
CAPITOLO 5

Effetti della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di biforcazione ed instabilità. Parte 2: problemi omogenei

5.1 Introduzione.....	5-2
5.2 Biforcazione e stabilità del materiale per problemi omogenei	5-4
5.3 Stabilità del materiale in solidi iperelastici isotropi ed incompressibili.....	5-11
5.4 Stabilità del materiale in solidi iperelastici isotropi ed incompressibili: deformazioni piane.....	5-13
5.5 Stabilità del materiale in solidi iperelastici isotropi ed incompressibili: deformazioni 3D.....	5-18
5.6 Conclusioni.....	5-26

5.1 INTRODUZIONE

Vengono analizzate le relazioni tra stabilità infinitesima della configurazione di equilibrio, stabilità materiale ed unicità. L'analisi è ristretta a problemi di tipo omogeneo caratterizzati, cioè, da percorsi di deformazione omogenea e condizioni di carico di sole forze morte su tutto il contorno del corpo.

Per materiali *incrementalmente lineari* che ammettono un potenziale del gradiente della deformazione incrementale, la perdita di stabilità del materiale avviene non prima della perdita di stabilità e di unicità. Le stesse conclusioni valgono anche per materiali incrementali non lineari che ammettono un potenziale, nell'ipotesi che le forze esterne incrementali siano nulle (dati omogenei).

Per materiali *incrementalmente non-lineari* con dati non omogenei, la perdita di stabilità materiale avviene non prima della perdita di stabilità. Inoltre, la perdita di stabilità del materiale avviene necessariamente con la condizione sufficiente di unicità non più soddisfatta. Se il materiale ammette un solido lineare di confronto e deriva da un potenziale, quando la procedura di confronto è critica, nel senso che la biforcazione e perdita di stabilità del solido di confronto coincide con la biforcazione del solido reale (non necessariamente accompagnata da perdita di stabilità), la perdita di stabilità materiale non può avvenire prima della perdita di unicità.

Come anticipato nel capitolo 3, esistono dei casi per i quali la condizione SM assicura la condizione di stabilità e di unicità. In questi casi, quindi, la perdita della condizione SM deve coincidere con la perdita della condizione di stabilità e, quindi, la condizione SM è necessaria e sufficiente per la stabilità del corpo. Tale situazione occorre quando la perdita di stabilità avviene per modi che rendono nullo il contributo dell'effetto dei carichi morti (misurato, ovviamente, attraverso la deformazione di Biot) nella condizione di stabilità. L'effetto dei carichi morti è nullo, ad esempio, quando la perdita di stabilità avviene per modi simmetrici. Queste considerazioni evidenziano come la condizione di stabilità materiale abbia un'influenza notevole sui fenomeni di instabilità e biforcazione.

Al fine di indagare l'influenza della condizione di stabilità materiale sulla condizione di stabilità e di unicità, nel presente capitolo si prendono in considerazione alcune classi di problemi per corpi soggetti a carichi di trazione. Nei casi esaminati la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità materiale, ossia avviene con effetti geometrici nulli. Si dimostra come la condizione SM, che rappresenta una restrizione sul comportamento del solo materiale, possa escludere fenomeni di instabilità e biforcazione. In questi casi, quindi, l'influenza della condizione SM è particolarmente evidente.

Si considera, ad esempio, un corpo generico di materiale lineare o non lineare, soggetto ad uno stato di tensione idrostatica uniforme morta. In tal caso la perdita di stabilità avviene per modi simmetrici e coincide con la perdita della condizione SM. Se il materiale è lineare e deriva da un potenziale, o non-lineare derivante da un potenziale ma con dati omogenei, la biforcazione, inoltre, deve necessariamente coincidere con la perdita di stabilità materiale. Gli effetti geometrici, infatti, sono sempre stabilizzanti. Se si utilizza una generica misura di deformazione, la perdita di stabilità strutturale e materiale avviene con materiale f -instabile se $f'(1) > 0$, ed f -stabile per $f'(1) < 0$. In particolare, la perdita di stabilità materiale e strutturale avviene invece con la forma $\mathbf{C}_0^{(2)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$ indefinita. Infine, la positività della risposta del materiale secondo misure di deformazione con $f'(1) \geq 0$, assicura la stabilità.

Un secondo esempio riguarda i materiali incrementalmente lineari caratterizzati da un tensore costitutivo tangente simmetrico e da una simmetria ortotropa dei moduli tangenti rispetto agli assi principali di tensione. I materiali iperelastici ed isotropi appartengono a tale classe. Per questi materiali avviene di frequente che la perdita di stabilità sia caratterizzata da modi simmetrici, per il disaccoppiamento tra modi di biforcazione coassiali agli assi principali e di taglio nei piani principali.

Lo studio procede con alcuni esempi di analisi di stabilità e biforcazione dell'equilibrio per materiali iperelastici, isotropi ed incompressibili. Dagli esempi riportati, risulta che:

A partire da uno stato di equilibrio stabile, per un solido di materiale Neo-Hookiano generalizzato in uno stato di deformazione piano in trazione monoassiale, il softening, inteso come instabilità del materiale, si può raggiungere solo dopo la perdita di stabilità strutturale e la biforcazione. La biforcazione e la perdita di stabilità, inoltre, avvengono non appena il $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ diventa semidefinito positivo, per cui la perdita di stabilità materiale coincide con quella strutturale. In particolare, se il materiale è Neo-Hookiano, la perdita di stabilità strutturale e materiale non può mai essere raggiunta.

Analogamente, per un materiale Neo-Hookiano in deformazione 3D e carico monoassiale, la perdita di stabilità strutturale (biforcazione) e quella materiale non può mai essere raggiunta.

Si è verificato che in presenza di tensioni morte uniformi di trazione per un materiale Neo-Hookiano, la biforcazione e la perdita di stabilità strutturale avvengono quando $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ perde la sua definitezza positiva. Il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$, invece, è definito negativo alla biforcazione.

Per un materiale alla Ogden valgono analoghe considerazioni. Anche per questo materiale la perdita di stabilità strutturale avviene con modi simmetrici e coincide con la

perdita di stabilità materiale. Anche in questo caso il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$ è definito negativo alla biforcazione.

Gli esempi presi in considerazione, quindi, appartengono a quella classe di problemi per i quali l'effetto geometrico è sempre stabilizzante e la perdita di stabilità avviene con modi simmetrici in corrispondenza della perdita di stabilità materiale.

5.2 BIFORCAZIONE E STABILITÀ DEL MATERIALE PER PROBLEMI OMOGENEI

La teoria esposta nel capitolo 2 per un solido soggetto a condizioni al contorno di tipo misto sarà qui particolarizzata al caso di carichi morti su tutto il contorno del solido (${}_0\dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n} = \dot{\sigma}_0$ su ∂B con la configurazione corrente presa come configurazione di riferimento) e forze di volume nulle.

Se i dati sono omogenei (cioè $\dot{\sigma}_0 = 0$) la condizione di esclusione per materiali incrementali lineari o non lineari (positivamente omogenei di grado uno) è la seguente:

$$\int_B \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} dV > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}}_0 \neq \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

condizione che deriva dall'indebolimento della condizione sufficiente di unicità (2.70) poiché in questa una possibile soluzione è quella identicamente nulla. Per materiali incrementali lineari la connessione tra il problema omogeneo e quello non-omogeneo è più stretta di quella per materiali non-lineari: la (5.1), infatti, assicura l'unicità anche per il problema non-omogeneo per materiali incrementalmente lineari. Le considerazioni che seguono, a meno che non sia diversamente specificato, si riferiscono a dati omogenei se espresse per materiali non-lineari. Se il materiale è incompressibile la (5.1) si modifica in

$$\int_B [\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - q \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L}] dV = \int_B [\bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L}] dV > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}}_0 \neq \mathbf{0} \mid \text{tr} \mathbf{L} = 0.$$

Per una materiale che ammette il potenziale definito al capitolo 2 la (5.1) si specializza in

$$\int_B U_0(\mathbf{L}) dv > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Se il materiale è incompressibile il potenziale si riferisce alla parte di tensione incrementale non influenzata dalla tensione indeterminata e nell'integrando della (5.2)

deve aggiungere il termine $-\frac{1}{2} q \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L}$.

Supponiamo ora che il corpo continuo sia omogeneo nella configurazione di riferimento naturale e che sia deformato in maniera uniforme. Di conseguenza $\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L}$ o $U_0(\mathbf{L})$ sono funzioni identiche del gradiente della deformazione incrementale in ogni punto del corpo e le condizioni di unicità implicano la loro definitezza positiva.

Per materiali caratterizzati dal potenziale U è possibile localizzare gli stati di biforcazione primaria. Se le quantità in questione sono semidefinite positive allora questo stato è un autostato per cui il funzionale di esclusione (5.2) è reso nullo e stazionario da un automodo primario. Quindi, un automodo primario ha necessariamente un gradiente uniforme caratterizzato dall'auto-equazione:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{L}} = {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R = 0. \quad (5.3)$$

Ogni altro campo di deformazione incrementale che soddisfa la (5.3) è un automodo, poiché soddisfa le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno omogenee ma non è primario se il funzionale di esclusione è solo indefinito. La condizione (5.3) si trasforma in

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{L}} - q \mathbf{L}^T + \dot{q} \mathbf{1} = {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R = 0,$$

per materiali incompressibili, dove \dot{q} ha la funzione di un moltiplicatore di Lagrange introdotto per tener conto del vincolo di incompressibilità incrementale $\text{tr } \mathbf{L} = 0$. In definitiva, la tensione nominale è stazionaria rispetto a deformazioni incrementali che minimizzano la forma quadratica (5.2).

La condizione di esclusione (5.2) può essere espressa in termini del potenziale della deformazione incrementale G_0 definito da

$$\dot{\mathbf{T}}^{(1)} = \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{D}}, \quad 2G_0 = \dot{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{D},$$

legato al potenziale delle tensioni nominali dalla relazione

$$2(U_0 - G_0) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}). \quad (5.4)$$

Il funzionale di esclusione diventa così

$$2G_0(\mathbf{D}) + \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) > 0. \quad (5.5)$$

Se il materiale è incompressibile il funzionale di esclusione contiene in aggiunta il termine $-q \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$. La condizione di esclusione implica, per spins arbitrari sugli assi delle tensioni principali t_i , che

$$(t_1 + t_2)W_{12}^2 + (t_1 + t_3)W_{13}^2 + (t_3 + t_2)W_{32}^2 > 0,$$

ed impone le seguenti restrizioni sulle tensioni:

$$(t_1 + t_2) > 0, \quad (t_1 + t_3) > 0, \quad (t_3 + t_2) > 0, \quad (5.6)$$

oltre a quelle imposte dalla (5.5).

In corrispondenza della biforcazione (dove la tensione incrementale nominale è stazionaria) un automodo deve soddisfare la condizione di equilibrio rotazionale

$$\mathbf{TL}^T = \mathbf{LT}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_j}{\partial \mathbf{x}_k} T_{ik} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{x}_k} T_{kj}, \quad (5.7)$$

che espressa in un sistema di riferimento coassiale con le tensioni principali si specializza nelle tre equazioni indipendenti:

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2)W_{21} &= (t_2 - t_1)D_{21} \\ (t_1 + t_3)W_{31} &= (t_3 - t_1)D_{31} \\ (t_2 + t_3)W_{32} &= (t_3 - t_2)D_{32} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Per materiali incrementali lineari che ammettono un potenziale dell'incremento di deformazione, le equazioni caratterizzanti l'automodo sono

$$\begin{aligned} {}_0C_{iikl}^{(1)}D_{kl} &= 0 && \text{nessuna sommatoria su } i \\ {}_0C_{ijkl}^{(1)}D_{kl} - \frac{(t_i - t_j)^2}{2(t_i + t_j)}D_{ij} &= 0 && \text{con } i \neq j \text{ se } t_i + t_j \neq 0 \\ C_{ijkl}^{(1)}D_{kl} + t_j W_{ij} &= 0 && \text{con } i \neq j, D_{ij} = 0 \text{ se } t_i + t_j = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

avendo utilizzato la (5.4) ed avendo eliminato gli spins attraverso le (5.8). Le (5.9) costituiscono un sistema di 6 equazioni indipendenti nelle 6 componenti delle deformazioni incrementali che risolte forniscono l'automodo. Le rotazioni rispetto agli assi principali si ricavano a posteriori dalle (5.8).

Se il materiale gode della simmetria ortotropa rispetto agli assi principali di tensione le (5.9) si specializzano in equazioni del tipo

$$\begin{aligned} {}_0C_{11jj}^{(1)}D_{jj} &= 0 && \text{nessuna sommatoria su } i \\ {}_0C_{1212}^{(1)}D_{12} - \frac{(t_i - t_j)^2}{4(t_i + t_j)}D_{12} &= 0 && \text{con } i \neq j \text{ se } t_i + t_j \neq 0 \\ D_{12} = 0 \text{ e } W_{12} = 0 &&& \text{con } i \neq j \text{ se } t_i + t_j = 0 \text{ a meno che } t_i - t_j = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

le quali mostrano il disaccoppiamento tra i modi coassiali agli assi principali e quelli di taglio nei piani principali.

Se il materiale è incompressibile le (5.9) e (5.10) si modificano con l'aggiunta dei termini derivanti dalla tensione incrementale indeterminata di Biot considerando che

$$\dot{\mathbf{T}}_0^{(1)} = \mathbf{C}_0^{(1)}[\mathbf{D}] - q\mathbf{D} + \dot{q}\mathbf{1} = \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1}.$$

Per materiali incrementalmente ortotropi che ammettono un potenziale è frequente la possibilità che la condizione di semidefinitezza positiva del funzionale di esclusione (o la perdita di stabilità) coincida con la condizione di semidefinitezza positiva del tensore dei

moduli istantanei tangenziali di Biot (o perdita di stabilità del materiale). Questo perché i modi coassiali caratterizzati da rotazioni nulle sono indipendenti dai modi taglianti ed in questo caso si ha

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^R [\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^{(t)} [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) = \mathbf{C}_0^{(t)} [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D}. \quad (5.11)$$

Se lungo un percorso stabile, la prima equazione caratterizzante la biforcazione ad essere soddisfatta è quella relativa a modi coassiali, allora la biforcazione coincide con la perdita di stabilità materiale. In tal caso, la condizione di stabilità del materiale assicura la stabilità ed unicità.

Sempre con riferimento a materiali incrementalmente lineari ed a simmetria ortotropa con tensore costitutivo simmetrico, è possibile esaminare in quali circostanze la perdita di stabilità coincida con la perdita di stabilità del materiale. Osservando le (5.10), è chiaro che il materiale può ancora essere stabile in corrispondenza della perdita di stabilità se e solo se i modi di biforcazione sono caratterizzati da un effetto geometrico negativo, ossia se si verifica la seguente condizione:

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) < 0,$$

all'atto della perdita di stabilità. Questo può avvenire solo per modi di taglio accompagnati da rotazioni non nulle. Per modi a taglio con rotazioni nel piano 1-2, ad esempio, è necessario che t_1 sia diverso da t_2 . Se modi di tipo a taglio con rotazioni non possono verificarsi, allora la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità.

- Se la somma di due tensioni principali non nulle è uguale a zero, $t_1+t_2=0$ ad esempio, dalle (5.8) segue che la componente D_{12} è uguale a zero e dalle (5.10) espresse in termini dei moduli istantanei di Biot, segue che anche la W_{12} è nulla. Modi di taglio nel piano 1-2 non sono quindi ammissibili.
- Se due tensioni principali sono uguali a zero, $t_1=t_2=0$ ad esempio, dalle (5.8) segue che W_{12} è arbitrario. Dalle (5.10) si osserva che D_{12} può essere un possibile modo quando ${}_0C_{1212}^{(t)}$ diventa nullo. In ogni caso il termine caratterizzante l'effetto geometrico nel criterio di stabilità $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D})$ è identicamente nullo in corrispondenza di un possibile modo di taglio accompagnato da rotazioni arbitrarie. Per questi modi, quindi, la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità del materiale.
- Se invece due tensioni principali sono uguali, $t_1=t_2$ ad esempio, dalle (5.8) segue che la componente W_{12} è nulla. La D_{12} può essere un possibile modo quando ${}_0C_{1212}^{(t)}$ diventa nullo. In ogni caso il termine caratterizzante l'effetto geometrico nel criterio di stabilità

$T \cdot (L^T L - DD)$ è identicamente nullo poiché il modo è simmetrico. Per questi modi, quindi, la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità del materiale.

- Se due tensioni principali sono uguali a zero e la terza è positiva, $t_1=t_2=0$ e $t_3>0$ ad esempio, dalle (5.8) segue che la W_{12} è arbitraria mentre $D_{23}=W_{32}$ e $D_{13}=W_{31}$. I modi di taglio D_{12} sono ammissibili quando ${}_0C_{1212}^{(1)}$ è nullo ma non portano contributo all'effetto geometrico. La D_{13} (D_{23}) può essere un possibile modo quando ${}_0C_{1313}^{(1)} - t_3/4$ (${}_0C_{2323}^{(1)} - t_3/4$) diventa nullo, come si può vedere dalle (5.10). In questo caso il termine caratterizzante l'effetto geometrico nel criterio di stabilità $T \cdot (L^T L - DD)$ è negativo e pari a

$$-t_3(D_{23}^2 + D_{13}^2).$$

Per la trazione monoassiale, in corrispondenza di modi di taglio del tipo D_{13} o D_{23} , la perdita di stabilità del materiale avviene dopo la perdita di stabilità.

Consideriamo ora i materiali iperelastici che appartengono alla classe di materiali prima considerata. Valgono ovviamente le considerazioni prima riportate. In questo caso, in aggiunta, è possibile rendere esplicita la condizione che assicura l'esistenza dei modi di taglio. Essendo

$${}_0C_{1212}^{(1)} = {}_0C_{1212}^R + \frac{1}{4}(t_1 - 3t_2),$$

con

$${}_0C_{1212}^R = \frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \lambda_2^2,$$

dalle (5.10) si ottiene che i modi del tipo D_{12} , ad esempio, sono ammissibili quando

$${}_0C_{1212}^{(1)} - \frac{1}{4} \frac{(t_1 - t_2)^2}{(t_1 + t_2)} = \frac{\lambda_2^2 t_1^2 - \lambda_1^2 t_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(t_1 + t_2)} = 0,$$

ossia quando

$$\frac{t_1}{\lambda_1} = \frac{t_2}{\lambda_2} \quad \text{o} \quad \frac{t_1}{\lambda_1} = -\frac{t_2}{\lambda_2}.$$

Nel caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2$ ci si riconduce al caso $t_1=t_2$ per il quale la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità del materiale.

Per la trazione monoassiale ($t_1=t_2=0$ e $t_3>0$) accade che la quantità ${}_0C_{1313}^{(1)} - t_3/4$ sia pari al modulo ${}_0C_{3131}^R$ che non può mai annullarsi. La perdita di stabilità coincide, quindi, sempre con la perdita di stabilità del materiale.

Analoghi risultati si possono ottenere per le versioni incompressibili dei materiali considerati sostituendo a ${}_0C_{1212}^{(1)}$ e ${}_0C_{1313}^{(1)}$, ${}_0C_{1212}^{(1)} - q/2$ e ${}_0C_{1313}^{(1)} - q/2$ rispettivamente. La

condizione di stabilità del materiale è espressa in termini della definitezza positiva del tensore:

$${}_0\bar{C}_{ijkl}^{(1)} = {}_0C_{ijkl}^{(1)} - \frac{q}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}).$$

L'equazione dei modi di taglio nel piano 1-2, ad esempio si modifica in

$$2{}_0\bar{C}_{1212}^{(1)}D_{12} - \frac{1}{2}\frac{(t_1 - t_2)^2}{(t_1 + t_2)}D_{12} = 2{}_0C_{1212}^R D_{12} + \frac{1}{2}(t_1 - 3t_2)D_{12} - \frac{1}{2}\frac{(t_1 - t_2)^2}{(t_1 + t_2)}D_{12} = 0.$$

In generale, per materiali arbitrariamente anisotropi, i modi di biforcazione possono essere accompagnati da componenti di rotazione attorno agli assi principali non garantendo l'annullarsi del termine geometrico nella condizione di stabilità.

Nel caso di tensione uniforme ($t_1 = t_2 = t_3 = t > 0$) la perdita di stabilità strutturale, deve necessariamente coincidere con la perdita di stabilità materiale. Infatti, in questo caso

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + t\mathbf{1} \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}) = \mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \underline{t\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}},$$

ed il termine sottolineato è sempre positivo, quindi se avviene la biforcazione deve necessariamente avvenire con un automodo caratterizzato da $\mathbf{W} = \mathbf{0}$. Se il materiale è lineare e deriva da un potenziale, o non-lineare derivante da un potenziale ma con dati omogenei, la biforcazione, inoltre, deve necessariamente coincidere con la perdita di stabilità materiale. Per questo caso, quindi, la condizione SM è necessaria e sufficiente per la stabilità strutturale. Si noti che la simmetria dell'automodo nel caso della tensione uniforme può essere anche dimostrata utilizzando le (5.8). Se si utilizza una generica misura di deformazione, essendo

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D} + t f''(1)\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + t\mathbf{W} \cdot \mathbf{W},$$

la perdita di stabilità strutturale e materiale avviene con materiale f-instabile se $f''(1) > 0$, ed f-stabile per $f''(1) < 0$.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per un materiale incompressibile.

Dalle considerazioni precedenti e da quelle del capitolo 3 è chiaro che per un corpo continuo omogeneo nella configurazione di riferimento naturale e che sia stato deformato attraverso un processo di deformazione omogeneo, sotto un sistema di tensioni incrementali "all-round", la condizione sufficiente di stabilità implica la condizione di stabilità del materiale. L'inverso vale se la perdita di stabilità avviene per gradienti di deformazione incrementale che rendono nullo l'effetto geometrico dei carichi morti sul criterio di stabilità misurato secondo la deformazione di Biot. Questa circostanza si verifica, ad esempio, qualora la perdita di stabilità avviene con gradienti di deformazione simmetrica o per tensioni di trazione uniformi sul contorno. E' chiaro come in questi casi la

condizione di stabilità del materiale, vista come restrizione sul legame costitutivo, escluda a priori ogni perdita di stabilità e di unicità.

Per materiali incrementali lineari che ammettono un potenziale del gradiente della deformazione incrementale la perdita di stabilità del materiale avviene non prima della perdita di stabilità e di unicità (biforcazione). Le stesse conclusioni valgono anche per materiali incrementali non lineari che ammettono un potenziale, nell'ipotesi che le forze esterne incrementali siano nulle (dati omogenei). La perdita di unicità e di stabilità avviene con una biforcazione omogenea e se tale biforcazione è caratterizzata da un gradiente di deformazione incrementale che annulla l'effetto geometrico secondo la misura di deformazione di Biot (gradienti simmetrici o tensioni di trazione uniformi, ad esempio) la biforcazione avviene con materiale non più stabile. Queste relazioni sono espresse nel seguente specchietto:

$$\begin{aligned}
 CSU \equiv Stabilità &\Rightarrow \begin{cases} SM \\ Unicità \end{cases} \\
 Perdita di Stabilità &\Rightarrow Biforcazione \\
 Perdita di Stabilità con effetti geometrici nulli : SM &\begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} Stabilità
 \end{aligned}
 , \quad (5.12)$$

dove con CSU si è indicata la condizione sufficiente di unicità (5.1).

Genericamente, si possono avere due distinte situazioni lungo un percorso di deformazione: la prima corrisponde ad un segmento (tratto continuo) lungo il quale vale la condizione di unicità (o di stabilità) per cui la soluzione è unica, poi uno stato critico per il quale avviene una biforcazione sotto dati omogenei con gradiente tale da rendere nulli gli effetti geometrici (gradienti simmetrici, ad esempio) in corrispondenza del quale si perde la stabilità strutturale e del materiale; la seconda ad un segmento (tratteggiato) lungo il quale la perdita di stabilità, accompagnata dalla biforcazione, corrisponde ad un generico gradiente ed il materiale rimane stabile. Il materiale può essere stabile o instabile pur se lo stato di deformazione è instabile.

Nel caso di materiali non-lineari con dati non omogenei, utilizzando il solido di confronto è possibile dire che:

$$\begin{aligned}
 Stabilità solido di confronto &\Rightarrow CSU solido reale \Rightarrow \begin{cases} Stabilità solido reale \Rightarrow SM \\ Unicità solido reale \end{cases} \\
 Perdita di stabilità con effetti geometrici nulli : SM &\begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} Stabilità solido reale
 \end{aligned}
 .$$

La perdita di stabilità del materiale, quindi, avviene necessariamente con la condizione sufficiente di unicità non più soddisfatta. Se il materiale ammette un solido lineare di confronto e deriva da un potenziale, quando la procedura di confronto è critica, nel senso

che la biforcazione e perdita di stabilità del solido di confronto coincide con la biforcazione del solido reale (non necessariamente accompagnata da perdita di stabilità), la perdita di stabilità materiale non avviene prima della perdita di unicità.

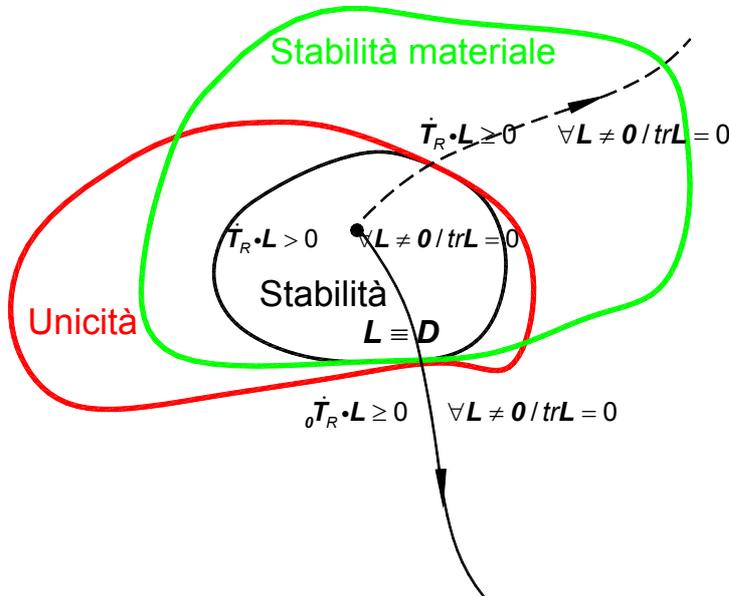


Fig. 5.1. Percorsi di deformazione omogenea per un materiale incrementale non-lineare con forze omogenee “all round”.

5.3 STABILITA' DEL MATERIALE IN SOLIDI IPERELASTICI ISOTROPI ED INCOMPRESSIBILI

La condizione di stabilità infinitesima per un materiale incompressibile si esprime come:

$$\int_B \frac{1}{2} \dot{T}_R \cdot L \, dv = \int_B \frac{1}{2} (\bar{C}_0^R [L] \cdot L) \, dv =$$

$$\int_B \frac{1}{2} (\dot{T}^{(n)} \cdot D + T \cdot \ddot{E}^{(n)}) \, dv > 0 \quad \forall \mathbf{v}_i, \{ \nabla \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_i = 0 \text{ su } \partial B^x, \text{div } \mathbf{v} = 0 \}$$

(5.13)

avendo indicato con $\ddot{E}^{(n)}$ la componente del secondo ordine del tensore di deformazione di Biot ($L^T L - DD$). Nella (5.13) si è introdotta la notazione $\dot{\chi} = \mathbf{v}$. Il primo termine $\dot{T}^{(n)} \cdot D$ caratterizza il tipo di risposta stabile od instabile del materiale, mentre il secondo termine

$\mathbf{T} \cdot \ddot{\mathbf{E}}^{(n)}$ caratterizza l'effetto stabilizzante o instabilizzante dei carichi morti. Nell'ipotesi di un materiale con moduli istantanei tangenti che dipendono da un parametro di carico $\hat{\lambda}$, per deformazioni e proprietà del materiale omogenee e condizioni al contorno di sole forze (*all-round dead load*) la (5.13) si può esprimere nella seguente maniera:

$$\frac{1}{2} \mathbf{C}_0^{(n)}(\hat{\lambda})[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - \frac{q(\hat{\lambda})}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{T}(\hat{\lambda}) \cdot \ddot{\mathbf{E}}^{(n)} > 0 \quad \forall \mathbf{v}_i / \{\nabla \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}. \quad (5.14)$$

Nei prossimi paragrafi si analizzeranno alcuni esempi, per illustrare i cambiamenti di segno delle quantità coinvolte nella (5.14) lungo un processo di carico monoparametrico che parte da una configurazione scarica (naturale) nella quale il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(n)}$ definito in termini di componenti come

$${}_0 \bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^{(n)} = {}_0 \mathbf{C}_{ijkl}^{(n)} - \frac{q}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}),$$

è definito positivo. Si mostrerà come il softening (o la perdita di stabilità del materiale) inteso come perdita di definitezza positiva del tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(n)}$, non possa essere raggiunto prima della perdita di stabilità ovvero della biforcazione. Inoltre, risulterà evidente come per i particolari casi considerati, la perdita di stabilità coincida usualmente con la perdita di stabilità del materiale, per cui il limite di stabilità risulta anche un limite oltre il quale anche il materiale risulta instabile. L'obiettivo principale è quello di evidenziare gli effetti della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione.

E' utile precisare che nel caso di carichi di compressione, usualmente, il termine di tipo geometrico contenente l'influenza dei carichi morti, fornisce un effetto instabilizzante tale da non consentire il raggiungimento del softening, come si può vedere esprimendo il termine geometrico in funzione delle tensioni principali:

$$\mathbf{T}_{ij} \ddot{\mathbf{E}}_{ij}^{(n)} = (\mathbf{t}_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i) \cdot \left[(\mathbf{W}^T \mathbf{W})_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \right] = (t_1 + t_2) \mathcal{W}_{12}^2 + (t_1 + t_3) \mathcal{W}_{13}^2 + (t_3 + t_2) \mathcal{W}_{32}^2,$$

e notando che se la somma di due tensioni principali è negativa la rotazione intorno al terzo asse principale provoca l'instabilità. L'instabilità del materiale per condizioni di carico di tipo *all-round* può essere raggiunta eventualmente solo nel caso di carichi prevalentemente di trazione per i quali la perdita di stabilità avviene in presenza di un termine geometrico $\mathbf{T}(\hat{\lambda}) \cdot \ddot{\mathbf{E}}^{(n)}$ positivo.

Supponendo che la pressione idrostatica incrementale è nulla, se il corpo perde la stabilità lungo un percorso di deformazioni stabili per una deformazione omogenea, allora essendo $\bar{\mathbf{C}}_0^R$ simmetrico, con $\bar{\mathbf{C}}_0^R$ tensore dei moduli istantanei tangenti che include la pressione indeterminata, esiste una direzione di singolarità \mathbf{L}_c tale che:

$$2\bar{\mu}_B^* D_{11}^2 + 2\bar{\mu}_B D_{12}^2. \quad (5.19)$$

Il secondo termine della (5.13), che caratterizza l'effetto stabilizzante od instabilizzante dei carichi morti agenti nella configurazione corrente della quale si vuole indagare il carattere di stabilità, assume la seguente espressione:

$$T_{ij} \ddot{E}_{ij}^{(1)} = (t_1 + t_2) W_{12}^2 + 2D_{12} W_{12} (t_2 - t_1), \quad (5.20)$$

che nell'ipotesi che lo stato di tensione corrente sia monoassiale ($T_{11} = \sigma$) si specializza in:

$$T_{11} \ddot{E}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} \sigma (L_{j1} L_{j1} - D_{j1} D_{j1}) = \frac{1}{2} \sigma (v_{2,1}^2 - D_{12}^2). \quad (5.21)$$

Ci proponiamo di esaminare i cambiamenti di segno dei due fattori integrandi della (5.13) lungo un processo di carico monoassiale per materiali iperelastici aventi particolari forme della densità dell'energia di deformazione. La condizione necessaria e sufficiente affinché la (5.18) sia definita positiva è che $\bar{\mu}_B^*, \bar{\mu}_B$ siano entrambi positivi. In seguito verranno presi in considerazione alcuni particolari tipi di materiali iperelastici ed isotropi.

Materiale Neo-Hookiano. Il materiale in questione è caratterizzato dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mu^0 (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2), \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \mu^0 (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \\ \mu^* = \mu &= \bar{\mu}_B + \frac{\sigma}{4} = \bar{\mu}_B^* + \frac{\sigma}{4} = \frac{1}{2} \mu^0 (\lambda^2 + \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nella (5.22) μ^*, μ sono i moduli istantanei associati al tensore $\mathbf{C}_0^{(0)}$ definiti al capitolo 4. La condizione di definitezza positiva del tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ nello stato di riferimento senza tensioni residue ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$, $\lambda = 1$), condizione che usualmente viene imposta a priori nella teoria classica delle deformazioni infinitesime, impone che $\bar{\mu}_B^*, \bar{\mu}_B$ siano positivi nello stato naturale, ovvero che il coefficiente μ_0 sia positivo, essendo

$$\bar{\mu}_B \Big|_{\lambda=1} = \bar{\mu}_B^* \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda^2 + \lambda^{-2}) - \frac{\sigma}{4} \Big|_{\lambda=1} = \mu_0. \quad (5.23)$$

Il termine caratterizzante la stabilità del materiale nell'ipotesi di tensione monoassiale $\sigma > 0$ che implica $\lambda > 1$, è sempre positivo poiché

$$\bar{\mu}_B = \bar{\mu}_B^* = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda^2 + \lambda^{-2}) - \frac{\sigma}{4} = \mu_0 \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{3\lambda^{-2}}{4} \right) > 0. \quad (5.24)$$

D'altro canto la condizione di stabilità infinitesima (5.13) è sempre soddisfatta poiché si ha che

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = 2\bar{\mu}_B^* D_{11}^2 + \frac{1}{2} \sigma v_{2,1}^2 + 2D_{12}^2 \left(\bar{\mu}_B - \frac{\sigma}{4} \right) \quad (5.25)$$

con $\bar{\mu}_B^* > 0$, $\sigma > 0$, $\left(\bar{\mu}_B - \frac{\sigma}{4} \right) = \mu_0 \lambda^{-2} > 0$. La (5.25) implica anche che il materiale *non raggiunge mai la biforcazione*.

Anche nel caso in cui la tensione monoassiale è di compressione con $0 < \lambda < 1$, i moduli $\bar{\mu}_B^*$, $\bar{\mu}_B$ rimangono positivi come si può vedere dalla (5.24). In questo caso, però, la condizione di stabilità strutturale può essere violata per la presenza del termine instabilizzante dei carichi morti nella configurazione corrente $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(1)}$.

Il corpo del materiale in questione rimane, quindi, sempre con materiale stabile (ossia con $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ definito positivo) e la biforcazione può avvenire solo nel caso in compressione.

In definitiva, a partire da uno stato di equilibrio stabile, per un solido di materiale Neo-Hookiano nel caso di trazione monoassiale la biforcazione ed il softening, inteso come instabilità del materiale, non si raggiungono mai, mentre nel caso di compressione il materiale può perdere la stabilità e, quindi, biforcarsi solo in presenza di materiale stabile. Il softening secondo la misura di deformazione di Biot non risulta, quindi, ammissibile.

Materiale di Neo-Hookiano generalizzato (Hill, 1975). Consideriamo un materiale iperelastico, isotropo, incompressibile, in uno stato di deformazione piano avente la seguente funzione densità di energia di deformazione:

$$W(\lambda) = \frac{2\mu_0}{\alpha^2} (\lambda^\alpha + \lambda^{-\alpha} - 2), \quad (5.26)$$

con $\alpha > 0$, dalle (4.60)-(4.62) risulta che per uno stato di tensione monoassiale:

$$\sigma = \frac{2\mu_0}{\alpha} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}), \quad 2\mu = \frac{2\mu_0}{\alpha} \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}), \quad 4\mu^* = 2\mu_0 (\lambda^\alpha + \lambda^{-\alpha}). \quad (5.27)$$

I moduli istantanei di Biot sono

$$\bar{\mu}_B = \frac{\mu_0}{\alpha} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}) \left(\frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1} - \frac{1}{2} \right), \quad \bar{\mu}_B^* = \frac{\mu_0}{2} \left(\lambda^\alpha + \lambda^{-\alpha} - \frac{\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}}{\alpha} \right) \quad (5.28)$$

La condizione di definitezza positiva del $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ nello stato di riferimento senza tensioni residue ($\mathbf{T}=\mathbf{0}$, $\lambda=1$) fornisce

$$\bar{\mu}_B|_{\lambda \rightarrow 1} = \bar{\mu}_B^*|_{\lambda=1} = \mu_0 > 0, \quad ,$$

mentre l'ipotesi $\sigma > 0$ implica che $\lambda > 1$. Il modulo $\bar{\mu}_B$ risulta essere positivo per $\lambda > 0$, mentre il modulo $\bar{\mu}_B^*$ per $\alpha < 1$ passa da positivo a negativo per

$$\lambda = \lambda_{MAX} = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.29)$$

mentre per $\alpha > 1$ il modulo rimane sempre positivo (Fig. 5.2).

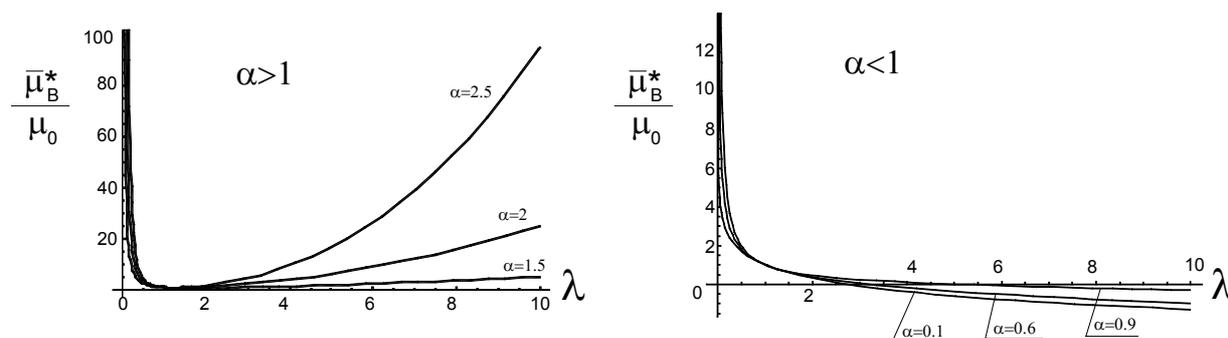


Fig. 5.2 Comportamento del modulo di Biot $\bar{\mu}_B^*$.

Il modulo $\bar{\mu}_B^*$ si annulla in corrispondenza del carico massimo che coincide con la tensione principale di Biot massima (Fig. 5.3), infatti:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{d^2W}{d\lambda^2} = 0 \rightarrow 4\mu^* - \sigma = 4\bar{\mu}_B^* = 0,$$

e quindi il softening del materiale, che coincide con un softening del diagramma carico-spostamento, deve necessariamente avvenire con $\lambda > \lambda_{MAX}$:

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)} [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} < 0 \rightarrow \lambda > \lambda_{MAX}. \quad (5.30)$$

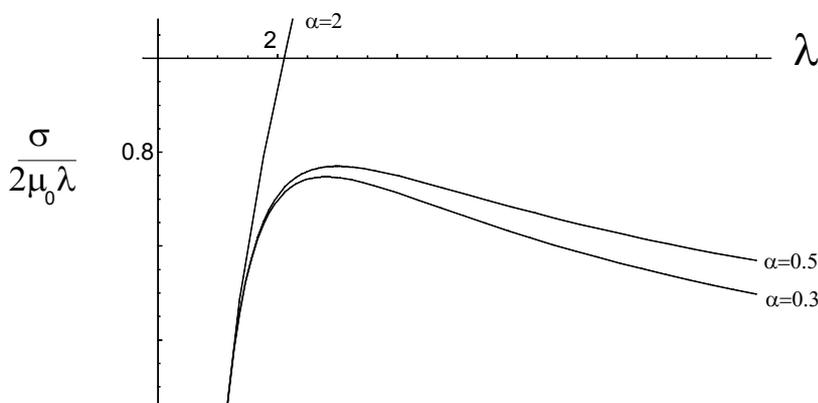


Fig. 5.3 Comportamento del carico totale σ / λ .

La pressione idrostatica può essere determinata in funzione dello stato di tensione utilizzando la condizione di incompressibilità e la relazione che intercorre tra il tensore di Cauchy e quello di Biot $\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} + q\mathbf{U}^{-1}\right)\mathbf{R}^T$ valida per materiali isotropi. Si

ha, infatti, che

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{T} - q\mathbf{1}) &= \det\left(\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}}\mathbf{R}^T\right) \\ \det\left(\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}}\mathbf{R}^T\right) &= \det\frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} = \det\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i\right) = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{4\mu_0^2}{\alpha^2} \\ \det(\mathbf{T} - q\mathbf{1}) &= -q(\sigma - q) \end{aligned} \quad (5.31)$$

e q risulta essere la radice più piccola della precedente equazione di secondo grado:

$$q = -\frac{2\mu_0}{\alpha}\lambda^{-\alpha}, \quad (5.32)$$

come risulta dalla condizione $\sigma_2 = \lambda_2\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + q = 0$.

La condizione di esclusione implica che per $\bar{\mu}_B^* > 0 \cap \sigma > 0 \cap \bar{\mu}_B > \frac{\sigma}{4}$, la biforcazione non può avvenire. Essendo

$$\bar{\mu}_B - \frac{\sigma}{4} = \frac{\mu_0}{\alpha}\left(\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}\right)\left(\frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1} - 1\right) > 0,$$

ne risulta che la biforcazione può avvenire non appena $\bar{\mu}_B^*$ diventa nullo nel regime ellittico e con il materiale non più stabile. Il funzionale nella (5.13) è, infatti, sempre positivo per $\lambda < \lambda_{MAX}$ e nullo per $\lambda = \lambda_{MAX}$ per ogni campo di velocità di deformazione del tipo $v_1 = a x_1$, $v_2 = -a x_2$ con a arbitrario. La perdita di stabilità strutturale coincide, quindi, con la perdita di stabilità del materiale e l'esistenza di una soluzione incrementale al problema omogeneo (autosoluzione) in corrispondenza dello stato caratterizzato dall'annullarsi di $\bar{\mu}_B^* = \bar{\mu}_B$, ovvero per $\lambda = \lambda_{MAX}$ può essere verificata immediatamente osservando che il campo sopra definito soddisfa le equazioni di equilibrio incrementale nello stato di biforcazione con \dot{q} pari a $2\mu_0\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}v_{1,1}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} = 0 \quad (5.33)$$

e la condizione $\dot{T}_{Rij} = {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R v_{k,l} + \dot{q}\delta_{ij} - qv_{j,i} = 0$:

$$\begin{aligned}
 {}_0\dot{T}_{R11} &= {}_0C_{1111}^R v_{1,1} + \dot{q} - q v_{1,1} = 0 \\
 {}_0\dot{T}_{R22} &= {}_0C_{2222}^R v_{2,2} + \dot{q} - q v_{2,2} = 0 \\
 {}_0\dot{T}_{R12} &= {}_0C_{1212}^R v_{1,2} + {}_0C_{1221}^R v_{2,1} - q v_{2,1} = 0, \\
 {}_0\dot{T}_{R21} &= {}_0C_{2121}^R v_{2,1} + {}_0C_{2112}^R v_{1,2} - q v_{1,2} = 0
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

avendo considerato che

$$\begin{aligned}
 {}_0C_{1111}^R &= \frac{2\mu_0}{\alpha} (\alpha - 1) \lambda^\alpha & {}_0C_{2222}^R &= \frac{2\mu_0}{\alpha} (\alpha - 1) \lambda^{-\alpha} \\
 {}_0C_{2121}^R &= \frac{2\mu_0}{\alpha} \frac{\lambda^4}{\lambda^4 - 1} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}) & {}_0C_{2112}^R &= {}_0C_{1221}^R = \frac{2\mu_0}{\alpha} \frac{1}{\lambda^4 - 1} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha}) . \\
 {}_0C_{1212}^R &= \frac{2\mu_0}{\alpha} \frac{1}{1 - \lambda^4} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

In definitiva nel caso di trazione monoassiale il softening non risulta raggiungibile per il materiale in questione caratterizzato dalle (5.26)-(5.28), poiché la biforcazione avviene non appena il $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ diventa semidefinito positivo.

5.5 STABILITA' DEL MATERIALE IN SOLIDI IPERELASTICI ISOTROPI ED INCOMPRESSIBILI: DEFORMAZIONI 3D

Materiale Neo-Hookiano. Consideriamo ora la biforcazione ed il softening per il materiale Neo-Hookiano a partire da uno stato di deformazione omogenea coassiale con le direzioni coordinate nel caso più generale di uno stato di deformazione 3D. Il materiale è caratterizzato dalla seguente densità di energia di deformazione:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = \mu_0 \mathbf{E}_{ii}^{(2)}. \tag{5.35}$$

Il funzionale di stabilità può essere espresso in una forma più conveniente attraverso il legame incrementale $\dot{\mathbf{T}}^{(2)} = \mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1} - 2q\mathbf{D}$ associato al secondo tensore di Piola-Kirchhoff [vedi eq. (3.76)] $\mathbf{T}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^{(2)}} + q\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}$:

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{1}{2} (\mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - 2q\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}) dv = \\
 \int_B \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(1)}) dv > 0 \quad \forall \mathbf{v}_i / \{ \nabla \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_i = 0 \text{ su } \partial B^x, \text{div } \mathbf{v} = 0 \}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Per gli sviluppi che seguono e' utile riportare le relazioni tra i moduli associati ad \mathbf{T}_R e $\mathbf{T}^{(1)}$ e quelle tra $\mathbf{T}^{(1)}$ e $\mathbf{T}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
{}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R &= {}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^{(1)} + q\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{4}(T_{il}\delta_{kj} + T_{kl}\delta_{jl} + T_{jk}\delta_{il} - 3T_{jl}\delta_{ik}) \\
{}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^{(1)} &= {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)} - q(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik}) + \frac{1}{4}(T_{kj}\delta_{il} + T_{lj}\delta_{ik} + T_{il}\delta_{kj} + T_{ik}\delta_{jl})
\end{aligned} \tag{5.37}$$

La condizione di definitezza positiva nello stato naturale per il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$

$$\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} \Big|_{\lambda_i=1, \tau=0} = -2q\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 2\mu_0 |\mathbf{D}|^2 > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$$

fornisce $\mu_0 > 0$.

Caso del blocco in tensione uniforme (all-round dead tension stress). L'utilizzo della (5.36) nel caso di un corpo soggetto ad uno stato di tensione uniforme di trazione $\mathbf{T}=\sigma\mathbf{1}$ che rimane indeformato ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$), fornisce per il fattore integrando della (5.36):

$$\frac{1}{2}(-2q|\mathbf{D}|^2 + \sigma|\mathbf{D}|^2 + \sigma|\mathbf{W}|^2) = \frac{1}{2}(-2qD_{ij}D_{ij} + \sigma D_{ij}D_{ij} + \sigma W_{ij}W_{ij}), \tag{5.38}$$

avendo considerato che $\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{W}$ per $\mathbf{T}=\sigma\mathbf{1}$ e che i moduli ${}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)}$ sono nulli, come risulta dalla relazione:

$${}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)} = J^{-1} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} F_{l\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{\alpha\beta}^{(2)} \partial E_{\gamma\lambda}^{(2)}},$$

che specializzata sugli assi di deformazione euleriani coincidenti con quelli coordinati fornisce

$${}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)} = J^{-1} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij}^{(2)} \partial E_{kl}^{(2)}}.$$

La parte indeterminata della tensione q si ricava dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{T} - q\mathbf{1}) &= \det\left(\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{R}^T\right) = \det\left(\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^{(2)}} \mathbf{F}^T\right) \\
\det\left(\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{R}^T\right) &= \det \frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} = \det\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i\right) = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \mu_0^3 \\
\det(\mathbf{T} - q\mathbf{1}) &= (\sigma - q)^3
\end{aligned} \tag{5.39}$$

dalle quali segue che $q = \sigma - \mu_0$.

La (5.38) si trasforma quindi in

$$\frac{1}{2}[(2\mu_0 - \sigma)D_{ij}D_{ij} + \sigma W_{ij}W_{ij}],$$

ed il limite di stabilità è $\sigma = 2\mu_0$ poiché per $\sigma < 2\mu_0$ il fattore integrando è sempre positivo, mentre per $\sigma = 2\mu_0$ è nullo per ogni campo di deformazioni uniforme del tipo $v_1=a$, $v_2=b$, $v_3=-(a+b)$ con a e b arbitrari.

L'esistenza di una soluzione incrementale al problema con dati omogenei (autosoluzione) in corrispondenza dello stato caratterizzato da $\sigma = 2\mu_0$ e $\lambda_i = 1$, può essere verificata

immediatamente osservando che il campo sopra definito, soddisfa le equazioni di equilibrio incrementale omogenee nello stato di biforcazione con \dot{q} nullo

$$\frac{\partial}{\partial X_j} {}_0 C_{ijkl}^R \frac{\partial V_k}{\partial X_l} - \frac{\partial \dot{q}}{\partial X_i} = 0, \quad (5.40)$$

e la condizione $\dot{T}_{Rij} = {}_0 C_{ijkl}^R L_{kl} + \dot{q} \delta_{ij} - q v_{j,i} = 0$, essendo

$$\begin{aligned} \dot{T}_R &= \dot{T}^{(2)} + \mathbf{L}\mathbf{T} = \mathbf{C}^{(2)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1} - 2q\mathbf{D} + \mathbf{L}\mathbf{T} \\ \dot{T}_{Rii} &= -2qD_{ii} + \sigma D_{ii} = (2\mu - \sigma)D_{ii} = 0 \\ \dot{T}_{Rij} &= 0 \quad i \neq j \end{aligned}$$

Per verificare lo stato del materiale si può osservare che

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(1)} \cdot \mathbf{D} = \dot{T}^{(2)} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 = \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - 2q\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 = \\ (\sigma - 2q)|\mathbf{D}|^2 = (-\sigma + 2\mu_0)|\mathbf{D}|^2 = 0 \end{aligned}, \quad (5.41)$$

essendo

$$\dot{T}^{(2)} = \dot{T}^{(1)} - \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{D}), \quad \dot{T}^{(1)} = \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1}, \quad \dot{T}^{(2)} = \mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1} - 2q\mathbf{D}.$$

Di conseguenza il corpo biforca con il materiale che perde la stabilità, ovvero con il $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ nullo. D'altra parte utilizzando la prima della (5.37) assieme alle relazioni tra i moduli istantanei nominali e le derivate dell'energia di deformazione, o la seconda delle (5.37) e la considerazione che i moduli ${}_0 C_{ijkl}^{(2)}$ sono nulli, i moduli relativi al legame alla Biot sono

$$\begin{aligned} {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{1111}^{(1)} = {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{2222}^{(1)} = {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{3333}^{(1)} = \mu_0 - q \\ {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{1212}^{(1)} = {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{1313}^{(1)} = {}_0 \bar{\mathbf{C}}_{2323}^{(1)} = \mu_0 / 2 - q / 2, \end{aligned} \quad (5.42)$$

e di conseguenza in corrispondenza del carico di biforcazione $\sigma = 2\mu_0$ il materiale perde la stabilità essendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = \left[-q(\delta_{ii}\delta_{jk} + \delta_{jj}\delta_{ik}) + \frac{1}{4}(T_{kj}\delta_{il} + T_{lj}\delta_{ik} + T_{il}\delta_{kj} + T_{ik}\delta_{jl}) \right] D_{ij}D_{hk} = \\ (-2q + \sigma)D_{ij}D_{ij} = (-\sigma + 2\mu_0)D_{ij}D_{ij} = 0 \end{aligned}, \quad (5.43)$$

per ogni campo di deformazione incrementale.

In definitiva nel caso di un corpo soggetto ad una tensione uniforme di trazione il softening non risulta raggiungibile per il materiale in questione caratterizzato dalle (5.35) poiché la biforcazione avviene non appena il $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ perde la sua definitezza positiva. La perdita di stabilità, invece, avviene con $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$ definito negativo.

Caso del blocco in trazione monoassiale. Per il blocco rettangolare soggetto ad una tensione di trazione $\sigma_1 = \sigma$ con le rimanenti tensioni principali nulle, la condizione di incompressibilità fornisce:

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \mu_0 \lambda_2^2 + q, \quad \sigma_3 = \mu_0 \lambda_3^2 + q \\
\sigma_2 = \sigma_3 &\rightarrow \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_2 \lambda_3 \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}. \\
\sigma_2 = \sigma_3 = 0 &\rightarrow q = -\mu_0 \lambda_1^{-1}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Il funzionale di stabilità si semplifica nella forma:

$$\int_B (-q \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \ddot{\mathbf{E}}^{(2)}) dv = \int_B (-q D_{ij} D_{ij} + \frac{1}{2} \sigma L_{j1} L_{j1}) dv \tag{5.45}$$

ed attraverso le (5.44) il fattore integrando diventa

$$\mu_0 \lambda_1^{-1} D_{ij} D_{ij} + \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}) L_{j1} L_{j1}, \tag{5.46}$$

che risulta positivo per ogni campo di velocità essendo per $\sigma > 0$ $\lambda_1 > 1$. Di conseguenza il corpo non biforca mai ed il materiale rimane sempre stabile essendo

$$\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = 2\mu_0 \lambda_1^{-1} D_{ij} D_{ij} + \mu_0 (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}) D_{i1} D_{i1} > 0, \tag{5.47}$$

per ogni campo di deformazione \mathbf{D} non nullo.

Per il blocco in trazione di materiale Neo-Hookiano il softening non risulta raggiungibile e la biforcazione non può manifestarsi.

Materiale alla Ogden. Un modello di materiale elastico più realistico di quelli presi in considerazione in precedenza, è quello descritto da Ogden (1972) attraverso la seguente funzione densità di energia di deformazione:

$$W = \sum_{r=1}^n \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3). \tag{5.48}$$

Questo tipo di materiale è capace di rappresentare diversi materiali a seconda della scelta dei parametri μ_r , α_r . Per ottenere il materiale Neo-Hookiano, basta porre $n=1$ e $\alpha_1=2$ con μ_1 che può essere identificato con il modulo di taglio G , mentre per il materiale di Mooney-Rivlin si può porre $n=2$ e $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-2$ con $2G=\mu_1\alpha_2$.

Per quanto segue si riportano le espressioni dei moduli istantanei tangenti relativi al primo tensore di Piola-Kirchhoff specializzati lungo gli assi principali euleriani (Ogden, 1984):

$$\begin{aligned}
{}_0\mathbf{C}_{ijj}^R &= \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \lambda_j} = \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) \lambda_i^{\alpha_r} \delta_{ij} \\
{}_0\mathbf{C}_{ijj}^R &= \frac{\left(\lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} - \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right) \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} = \frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_j^{\alpha_r} - \lambda_i^{\alpha_r}) \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \quad i \neq j \\
{}_0\mathbf{C}_{ijj}^R &= {}_0\mathbf{C}_{jij}^R = {}_0\mathbf{C}_{jji}^R - \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} = \frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_i^{\alpha_r} - \lambda_j^{\alpha_r}) \lambda_i^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} - \sum_{r=1}^n \mu_r \lambda_j^{\alpha_r} \quad i \neq j \\
{}_0\mathbf{C}_{ijj}^R &= \frac{1}{2} \left({}_0\mathbf{C}_{ijj}^R - {}_0\mathbf{C}_{jij}^R + \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r \lambda_j^{\alpha_r} \quad i \neq j, \lambda_i = \lambda_j
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Inoltre, è utile richiamare le seguenti relazioni tra diverse misure di moduli tangenti istantanei:

$$\begin{aligned}
{}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R &= {}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^{(1)} + q \delta_{ii} \delta_{jk} - \frac{1}{4} (t_i \delta_{ii} \delta_{kj} + t_i \delta_{ki} \delta_{jl} + t_j \delta_{jk} \delta_{il} - 3t_j \delta_{jl} \delta_{ik}) \\
{}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^{(1)} &= {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)} - q (\delta_{ii} \delta_{jk} + \delta_{jj} \delta_{ik}) + \frac{1}{4} (t_j \delta_{kj} \delta_{il} + t_j \delta_{lj} \delta_{ik} + t_i \delta_{ii} \delta_{kj} + t_i \delta_{ik} \delta_{jl}) \\
{}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R &= {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)} - q (\delta_{jj} \delta_{ik}) + t_j \delta_{jl} \delta_{ik}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

con

$$t_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + q = \sum_{r=1}^n \mu_r \lambda_i^{\alpha_r} + q, \tag{5.51}$$

tensione principale di Cauchy.

Consideriamo un cubo di materiale alla Ogden soggetto ad una condizione di carico triassiale con carichi uguali su tutti i lati ed uniformemente distribuiti sulle facce. Le soluzioni di equilibrio sono regolate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
t_i^R &= \sum_{r=1}^n \mu_r \lambda_i^{\alpha_r - 1} + \frac{q}{\lambda_i} \\
t_1^R &= t_2^R = t_3^R
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Per semplicità si considerano solo due percorsi di equilibrio: quello fondamentale con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e quello secondario con $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\lambda_3 \neq \lambda_1$. Per il cubo, inoltre, esiste un terzo percorso di equilibrio per $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Lungo la soluzione fondamentale di equilibrio fondamentale di equilibrio $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ il funzionale di stabilità (5.14) a meno del fattore $\frac{1}{2}$ e con riferimento alla misura di deformazione $\mathbf{E}^{(2)}$, si specializza in:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - 2q\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 {}_0\mathbf{C}_{iii}^{(2)} D_{ii} D_{ii} + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} D_{ij} D_{ij} - 2q D_{ij} D_{ij} + t_i L_{ki} L_{ki} = \\ \left[\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) - q \right] D_{ii} D_{ii} + (1 - \delta_{ij}) \left[\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) - q \right] D_{ij} D_{ij} + \left[\sum_{r=1}^n \mu_r + q \right] W_{ij} W_{ij} \end{aligned} \quad (5.53)$$

tenendo conto che gli assi euleriani coincidono con gli spigoli del cubo e delle seguenti relazioni ricavate dalle formule (5.50)

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} &= \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) \lambda_i^{\alpha_r} \delta_{ij} & {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} &= \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) \lambda_i^{\alpha_r} \delta_{ij} \\ {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} &= \frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_j^{\alpha_r} \lambda_i^2 - \lambda_i^{\alpha_r} \lambda_j^2)}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} & i \neq j \quad {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} &= \frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_j^{\alpha_r} \lambda_i^2 - \lambda_i^{\alpha_r} \lambda_j^2)}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \quad i \neq j \quad (5.54) \\ & & {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) \lambda_j^{\alpha_r} \quad i \neq j, \lambda_i = \lambda_j \end{aligned}$$

La (5.53) nello stato naturale caratterizzato da:

$$\begin{aligned} t_i &= 0 \\ \lambda_i &= 1' \end{aligned} \quad (5.55)$$

è definita positiva se e solo se:

$$\sum_r \mu_r \alpha_r > 0. \quad (5.56)$$

Inoltre, la (5.53) diventa semidefinita positiva in corrispondenza di un "eigenstretch" caratterizzato da:

$$D_{ii} \mid \sum_i D_{ii} = 0, \quad (5.57)$$

per

$$\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) - q_{cr} = 0, \quad (5.58)$$

per cui la tensione critica risulta essere:

$$t_{cr} = \sum_{r=1}^n \mu_r - q_{cr}. \quad (5.59)$$

Per un materiale di Mooney-Rivlin le precedenti formule (5.58) e (5.59) si specializzano in:

$$\begin{aligned} \mu_1 (1 + 3k) &= q_{cr} \\ t_{cr} &= 2\mu_1 (1 + k) \end{aligned} \quad (5.60)$$

avendo posto $\mu_2 = -k\mu_1$.

I modi di biforcazione possibili sono le infinite combinazioni lineari dei due modi fondamentali:

$$[\mathbf{D}^1] = \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & -D_{11} & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^2] = \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & 0 & \\ & & -D_{11} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

con D_{11} scalare arbitrario.

Per lo stesso livello di carico sono possibili anche modi di biforcazione che derivano dalla combinazione lineare di modi fondamentali del tipo "eigenshear":

$$[\mathbf{D}^3] = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & 0 \\ D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{23} \\ 0 & D_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

E' facile vedere come in corrispondenza del livello di carico (5.59) tali modi di biforcazione rendano il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ nullo ed il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$ negativo: questo implica che l'instabilità del materiale può essere raggiunta dopo la perdita di stabilità strutturale, mentre se l'instabilità del materiale viene basata sul tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$ questa può essere raggiunta prima della biforcazione o perdita di stabilità strutturale.

Risulta, infatti, che

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(1)} &= \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) \lambda_i^{\alpha_r} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_i^{\alpha_r} + \lambda_j^{\alpha_r}) \delta_{ij} \\ {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(1)} &= \frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_j^{\alpha_r} \lambda_i^2 - \lambda_i^{\alpha_r} \lambda_j^2)}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_i^{\alpha_r} + \lambda_j^{\alpha_r}) \quad i \neq j, \\ {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) \lambda_j^{\alpha_r} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_i^{\alpha_r} + \lambda_j^{\alpha_r}) \quad i \neq j, \lambda_i = \lambda_j \end{aligned} \quad (5.63)$$

per cui nello stato fondamentale di equilibrio e per il carico critico (5.59) si ha

$$\begin{aligned} {}_0\bar{\mathbf{C}}_{iii}^{(1)} &= {}_0\mathbf{C}_{iii}^{(1)} - q_{cr} = \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) - q_{cr} = 0 \\ {}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijj}^{(1)} &= {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(1)} - \frac{q_{cr}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) - \frac{q_{cr}}{2} = 0 \quad i \neq j, \lambda_i = \lambda_j \end{aligned} \quad (5.64)$$

e

$$\begin{aligned} {}_0\bar{\mathbf{C}}_{iii}^{(2)} &= {}_0\mathbf{C}_{iii}^{(2)} - 2q_{cr} = \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) - 2q_{cr} = -\sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r < 0 \\ {}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijj}^{(2)} &= {}_0\mathbf{C}_{ijj}^{(2)} - q_{cr} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 2) - q_{cr} = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r < 0 \quad i \neq j, \lambda_i = \lambda_j \end{aligned} \quad (5.65)$$

Il percorso secondario di equilibrio è caratterizzato da:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = 1/\lambda^2,$$

$$t_{R1} = t_{R3} \Rightarrow q = -\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_1^{\alpha_r - 1} - \lambda_3^{\alpha_r - 1}) \quad , \quad (5.66)$$

$$t_{R1} = t_{R3} = \sum_{r=1}^n \mu_r \lambda_1^{\alpha_r - 1} - \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_1^{\alpha_r - 1} - \lambda_3^{\alpha_r - 1})$$

e si interseca con quello primario per

$$q = -\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_3} \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda_1^{\alpha_r - 1} - \lambda_3^{\alpha_r - 1}) = \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1), \quad (5.67)$$

ovvero per un livello di carico pari a

$$t_{R1} = \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r. \quad (5.68)$$

Lungo la soluzione secondaria si ha che il funzionale di stabilità diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - 2q \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^3 {}_0 C_{iii}^{(2)} D_{ii} D_{ii} + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 {}_0 C_{ijj}^{(2)} D_{ij} D_{ij} - 2q D_{ij} D_{ij} + t_i L_{ki} L_{ki} = \\ &= \left[\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) \lambda^{\alpha_r} - q \right] (D_{11}^2 + D_{22}^2) + \left[\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) \lambda^{-2\alpha_r} - q \right] D_{33}^2 + \left[2 \sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) \lambda^{\alpha_r} - 2q \right] D_{12}^2 + \\ &+ 4 \left[\frac{\sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda^{6-2\alpha_r} - \lambda^{\alpha_r})}{1 - \lambda^6} - 2q + \sum_{r=1}^n \mu_r (\lambda^{-2\alpha_r} + \lambda^{\alpha_r}) \right] (D_{13}^2 + D_{23}^2) + \\ &2 \left[\sum_{r=1}^n \mu_r \lambda^{\alpha_r} + q \right] (D_{21} W_{21} + D_{13} W_{31} + D_{12} W_{12} + D_{32} W_{32}) + \\ &2 \left[\sum_{r=1}^n \mu_r \lambda^{-2\alpha_r} + q \right] (D_{13} W_{13} + D_{23} W_{23}) + \left[\sum_{r=1}^n \mu_r \lambda^{-2\alpha_r} + q \right] (W_{13} W_{13} + W_{23} W_{23}) + \\ &\left[\sum_{r=1}^n \mu_r \lambda^{\alpha_r} + q \right] (2W_{21} W_{21} + W_{13} W_{13} + W_{32} W_{32}) \end{aligned} \quad (5.69)$$

Questo, nel caso di materiale alla Mooney-Rivlin, diventa semidefinito positivo per un eigenstretch ed un eigenshear:

$$\left[\mathbf{D}^1 \right] = \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & -D_{11} & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\mathbf{D}^2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & 0 \\ D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

in corrispondenza dei valori di λ che soddisfano l'equazione:

$$\sum_{r=1}^n \mu_r (\alpha_r - 1) \lambda^{\alpha_r} - q = (1 - \lambda^3) \left[-\lambda + k(2 + \lambda^3) \right] = 0, \quad (5.71)$$

equazione che viene in ogni caso soddisfatta per $\lambda=1$ per il quale la soluzione primaria biforca in quella secondaria. Per $k=0.2$ l'equazione ha anche come soluzioni $\lambda=0.415$ e $\lambda=2$. Si nota banalmente che in corrispondenza della biforcazione i moduli

${}_0\bar{C}_{1111}^{(1)} = {}_0\bar{C}_{2222}^{(1)} = 2{}_0\bar{C}_{1212}^{(1)}$ si annullano rendendo semidefinita positiva la matrice $\bar{C}_0^{(1)}$, mentre i moduli ${}_0\bar{C}_{1111}^{(2)} = {}_0\bar{C}_{2222}^{(2)} = 2{}_0\bar{C}_{1212}^{(2)}$ sono negativi. Analoghe considerazioni si possono fare per il materiale alla Ogden, nel qual caso i modi di biforcazione nascono in corrispondenza dei valori di λ che annullano l'espressione a membro sinistro della (5.71). Anche per il materiale alla Ogden, nei percorsi di equilibrio esaminati, la perdita di stabilità strutturale avviene con modi simmetrici e coincide con la perdita di stabilità materiale.

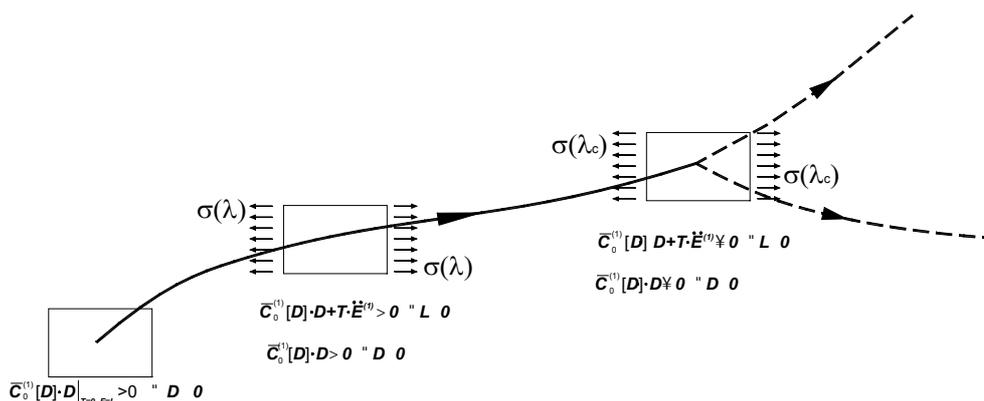


Fig. 5.4. Rappresentazione dei termini di stabilità lungo una serie lineare di stati stabili.

5.6 CONCLUSIONI

Nei risultati presentati in questo capitolo si è evidenziata l'influenza della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione per problemi caratterizzati da deformazioni omogenee. Nei casi esaminati, la perdita di stabilità del materiale non è ammissibile lungo un processo stabile di carico a partire da uno stato naturale, e la perdita di stabilità dell'equilibrio avviene in corrispondenza della perdita di stabilità del materiale (Fig. 5.4). Questa condizione particolare avviene poiché in corrispondenza dello stato di equilibrio critico, la perdita di stabilità avviene con deformazioni incrementali caratterizzate da un gradiente simmetrico ($L \in Sym$) che annullano il termine rappresentante gli effetti geometrici dei carichi morti nella configurazione in esame. E' evidente, quindi, come in tutti i casi esaminati, le restrizioni sul legame costitutivo imposte attraverso la condizione SM, escludano a priori fenomeni di instabilità e biforcazione:

$$\boxed{SM} \Rightarrow \boxed{\text{Stabilità (unicità)}}.$$

Al contrario, si è potuto notare come la condizione di instabilità del materiale misurata attraverso il tensore $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$, sia invece raggiungibile lungo un processo di deformazione stabile omogeneo. Se, infatti, il funzionale di stabilità diventa nullo lungo una direzione \mathbf{D} caratterizzata da un gradiente simmetrico per carichi di trazione, allora è chiaro come il $\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}$ diventi negativo:

$$\bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D} = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{C}}_0^{(2)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} < 0. \quad (5.72)$$

Gli esempi riportati, quindi, ricadono in quella classe di problemi esaminati in generale nel secondo paragrafo caratterizzati dal disaccoppiamento tra modi coassiali e di taglio nei piani principali. Per questi problemi, infatti, sotto opportune condizioni di carico, la perdita di stabilità coincide con la perdita di stabilità del materiale.

I risultati mostrano come la condizione di stabilità del materiale, che rappresenta efficacemente l'effetto del solo materiale nella condizione di stabilità, abbia una notevole influenza sui fenomeni di instabilità e biforcazione: agendo, infatti, esclusivamente sul materiale stesso è stato dimostrato come sia possibile escludere la perdita di unicità e di stabilità.