. Le equazioni del moto linearizzate in termini di spostamenti infinitesimi, tenuto conto delle (6.1) e dell'approssimazione lineare del legame costitutivo nominale

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{T}_0 + \mathbf{C}_0^R [\dot{\mathbf{F}}_0] + \delta \dot{q} \mathbf{I} - \delta q \dot{\mathbf{F}}_0^T, \quad (6.2)$$

sono

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0 \dot{\mathbf{T}}_R &= \rho \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t^2} - \mathbf{b}^* \right) \quad \text{in } B \\ {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R + \mathbf{T}_0 \mathbf{L}^T &= {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R^T + \mathbf{L} \mathbf{T}_0 \quad \text{in } B, \\ {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n} &= \dot{\mathbf{t}}_R \quad \text{su } \partial B_\sigma \end{aligned} \quad (6.3)$$

esprese in termini dell'incremento del tensore di Piola-Kirchhoff riferito alla configurazione B . Nella (6.2) δ è uno scalare pari a zero per materiali compressibili e ad uno per quelli incompressibili. Le forze di volume equivalenti $\rho \mathbf{b}^*$ che intervengono nella (6.3)₁, sono definite come

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}_0, \quad (6.4)$$

Nella (6.3) si sono indicate le quantità incrementali con un punto. Inoltre \mathbf{L} è il gradiente spaziale degli spostamenti incrementali $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$. Ovviamente, le (6.3) sono valide nell'ipotesi che $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ e \mathbf{L} siano sufficientemente piccoli.

Supponiamo ora che le forze di volume siano nulle. Se la configurazione di riferimento B è raggiunta attraverso una deformazione omogenea a partire da una configurazione

naturale omogenea ed il corpo è omogeneo, e quindi il tensore dei moduli tangenti nominali è costante, l'equazione (6.3)₁ per un materiale con legame incrementale lineare, si specializza in:

$${}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R \dot{u}_{k,lj} + \delta \dot{q}_{,i} = \rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t^2} \text{ su } B, \quad (6.5)$$

Se $\delta=1$ la (6.5) è associata al vincolo di incompressibilità $\dot{u}_{k,k} = 0$.

La (6.5) definisce un sistema lineare del secondo ordine alle derivate parziali con coefficienti costanti, che regola i piccoli spostamenti dipendenti dal tempo e dalla posizione $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, imposti a partire da una configurazione di equilibrio con deformazione finita ed omogenea B soggetta ad una distribuzione di tensioni uniforme \mathbf{T}_0 compatibile con lo stato di deformazione.

Il sistema (6.5) ammette, in queste condizioni, una soluzione del tipo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{m} r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct), \quad \dot{q} = q_0 r'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct), \quad (6.6)$$

che rappresenta un'onda piana con velocità di propagazione c , direzione di propagazione \mathbf{n} e polarizzazione \mathbf{m} . L'apice indica la derivazione rispetto all'argomento, \mathbf{n} e \mathbf{m} sono versori, ed r è una funzione arbitraria due volte differenziabile (in particolare, può essere una funzione periodica). In generale, se i moduli tangenti nominali non sono costanti, come nel caso in cui lo stato di deformazione di riferimento non è omogeneo, questo campo di spostamenti non è una possibile soluzione della (6.3).

Se sostituiamo la (6.6) nella (6.5) otteniamo:

$${}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j + \delta q_0 n_i = \rho c^2 m_i, \quad (6.7)$$

associata alla condizione $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ per un materiale incompressibile. Il coefficiente q_0 può essere determinato moltiplicando ambo i membri della (6.7) per n_i e sommando sull'indice i , ottenendo

$$q_0 = -{}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j n_i. \quad (6.8)$$

Definito il tensore acustico come

$$\mathbf{Q}_{0ik} = {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R n_l n_j, \quad (6.9)$$

l'equazione (6.7) può essere scritta nella seguente forma alternativa

$$\{\mathbf{Q}_0(\mathbf{n}) - \delta \mathbf{n} \otimes [\mathbf{Q}_0^T(\mathbf{n})\mathbf{n}]\} \mathbf{m} = \rho c^2 \mathbf{m}. \quad (6.10)$$

Il tensore acustico è simmetrico se ${}_0\mathbf{C}_0^R$ è simmetrico. Il tensore che premoltiplica la direzione di polarizzazione \mathbf{m} nella (6.10), detto tensore acustico modificato $\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})$, in generale non è simmetrico nemmeno quando lo è $\mathbf{Q}_0(\mathbf{n})$. La condizione (6.10) è detta di

propagazione e determina possibili polarizzazioni \mathbf{m} e velocità c per una data direzione di propagazione \mathbf{n} attraverso l'equazione caratteristica:

$$\det \{ \mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{1} \} = 0. \quad (6.11)$$

Le velocità sono quindi determinate dalle tre coppie di radici dell'equazione bi-cubica reale derivante dalla (6.11):

$$-(\rho c^2)^3 + I_1(\mathbf{Q}_0^*)(\rho c^2)^2 - I_2(\mathbf{Q}_0^*)\rho c^2 + I_3(\mathbf{Q}_0^*) = 0, \quad (6.12)$$

dove I_α con $\alpha=1,2,3$ sono gli invarianti principali del tensore $\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})$.

Per un materiale incompressibile \mathbf{n} risulta un autovettore con autovalore nullo del trasposto del tensore acustico, essendo

$$\mathbf{Q}_0^{*T}(\mathbf{n})\mathbf{n} = 0. \quad (6.13)$$

Di conseguenza, il tensore acustico modificato $\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})$ è singolare ($\det \mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n}) = I_3(\mathbf{Q}_0^*) = 0$), ossia ha rango due, ed i suoi due autovettori sono perpendicolari ad \mathbf{n} ma non necessariamente ortogonali, infatti dalla (6.13):

$$\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.14)$$

e l'equazione caratteristica (6.11) ammette, quindi, due soluzioni per ρc^2 poiché l'equazione secolare si riduce nella

$$-(\rho c^2)^2 + I_1(\mathbf{Q}_0^*)(\rho c^2) - I_2(\mathbf{Q}_0^*) = 0,$$

avendo eliminato la radice $\rho c^2 = 0$ corrispondente ad un'onda non propagante.

La polarizzazione di un'onda piana infinitesima è, quindi, l'autovettore del tensore acustico (o del suo modificato nel caso di un materiale incompressibile), e la velocità d'onda è tale che ρc^2 è il corrispondente autovalore. Il risultato precedente è noto come teorema di *Fresnel-Hadamard*.

E' utile notare che se la condizione di propagazione è soddisfatta per un'onda di polarizzazione \mathbf{m} che si propaga nella direzione \mathbf{n} con velocità c , essa è soddisfatta anche da un'onda con polarizzazione uguale o opposta nella direzione uguale od opposta e con la stessa od opposta velocità.

Se dato \mathbf{n} , è noto che \mathbf{m} (con $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ per un materiale incompressibile) è un autovettore reale di $\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})$, la velocità di propagazione si determina attraverso la

$$\rho c^2 = [\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{n})\mathbf{m}] \cdot \mathbf{m} = [\mathbf{Q}_0(\mathbf{n})\mathbf{m}] \cdot \mathbf{m}, \quad (6.15)$$

ottenuta dalla (6.10).

La quantità ρc^2 non deve necessariamente essere positiva anche se la polarizzazione è reale: ne segue che la velocità c non è sempre reale. In generale, anche se la (6.12),

essendo un'equazione cubica reale, ammette almeno una radice reale ρc^2 ed il corrispondente autovettore è reale, ρc^2 può essere negativo, quindi non si può affermare che esiste almeno un'onda che si propaga per ogni direzione.

Nel caso in cui il tensore acustico è simmetrico (come, ad esempio, per materiali iperelastici) per ogni direzione di propagazione \mathbf{n} esistono tre direzioni di polarizzazione \mathbf{m} mutuamente ortogonali e gli autovalori ρc^2 sono tutti reali.

Per un materiale iperelastico, se uno o più degli autovalori ρc^2 associati ad una qualsiasi direzione di propagazione \mathbf{n} è negativo, allora lo stato iniziale di deformazione omogenea si dice intrinsecamente instabile (Eringen e Suhubi, 1974). Analogamente, se almeno una velocità d'onda che soddisfa l'equazione secolare (6.11) non è reale, allora il materiale deve essere intrinsecamente instabile (Hayes e Rivlin, 1961). L'interpretazione di quest'instabilità dinamica avviene attraverso le soluzioni della (6.7). Supponiamo che ρc^2 è un autovalore negativo associato ad una polarizzazione reale \mathbf{m} : l'onda ha una velocità non reale $c = \pm i\alpha$. Se la soluzione viene posta nella forma esponenziale

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{m} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)}, \quad (6.16)$$

nella quale $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ è il numero d'onda, questa in corrispondenza di velocità d'onda immaginarie fornisce una soluzione reale del tipo

$$\dot{\mathbf{u}} = c_1 \mathbf{m} e^{\alpha kt} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + c_2 \mathbf{m} e^{-\alpha kt} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad (6.17)$$

con c_1 e c_2 opportune costanti complesse.

E' evidente dalla (6.17) che questa soluzione se compatibile con le condizioni al contorno, cresce illimitatamente con il tempo. Questo avviene sicuramente per un corpo di estensione infinita. Soluzioni analoghe alla (6.17) sono possibili anche in corrispondenza di coppie di radici complesse e coniugate della (6.12) associate a polarizzazioni complesse e coniugate, che in opportuna combinazione lineare portano a soluzioni crescenti esponenzialmente con il tempo (Truesdell & Noll, 1965). In un corpo infinito, quindi, esistono sempre certe onde piane infinitesime che si amplificano indefinitamente, a meno che tutte le radici della (6.12) sono non-negative.

Per un generico tensore acustico non simmetrico, per quanto detto sopra, non esistono condizioni necessarie e sufficienti per assicurare l'esistenza di onde propaganti.

Nelle condizioni di simmetria del tensore acustico, la condizione di ellitticità forte:

$$[\mathbf{Q}_0(\mathbf{n})\mathbf{m}] \cdot \mathbf{m} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (6.18)$$

è necessaria e sufficiente affinché il quadrato della velocità delle onde corrispondente ad ogni polarizzazione \mathbf{m} reale sia positivo (e quindi la velocità di propagazione reale e non

nulla), per ogni data direzione di propagazione \mathbf{n} . La (6.18) corrisponde alla condizione di definitezza positiva per il tensore acustico. La condizione di Legendre-Hadamard

$$[\mathbf{Q}_o(\mathbf{n})\mathbf{m}] \cdot \mathbf{m} \geq 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (6.19)$$

che interviene nel teorema di stabilità infinitesima di Hadamard, assicura, invece, che la velocità delle onde corrispondente ad ogni polarizzazione \mathbf{m} reale sia reale, per ogni data direzione di propagazione \mathbf{n} . Si noti come la condizione (6.19) non esclude onde non propaganti, ossia con velocità nulla. La (6.19) corrisponde alla condizione di semi-definitezza positiva per il tensore acustico.

Se il tensore non è simmetrico, la (6.12) ha almeno una radice reale ρc^2 che non assicura l'esistenza di almeno un'onda con velocità di propagazione reale. In questo caso, la condizione di ellitticità forte (6.18) impone le restrizioni di definitezza positiva sulla parte simmetrica del tensore acustico (di conseguenza, impone restrizioni solo sulla parte

simmetrica del tensore dei pseudomoduli $\text{Sym}(\mathbf{C}_o^R)_{ijkl} = \frac{1}{4}(\mathbf{C}_{ijkl}^R + \mathbf{C}_{klij}^R + \mathbf{C}_{kjil}^R + \mathbf{C}_{ilkj}^R)$):

$$\text{Sym}(\mathbf{Q}_o)_{ik} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{ik} + \mathbf{Q}_{ki});$$

per cui il soddisfacimento della condizione di ellitticità forte assicura che, data una qualsiasi direzione di propagazione \mathbf{n} , le eventuali radici reali ρc^2 (che sono in numero superiore o uguale ad uno) della (6.12) alle quali corrispondono polarizzazioni \mathbf{m} reali, sono positive. In altre parole, la condizione di ellitticità forte assicura che la condizione di propagazione (6.10) è soddisfatta da almeno un'onda che si propaga con velocità reale. Analogamente, la condizione di Legendre-Hadamard (6.19) assicura che le velocità di propagazione siano reali per eventuali onde.

In base alle considerazioni sopra riportate, è possibile affermare che un materiale è stabile (o più propriamente superstabile) in senso dinamico se per ogni direzione di propagazione \mathbf{n} le velocità di possibili onde associate a polarizzazioni reali, sono reali e non nulle. Se il tensore acustico è simmetrico, la condizione di ellitticità forte è condizione necessaria e sufficiente affinché il materiale sia stabile. Si noti che in questa definizione sono escluse onde non propaganti a velocità nulla. Queste possono essere incluse considerando che un materiale è stabile in senso dinamico se per ogni direzione di propagazione \mathbf{n} le velocità di possibili onde associate a polarizzazioni reali, sono reali. In questo caso la condizione di Legendre-Hadamard è necessaria e sufficiente affinché il materiale sia stabile se il tensore acustico è simmetrico. Se il tensore acustico non è simmetrico allora la condizione di ellitticità forte o quella di Legendre-Hadamard, se si includono anche onde non propaganti, sono solo sufficienti per la stabilità del materiale. In

quanto segue si parlerà di stabilità del materiale in senso dinamico con riferimento ad onde con velocità di propagazione non nulla.

6.3 CRITERI DINAMICI DI STABILITÀ DEL MATERIALE BASATI SULLA PROPAGAZIONE DI ONDE DI ACCELERAZIONE

Vedremo ora come le leggi di propagazione delle onde piane infinitesime viste al paragrafo precedente, coincidano formalmente con quelle delle onde di accelerazione. Le onde di accelerazione sono particolari forme di moto pensate come superfici geometriche che si muovono nel corpo attraverso le quali i gradienti di secondo ordine e l'accelerazione delle particelle materiali, possono subire delle discontinuità. L'argomento è stato trattato da diversi studiosi, tra i quali Truesdell (1961), Hill (1962), e Ogden (1970). Come al precedente paragrafo, consideriamo inizialmente materiali con relazioni costitutive incrementali lineari. Le leggi di propagazione delle onde d'accelerazione possono essere ricavate in diversi modi: qui seguiremo la derivazione basata sulle equazioni delle piccole deformazioni sovrapposte ad uno stato iniziale di deformazione (Hill, 1962).

Consideriamo una superficie $\sigma(t)$ che si propaga in un corpo con moto $\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)$. Tale superficie è l'onda di accelerazione del moto poiché si assume che il gradiente di deformazione e la velocità siano continui, mentre l'accelerazione ed i gradienti del secondo ordine (nello spazio e nel tempo) della deformazione siano discontinui attraverso $\sigma(t)$. Indichiamo con $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$ lo spostamento addizionale infinitesimo che porta il fronte dell'onda di accelerazione, in un intervallo di tempo infinitesimo, (con \mathbf{x} posizione del fronte nella configurazione iniziale) alla posizione finale distante una quantità infinitesima da quella iniziale. Nel formare le derivate si considererà la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale. Le condizioni di compatibilità (Hadamard, 1903) per il campo di spostamenti infinitesimi $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$ attraverso la superficie di singolarità rappresentante la posizione finale del fronte d'onda, sono:

$$\llbracket \dot{u}_{i,jk} \rrbracket = a_i n_j n_k, \quad \llbracket \frac{\partial}{\partial t} \dot{u}_{i,j} \rrbracket = -c a_i n_j, \quad \llbracket \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{u}_i \rrbracket = c^2 a_i, \quad \llbracket \dot{q}_{,i} \rrbracket = q_0 n_i, \quad (6.20)$$

nelle quali la parentesi quadra doppia indica il salto nelle corrispondenti quantità; il vettore

a

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{c} \left[\left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \right] \right], \quad (6.21)$$

chiamato ampiezza della singolarità, caratterizza l'intensità della discontinuità ed ha la direzione del salto di accelerazione; \mathbf{n} è la normale unitaria a $\sigma(t)$; e c è la velocità locale di propagazione, e misura la velocità normale della superficie $\sigma(t)$ rispetto alla particella che istantaneamente contiene tale superficie; q_0 è definito come

$$q_0 = \left[\left[\dot{q}_{,i} \right] \right] n_i = \left[\left[\frac{\partial \dot{q}}{\partial n} \right] \right]. \quad (6.22)$$

Osservando che le equazioni di equilibrio negli spostamenti infinitesimi (6.3)₁ valgono su ogni lato della superficie dell'onda, ed assumendo che le forze di volume e che i moduli istantanei e le loro derivate siano continue attraverso il fronte dell'onda e considerando che $\left[\left[q_{,i} \right] \right] = 0$, si ha che

$${}_0 C_{ijkl}^R \left[\left[\dot{u}_{k,lj} \right] \right] + \delta \left[\left[\dot{q}_{,i} \right] \right] = \rho \left[\left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t^2} \right] \right] \quad \text{su } \sigma(t), \quad (6.23)$$

per cui utilizzando la stessa procedura del paragrafo precedente e ponendo $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, si ottiene la relazione (6.10). Le direzioni principali del tensore acustico si dicono assi acustici delle onde che viaggiano nella direzione \mathbf{n} nel materiale deformato.

Come è stato appena dimostrato, le leggi di propagazione delle onde piane infinitesime in un corpo deformato omogeneamente coincidono con quelle che governano la propagazione di onde di accelerazione. Tutti i risultati e le formule ricavate nel paragrafo precedente, perciò, possono essere ripetute nel caso delle onde di accelerazione. E' da notare che l'analogia sussiste solo nell'ipotesi che lo stato di deformazione attuale sia omogeneo, poiché in caso contrario le onde piane non possono esistere. Le leggi di propagazione che governano le onde d'accelerazione valgono, al contrario, per ogni tipo di onda e di stato di deformazione. Inoltre, un'altra differenza consiste nel fatto che le onde di accelerazione non sono influenzate da forze di volume continue, mentre le onde di propagazione infinitesime piane non sono influenzate solo da forze di volume costanti nel tempo.

Come abbiamo visto in precedenza, l'interpretazione delle leggi di propagazione delle onde di accelerazione nel contesto delle onde piane infinitesime, permette di stabilire un criterio di stabilità basato sulla crescita illimitata di piccoli disturbi iniziali del tipo ad onda piana infinitesima. Come riportato in (Truesdell e Noll, 1965), ciò non implica che necessariamente il legame costitutivo del materiale debba soddisfare delle restrizioni tali da assicurare velocità reali per le possibili onde infinitesime in un qualsiasi stato di deformazione.

Condizioni sufficienti di instabilità materiale di tipo integrale e puntuale per una particolare classe di materiali incrementalmente non-lineari, ottenute essenzialmente partendo dai risultati di Hill (1962), sono state formulate da Petryk (1992) per materiali incrementalmente non-lineari che ammettono un potenziale.

Essenzialmente le condizioni di instabilità puntuali riportate da Petryk (1992) possono essere interpretate in termini di velocità immaginarie o nulle per onde di accelerazione o di possibilità di formazione di deformazioni del tipo “shear band”. Se il gradiente delle velocità si annulla su di un lato dell’onda nelle equazioni (6.20)- (6.23) si sostituiscono i valori sull’altro lato dell’onda. Nel caso di solidi incrementalmente lineari o non-lineari nell’ipotesi che il gradiente della velocità si annulla su un lato della superficie di discontinuità, se il potenziale $U(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ è definito positivo tutte le possibili onde di accelerazione hanno velocità reali e non nulle. Quest’ultima definizione può essere interpretata come condizione di stabilità materiale in senso dinamico nel contesto delle propagazione di onde di accelerazione.

La condizione di propagazione di onde di accelerazione con velocità reali per ogni direzione di propagazione, nel caso di simmetria del tensore degli pseudomoduli (quindi, la SE), assicura che siano escluse biforcazioni del tipo “shear band”. Le condizioni di stabilità materiale in senso dinamico, quindi, hanno anche una diretta connessione con la formazione di shear bands. In quest’ambito la condizione SE implica la stabilità materiale in relazione alla localizzazione della deformazione. Per materiali incrementalmente non lineari la seguente condizione analoga alla SE:

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \quad (6.24)$$

assicura invece velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su un lato della superficie di discontinuità. La stessa, esclude la possibilità di biforcazioni shear bands, per problemi con condizioni di sole forze morte nulle applicate al contorno e deformazioni omogenee. Per materiali incrementalmente non-lineari che ammettono un solido di confronto (tra i quali i materiali elasto-plastici di Hill e di Raniecki e Bruhns) l’ellitticità forte per il tensore nominale tangente del solido di confronto

$${}^* \mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \quad (6.25)$$

esclude la biforcazione in shear bands ed assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione. Quest’ultima affermazione segue dalle note condizioni di compatibilità per onde di accelerazione (Hill, 1962):

$$\llbracket \mathbf{L} \rrbracket = \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}, \quad \left\llbracket \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_r \right\rrbracket \mathbf{n} = \rho c^2 \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = -c \mathbf{a}, \quad (6.26)$$

con L gradiente delle velocità ad assumendo la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale, che forniscono la condizione sufficiente per velocità reali e non nulle di onde di accelerazione

$$\left[\left[\frac{\partial}{\partial t} T_R \right] \cdot [L] \right] = [C_o^R(L)] \cdot [L] = \rho c^2 |\eta^2| > 0. \quad (6.27)$$

6.4 ANALISI DI ALCUNE DEFINIZIONI DI STABILITA' MATERIALE PROPOSTE IN LETTERATURA

La condizione di stabilità materiale basata sulla propagazione di onde o sulla localizzazione della deformazione, per materiali incrementalmente lineari, conduce alla condizione SE. La condizione di ellitticità forte, infatti, assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime e per onde di accelerazione e rappresenta una condizione di esclusione per modi di biforcazione del tipo "shear-band". E' chiaro, quindi, come la condizione di stabilità materiale dinamica costituisca una condizione di stabilità strutturale ristretta a deformazioni incrementali di rango uno e, pertanto, contiene degli effetti estranei al materiale stesso. Tale condizione non sembra adatta a rappresentare la risposta intrinseca del materiale. Alla stessa conclusione si giunge esaminando il criterio di stabilità del materiale proposto da Hill (1962), poiché questo conduce sempre alla condizione SE. Esaminiamo ora in dettaglio la condizione di stabilità materiale proposta da Hill (1962).

Consideriamo, per semplicità, un materiale incrementalmente lineare ed una configurazione di un corpo omogeneo con il contorno rigidamente vincolato, caratterizzata da uno stato di tensione e di deformazione uniforme. Seguendo quanto riportato da Hill (1962), la condizione di stabilità di tale configurazione si identifica con la condizione di stabilità intrinseca del materiale poiché sul corpo rigidamente vincolato non intervengono effetti geometrici estranei al materiale, essendo nullo il lavoro delle forze esterne. Dal momento che valgono i teoremi di Hadamard e di Van Hove per la particolare configurazione del corpo considerata, la disuguaglianza di Hadamard

$$C_o^R[m \otimes n] \cdot m \otimes n \geq 0 \quad \forall m, n,$$

è necessaria e sufficiente per la stabilità del materiale. Escludendo configurazioni di stabilità neutra, la condizione SE diventa quindi condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del materiale. La definizione di Hill (1962) riporta, quindi, al criterio di stabilità

materiale basato sulla propagazione delle onde e sulla perdita di unicità per deformazioni del tipo shear-band. Anche in questo caso è possibile dimostrare come nella condizione di stabilità entrino in gioco gli effetti geometrici legati alla presenza dei carichi morti, pur essendo nullo il lavoro di questi ultimi. I carichi responsabili dell'effetto stabilizzante-instabilizzante geometrico non sono di tipo morto e, quindi, non coincidono con quelli associati allo stato di tensione \mathbf{T}_0 . Dai risultati del capitolo 3, infatti, si evince che l'aliquota \mathbf{T}_R^* dei carichi morti \mathbf{T}_0 definita nella (3.50), che lavora per le deformazioni pure e rappresenta lo stato di tensione costante che segue il materiale nella sua rotazione rigida, non contiene effetti geometrici stabilizzanti o instabilizzanti e deve essere inclusa nel criterio di stabilità materiale. Di conseguenza, gli effetti geometrici sono rappresentati dalla rimanente aliquota dei carichi morti \mathbf{T}_0 , ovvero da $\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_R^*$, che compie lavoro esclusivamente per rotazioni rigide. Alla luce di queste considerazioni, il criterio di stabilità per il corpo rigidamente vincolato si può esprimere con la seguente relazione

$$\int_0^t \left[\int_B [(\mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{T}_R^*(\mathbf{x}, \tau)) - \mathbf{T}_R^G(\mathbf{x}, \tau)] \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \tau) dv \right] d\tau,$$

essendo $\mathbf{T}_R^G = \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_R^*$, e la sua approssimazione al secondo ordine diventa

$$\frac{t^2}{2} \left(\int_B \dot{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{D} dv - \int_B \dot{\mathbf{T}}_R^G \cdot \mathbf{L} dv \right) + o(t^2) = \frac{t^2}{2} \left(\int_B \mathbf{C}_0^R [\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} dv \right), \quad (6.28)$$

con

$$\dot{\mathbf{T}}_R^* = -\dot{\mathbf{T}}_R^G = -\frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0\mathbf{D}) + \mathbf{L}\mathbf{T}_0, \quad (6.29)$$

dalla (3.56). La (6.28) evidenzia il termine associato ai soli effetti geometrici:

$$\int_B \dot{\mathbf{T}}_R^G \cdot \mathbf{L} dv, \quad (6.30)$$

mentre dalla (6.29) si nota come, al primo ordine, l'incremento delle tensioni responsabili dell'effetto geometrico dipenda dal gradiente della deformazione incrementale.

Pur se per il corpo vincolato rigidamente sul contorno, il lavoro dei carichi morti

$$\int_B \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \tau) dv,$$

è nullo, ciò non implica che l'effetto geometrico sia nullo poiché il secondo termine a sinistra della (6.28) non è nullo in generale. I modi di deformazione compatibili per il corpo rigidamente vincolato sono necessariamente non uniformi, per cui in generale allo stato tensionale responsabile dell'effetto geometrico \mathbf{T}_R^G , sono associate delle forze di volume che compiono lavoro non nullo, mentre le corrispondenti forze superficiali compiono lavoro nullo sul contorno esterno del corpo.

Nel dimostrare che il non soddisfacimento della condizione di Hadamard conduca all'instabilità del materiale (che corrisponde al teorema di Van Hove per materiali elastici), Hill (1962), utilizza un modo instabilizzante $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$ per il quale gli effetti geometrici sono associati al solo lavoro delle forze superficiali derivanti da \mathbf{T}_R^G sul contorno del disco. Il contributo del termine geometrico (6.30) (che rappresenta il lavoro delle forze di volume e di superficie associate \mathbf{T}_R^G) sulla parte del corpo complementare al disco è trascurabile rispetto al contributo relativo al disco stesso. Infatti, il modo di deformazione considerato, all'interno di un disco di spessore infinitesimo εh , con ε piccolo ed h paragonabile alle dimensioni lineari del corpo, ha gradiente uniforme $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ (con \mathbf{m} ed \mathbf{n} vettori unitari), mentre all'esterno è non uniforme e si smorza per soddisfare la condizione di spostamento nullo al contorno. Inoltre, il modo di deformazione, continuo ma differenziabile a tratti, può essere costruito in modo che $|\mathbf{L}|$ sia di ordine ε all'esterno del disco, mentre all'interno sia indipendente da ε (un tale modo è ricavato esplicitamente da Petryk, 1992). Di conseguenza, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'effetto geometrico coincide con l'integrale sul volume del disco D di $\dot{\mathbf{T}}_R^G \cdot \mathbf{L}$ e corrisponde al lavoro delle forze superficiali $\dot{\mathbf{T}}_R^G \mathbf{n}$ sul contorno del disco, data l'uniformità del modo di deformazione incrementale al suo interno:

$$\int_D \dot{\mathbf{T}}_R^G \cdot \mathbf{L} dv = \int_{\partial D} \dot{\mathbf{T}}_R^G \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0 ds .$$

In definitiva, la condizione (6.28) non rappresenta la stabilità del materiale, bensì è una condizione di stabilità strutturale poiché coinvolge effetti geometrici stabilizzanti-instabilizzanti.

6.5 CONNESSIONI TRA CONDIZIONI DI STABILITA' DEL MATERIALE IN SENSO STATICO E DINAMICO

Il seguente paragrafo si propone di analizzare la connessione tra il criterio statico di stabilità materiale proposto al cap. 3, basato sulla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli istantanei relativi alla coppia lavoro-coniugata $(\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)})$, ed il criterio dinamico di stabilità. Come criterio dinamico di stabilità materiale si prenderà in considerazione la condizione di ellitticità forte, che per materiali con un generico legame incrementale lineare è condizione sufficiente affinché tutte le possibili onde (piane

infinitesime o di accelerazione) abbiano velocità di propagazione reali. Se il tensore acustico gode delle proprietà di simmetria, allora la condizione SE è anche necessaria. Per i materiali incrementalmente non-lineari introdotti al capitolo 2, la condizione (6.24) assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su un lato del piano di discontinuità. Inoltre, questa esclude la possibilità di biforcazioni shear bands, per problemi con condizioni di sole forze morte nulle applicate al contorno e deformazioni omogenee. La condizione (6.25) di ellitticità forte per il solido di confronto, invece, per materiali incrementalmente non-lineari che ammettono un solido di confronto (tra i quali i materiali elasto-plastici di Hill e di Raniecki e Bruhns) esclude la biforcazione in shear bands ed assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione. Per convenienza si riordinano le condizioni di stabilità materiale nel seguente specchio

Materiali incrementalmente lineari

$$\mathbf{C}_0^R [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Onde piane infinitesime e di accelerazione} \\ \text{con velocità reali e non nulle} \\ \text{Esclusione della localizzazione} \\ \text{in shear bands} \end{cases}$$

Materiali incrementalmente non - lineari

$$\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Onde di accelerazione con velocità reali e non nulle} \\ \text{con gradiente delle velocità nullo su di un lato} \\ \text{Esclusione della localizzazione in shear bands} \\ \text{per problemi omogenei con sole forze imposte} \end{cases}$$

$$^* \mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \\ \text{Onde di accelerazione con velocità reali e non nulle} \\ \text{Esclusione della localizzazione in shear bands} \\ \text{nel solido reale} \end{cases}$$

(6.31).

Negli sviluppi che seguono le condizioni alla sinistra delle (6.31) saranno considerate come condizione di stabilità materiale dinamica (SD). Verranno, quindi, esaminate alcune condizioni necessarie e sufficienti di stabilità materiale, evidenziando la funzione che svolge lo stato tensionale dell'elemento materiale nella configurazione di equilibrio del quale si indaga il carattere di stabilità, sui criteri di stabilità materiale. Poiché il criterio dinamico di stabilità materiale dipende dall'influenza stabilizzante-instabilizzante dello stato tensionale nella configurazione deformata, si dimostrerà come la stabilità materiale in senso statico ed opportune restrizioni sullo stato tensionale conducano al criterio di stabilità materiale in senso dinamico. Viene proposto, inizialmente, un esempio monodimensionale e di seguito si analizza il caso generale di un corpo continuo

tridimensionale. Alcuni dei risultati di seguito presentati sono contenuti nel lavoro (Greco, Grimaldi e Luciano, 2001).

6.5.1 UN ESEMPIO MONODIMENSIONALE. Facendo riferimento ad un caso monodimensionale, si illustreranno le connessioni tra le due definizioni di stabilità infinitesima del materiale: quella basata su un criterio statico e quella su un criterio dinamico.

Consideriamo un elemento di materiale omogeneo di lunghezza L disteso lungo la direzione 1 , con una sezione trasversale di area A e momento d'inerzia baricentrico I (Fig. 6.1). Il materiale è caratterizzato da un legame costitutivo incrementale lineare con simmetria ortotropa rispetto al sistema di riferimento considerato. In particolare, un materiale omogeneo ed elastico isotropo od un materiale omogeneo ed ortotropo rispetto al sistema di riferimento preso e deformato omogeneamente coassialmente a tale sistema, godono di tale simmetria ortotropa. L'elemento è inizialmente rettilineo e soggetto ad una tensione $T_{0\ 11}$ di tipo "morto" monoassiale coassiale con l'asse x_1 . Se l'asse x_1 è quello longitudinale baricentrico e x_2 quello trasversale, si considera il seguente campo di spostamenti infinitesimo misurato a partire dalla configurazione deformata:

$$\dot{\mathbf{u}}(x_1, x_2) = \{u(x_1) + \varphi(x_1)x_2, v(x_1)\}^T \tag{6.32}$$

avendo indicato con $u(x_1)$ lo spostamento longitudinale medio, con $v(x_1)$ lo spostamento trasversale e $\varphi(x_1)$ la rotazione della sezione trasversale.

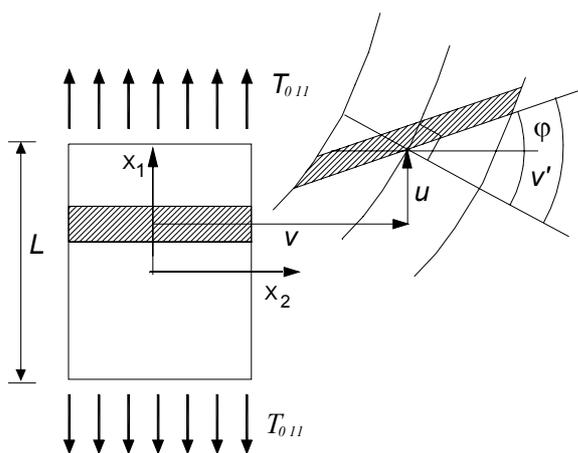


Fig. 6.1. Elemento monodimensionale di materiale incrementalmente lineare.

La configurazione di equilibrio corrispondente alla tensione T_{011} , è stabile se, al secondo ordine, la differenza tra il lavoro di deformazione interno W e quello dei carichi morti L è positivo per ogni campo di spostamenti ammissibile $\dot{u}(\mathbf{x})$:

$$W - L = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left[(E^{(1)} D_{11}^2 + 4G^{(1)} D_{12}^2) + T_{011} (L_{21}^2 - D_{12}^2) \right] dA dx_1 \quad (6.33)$$

Nella (6.33) il lavoro di deformazione interno è espresso in funzione della misura di deformazione lavoro-coniugata di Biot $\mathbf{E}^{(1)}$ valutata al primo ordine ed indicata con \mathbf{D} , mentre il lavoro delle tensioni iniziali è coerentemente espresso in funzione dell'aliquota del secondo ordine della deformazione di Biot che è funzione anche del gradiente degli spostamenti \mathbf{L} , oltre che della sua parte simmetrica \mathbf{D} . $E^{(1)}$ e $G^{(1)}$ sono, rispettivamente, il modulo di Young e quello tangenziale corrispondenti alla scelta di misura di deformazione finita $\mathbf{E}^{(1)}$. Considerando che $D_{11} = u' + \varphi'y$, $D_{12} = 1/2(v' + \varphi)$ e $L_{21} = v'$, la (6.33) si trasforma in

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left[E^{(1)} A u'^2 + E^{(1)} I \varphi'^2 + G^{(1)} A (\varphi + v')^2 \right] + T_{011} A \left[v'^2 - \frac{1}{4} (\varphi + v')^2 \right] \right\} dx_1. \quad (6.34)$$

Nella (6.34) il primo termine caratterizza la risposta del materiale alla deformazione aggiuntiva imposta, mentre il secondo termine definisce l'effetto stabilizzante-instabilizzante delle tensioni presenti nella configurazione di equilibrio in esame e compatibili con i carichi di tipo morto applicati.

La positività della (6.34) corrisponde alla condizione di stabilità del solido soggetto ai carichi morti applicati e limitatamente agli spostamenti monodimensionali considerati. La (6.34) equivale a richiedere che le seguenti condizioni siano contemporaneamente soddisfatte:

$$E^{(1)} > 0, \quad 0 < T_{011} < 4G^{(1)}. \quad (6.35)$$

Viceversa, la positività del primo termine in parentesi quadra della (6.34), per ogni campo di spostamento $\dot{u}(\mathbf{x})$ corrisponde al criterio statico di stabilità materiale. Chiaramente, condizione necessaria e sufficiente affinché il materiale sia stabile è che le seguenti disequaglianze siano contemporaneamente soddisfatte

$$E^{(1)} > 0, \quad G^{(1)} > 0. \quad (6.36)$$

La condizione di positività della tensione T_{011} nella (6.34) elimina la possibilità di perdita di stabilità strutturale per rotazioni rigide. Deformazioni rigide, anche se formalmente possibili, non sono di interesse come possibili modi di instabilità. Tali modi di instabilità possono essere esclusi se il campo di spostamenti $\dot{u}(\mathbf{x})$ non contiene la rotazione φ , e le (6.35) si riducono a

$$E^{(1)} > 0, \quad 3/4 T_{011} + 4G^{(1)} > 0. \quad (6.37)$$

La (6.37)₂, assumendo valide le (6.36), definisce la massima compressione in condizioni di stabilità.

Dalle (6.35)-(6.37) si nota la distinzione tra la condizione di stabilità del materiale e quella di stabilità della configurazione di equilibrio in esame.

D'altra parte il materiale è stabile in senso dinamico se la velocità di onde di ampiezza infinitesima con polarizzazione appartenente al piano x_1 - x_2 che si propagano nella direzione x_1 , è reale. In questo caso l'elemento materiale si considera infinitamente esteso nella direzione x_1 . Le onde di ampiezza infinitesima hanno velocità del tipo

$$\dot{u} = mf(x_1 - ct) \quad (6.38)$$

con m vettore di componenti $\{m_1, m_2\}^T$ e Q_0 , tensore acustico relativo alla direzione di propagazione allineata con x_1 , ha componenti

$$Q_0 = \begin{bmatrix} {}_0C_{1111}^R & 0 \\ 0 & {}_0C_{2121}^R \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché le onde si propaghino con velocità positiva è che il tensore acustico sia definito positivo, ossia che le seguenti disequaglianze siano contemporaneamente soddisfatte:

$${}_0C_{1111}^R = E^{(1)} > 0, \quad {}_0C_{2121}^R = G^{(1)} + (3/4)T_{011} > 0 \quad (6.40)$$

In altre parole, le due direzioni di polarizzazione per le onde infinitesime associate con le direzioni degli assi coordinati, corrispondono a velocità di propagazione positive se e solo se il tensore acustico è definito positivo. E' evidente che la condizione di stabilità materiale in senso dinamico produce restrizioni che coinvolgono sia lo stato di tensione della configurazione di equilibrio, sia i moduli $E^{(1)}$ e $G^{(1)}$: lo stato tensionale, infatti, ha un'influenza diretta sul carattere di propagazione delle onde. Si nota, inoltre, come le (6.40) corrispondano alle (6.37), evidenziando come per il modello in esame, la stabilità materiale in senso dinamico rappresenti una condizione di stabilità strutturale ristretta a particolari campi di deformazione.

Le due condizioni di stabilità, sotto alcune ipotesi sullo stato tensionale, sono strettamente collegate. Infatti, se la tensione T_{011} è positiva allora la condizione di stabilità del materiale implica che le onde si propaghino con velocità positiva, ossia le (6.36) implicano le (6.40). Al contrario, se la tensione T_{011} è negativa allora la condizione di stabilità dinamica del materiale implica che il materiale sia staticamente stabile, ossia le (6.40) implicano le (6.36). Inoltre, configurazioni per le quali valgono le (6.35) sono configurazioni nelle quali il materiale è stabile in senso statico e dinamico, ossia le (6.35) implicano le (6.40) e le (6.36).

La definizione di stabilità materiale in senso statico è la più adatta a rappresentare il comportamento del materiale stesso: la stabilità in senso dinamico non caratterizza esclusivamente la risposta intrinseca del materiale poiché la sua definizione dipende strettamente dallo stato di tensione nella configurazione di equilibrio. Lo stato di tensione della configurazione di equilibrio, infatti, è responsabile di effetti stabilizzanti o instabilizzanti legati a non-linearità di tipo geometrico che sono, perciò, estranei al materiale.

Analoghe connessioni tra la stabilità materiale in senso statico e dinamico basate su opportune condizioni sullo stato tensionale nella configurazione di equilibrio, si stabiliranno anche nel caso di un continuo tridimensionale.

6.5.2 ESTENSIONE AL CASO TRIDIMENSIONALE. Generalmente, la condizione statica di stabilità del materiale è sufficiente affinché eventuali onde di tipo longitudinale ($m=n$) si propaghino con velocità reale: poiché onde longitudinali esistono eccezionalmente solo per determinate direzioni n , la condizione risulta poco efficace in termini di propagazione delle onde. Tra l'altro, in materiali incomprimibili, nei quali possono esistere solo onde trasversali ($m \neq 0$), la stabilità statica del materiale non imporrebbe nessuna restrizione sul legame costitutivo. Si farà vedere come opportune restrizioni sullo stato tensionale in B , al contrario, rendano la condizione di stabilità materiale in senso statico sufficiente affinché il materiale sia dinamicamente stabile. Inversamente, vedremo che la condizione di stabilità dinamica non è in genere sufficiente a garantire quella statica. Questo evidenzia come la definizione di stabilità dinamica sia governata da termini di non-linearità geometrica, derivanti dagli effetti stabilizzanti o instabilizzanti dei carichi morti presenti nella configurazione B della quale si indaga il carattere di stabilità.

Utilizzando la relazione che lega la derivata del primo tensore di Piola-Kirchhoff e la derivata del tensore $\mathbf{T}^{(1)}$, e le funzioni tensoriali lineari che intervengono nelle relazioni costitutive di tipo incrementale, è possibile dimostrare che vale la seguente relazione (vedi la 3.61):

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}), \quad (6.41)$$

nella quale i tensori del quarto ordine che definiscono i moduli tangenti dipendono dallo stato di deformazione e tensione presente nella configurazione B . Il termine della (6.41) associato alle tensioni \mathbf{T}_0 rappresenta l'effetto geometrico connesso alla presenza dei carichi morti. Si noti che per materiali incomprimibili, questi tensori devono essere opportunamente definiti per tenere conto del tensore delle tensioni arbitrario derivante dal

vincolo di incompressibilità. Valutando la (6.41) per tensori \mathbf{L} di rango uno del tipo $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$, con \mathbf{m} ed \mathbf{n} vettori unitari, si ottiene

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{C}_0^{(I)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} + \mathbf{T}_0 \cdot \left[(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) - (\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}})(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \right] \quad (6.42)$$

nella quale il cappello indica la parte simmetrica del tensore al quale si riferisce. Si nota che se il tensore $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ è simmetrico, circostanza che si verifica se e solo se $\mathbf{m}=\mathbf{n}$, l'effetto dei carichi iniziali è nullo per ogni stato di tensione \mathbf{T}_0 . Le espressioni (6.41)-(6.42) valgono anche per materiali incrementalmente non-lineari: ovviamente, in questo caso le funzioni tensoriali che intervengono sono non-lineari.

Condizione sufficiente affinché una configurazione del materiale stabile in senso statico (SM) sia stabile anche in senso dinamico (SD) è che il minimo della funzione scalare associata alle tensioni \mathbf{T}_0 risulti maggiore del minimo cambiato di segno della funzione scalare che caratterizza la stabilità del materiale valutata per tensori $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$:

$$\min \left\{ \mathbf{T}_0 \cdot \left[(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) - (\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}})(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \right] \right\} > -\min \left\{ \mathbf{C}_0^{(I)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \Rightarrow SD \quad (6.43)$$

Per rendere più esplicita la condizione sufficiente, si ricava una stima della restrizione sullo stato tensionale imposta dalla condizione sufficiente di stabilità dinamica (6.43) basata sul limite inferiore della funzione scalare caratterizzante l'effetto dei carichi iniziali. Sfruttando l'invarianza del prodotto scalare, ed esprimendo tale funzione in termini di componenti sugli assi principali di tensione, si ottiene

$$t_i \delta_{ij} \left[m_k m_k n_i n_j - \frac{1}{4} (m_k n_i + n_k m_i) (m_k n_j + n_j m_k) \right] = t_i \left[n_i^2 - \frac{1}{4} (n_i^2 + m_i^2 + 2m_k n_k m_i n_i) \right] \quad (6.44)$$

nella quale si è supposta la sommatoria sugli indici ripetuti che possono assumere i valori 1,2,3 e con t_i si è indicata l' i -esima tensione principale. La funzione scalare (6.44) risulta essere minorata dal valore

$$t_i \left[n_i^2 - \frac{1}{4} (n_i^2 + m_i^2 + 2m_k n_k m_i n_i) \right] \geq \min \{t_i\} \sum_i n_i^2 - \max \{t_i\} \sum_i \alpha_i^2 \quad (6.45)$$

con $\alpha_i^2 = (n_i^2 + m_i^2 + 2m_k n_k m_i n_i)/4$ e la sommatoria non estesa all'indice i . Considerando che

$$\frac{1}{2} \leq \sum_i \alpha_i^2 \leq 1; \quad -\max \{t_i\} \sum_i \alpha_i^2 \geq \begin{cases} -\max \{t_i\} \max \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \right\} & \text{se } \max \{t_i\} \geq 0 \\ -\max \{t_i\} \min \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \right\} & \text{se } \max \{t_i\} \leq 0 \end{cases},$$

risulta

$$T_0 \cdot \left[(n \otimes m)(m \otimes n) - (\widehat{m \otimes n})(\widehat{m \otimes n}) \right] \geq \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} \quad (6.46)$$

con

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{t_i\} \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \max\{t_i\} \leq 0 \end{cases}$$

Se il limite inferiore stimato nella (6.46) è maggiore del minimo cambiato di segno della funzione scalare caratterizzante la stabilità statica del materiale valutata per tensori $m \otimes n$, allora la condizione sufficiente (6.43) è soddisfatta, di conseguenza

$$\left. \begin{array}{c} SM \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{C_0^{(1)}(\widehat{m \otimes n}) \cdot \widehat{m \otimes n}\right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SD. \quad (6.47)$$

Per materiali incomprimibili ($m \cdot n = 0$), essendo la sommatoria sui termini α_i^2 pari ad $\frac{1}{2}$, il valore di γ nella (6.47) è sempre pari ad $\frac{1}{2}$. Stime meno accurate del limite inferiore, ma basate su di una sola tensione principale, possono essere trovate considerando che $\min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} \geq -\frac{3}{2} \max\{|t_i|\}$. Pertanto la seguente limitazione sul modulo della massima tensione principale:

$$\max\{|t_i|\} < \frac{2}{3} \min\left\{C_0^{(1)}(\widehat{m \otimes n}) \cdot \widehat{m \otimes n}\right\} \quad (6.48)$$

assicura che una configurazione stabile in senso statico risulti stabile anche in senso dinamico. Nelle (6.43) e (6.47) con SD si è indicata la condizione SE, che per materiali incrementalmente lineari assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime e di accelerazione ed esclude la localizzazione in shear bands. Per materiali incrementalmente non-lineari, SD indica la condizione (6.24) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su di un lato del fronte di propagazione ed esclude la localizzazione per problemi omogenei con sole forze morte imposte sul contorno. Per materiali incrementalmente non-lineari la (6.47) può essere sostituita da

$$\left. \begin{array}{c} SM^* \\ \min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} > -\min\left\{{}^*C_0^{(1)}(\widehat{m \otimes n}) \cdot \widehat{m \otimes n}\right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SE^* \Rightarrow SD, \quad (6.49)$$

nella quale SM^* indica la condizione di stabilità materiale in senso statico per il solido di confronto:

$${}^*C_0^{(1)}(D) \cdot D > 0 \quad \forall D \neq 0.$$

Si noti che la condizione SM^* per il solido di confronto implica la SM per il solido reale:

$$SM^* \Rightarrow SM .$$

Nella (6.49) SD indica la (6.25) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione ed esclude localizzazioni in shear bands per il solido reale.

Si esaminano ora le possibili limitazioni indotte sullo stato tensionale dalla condizione di stabilità dinamica del materiale. Dall'esame della (6.18) e della (6.41) si deduce che *condizione necessaria affinché una configurazione di stabilità materiale in senso statico sia anche stabile in senso dinamico*, è che il minimo (massimo) della funzione scalare associata alle tensioni T_0 risulti maggiore del massimo (minimo) cambiato di segno della funzione scalare che caratterizza la stabilità del materiale valutata per tensori di rango uno $m \otimes n$:

$$\left. \begin{matrix} SM \\ SD \end{matrix} \right\} \Rightarrow \min(\max) \left\{ T_0 \cdot \left[(n \otimes m)(m \otimes n) - (\widehat{m \otimes n})(\widehat{m \otimes n}) \right] \right\} > -\max(\min) \left\{ C_0^{(1)} (\widehat{m \otimes n}) \cdot \widehat{m \otimes n} \right\} . \quad (6.50)$$

Allo scopo di ricavare in maniera esplicita la restrizione che deve rispettare necessariamente lo stato tensionale se il materiale è stabile in senso statico ed in senso dinamico, si ricava una stima del limite superiore della funzione scalare associata a T_0 .

La funzione scalare (6.44) è maggiorata dal valore

$$t_i \left[n_i^2 - \frac{1}{4} (n_i^2 + m_i^2 + 2m_k n_k m_i n_i) \right] \leq \max \{t_i\} \sum_i n_i^2 - \min \{t_i\} \sum_i \alpha_i^2 . \quad (6.51)$$

Considerando che

$$-\min \{t_i\} \sum_i \alpha_i^2 \leq \begin{cases} -\min \{t_i\} \min \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \right\} & \text{se } \min \{t_i\} \geq 0 \\ -\min \{t_i\} \max \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \right\} & \text{se } \min \{t_i\} \leq 0 \end{cases} ,$$

risulta

$$T_0 \cdot \left[(n \otimes m)(m \otimes n) - (\widehat{m \otimes n})(\widehat{m \otimes n}) \right] \leq \max \{t_i\} - \delta \min \{t_i\} \quad (6.52)$$

con

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \min \{t_i\} \geq 0 \\ 1 & \text{se } \min \{t_i\} \leq 0 \end{cases} .$$

Se il materiale è stabile staticamente e dinamicamente, il limite superiore stimato nella (6.52) è necessariamente maggiore del massimo (minimo) cambiato di segno della funzione scalare caratterizzante la stabilità statica del materiale:

$$\left. \begin{array}{l} SM \\ SD \end{array} \right\} \Rightarrow \max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} > -\max(\min) \left\{ \mathbf{C}_0^{(t)} \left(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} . \quad (6.53)$$

In generale, essendo il limite superiore nella (6.52) non negativo, la condizione necessaria (6.53) non fornisce alcuna informazione sullo stato tensionale poiché è identicamente soddisfatta. Per materiali incomprimibili ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$), invece, il valore di δ nella (6.53) è sempre pari ad $\frac{1}{2}$, e la condizione (6.53) può fornire informazioni utili. Analogamente al caso della condizione sufficiente, stime meno accurate del limite superiore, ma basate su di una sola tensione principale, possono essere trovate considerando che $\max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} \leq 2\max\{|t_i|\}$.

Per materiali incrementalmente lineari nella (6.53) SD indica la SE, che assicura velocità di propagazione reali e non nulle per onde piane infinitesime e di accelerazione ed esclude la localizzazione in shear bands. Per materiali incrementalmente non-lineari, SD indica la condizione (6.24) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione con gradiente di velocità nullo su di un lato del fronte di propagazione ed esclude la localizzazione per problemi omogenei con sole forze morte imposte sul contorno. Per materiali incrementalmente non-lineari la (6.53) può essere sostituita da

$$\left. \begin{array}{l} SM^* \\ SD \end{array} \right\} \Rightarrow \max\{t_i\} - \delta \min\{t_i\} > -\max(\min) \left\{ {}^* \mathbf{C}_0^{(t)} \left(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} , \quad (6.54)$$

nella quale SD indica la (6.25) che assicura velocità reali e non nulle per onde di accelerazione ed esclude localizzazioni in shear bands per il solido reale.

Non è semplice, invece, ricavare una restrizione sullo stato tensionale che sia sufficiente per la condizione di stabilità materiale in senso statico, supposto che sia verificata la condizione di stabilità dinamica. A tal riguardo si osservi che la definitezza positiva della (6.41), interpretabile come condizione di stabilità dinamica estesa a tensori generici, implica la stabilità statica del materiale. La condizione di stabilità dinamica, invece, essendo una condizione di stabilità ristretta a tensori di rango uno, in generale, non è abbastanza forte da implicare la stabilità statica del materiale. Questo può però accadere per particolari materiali o particolari percorsi di carico, come vedremo in seguito e come avviene nell'esempio monodimensionale riportato.

Un utile riscontro delle condizioni sopra ricavate si può avere nel caso di uno stato di tensione uniforme (caratterizzato, cioè, da uguali tensioni principali $t_1 = t_2 = t_3 = t$). In questo caso, si ha

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^{(t)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + t \mathbf{1} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) = \mathbf{C}_0^{(t)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + t \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} ,$$

ed il termine sottolineato è positivo o negativo a seconda che lo stato di tensione sia di trazione o di compressione, rispettivamente. Ovviamente, la condizione sufficiente (6.43) è automaticamente soddisfatta nel caso $t \geq 0$ essendo

$$\min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} = 0 > -\min\{\mathbf{C}_0^{(1)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}\},$$

mentre nel caso $t < 0$ questa fornisce

$$t > -2\min\{\mathbf{C}_0^{(1)}(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}\}.$$

In tali circostanze, quindi, la condizione di stabilità statica del materiale è sempre sufficiente per la stabilità dinamica.

La condizione necessaria (6.53) fornisce, invece, informazioni banali. Nell'esempio monodimensionale del paragrafo 2, supposto $E^{(1)} > G^{(1)}$ senza perdere di generalità, la condizione sufficiente (6.43) fornisce $-G^{(1)} < T_{011} < G^{(1)}$ essendo $\min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} = -T_{011}$ se $T_{011} \geq 0$ e $\min\{t_i\} - \gamma \max\{t_i\} = T_{011}$ se $T_{011} \leq 0$ in accordo con le (6.40). La condizione necessaria fornisce sempre informazioni banali.

6.6 STABILITÀ STRUTTURALE, MATERIALE ED UNICITÀ LUNGO PERCORSI DI DEFORMAZIONE OMOGENEA

Con riferimento alla stabilità strutturale, alla stabilità materiale ed alla biforcazione, si analizzerà la possibile sequenza di eventi che si manifestano lungo percorsi di equilibrio con deformazioni omogenee, per un corpo omogeneo soggetto a carichi morti del tipo "all round". In tal caso, i funzionali che governano la stabilità del corpo in una configurazione di equilibrio, diventano funzioni costanti del gradiente della deformazione infinitesima nei diversi punti del corpo e forniscono, quindi, informazioni puntuali sulle quantità che intervengono. Queste informazioni possono così essere utilizzate in connessione con i criteri di stabilità materiale. In questo paragrafo, con condizione di stabilità in senso statico si indica la SM, mentre il materiale si intende stabile in senso dinamico (SD) se le possibili onde piane infinitesime o di accelerazione hanno velocità reale.

Supponiamo adesso, che la configurazione B attuale sia caratterizzata da uno stato di deformazione omogeneo e da una tensione uniforme. Per ricavare le connessioni tra la

stabilità materiale in senso statico e dinamico, è utile richiamare alcuni concetti relativi alla stabilità e unicità con riferimento ad un corpo omogeneo ed omogeneamente deformato nella configurazione B .

Il corpo omogeneo ha superficie arbitraria e volume unitario, ed è soggetto a carichi morti sull'intera superficie. A meno che non sia esplicitamente detto, consideriamo che il materiale abbia una legge costitutiva incrementale lineare. Richiamiamo l'approssimazione al secondo ordine della differenza tra il lavoro di deformazione interna e quello dei carichi morti, limitatamente a deformazioni infinitesime aventi gradienti omogenei ed imposti a partire da B :

$$\frac{1}{2}t^2 \left[\mathbf{C}_0^{(l)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) \right] + o(t^2). \quad (6.55)$$

Il primo termine della (6.55)

$$\mathbf{C}_0^{(l)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}, \quad (6.56)$$

caratterizza la stabilità del materiale. Configurazioni di equilibrio B per il corpo considerato, nelle quali la (6.55) definita positiva per ogni \mathbf{L} non nullo, si considerano stabili. Inoltre, la definitezza positiva della quantità contenuta nella (6.55) assicura l'unicità della soluzione del problema incrementale di equilibrio relativo a variazioni incrementali dei carichi superficiali agenti sul corpo nella configurazione di equilibrio B . Per tali circostanze, la (6.55) è detta funzionale di esclusione o di stabilità. Se il legame è non lineare positivamente omogeneo di grado uno, allora la definitezza positiva della (6.55) è condizione sufficiente per l'unicità della soluzione incrementale solo relativamente ad incrementi nulli dei carichi superficiali (dati omogenei). Se il tensore dei moduli tangenti istantanei \mathbf{C}_0^R è simmetrico, le configurazioni nelle quali la quantità è semidefinita positiva sono autostati primari nei quali il funzionale di esclusione è reso stazionario e nullo da modi di biforcazione primari. Per materiali incrementali non-lineari che ammettono un potenziale funzione del gradiente della deformazione infinitesima (Hill, 1978), la condizione di semidefinitezza positiva del funzionale di esclusione identifica un modo di biforcazione primaria per il problema incrementale "all round" con dati omogenei.

Lungo un percorso di deformazione omogenea che attraversa stati stabili, generato da un parametro di carico λ crescente monotonicamente, che governa lo stato di tensione $\mathbf{T}_0(\lambda)$, la perdita di stabilità materiale in senso statico può avvenire solo dopo la perdita di stabilità: la condizione di definitezza positiva della (6.55), infatti, è sufficiente per la stabilità del materiale in senso statico (SM). Questa condizione non è necessaria, in quanto il funzionale di stabilità può perdere la definitezza positiva anche se il materiale è stabile, come può avvenire, ad esempio, per rotazioni rigide e carichi di compressione.

Lungo particolari percorsi di deformazione (percorso (1) in fig. 6.2), caratterizzati da un valore critico λ_c , in corrispondenza del quale la condizione di semidefinitzza positiva della (6.56) (che è quindi nulla e stazionaria per un certo \mathbf{D}_c) rende anche semidefinita positiva la (6.55) (e, quindi, nulla e stazionaria per lo stesso \mathbf{D}_c), configurazioni per le quali il materiale è stabile in senso statico (SM) sono anche stabili in senso dinamico (SD), poiché la SM implica la SE. La condizione prima vista viene soddisfatta qualora la perdita di stabilità avviene con un gradiente di deformazione incrementale, tale da rendere nullo l'effetto dei carichi morti. Per questa circostanza, è sufficiente che la perdita di stabilità (e l'eventuale biforcazione per \mathbf{C}_0^R simmetrici) avvenga con un gradiente $\mathbf{L}=\mathbf{D}_c$ simmetrico (che rappresenta l'eventuale modo di biforcazione). Si noti che per $\lambda < \lambda_c$ le configurazioni sono stabili e la soluzione è unica. Nella figura 6.2 il dominio più interno tratteggiato corrisponde alla condizione di stabilità strutturale.

Ovviamente, lungo percorsi generici, il materiale può essere dinamicamente stabile ma non esserlo staticamente (si consideri ad esempio il percorso (2), lungo il quale la perdita di stabilità e l'eventuale biforcazione, corrisponde ad un generico gradiente non simmetrico; il materiale, quindi, rimane stabile fino ad un certo livello di λ per il quale la perdita di stabilità materiale avviene necessariamente con tensori \mathbf{D} che non rappresentano possibili gradienti di onde longitudinali non propaganti o parti simmetriche di gradienti di rango uno rappresentanti onde non propaganti) o viceversa (percorso (3) lungo il quale la perdita di stabilità e l'eventuale biforcazione, avviene con un gradiente non simmetrico e la perdita di stabilità materiale dinamica avviene necessariamente in corrispondenza di un'onda reale non propagante con gradiente di rango uno non simmetrico). Per l'evenienza del percorso (2) è sufficiente che si verifichi la condizione (6.47). Eccezionalmente, può accadere che la perdita di stabilità avvenga con un tensore di rango uno rappresentante un'onda non propagante che annulla l'effetto dei carichi iniziali (percorso (4)): in corrispondenza di λ_c , allora, il materiale perde la stabilità in senso statico e dinamico per cui le condizioni SM ed SD sono soddisfatte contemporaneamente. Per tale circostanza è sufficiente che la perdita di stabilità avvenga con un tensore simmetrico che identifica una possibile onda longitudinale reale non propagante. In un percorso di tipo (5), inoltre, necessariamente la perdita di stabilità materiale avviene con un gradiente che rappresenta la parte simmetrica di un tensore di rango uno associato ad un'onda non propagante che annulla l'effetto dei carichi morti. Una condizione particolare per tale evenienza, è che la perdita di stabilità materiale avvenga con un tensore simmetrico che identifica una possibile onda longitudinale reale non propagante (tensore di rango uno simmetrico). Le considerazioni sui percorsi (2)-(5) sono più facilmente

caratterizzabili nel caso in cui il tensore \mathbf{C}_0^R è simmetrico, poiché la condizione SE si identifica con quella SD e la perdita della condizione di ellitticità forte corrisponde all'esistenza di un'onda non propagante; nelle considerazioni precedenti è sufficiente, quindi, riferirsi a generici gradienti di rango uno senza specificare che questi rappresentino possibili onde reali.

Lungo particolari percorsi di carico, quindi, limitando opportunamente lo stato tensionale e selezionando così un opportuno range di variazione per il parametro λ , è possibile che la condizione SM implichi la SD e viceversa.

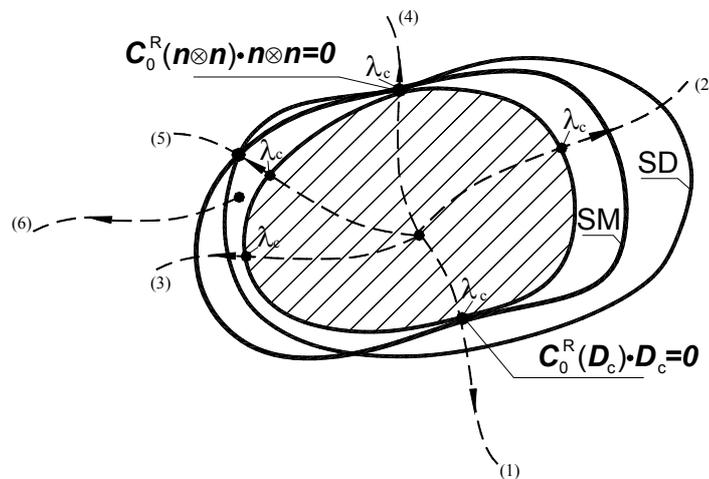


Fig. 6.2. Percorsi di deformazione omogenea per un corpo con carichi morti "all round".

Tornando all'esempio monodimensionale, il caso $T_{011} > 0$ corrisponde ad un percorso di tipo (2), mentre il caso $T_{011} < 0$ ad un percorso di tipo (6) che non interessa praticamente poiché parte da una configurazione instabile.

Nel caso di uno stato di tensione uniforme (i.e. caratterizzato da tensioni principali $t_1 = t_2 = t_3 = t > 0$) la perdita di stabilità, e l'eventuale biforcazione, deve necessariamente coincidere con la perdita di stabilità materiale. Infatti, in questo caso si ha

$$\mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^{(I)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + t \mathbf{1} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) = \mathbf{C}_0^{(I)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + \underline{t \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}},$$

ed il termine sottolineato è sempre positivo, quindi la perdita di stabilità deve necessariamente avvenire con un gradiente caratterizzato simmetrico \mathbf{D} e la SM implica la SD (percorso (1)). Se \mathbf{D} è un tensore di rango uno e \mathbf{C}_0^R è simmetrico, la perdita della SM implica la perdita della SD (percorso (4)). Si noti che queste condizioni valgono indipendentemente dal tipo di materiale lineare.

Percorsi del tipo (1) possono essere frequentemente ritrovati nei materiali iperelastici ed isotropi, o nei materiali il cui legame incrementale lineare gode di simmetria ortotropa

rispetto agli assi principali di tensione ed il tensore \mathbf{C}_0^R è simmetrico. Per questi materiali, infatti, è frequente la possibilità che la perdita di stabilità avvenga con modi di biforcazione simmetrici poiché i modi di biforcazione coassiali alle direzioni principali di tensione sono indipendenti dai modi taglianti ed in questo caso si ha che la (6.55) si riduce alla (6.56). La condizione di stazionarietà della (6.55) nell'ipotesi di un tensore dei moduli tangenti nominali simmetrico, insieme alle condizioni di equilibrio rotazionale forniscono le equazioni caratterizzanti i modi di biforcazione omogenei

$$\mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}\mathbf{T}, \quad (6.57)$$

che nell'ipotesi di simmetria ortotropa si specializzano in equazioni del tipo

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{C}_{11jj}^{(1)}D_{jj} &= 0 \\ {}_0\mathbf{C}_{1212}^{(1)}D_{12} - \frac{(t_1 - t_2)^2}{4(t_1 + t_2)}D_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (6.58)$$

associate ad altre quattro similari. Si noti il disaccoppiamento tra i modi coassiali alle direzioni principali di tensione ed quelli di taglio nei piani principali. Se $t_i+t_j=0$, allora W_{ij} è nullo a meno che $t_i=t_j=0$. Se in un percorso di stabilità del materiale la prima equazione ad essere soddisfatta è quella relativa a modi coassiali allora la biforcazione coincide con la perdita di stabilità materiale (percorsi di tipo 1).

6.6.1 Applicazione ad un blocco di materiale iperelastico compressibile in trazione.

Allo scopo di illustrare i concetti prima introdotti, consideriamo un materiale iperelastico ed isotropo caratterizzato dalla seguente densità di energia di deformazione

$$W = \sum_m \frac{c^{(m)}}{m} \left[\lambda_1^m + \lambda_2^m + \lambda_3^m - 3 + \frac{1}{n} (J^{-mn} - 1) \right], \quad (6.59)$$

avendo indicato con λ_i gli autovalori del tensore destro di deformazione \mathbf{U} , con J il suo determinante e con n un parametro costante. L'espressione (6.59) è stata proposta da Hill (1978), per descrivere il comportamento di gomme compressibili.

Per quanto segue è utile richiamare le espressioni dei moduli tangenti istantanei (Ogden, 1984):

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{C}_{ijj}^R &= \frac{\lambda_i \lambda_j}{J} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \\ {}_0\mathbf{C}_{jjj}^R &= \frac{\lambda_j^2}{J} \frac{\lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} - \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \quad i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0C_{ijj}^R &= \frac{1}{2} \left({}_0C_{jjj}^R - {}_0C_{jji}^R + \frac{\lambda_j}{J} \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \right) \quad \lambda_i = \lambda_j, \quad i \neq j \\ {}_0C_{ijj}^R &= {}_0C_{jjj}^R = {}_0C_{jji}^R - \frac{\lambda_i}{J} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (6.60)$$

E' utile, inoltre richiamare la seguente relazione tra i moduli tangenti nominali e quelli associati alla coppia coniugata $(\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)})$ lungo gli assi principali di tensione:

$${}_0C_{ijkl}^R = {}_0C_{ijkl}^{(1)} - \frac{1}{4} (t_i \delta_{ij} \delta_{kj} + t_i \delta_{ki} \delta_{jl} + t_j \delta_{jk} \delta_{il} - 3t_j \delta_{jl} \delta_{ik}).$$

Le tensioni principali di Biot associate alla (6.59) sono:

$$t_i^{(1)} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \sum_m c^{(m)} \left[\lambda_i^{m-1} - \frac{J^{-mn}}{\lambda_i} \right], \quad (6.61)$$

e nell'ipotesi di uno stato di trazione monoassiale nella direzione 1, le condizioni $t_2^{(1)} = t_3^{(1)} = 0$ forniscono la relazione

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-\frac{n}{2n+1}} \quad (6.62)$$

Sotto questa condizione di carico assialsimmetrica i moduli tangenti nominali soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} {}_0C_{1122}^R &= {}_0C_{1133}^R = {}_0C_{2233}^R, \quad {}_0C_{2222}^R = {}_0C_{3333}^R, \quad {}_0C_{1221}^R = {}_0C_{1212}^R = {}_0C_{1313}^R = {}_0C_{1331}^R, \\ {}_0C_{2332}^R &= {}_0C_{2323}^R = {}_0C_{3232}^R, \quad {}_0C_{2121}^R = {}_0C_{3131}^R \end{aligned} \quad (6.63)$$

La (6.55) è definita positiva nello stato di riferimento naturale se sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$\sum_m m c^{(m)} > 0, \quad n > \frac{1}{3} \quad (6.64)$$

La ricerca di eventuali modi di biforcazione coassiali governati dalla (6.58)₁ si effettua calcolando gli autovalori nulli ω ed i corrispondenti autovettori $\bar{\mathbf{D}} = \{D_{11}, D_{22}, D_{33}\}^T$ (modi di biforcazione) associati al problema

$$\bar{\mathbf{C}}_0^R(\lambda_i)[\bar{\mathbf{D}}] = \omega \bar{\mathbf{D}}, \quad (6.65)$$

con ${}_0\bar{C}_{ij}^R = {}_0C_{ijj}^R$.

La condizione di nullo per i possibili autovalori coassiali viene dettata dal soddisfacimento separato o simultaneo delle seguenti condizioni (Storakers, 1986)

$${}_0\bar{C}_{11}^R ({}_0\bar{C}_{22}^R + {}_0\bar{C}_{23}^R) - 2{}_0\bar{C}_{12}^R{}^2 = 0, \quad {}_0\bar{C}_{22}^R - {}_0\bar{C}_{23}^R = 0 \quad (6.66)$$

Generalmente, la prima condizione è associata a modi di biforcazione che corrispondono ad un proseguimento del percorso fondamentale

$$\bar{\mathbf{D}} = \gamma_1 \{2 {}_0\bar{\mathbf{C}}_{12}^R / {}_0\bar{\mathbf{C}}_{11}^R, -1, -1\}^T \quad (6.67)$$

con γ_1 arbitrario, mentre la seconda è associata a modi di biforcazione di tipo taglio che bisecano gli assi del piano di simmetria assiale

$$\bar{\mathbf{D}} = \{0, D_{22}, -D_{22}\}^T \quad (6.68)$$

con D_{22} arbitrario. E' possibile dimostrare come i modi (6.67) si manifestano in corrispondenza della condizione stazionarietà del carico applicato.

Utilizzando le (6.58) è possibile dimostrare come i modi di taglio nei piani 1-2 e 1-3, rispettivamente D_{12} e D_{13} , non sono di interesse poiché emergono con l'annullarsi del modulo ${}_0\mathbf{C}_{1212}^R = {}_0\mathbf{C}_{1313}^R$, condizione che si verifica in corrispondenza di una tensione principale $t_i^{(1)}$ nulla. I modi di taglio nel piano di simmetria 2-3, D_{23} , sono associati all'annullarsi di ${}_0\mathbf{C}_{2323}^R$, condizione che riconduce alla (6.66)₂. Questi modi di taglio hanno una rotazione W_{23} arbitraria e sono quindi del tipo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} \\ 0 & L_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

con L_{23} e L_{32} arbitrari. Essi manifestano in concomitanza di modi di taglio paralleli agli assi principali del piano 2-3. Data la simmetria, infatti, nel piano 2-3, i modi di taglio coassiali possono avere un'inclinazione arbitraria e si confondono con quelli di taglio.

Allo scopo di semplificare i calcoli consideriamo un particolare materiale generato dalla funzione (6.59) con i seguenti parametri:

$$m_1 = -m_2 = \alpha > 0, \quad \mathbf{c}^{(2)} / \mathbf{c}^{(1)} = \beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad n = 3.$$

Si noti che in questo modo i parametri sono tali da soddisfare le (6.64).

La condizione (6.66)₂ risulta essere

$$\sum_m \mathbf{c}^{(m)} m \lambda_1^{\frac{mn}{2n+1}} = 0, \quad (6.70)$$

e nel caso in oggetto fornisce il seguente valore critico

$$\lambda_{1c} = \beta^{\frac{2n+1}{2\alpha n}}. \quad (6.71)$$

Come si può facilmente vedere in corrispondenza di λ_{1c} , tutte le componenti di $\bar{\mathbf{C}}_0^R$ sono nulle eccetto ${}_0\bar{\mathbf{C}}_{11}^R$. Di conseguenza il modo di biforcazione associato assume la forma

$$\bar{\mathbf{D}} = \{0, \gamma_1, \gamma_2\}^T \quad (6.72)$$

con γ_1 e γ_2 arbitrari.

Fissato $\beta = 0.1$, consideriamo ora due differenti valori per α : $\alpha = 2$ e $\alpha = 0.9$. Nel primo caso la tensione $t_1^{(1)}$ è monotonicamente crescente, mentre nel secondo ammette un massimo (Fig. 6.3).

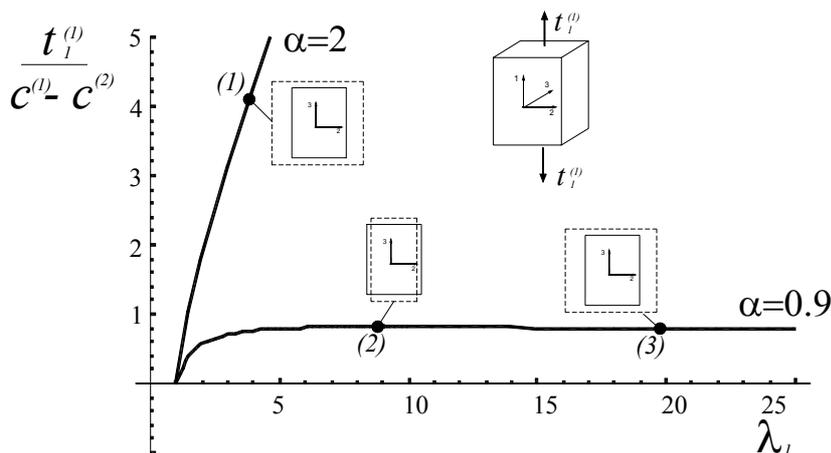


Fig. 6.3. Diagramma carico deformazione.

Se $\alpha = 2$, allora la $(6.66)_2$ fornisce $\lambda_{1c} \approx 3.83$ (punto (1) in Fig. 6.3). Questo valore è anche l'unico che soddisfa la $(6.66)_1$, di conseguenza in corrispondenza di λ_{1c} si manifestano modi di biforcazione primari coassiali del tipo (6.72) e modi taglianti del tipo (6.69), entrambi contenuti nel piano di simmetria. E' facile vedere, inoltre, come in corrispondenza della biforcazione si perde la stabilità del materiale poiché in corrispondenza dei modi di biforcazione il termine caratterizzante l'effetto dei carichi iniziali è nullo. Nel caso di biforcazione coassiale (6.72), infatti, il termine dei carichi iniziali si annulla perché si è in presenza di modi simmetrici, mentre per la biforcazione a taglio (6.69) nel piano di simmetria il termine in oggetto si annulla per la particolare condizione di carico ($t_2=t_3=0$). Inoltre, in corrispondenza di λ_{1c} si perde anche la stabilità del materiale in senso dinamico, poiché esistono onde longitudinali con direzioni di propagazione allineate con gli assi 2 e 3 che hanno velocità nulla. L'annullarsi delle velocità di propagazione sono associate all'annullarsi dei moduli ${}_0\bar{C}_{22}^R$ e ${}_0\bar{C}_{33}^R$, per onde con direzione 2 e direzione 3, rispettivamente. Data la simmetria di carico, la perdita di stabilità dinamica può anche avvenire in corrispondenza di tensori di rango uno $m \ n$ con m ed n vettori

contenuti nel piano di simmetria. Il tensore acustico, infatti, in corrispondenza di λ_{1c} e di direzioni \mathbf{n} appartenenti al piano di simmetria diventa diagonale e possiede due autovalori nulli

$${}_0\mathbf{Q}(\lambda_{1c}) = \begin{bmatrix} {}_0C_{1212}^R (n_2^2 + n_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il percorso di deformazione analizzato corrisponde ad un percorso di tipo (4).

Se $\alpha = 0.9$, allora la (6.66)₂ fornisce $\lambda_{1c} \approx 19.78$ (punto (3) in Fig. 6.3). La (6.66)₁ è soddisfatta per $\lambda_{1c} \approx 8.87$ (punto (2) in Fig. 3) e $\lambda_{1c} \approx 19.78$. In corrispondenza del valore critico più basso per λ_1 il modo corrispondente è del tipo (6.67), mentre per quello più alto del tipo (6.69) e (6.72). In corrispondenza del modo (6.67) il carico è massimo e si perde la stabilità strutturale e del materiale. Il materiale rimane però dinamicamente stabile. Questo è stato verificato calcolando attraverso una procedura numerica il minimo autovalore ρc_{min}^2 del tensore acustico ${}_0\mathbf{Q}(\lambda_{1c})$ al variare della direzione di propagazione \mathbf{n} . Tale minimo è risultato pari a 0.093 circa, in corrispondenza di una qualsiasi direzione di propagazione appartenente al piano 2-3 e di una direzione di polarizzazione allineata con l'asse 1. È semplice dimostrare che tale valore è pari al modulo ${}_0C_{1212}^R$ che risulta essere sempre positivo e diverso da zero. Al minimo autovalore è quindi associata un'onda di taglio nella direzione 1 che si propaga nel piano di simmetria con una velocità positiva. Il percorso, quindi, è di tipo (1).