
CAPITOLO 4

Effetti della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di biforcazione ed instabilità. Parte 1: problemi non omogenei

4.1 Introduzione.....	4-2
4.2 Analisi dei lavori di Hill e Hutchinson (1975) e di Young (1975).....	4-3
4.2.1 Ipotesi costitutive.....	4-3
4.2.2 Equazioni di equilibrio incrementale.....	4-6
4.2.3 Regimi del problema di equilibrio incrementale	4-7
4.2.4 Classificazione dei regimi nel caso di Hill e Hutchinson (1975).....	4-9
4.2.5 Classificazione dei regimi nel caso di Young, (1975).....	4-10
4.2.6 Rappresentazione generale dei regimi.....	4-11
4.2.7 Conseguenze derivanti dalla condizione di stabilità materiale.....	4-14
4.2.8 Conseguenze derivanti dalla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli istantanei $C_0^{(0)}$	4-15
4.2.9 Connessioni con la condizione di ellitticità forte.....	4-16
4.2.10 Regimi di biforcazione nel caso del blocco rettangolare in tensione (Hill e Hutchinson, 1975).....	4-17
4.2.11 Regimi di biforcazione nel caso del blocco rettangolare in compressione (Young, 1975).....	4-20
4.3 Modi di biforcazione per il blocco rettangolare in tensione.....	4-21
4.4 Modi shear bands nel blocco in tensione.....	4-25
4.5 Materiali isotropi iperelastici.....	4-27
4.6 Modi di biforcazione per materiali isotropi iperelastici.....	4-29
4.7 Conclusioni.....	4-30

4.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo si analizzano le conseguenze delle restrizioni imposte dalla condizione di stabilità materiale, sulla biforcazione e la stabilità di solidi di forma rettangolare di materiale incrementale lineare.

I principali lavori sulla biforcazione e stabilità in solidi di forma rettangolare con leggi costitutive incrementali di tipo lineare, sono quelli di Kerr e Tang (1966); Levinson (1968); Wu e Widera (1969); Burgess e Levinson (1968); Rivlin (1974); Sawyers e Rivlin (1974); Hill e Hutchinson (1975); Young (1975); Sawyers (1976).

Il lavoro più completo sulla stabilità di solidi rettangolari, è quello di Hill e Hutchinson (1975), nel quale viene studiata la biforcazione a partire da uno stato di deformazione omogeneo di un blocco rettangolare di materiale incompressibile, vincolato a mantenere condizioni di deformazioni piane e soggetto a spostamento imposti agli estremi. Il materiale viene considerato con legame costitutivo incrementale di tipo lineare, e si suppone che il legame costitutivo incrementale mantenga la simmetria ortotropa fino alla biforcazione. L'analisi dei modi di biforcazione è sviluppata per il problema di tensione ed è completata in (Young, 1975), per il caso in compressione.

Per esaminare gli effetti della condizione di stabilità materiale si prenderà in considerazione, quindi, il classico esempio di Hill e Hutchinson (1975).

4.2 ANALISI DEI LAVORI DI HILL E HUTCHINSON (1975), E DI YOUNG (1975)

4.2.1 Ipotesi costitutive. Il materiale, del tipo incrementalmente lineare, viene considerato incompressibile ed inizialmente ortotropo rispetto alle direzioni coordinate, nello stato indeformato. Si suppone che le equazioni costitutive incrementali rimangano a simmetria ortotropa fino all'eventuale biforcazione, che lo stato di deformazione sia piano e che il legame deviatorico incrementale non sia influenzato dalla pressione idrostatica. Tutte le relazioni che seguono sono ricavate nell'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida con quella corrente.

Il legame viene introdotto utilizzando l'incremento co-rotazionale (o di Jaumann) del tensore delle tensioni di Cauchy \mathbf{T} (coincidente con quello di Kirchhoff \mathbf{T}_K , poiché il materiale è incompressibile):

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W} = \mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1}. \quad (4.1)$$

Come è stato mostrato nel capitolo 1, l'incremento di Jaumann del tensore di Kirchhoff coincide con l'incremento del tensore delle tensioni $\mathbf{T}^{(0)}$, coniugato alla misura di deformazione logaritmica. Il tensore dei moduli istantanei $\mathbf{C}_0^{(0)}$ viene assunto simmetrico (cioè ${}_0\mathbf{C}^{(0)}_{ijkl} = {}_0\mathbf{C}^{(0)}_{klij}$).

Sotto le suddette ipotesi, il legame può essere espresso nella seguente forma:

$$\overset{\circ}{T}_{11} - \overset{\circ}{T}_{22} = 2\mu^*(D_{11} - D_{22}), \quad \overset{\circ}{T}_{12} = 2\mu D_{12}, \quad (4.2)$$

coinvolgendo, quindi, solo i due moduli istantanei μ e μ^* .

In generale, il legame incrementale lineare per un materiale incompressibile è rappresentato mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}} &= \mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] + \dot{q}\mathbf{1}, \\ \overset{\circ}{\mathbf{T}} &= \bar{\mathbf{C}}_0^R[\mathbf{L}] - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W} + \mathbf{T}\mathbf{L}^T + \dot{q}\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

essendo $\text{tr } \mathbf{L} = 0$. Nella (4.3)₁ il legame è espresso attraverso il tensore del quarto ordine dei moduli istantanei $\mathbf{C}_0^{(0)}$ associato all'incremento di Jaumann di \mathbf{T} , mentre nella (4.3)₂ il legame è formulato utilizzando il tensore dei moduli istantanei $\bar{\mathbf{C}}_0^R$ che definisce il legame in termini del primo tensore di Piola-Kirchhoff attraverso l'espressione

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \bar{\mathbf{C}}_0^R[\mathbf{L}] + \dot{q}\mathbf{1} = \mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] + \dot{q}\mathbf{1} - q\mathbf{L}^T,$$

e contiene la parte indeterminata dell'incremento di tensione dipendente linearmente dal gradiente della deformazione incrementale (vedi equazione (3.80)). Nelle relazioni

precedenti è stata sfruttata la relazione che lega l'incremento del primo tensore di Piola-Kirchhoff e quello di Jaumann del tensore di Kirchhoff, valutati nell'ipotesi di coincidenza tra configurazione di riferimento e configurazione (vedi le equazioni (1.99) del capitolo 1)

Il legame tra i moduli istantanei ${}_0\bar{C}_{ijkl}^R$ e quelli relativi ${}_0C_{ijkl}^{(0)}$, è espresso dalla seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} {}_0\bar{C}_{ijkl}^R &= {}_0C_{ijkl}^R - q \delta_{ij} \delta_{jk} = {}_0C_{ijkl}^{(0)} - \frac{1}{2}(\delta_{jk} T_{li} + \delta_{jl} T_{ki} + T_{jk} \delta_{il} - T_{jl} \delta_{ik}) \quad \text{con } {}_0C_{ijkl}^{(0)} = {}_0C_{jikl}^{(0)} = {}_0C_{ijik}^{(0)} = {}_0C_{klij}^{(0)} \\ \dot{T}_{Rij} &= {}_0\bar{C}_{ijkl}^R D_{kl} + \dot{q} \delta_{ij}, \quad \dot{T}_{ij} = {}_0C_{ijkl}^{(0)} \frac{1}{2}(D_{kl} + D_{lk}) + \dot{q} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per i moduli istantanei rilevanti nel caso di deformazione piana e simmetria ortotropa (che sono 4 per l'incremento di Jaumann ${}_0C_{1111}^{(0)}$, ${}_0C_{2222}^{(0)}$, ${}_0C_{1122}^{(0)}$ e ${}_0C_{1212}^{(0)}$), risulta quindi:

$$\begin{aligned} {}_0\bar{C}_{1111}^R - 2{}_0\bar{C}_{1122}^R + {}_0\bar{C}_{2222}^R &= 4\mu^* - (\sigma_1 + \sigma_2), \quad {}_0\bar{C}_{1212}^R = \mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \\ {}_0\bar{C}_{1221}^R &= {}_0\bar{C}_{2112}^R = \mu - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1), \quad {}_0\bar{C}_{2121}^R = \mu - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \quad , \quad (4.5) \\ {}_0C_{1111}^{(0)} - 2{}_0C_{1122}^{(0)} + {}_0C_{2222}^{(0)} &= 4\mu^*, \quad {}_0C_{1212}^{(0)} = \mu \end{aligned}$$

essendo σ_i ($i=1,2,3$) la generica componente principale del tensore delle tensioni di Cauchy. Utilizzando le relazioni (1.99), il legame costitutivo incrementale in termini del tensore di Biot assume la forma:

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(1)} &= C_0^{(0)} [D] + \dot{q} \mathbf{1} - \frac{1}{2}(DT + TD) = C_0^{(1)} [D] + \dot{q} \mathbf{1} - qD = \bar{C}_0^{(1)} [D] + \dot{q} \mathbf{1} \\ {}_0\bar{C}_{ijkl}^{(1)} &= {}_0C_{ijkl}^{(1)} - \frac{1}{2}q(\delta_{jl} \delta_{ik} + \delta_{il} \delta_{jk}) = {}_0C_{ijkl}^{(0)} - \frac{1}{4}(\delta_{il} T_{kj} + \delta_{ik} T_{lj} + T_{ik} \delta_{lj} + T_{il} \delta_{kj}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La relazione tra i moduli μ e μ^* ed i corrispondenti moduli $\bar{\mu}_B$ e $\bar{\mu}_B^*$ associati all'incremento del tensore di Biot, definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}^{(1)} - \dot{T}_{22}^{(1)} &= 2\bar{\mu}_B^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}_{12}^{(1)} &= 2\bar{\mu}_B D_{12} \end{aligned} ,$$

risulta:

$$\begin{aligned} 4\bar{\mu}_B^* &= {}_0\bar{C}_{1111}^{(1)} - 2{}_0\bar{C}_{1122}^{(1)} + {}_0\bar{C}_{2222}^{(1)} = {}_0C_{1111}^{(0)} - 2{}_0C_{1122}^{(0)} + {}_0C_{2222}^{(0)} - (\sigma_1 + \sigma_2) = 4\mu^* - (\sigma_1 + \sigma_2) \\ \bar{\mu}_B &= {}_0\bar{C}_{1212}^{(1)} = {}_0C_{1212}^{(0)} - \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) = \mu - \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene il seguente legame incrementale formulato in termini dell'incremento $\dot{\mathbf{T}}_R$ ed espresso attraverso i moduli μ e μ^* :

$$\begin{cases} \dot{T}_{R11} - \dot{T}_{R22} = \left[2\mu^* - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \\ \dot{T}_{R12} = \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \right] \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \\ \dot{T}_{R21} = \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \right] \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{cases} \quad (4.8)$$

nel quale \mathbf{v} , detto anche campo di velocità, indica l'incremento di deformazione $\dot{\boldsymbol{\chi}}$.

Il problema dell'equilibrio incrementale per un solido lineare in presenza di carichi morti con dati omogenei, le cui soluzioni non banali sono i modi di biforcazione della soluzione a partire da una configurazione di equilibrio in esame, in virtù della simmetria di \mathbf{C}_0^R , può essere formulato attraverso la condizione di stazionarietà del funzionale di esclusione:

$$\frac{1}{2} \int_B \dot{\mathbf{T}}^R \cdot \mathbf{L} dv = \frac{1}{2} \int_B \left({}_0\bar{\mathbf{C}}_{ijkl}^R \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right) dv = 0, \quad (4.9)$$

nella classe delle deformazioni incrementali \mathbf{v} cinematicamente ammissibili (vedi equazione (2.63)) e che soddisfano il vincolo di incompressibilità $\mathbf{v}_{i,i}=0$. Il campo scalare $U = 1/2 \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = 1/2 ({}_0\bar{\mathbf{C}}_0^R[\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L})$ assume la seguente forma in termini dei moduli di Jaumann μ e μ^* :

$$\begin{aligned} 2U = & 2 \left[2\mu^* - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sigma_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \sigma_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 / (\sigma_1 + \sigma_2) + \\ & \frac{1}{2} \left(2\mu - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

oppure la seguente in termini dei moduli di Biot $\bar{\mu}_B$ e $\bar{\mu}_B^*$

$$\begin{aligned} 2U = & 4\bar{\mu}_B^* \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sigma_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \sigma_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 / (\sigma_1 + \sigma_2) + \\ & \frac{1}{2} \left(2\bar{\mu}_B - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

U è definito positivo se e solo se

$$\begin{aligned} & \{0 < (\sigma_1 + \sigma_2) < 4\mu^*\} \cap \left\{ \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} < 2\mu \right\}, \text{ oppure} \\ & \{0 < (\sigma_1 + \sigma_2)\} \cap \{0 < 4\bar{\mu}_B^*\} \cap \left\{ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} < 4\bar{\mu}_B \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le precedenti condizioni assicurano che il funzionale di esclusione sia positivo, condizione che esclude la possibilità di modi di biforcazione.

4.2.2 Equazioni di equilibrio incrementale. Le equazioni omogenee di equilibrio incrementale linearizzate a partire da una configurazione di deformazione finita forniscono:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}}_R &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}_R^T &= \dot{\mathbf{T}}_R + \mathbf{T}\mathbf{L}^T, \end{aligned} \quad (4.13)$$

che opportunamente adattate ad un materiale incompressibile forniscono

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} (\dot{T}_{R11} - \dot{T}_{R22}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \dot{T}_{R12} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} (\dot{T}_{R11} + \dot{T}_{R22}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} (\dot{T}_{R11} - \dot{T}_{R22}) - \frac{\partial}{\partial x_1} \dot{T}_{R21} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} (\dot{T}_{R11} + \dot{T}_{R22}) \end{cases}. \quad (4.14)$$

Le precedenti equazioni, opportunamente differenziate e combinate per eliminare $\dot{T}_{R11} + \dot{T}_{R22}$, possono essere espresse in termini di velocità attraverso il legame costitutivo.

Introducendo la funzione di flusso $\psi(x_1, x_2)$ definita dalle

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

nell'ipotesi che lo stato di tensione deviatorico attuale è omogeneo avremo:

$$\left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + 2(2\mu^* - \mu) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (4.15)$$

La relazione (4.15) può essere anche ricavata come equazione di Eulero-Lagrange dalla (4.9), che specializzata ad un corpo rettangolare di dimensioni correnti $2a_1 \times 2a_2$, fornisce:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} \left\{ \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + 2(2\mu^* - \mu) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} \right\} \delta \psi \, dx_1 dx_2 + \\
& \int_{-a_2}^{a_2} \left\{ \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right\} \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \, dx_2 + \\
& \int_{-a_2}^{a_2} \left\{ \left[\mu - 4\mu^* + \frac{1}{2}(3\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2^2 \partial x_1} - \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^3} \right\} \delta \psi \, dx_2 + \\
& \int_{-a_1}^{a_1} \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right\} \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \, dx_1 + \\
& \int_{-a_1}^{a_1} \left\{ \left[\mu - 4\mu^* + \frac{1}{2}(3\sigma_1 + \sigma_2) \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2^3} \right\} \delta \psi \, dx_1 + \\
& \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} \delta \psi \Big|_{-a_1}^{a_1} \Big|_{-a_2}^{a_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2.3 Regimi del problema di equilibrio incrementale. Il carattere dell'equazione di campo (4.15) dipende dai moduli istantanei e dalle tensioni attuali. L'equazione di equilibrio incrementale, nell'ipotesi che lo stato attuale di deformazione sia omogeneo, fornisce:

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{C}}_0^R[\mathbf{L}] + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{1}) = \mathbf{0}, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial x_i} = 0.$$

Introducendo la funzione di flusso $\psi = F(n_1 x_1 + n_2 x_2)$, il campo di velocità assume la particolare forma $v_i = m_i F'(n_1 x_1 + n_2 x_2)$, con $m_i n_i = 0$, che corrisponde ad una deformazione non-omogenea a piani di taglio perpendicolari al vettore \mathbf{n} di componenti n_1 e n_2 . L'apice denota la derivazione. L'equazione di equilibrio incrementale si trasforma nella seguente

$$\left[\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} F''' + \dot{\mathbf{q}}' \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j F''' + \dot{\mathbf{q}}' n_i = 0, \tag{4.17}$$

nell'ipotesi che l'incremento $\dot{\mathbf{q}}$ sia costante lungo i piani $n_1 x_1 + n_2 x_2 = \text{cost}$. Per F generico, moltiplicando scalarmente la (4.17) per \mathbf{n} avremo

$$\left\{ \left[\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} F''' \right\} \cdot \mathbf{n} + \dot{\mathbf{q}}' = 0, \quad F''' {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j n_i + \dot{\mathbf{q}}' = 0. \tag{4.18}$$

Eliminando ora $\dot{\mathbf{q}}'$ dalla (4.17)

$$\left[\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} F''' - \left\{ \left[\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} F''' \right\} \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{4.19}$$

e moltiplicando scalarmente per \mathbf{m} , otteniamo

$$\left\{ \left[\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} F''' \right\} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j m_i F''' = 0. \tag{4.20}$$

Il vettore incremento di tensione nominale sui piani di taglio $n_1x_1+n_2x_2=\text{cost}$, è:

$$\dot{T}_R \mathbf{n} = [\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \mathbf{F}'' + \dot{q} \mathbf{n} - q(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^T \mathbf{n}, \quad \dot{T}_{Rij} n_j = {}_0 C_{ijkl}^R m_k n_l n_j F'' + \dot{q} n_i$$

e risulta quindi per la (4.19):

$$\left\langle \left\{ [\mathbf{C}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \mathbf{F}'' \right\} \cdot \mathbf{n} + \dot{q} \right\rangle \mathbf{n} = \dot{s} \mathbf{n}, \quad (4.21)$$

con \dot{s} uniforme essendo $\dot{s}' = 0$ per la (4.18).

La (4.20), resa esplicita nel caso in esame, fornisce:

$${}_0 C_{2121}^R n_1^4 + ({}_0 C_{1111}^R - 2{}_0 C_{1122}^R + {}_0 C_{2222}^R - {}_0 C_{1221}^R - {}_0 C_{2112}^R) n_1^2 n_2^2 + {}_0 C_{1212}^R n_2^4 =$$

$$\left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] n_1^4 + 2(2\mu^* - \mu) n_1^2 n_2^2 + \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] n_2^4 = 0 \quad (4.22)$$

L'equazione, in genere, ha quattro distinte radici n_1/n_2 e la soluzione dipende dalla possibilità che tali radici siano reali o complesse. Ponendo la (4.22) nella forma:

$$a \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^4 + 2b \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 + c = 0, \quad (4.23)$$

con ovvio significato delle costanti a , b , c , è possibile distinguere tre possibilità per le soluzioni n_1/n_2

$$\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

il regime ellittico con soluzioni tutte complesse, il regime iperbolico con soluzioni tutte reali ed il regime parabolico con due soluzioni reali e due immaginarie. Tali regimi sono caratterizzati dalle seguenti disequazioni:

$$\text{Ellittico} : \bigcup \begin{cases} a > 0 \cap ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b > 0 & (\text{Ellittico immag.}) \\ a < 0 \cap ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b < 0 & (\text{Ellittico immag.}) \\ a > 0 \cap ac > 0 \cap b^2 < ac & (\text{Ellittico complesso}) \\ a < 0 \cap ac > 0 \cap b^2 < ac & (\text{Ellittico complesso}) \end{cases}$$

$$\text{Iperbolico} : \bigcup \begin{cases} a > 0 \cap ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b < 0 \\ a < 0 \cap ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\text{Parabolico} : ac < 0$$

Hill e Hutchinson (1975) proposero di studiare i caratteri dell'equazione differenziale sotto delle restrizioni dei moduli istantanei derivanti da una possibile disequaglianza a priori basata sulla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli istantanei associato alla misura logaritmica della deformazione:

$$\mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym} \neq \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Tenendo conto delle (4.5), la (4.25) specializzata per il problema in esame fornisce le limitazioni $\mu^* > 0$ e $\mu > 0$, rispettivamente per

$$\mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}_0C_{1111}^{(0)} & {}_0C_{1122}^{(0)} & 0 \\ \text{Sym} & {}_0C_{2222}^{(0)} & 0 \\ & & {}_0C_{1212}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ 0 \end{Bmatrix} > 0,$$

$$\mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}_0C_{1111}^{(0)} & {}_0C_{1122}^{(0)} & 0 \\ \text{Sym} & {}_0C_{2222}^{(0)} & 0 \\ & & {}_0C_{1212}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{1,2} + v_{2,1} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{1,2} + v_{2,1} \end{Bmatrix} > 0$$

L'utilizzo della condizione di stabilità materiale (SM)

$$\dot{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym} \neq 0 \mid \text{tr} \mathbf{D} = 0, \quad (4.26)$$

analogamente, porta alle seguenti condizioni

$$\mu^* - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} > 0, \quad \mu - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} > 0. \quad (4.27)$$

4.2.4 Classificazione dei regimi nel caso di Hill e Hutchinson (1975). Le soluzioni della (4.22) con le restrizioni (4.25) poste sul legame basato sull'incremento corotazionale (i.e. $\mu^* > 0$ e $\mu > 0$) e nell'ipotesi non restrittiva di generalità $\sigma_1 > \sigma_2$, possono essere ricavate dividendo la (4.22) per $2\mu^*$ (>0)

$$\left[\frac{\mu}{2\mu^*} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right] \frac{n_1^4}{n_2^4} + 2 \left(1 - \frac{\mu}{2\mu^*} \right) \frac{n_1^2}{n_2^2} + \left[\frac{\mu}{2\mu^*} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right] = 0,$$

e considerando che $a > 0$. Le disequazioni (4.24) da tenere in considerazione sono:

$$\text{Ellittico (E)}: \bigcup \begin{cases} \text{Ellittico immag (EI)}: ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b > 0 \\ \text{Ellittico complesso (EC)}: ac > 0 \cap b^2 < ac \end{cases}$$

$$\text{Iperbolico (H)}: ac > 0 \cap b^2 > ac \cap b < 0$$

$$\text{Parabolico (P)}: ac < 0$$

La disequazione $ac > 0$ si traduce in

$$\frac{\mu}{2\mu^*} > \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*},$$

quella $b^2 < ac$ in

$$\frac{\mu}{\mu^*} > \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right)^2 + 1,$$

mentre $b > 0$ risulta essere

$$\frac{\mu}{2\mu^*} < 1,$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned}
 E: & 2\mu^* > \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \\
 \left\{ \begin{array}{l} EI: \mu / \mu^* < 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right)^2 < 2 \\ EC: \mu / \mu^* > 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right)^2 \end{array} \right. & \quad (4.28) \\
 H: & 2\mu^* < \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \\
 P: & \mu < \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)
 \end{aligned}$$

Tali disequazioni sono coincidenti a quelle ricavate in (Hill & Hutchinson, 1975).

4.2.5 Classificazione dei regimi nel caso di Young (1975). I risultati precedenti possono essere opportunamente modificati per contemplare il caso $\sigma_1 < \sigma_2$, che comprende come caso particolare quello esaminato da Young (1975) di compressione uniassiale ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 = 0$). Le soluzioni della (4.22) con le restrizioni (4.25) sull'incremento alla Jaumann (i.e. $\mu^* > 0$ e $\mu > 0$) e nell'ipotesi $\sigma_1 < \sigma_2$, analogamente al caso $\sigma_1 > \sigma_2$, possono essere ricavate dividendo la (4.22) per $2\mu^*$ (>0)

$$\left[\frac{\mu}{2\mu^*} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right] \frac{n_1^4}{n_2^4} + 2 \left(1 - \frac{\mu}{2\mu^*} \right) \frac{n_1^2}{n_2^2} + \left[\frac{\mu}{2\mu^*} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right] = 0$$

e considerando che $c > 0$. Le disequazioni (4.24) da tenere in considerazione sono:

$$\begin{aligned}
 E: & \bigcup \left\{ \begin{array}{l} EI: a > 0 \cap b^2 > ac \cap b > 0 \\ EC: a > 0 \cap b^2 < ac \end{array} \right. \\
 H: & a > 0 \cap b^2 > ac \cap b < 0 \\
 P: & a < 0
 \end{aligned}$$

La disequazione $a > 0$ si traduce in

$$\frac{\mu}{2\mu^*} > -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*},$$

quella $b^2 < ac$ in

$$\frac{\mu}{\mu^*} > \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*} \right)^2 + 1,$$

mentre $b > 0$ risulta essere

$$\frac{\mu}{2\mu^*} < 1,$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned}
 E: & 2\mu^* > \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \\
 & \begin{cases} EI: \mu/\mu^* < 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*}\right)^2 < 2 \\ EC: \mu/\mu^* > 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*}\right)^2 \end{cases} \\
 H: & 2\mu^* < \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \\
 P: & \mu < -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)
 \end{aligned}$$

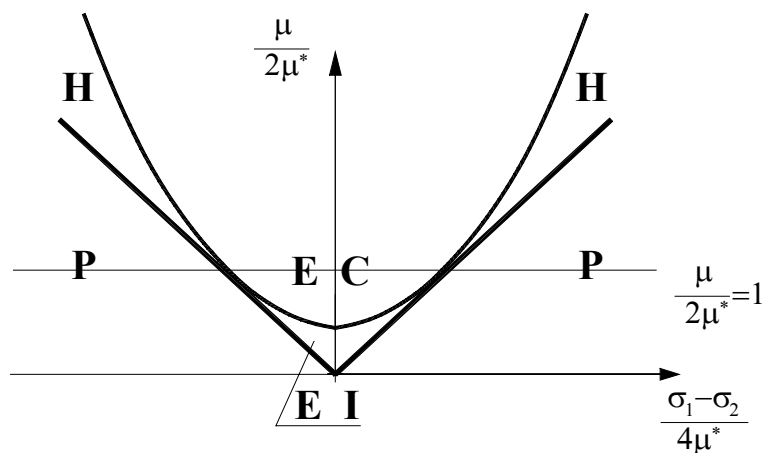


Fig. 4.1. Regimi caratteristici per $\sigma_1 - \sigma_2$ generico. Generalizzazione dei diagrammi di Hill e Hutchinson (1975) e Young (1975) sotto le ipotesi sul $\mathbf{C}_0^{(0)}$.

La Fig. 4.1 mostra i domini dei regimi della soluzione incrementale sotto le ipotesi di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti istantanei $\mathbf{C}_0^{(0)}$. La determinazione dei domini di validità dei regimi caratteristici effettuata da Hill e Hutchinson (1975), e da Young (1975), può essere effettuata come caso particolare da tale rappresentazione.

4.2.6 Rappresentazione generale dei regimi. Le precedenti analisi possono essere generalizzate in modo da contemplare ipotesi generiche sui moduli istantanei e sulle tensioni principali di Cauchy, attraverso una discussione in termini di tre opportuni parametri. L'analisi che segue permette la diretta rappresentazione di tutte le condizioni coinvolte nella suddivisione dei regimi, ivi compresa la condizione di esclusione.

In vista delle restrizioni (4.26) (i.e. $4\mu^* - (\sigma_1 + \sigma_2) > 0$, $4\mu - (\sigma_1 + \sigma_2) > 0$), la (4.22) è posta nella forma

$$\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\delta}{2} \right] \frac{n_1^4}{n_2^4} + 2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4} \right) \frac{n_1^2}{n_2^2} + \left[\frac{\beta}{4} - \frac{\delta}{2} \right] = 0, \quad (4.29)$$

con

$$\alpha = 4\mu^*/(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \beta = 4\mu/(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \delta = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Senza alcuna ipotesi sui segni delle tensioni principali σ_1, σ_2 i regimi in termini dei parametri a, b, d vengono delimitati applicando le (4.24), che con le posizioni fatte nella (4.29) si trasformano in:

$$ac > 0 \rightarrow \beta > 2|\delta| \cup \beta < -2|\delta|$$

$$ac < 0 \rightarrow -2|\delta| < \beta < 2|\delta|$$

$$a >, < 0 \rightarrow \beta >, < -2\delta$$

$$b^2 <, > ac \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} >, < \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1$$

$$b >, < 0 \rightarrow \beta <, > 2\alpha$$

Pertanto i regimi sono così caratterizzati:

$$E: \begin{cases} EI: \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \cap (\beta < 2\alpha) \cap (\beta > 2|\delta|) \right] \cup \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \cap (\beta > 2\alpha) \cap (\beta < -2|\delta|) \right] \\ EC: \left[(\beta > 2|\delta|) \cap \left(\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \right] \cup \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \cap (\beta < -2|\delta|) \right] \end{cases} \quad (4.30)$$

$$H: \left\langle \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \cap (\beta > 2\alpha) \cap (\beta > 2|\delta|) \right] \right\rangle \cup \left\langle \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \cap (\beta < 2\alpha) \cap (\beta < -2|\delta|) \right] \right\rangle.$$

$$P: -2|\delta| < \beta < 2|\delta|$$

Le superfici utilizzate nella (4.30) sono parzialmente illustrate nella Fig. 4.2.

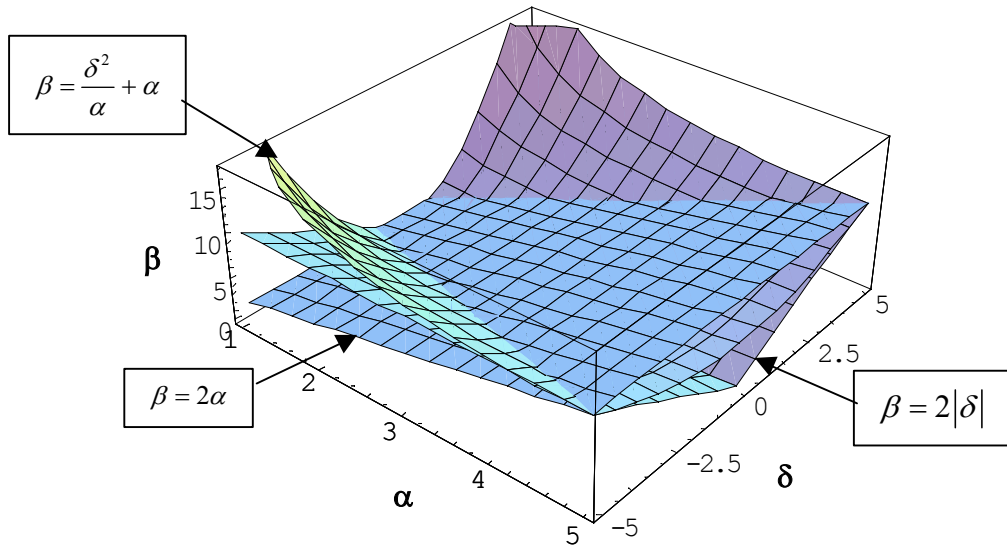


Fig. 4.2. Rappresentazione spaziale parziale delle superfici coinvolte nella definizione dei regimi per l'equazione differenziale (4.15). ($\alpha > 1, \beta > 1$).

E' da notare che le disequazioni del tipo $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta^2}{\alpha^2} + 1$ a loro volta danno luogo a coppie di disequazioni del tipo

$$\begin{aligned} \beta &> \frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha \text{ se } \alpha > 0 \\ \beta &< \frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha \text{ se } \alpha < 0 \end{aligned}$$

I regimi sono utilmente illustrati nella Fig. 4.3 effettuando tagli secondo piani $a=k$:

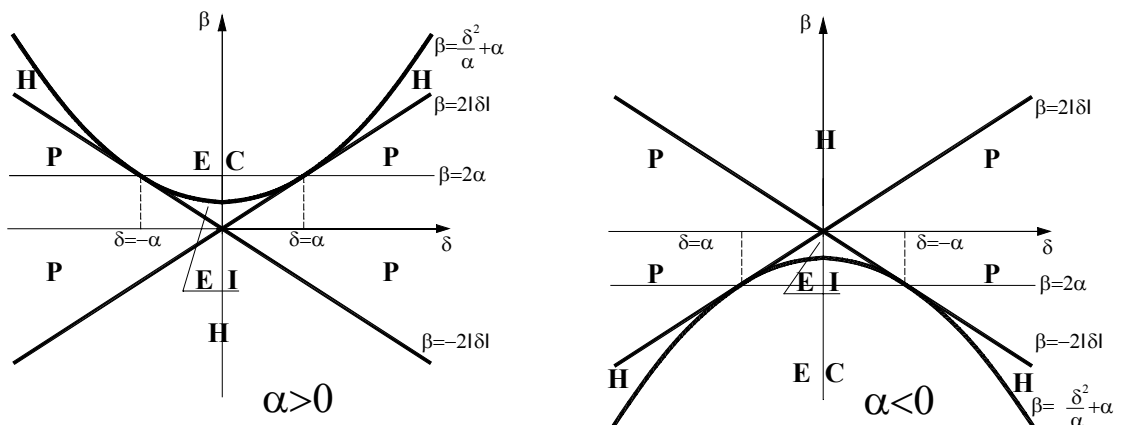


Fig. 4.3. Sezioni secondo piani $a=k$.

4.2.7 Conseguenze derivanti dalla condizione di stabilità materiale. Sotto la (4.26), i suddetti regimi sono soggetti alle restrizioni

$$\alpha > 1, \beta > 1 \text{ se } \sigma_1 + \sigma_2 > 0,$$

e

$$\alpha < 1, \beta < 1 \text{ se } \sigma_1 + \sigma_2 < 0.$$

Per esaminare le conseguenze delle restrizioni sui moduli alla Biot ed indicare i domini dei regimi, è utile effettuare delle sezioni delle superfici nei domini di interesse secondo dei piani $a=k$ con $k>1$ e con $k<1$. In generale tali sezioni si presentano qualitativamente come indicato nelle figure 4.3a e 4.3b: in particolare per $a=1$ la parabola, traccia sul piano di sezione della superficie all'interfaccia tra i regimi E ed H , si abbassa coincidendo con quella tratteggiata in figura. Le interfaccia tra i regimi E e P e tra H e P sono segmenti delle superfici $\beta=2l\delta$ e $\beta=-2l\delta$, inoltre su queste superfici due radici della (4.29) sono nulle mentre le altre due sono reali lungo l'interfaccia H/P e puramente immaginarie lungo quella E/P . L'interfaccia tra E/H è la superficie

$$\beta = \frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha.$$

Su questa superficie le radici coincidono a due a due e possono esistere soluzioni del tipo $\psi = (n_1x_1 + n_2x_2) G(n_1x_1 + n_2x_2)$ per generare la soluzione generale.

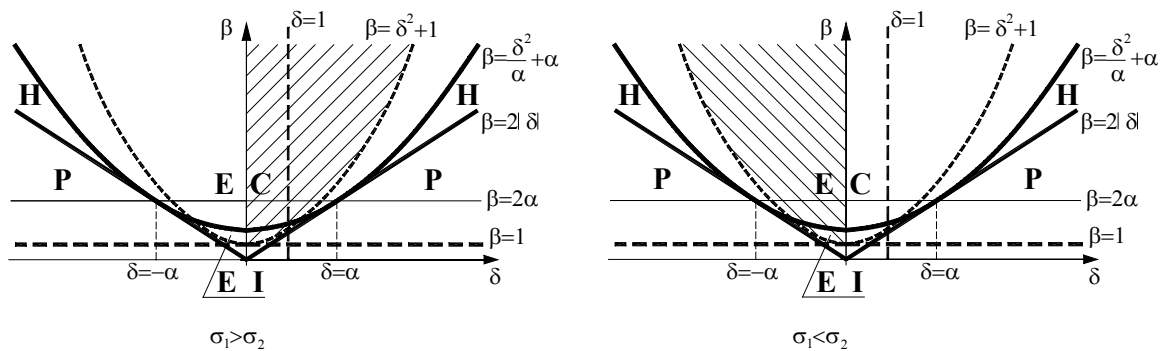


Fig. 4.3a. Sezione tipica secondo piani $a=k>1$ delle superfici rappresentate in Fig. 2a, ed indicazione dei regimi. $\bar{C}_0^{(l)} > 0$ con $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$. Nelle zone tratteggiate sono esclusi modi di biforcazione.

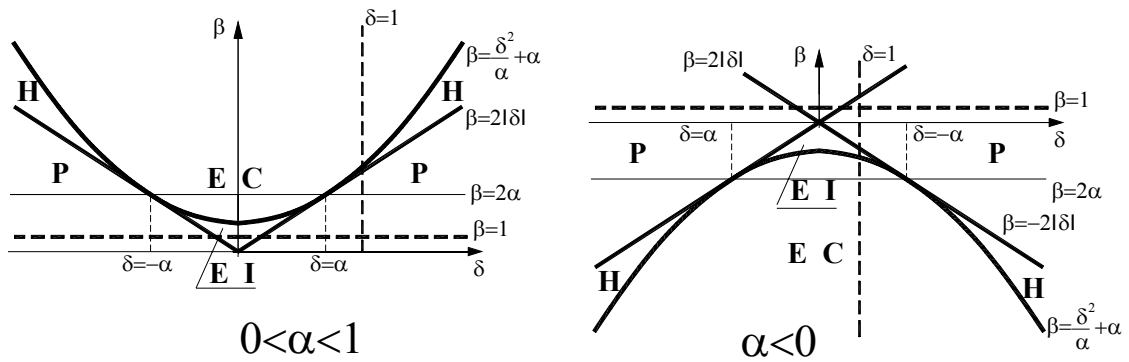


Fig. 4.3b. Sezione tipica secondo piani $a=k<1$ delle superfici rappresentate in Fig. 2a, ed indicazione dei regimi. $\bar{C}_0^{(1)} > 0$ con $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$.

La condizione di esclusione puntuale (4.12) fornisce nell'ipotesi $\sigma_1 > \sigma_2$, le seguenti condizioni

$$(\delta > 0) \dots (\alpha > 1) \dots (\beta > 1 + \delta^2),$$

quindi nel dominio dei moduli tratteggiato nella parte sinistra della Fig. 4.3a non possono esistere modi di biforcazione.

D'altro canto se $\sigma_1 < \sigma_2$ la condizione (4.12) implica che sia

$$(\delta < 0) \dots (\alpha > 1) \dots (\beta > 1 + \delta^2),$$

regione che viene individuata con un tratteggio nella parte destra della Fig. 4.3a.

4.2.8 Conseguenze derivanti dalla condizione di definitezza positiva del $C_0^{(0)}$. Le condizioni (4.25) implicano

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \text{ se } \sigma_1 + \sigma_2 > 0,$$

e

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0 \text{ se } \sigma_1 + \sigma_2 < 0,$$

per cui la parabola, traccia sul piano di sezione della superficie all'interfaccia tra i regimi E ed H , per $a > 0$, si può abbassare al di sotto di quella tratteggiata in Fig. 4.4. Un analogo discorso si può ripetere per $a < 0$ tenendo conto delle opportune modificazioni. L'illustrazione dei regimi sotto le condizioni (4.25) è riportata nelle figure 4.4a e 4.4b.

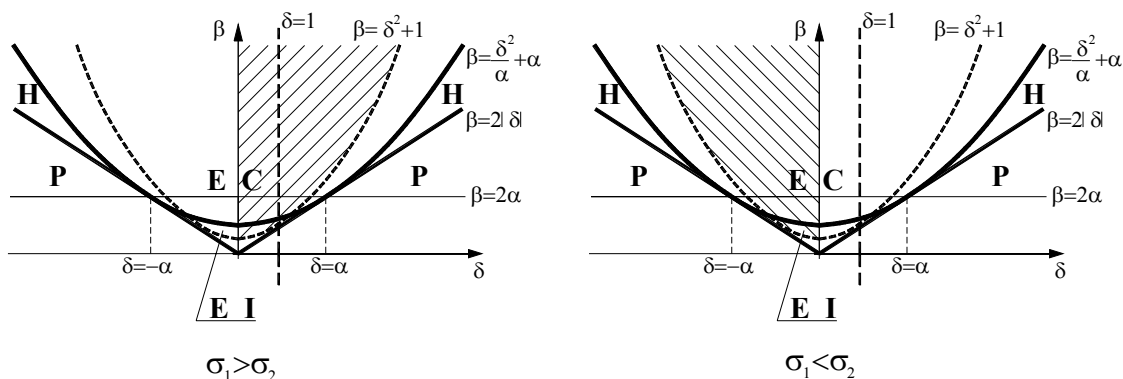


Fig. 4.4a. Sezioni tipiche secondo piani $a=k$ delle superfici coinvolte nella divisione dei regimi dell'equazione (4.15), ed indicazione dei regimi. $C_0^{(0)} > 0$ con $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$. Nelle zone tratteggiate sono esclusi modi di biforcazione.

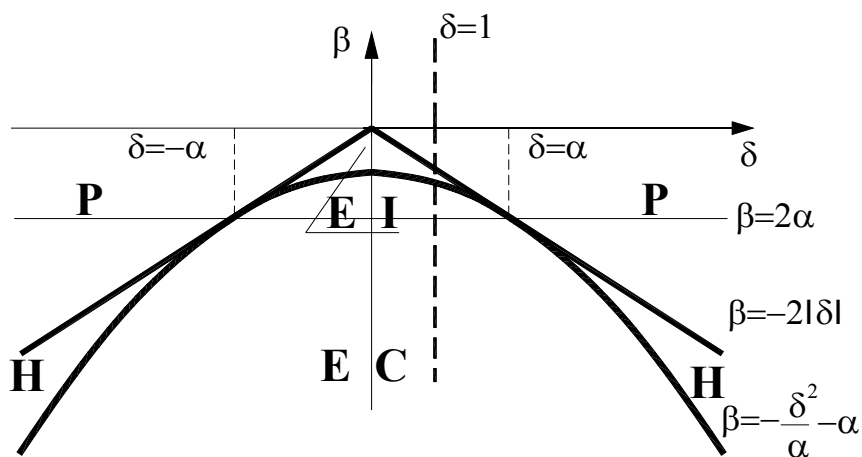


Fig. 4.4b. Sezioni tipiche secondo piani $a=k$ delle superfici coinvolte nella divisione dei regimi dell'equazione (4.15), ed indicazione dei regimi. $C_0^{(0)} > 0$ con $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$.

In generale, quindi, le condizioni di definitività positiva dei tensori dei moduli istantanei $\bar{C}_0^{(1)}$ e $C_0^{(0)}$ non escludono nessun regime caratteristico per l'equazione (4.15).

4.2.9 Connessioni con la condizione di ellitticità forte. L'espressione (4.22) può essere ricavata, in maniera alternativa, valutando lo scalare

$$2U = \bar{C}_0^R[L] \cdot L,$$

lungo un campo di velocità a bande di taglio del tipo $v_i = m_i F'(n_1 x_1 + n_2 x_2)$ (con $m_i n_i = 0$):

$$\begin{aligned} 2U &= \left\{ \left[\bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right\} = \left({}_o C_{ijkl}^R m_k n_l n_j m_i \right) [F''(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})]^2 \\ &= \left\{ \left[\mu + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] n_1^4 + 2(2\mu^* - \mu) n_1^2 n_2^2 + \left[\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right] n_2^4 \right\} [F''(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})]^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nel regime E il fattore in parentesi graffe non si annulla mai e, come si può vedere se $c_2 = 0$, con $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ ed $a > 0$ ($a < 0$) è positivo (negativo) e con $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$ ed $a > 0$ ($a < 0$) è negativo (positivo). In questo regime, quindi, è preclusa ogni possibilità di biforcazione secondo campi di deformazione incrementale a bande di taglio.

Il termine sopraddetto entra in gioco nella condizioni di ellitticità forte per il legame costitutivo:

$$\left\{ \left[\bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \right\} = \left({}_o C_{ijkl}^R m_k n_l n_j m_i \right) > 0 \quad \forall \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \neq 0, \quad (4.32)$$

condizione che se indebolita permettendo anche il segno negativo, coincide con quella di ellitticità.

Al contrario, nei regimi P ed H il fattore tra parentesi graffe della (4.31) si annulla per due o quattro radici, rispettivamente, e possono sussistere deformazioni incrementali a bande di taglio secondo i piani $n_1 x_1 + n_2 x_2 = \text{cost.}$, attraverso i quali può sussistere un salto nel gradiente delle velocità, ad esempio, per un salto della funzione F'' .

4.2.10 Regimi di biforcazione nel caso del blocco rettangolare in tensione (Hill e

Hutchinson, 1975). Se il blocco rettangolare è soggetto ai carichi $s_1 = s$ e $s_2 = 0$ risulterà $d = 1$, per cui, come si può evincere dalla Fig. 4.3a, nell'ipotesi di definitezza positiva per $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$, che implica $a > 1$ e $\beta > 1$, il regime H non viene mai incontrato dai moduli istantanei. Questo risulta chiaramente dalla sezione secondo il piano $d = 1$ delle superfici della Fig. 4.2 (Fig. 4.5a):

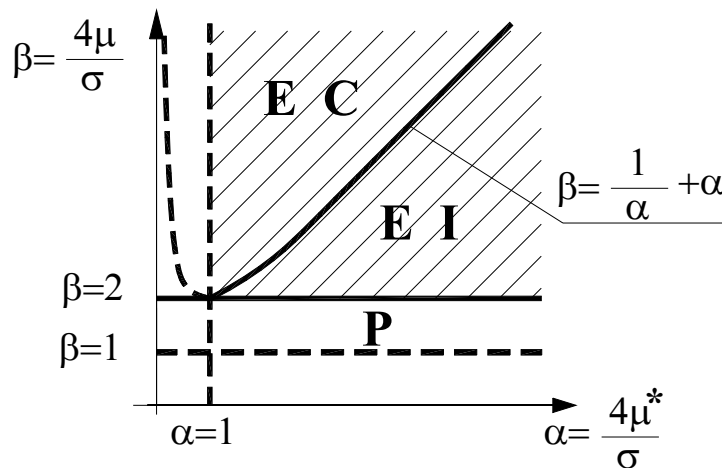


Fig. 4.5a. Sezione secondo il piano $\delta=1$ delle superfici rappresentate in Fig. 4.1, ed indicazione dei regimi. Caso $\bar{C}_0^{(1)} > 0$. Nella zona tratteggiata sono esclusi modi di biforcazione.

Inoltre la condizione di esclusione (4.12) fornisce $(\alpha > 1) \dots (\beta > 2)$, compatibilmente con $\sigma > 0$, per cui anche il regime E viene escluso (ciò si può anche evincere dalla Fig. 4.3 muovendosi lungo la retta $\delta=1$). La condizione sufficiente di esclusione implica che

$$\begin{cases} \beta > 2\alpha \Rightarrow \alpha < 1 \quad (\sigma > 4\mu^*) \\ \beta < 2\alpha \Rightarrow \beta < 2 \quad (\sigma > 2\mu) \end{cases} \quad (4.33)$$

Poiché la prima delle (4.33) è incompatibile essendo $\alpha > 1$, la seconda implica che la tensione di biforcazione corrente ricade sempre nel regime parabolico con un valore inferiore a $\sigma = 4\mu^*$, che corrisponde al raggiungimento del carico massimo.

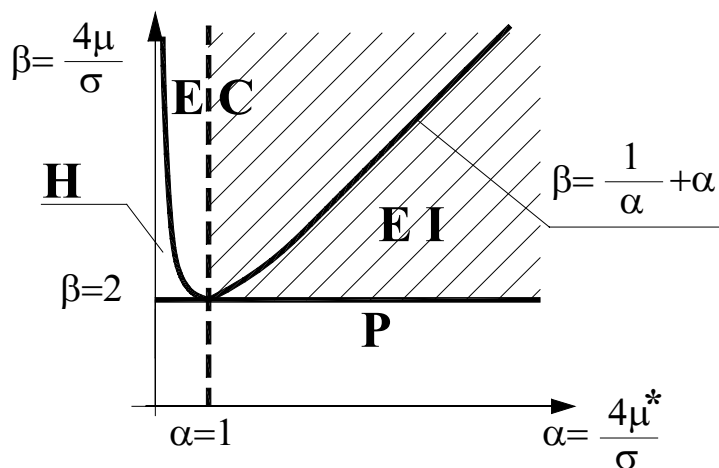


Fig. 4.5b. Sezione secondo il piano $\delta=1$ delle superfici rappresentate in Fig. 4.1, ed indicazione dei regimi. Caso $C_0^{(0)} > 0$. Nella zona tratteggiata sono esclusi modi di biforcazione.

L'ipotesi di definitezza positiva per $\mathbf{C}_0^{(0)}$, al contrario, non esclude nessuno dei tre regimi, implicando $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (vedi Fig. 4.5b). La condizione (4.33) implica che per $\beta > 2\alpha$ o $2\mu^* < \mu$ la tensione di biforcazione ricade in uno dei tre regimi ($\sigma > 4\mu^*$), mentre per $\beta < 2\alpha$ o $2\mu^* > \mu$ la tensione di biforcazione ricade nel regime P ($\sigma < 2\mu$).

Si noti che la trasformazione dai moduli μ^*, μ ai moduli $\bar{\mu}_B, \bar{\mu}_B^*$ corrisponde ad una traslazione tra il sistema di coordinate $\{O, \alpha, \beta\}$ ed il sistema di coordinate $\{Q, \bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ con origine $Q=(1,1)$ rispetto a $\{O, \alpha, \beta\}$, caratterizzata dalla seguente formula di conversione

$$\bar{\alpha} = \alpha - 1, \quad \bar{\beta} = \beta - 1,$$

essendo $\bar{\alpha} = 4\bar{\mu}_B^* / \sigma$, $\bar{\beta} = 4\bar{\mu}_B / \sigma$. La Fig. 4.6 illustra tale situazione.

In questo contesto la regione di stabilità materiale (SM) è rappresentata da $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$. Se si considerano modi di biforcazione del tipo omogeneo (ossia con gradiente della deformazione incrementale uniforme) è possibile dimostrare che i modi di biforcazione primari possibili sotto le condizioni $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$, sono del tipo a taglio e ricadono lungo l'interfaccia E-P ($\bar{\beta} = 1$) in corrispondenza di una tensione pari a $\sigma = 4\bar{\mu}_B = 2\mu$. Dalla (4.11) si ricava, infatti, che

$$2U = 4\bar{\mu}_B^* D_{11}^2 + (4\bar{\mu}_B - \sigma) D_{12}^2 + \sigma L_{21}^2,$$

con L_{21} che deve essere nullo poiché dall'equilibrio incrementale rotazionale (vedi equazione (5.8)₁ si ricava che $W_{21} = -D_{12}$, per cui il funzionale di esclusione perde la sua definitezza positiva per $\sigma = 4\bar{\mu}_B$ in corrispondenza di modi di biforcazione a taglio lungo la direzione di σ ($L_{11} = L_{22} = L_{21} = 0, L_{12} = 2D_{12}$).

Sotto le condizioni $\alpha > 0$, $\beta > 0$, invece, per $\beta > 2\alpha$ i modi di biforcazione primari sono coassiali alle direzioni coordinate, si trovano nel regime E o P ($\alpha = 1$) e sono caratterizzati da una tensione $\sigma = 4\mu^*$ che corrisponde all'annullarsi del modulo $\bar{\mu}_B^*$, mentre per $\beta < 2\alpha$ i modi di biforcazione primari sono del tipo a taglio e ricadono lungo l'interfaccia E-P in corrispondenza di una tensione pari a $\sigma = 2\mu$. In tale caso, infatti, dalla (4.10) si ottiene la seguente espressione

$$2U = (4\mu^* - \sigma) D_{11}^2 + (4\mu - 2\sigma) D_{12}^2 + \sigma L_{21}^2,$$

con $L_{21} = 0$, ed il funzionale di esclusione può perdere la sua definitezza positiva per $\sigma = \min\{4\mu^*, 2\mu\}$. Se $4\mu^* < 2\mu$ la biforcazione si ha per modi del tipo coassiali ($L_{11} = L_{22} = D_{11}, L_{21} = L_{12} = 0$).

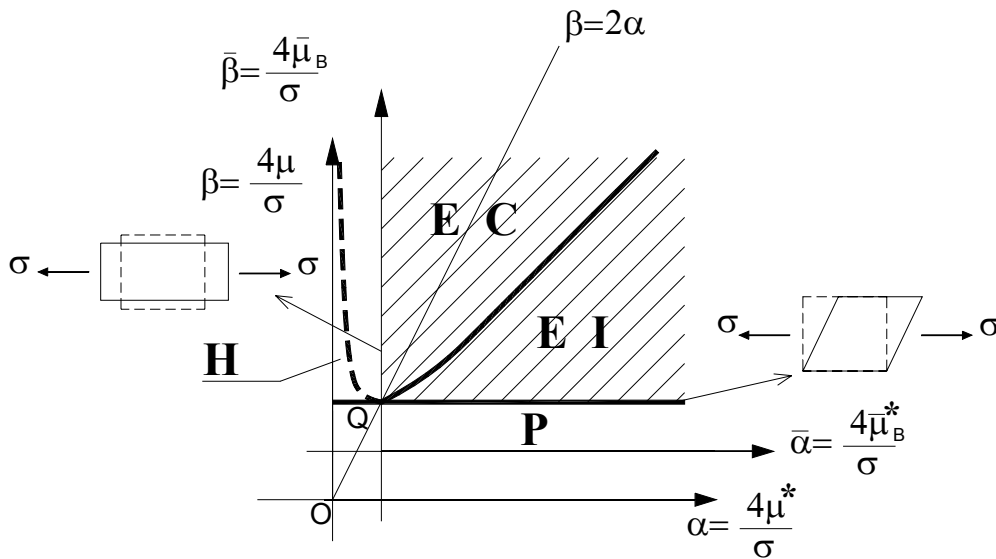


Fig. 4.6. Trasformazione tra i moduli μ^*, μ ed moduli $\bar{\mu}_B, \bar{\mu}_B^*$ e modi di biforcazione primari omogenei. Nella zona tratteggiata sono esclusi modi di biforcazione.

4.2.11 Regimi di biforcazione nel caso del blocco rettangolare in compressione (Young, 1975). Se il blocco rettangolare è soggetto ai carichi $s_1=s$, con $s < 0$ e $s_2=0$, risulterà $d=1$, per cui, come si può evincere dalla Fig. 4.3b, nell'ipotesi di definitezza positiva per $\bar{C}_0^{(1)}$, che implica $a < 1$ e $\beta < 1$, il regime H non viene mai incontrato dai moduli istantanei solo per $a < -1$. Questo risulta chiaramente dalla sezione secondo il piano $d=1$ delle superfici della Fig. 4.2 riportata in Fig. 4.7.

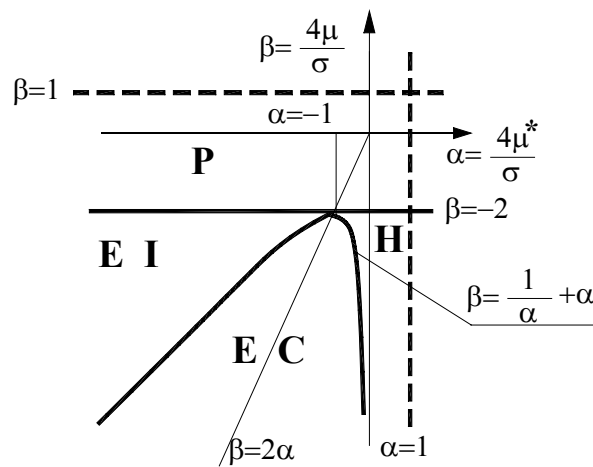


Fig. 4.7. Sezione secondo il piano $\delta=1$ delle superfici rappresentate in Fig. 2 ed indicazione dei regimi. Caso $\bar{C}_0^{(1)} > 0$.

La condizione di esclusione (4.12) non fornisce alcuna limitazione essendo $\delta=1>0$ e $\alpha<1$.

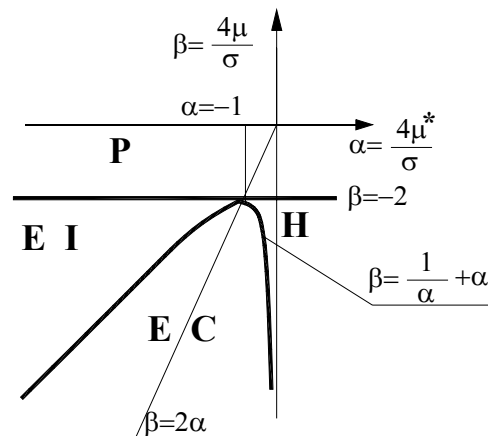


Fig. 4.8. Sezione secondo il piano $\delta=1$ delle superfici rappresentate in Fig. 1, ed indicazione dei regimi. Caso $\mathbf{C}_0^{(0)} > 0$.

L'ipotesi di definitezza positiva per $\mathbf{C}_0^{(0)}$, implicando $\alpha < 0$, $\beta < 0$, analogamente al caso precedente non esclude nessun regime (Fig. 4.8). Si può notare come, contrariamente al caso in tensione, nel caso in compressione la condizione di stabilità materiale (SM) corrisponda ad una regione del piano α, β più estesa rispetto a quella rappresentante la condizione di definitezza positiva del $\mathbf{C}_0^{(0)}$.

4.3 MODI DI BIFORCAZIONE PER IL BLOCCO RETTANGOLARE IN TENSIONE

Si ricercano soluzioni della (4.15) con condizioni omogenee al contorno. Queste, sovrapposte alla soluzione omogenea del blocco rettangolare in deformazione piana soggetto ad uno spostamento uniforme degli estremi $x_1 = \pm a_1$, pensato imposto attraverso due piastre rigide e parallele senza attrito tangenziale, forniscono la soluzione incrementale biforcata.

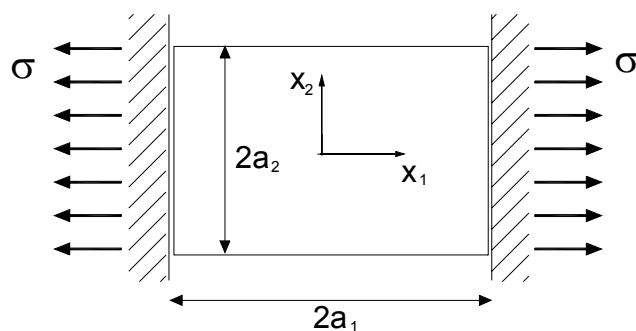


Fig. 4.9. Geometria e condizioni ai limiti per il blocco rettangolare in tensione.

Dalla (4.16) le condizioni al contorno appropriate risultano:

per $x_1 = \pm a_1$

$$\left\{ \left[\mu + \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right\} = 0, \text{ essendo } \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\delta v_2 \text{ qualsiasi}$$

$$\delta \psi = 0 \Rightarrow \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \delta v_1 = 0$$

per $x_2 = \pm a_2$

$$\left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right\} = 0, \text{ essendo } \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \delta v_1 \text{ qualsiasi}$$

$$\left\{ \left[\mu - 4\mu^* + \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2^3} \right\} = 0, \text{ essendo } \delta \psi \text{ qualsiasi}$$

$$\text{e } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} \delta \psi \Big|_{-a_1}^{a_1} \Big|_{-a_2}^{a_2} = 0 \text{ per continuità se } \delta \psi = 0 \text{ per } x_1 = \pm a_1, \tag{4.34}$$

nelle quali la prima impone che sia uguale a zero la componente tangenziale $\dot{T}_{R 21}$ della tensione nominale sugli estremi, la seconda che sia uguale a zero la velocità v_1 estremi del rettangolo, mentre la terza e la quarta corrispondono alle condizioni di tensioni nulle $\dot{T}_{R 12}$ e $\dot{T}_{R 22}$ sui lati del rettangolo. La funzione di flusso deve inoltre soddisfare la

$$\left[\mu + \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + 2(2\mu^* - \mu) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} = 0, \tag{4.35}$$

quindi, utilizzando il metodo di separazione delle variabili e scegliendo

$$\psi = v(x_2) \cos(c_1 x_1), \tag{4.36}$$

le prime due delle (4.34) risultano identicamente soddisfatte se $c_1 = m\pi/2a_1$, $m=1,2,\dots$, con l'origine delle coordinate al centro per m dispari ed a una distanza a_1/m dal centro, per m pari. Le rimanenti forniscono per $x_2 = \pm a_2$, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
v'' + c_1^2 v &= 0 \\
\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)v''' &= \left(4\mu^* - \mu - \frac{1}{2}\sigma\right)c_1^2 v' = 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

La (4.35) risulta soddisfatta se

$$\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma\right]v'''' - 2(2\mu^* - \mu)c_1^2 v'' + \left[\mu + \frac{1}{2}\sigma\right]c_1^4 v = 0. \tag{4.38}$$

La soluzione generale della (4.38) può essere ottenuta considerando modi simmetrici e antisimmetrici (Hill e Hutchinson, 1975) rispettivamente corrispondenti a funzioni dispari e pari per $v(x_2)$.

Si esaminano ora i tre regimi in cui può ricadere la tensione σ . Si noti che nell'ipotesi di definitezza positiva di $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$, l'unico regime che deve essere esaminato è quello parabolico.

Regime ellittico. Le condizioni di esclusione limitano la discussione della soluzione al caso di radici complesse e coniugate (regime EC). L'equazione (4.38), infatti, ammette soluzioni del tipo

$$\begin{aligned}
v(x_2) &= \bar{A}_1 e^{c_1(\gamma+i\delta)x_2} + \bar{A}_2 e^{-c_1(\gamma+i\delta)x_2} + \bar{B}_1 e^{c_1(\gamma-i\delta)x_2} + \bar{B}_2 e^{-c_1(\gamma-i\delta)x_2} \\
\text{con } \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\mu+\sigma}{2\mu-\sigma} - \frac{2\mu-4\mu^*}{2\mu-\sigma}} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\mu+\sigma}{2\mu-\sigma} + \frac{2\mu-4\mu^*}{2\mu-\sigma}}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

ed \bar{A}_i costanti complesse.

Imponendo modi simmetrici $v(x_2) = -v(-x_2)$ avremo soluzioni del tipo:

$$v(x_2) = A_1' \sinh(\gamma c_1 x_2) \cos(\delta c_1 x_2) - A_2' \cosh(\gamma c_1 x_2) \sin(\delta c_1 x_2), \tag{4.40}$$

ed utilizzando le condizioni (4.37) l'equazione caratteristica sarà:

$$\frac{\sin(2a_2 c_1 \delta) \gamma}{\sinh(2a_2 c_1 \gamma) \delta} = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{2\mu-\sigma}{2\mu+\sigma}\right) - \left(1 - \frac{4\mu^*}{\sigma}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu-\sigma}{2\mu+\sigma}\right) + \left(1 - \frac{4\mu^*}{\sigma}\right)}}, \tag{4.41}$$

nella quale il segno meno si riferisce ai modi antisimmetrici $v(x_2) = v(-x_2)$.

Regime iperbolico. L'equazione (4.38) ammette soluzioni del tipo:

$$\begin{aligned}
v(x_2) &= \bar{A}_1 e^{c_1 \alpha x_2} + \bar{A}_2 e^{-c_1 \alpha x_2} + \bar{B}_1 e^{c_1 \beta x_2} + \bar{B}_2 e^{-c_1 \beta x_2} \\
\text{con } \alpha^2 &= \frac{4\mu^* - 2\mu - \sqrt{(4\mu^* - 2\mu)^2 + (\sigma^2 - 4\mu^2)}}{\sigma - 2\mu} \quad \beta^2 = \frac{4\mu^* - 2\mu - \sqrt{(4\mu^* - 2\mu)^2 + (\sigma^2 - 4\mu^2)}}{\sigma - 2\mu} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Imponendo modi simmetrici la soluzione si può porre nella forma:

$$v(x_2) = A \sin \beta c_1 x_2 + B \sin \alpha c_1 x_2, \quad (4.43)$$

e la relativa equazione caratteristica diventa:

$$\frac{\alpha \tan(\beta c_1 a_2)}{\beta \tan(\alpha c_1 a_2)} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \right)^2. \quad (4.44)$$

Analoghi passaggi portano all'equazione caratteristica per modi antisimmetrici del tipo

$$v(x_2) = A \cos \beta c_1 x_2 + B \cos \alpha c_1 x_2, \quad (4.45)$$

che assume la forma:

$$\frac{\alpha \tan(\alpha c_1 a_2)}{\beta \tan(\beta c_1 a_2)} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \right)^2.$$

Regime parabolico. L'equazione (1.43) presenta soluzioni del tipo:

$$v(x_2) = \bar{A}_1 e^{c_1 \alpha x_2} + \bar{A}_2 e^{-c_1 \alpha x_2} + \bar{B}_1 (\cos \beta c_1 x_2 + i \sin \beta c_1 x_2) + \bar{B}_2 (\cos \beta c_1 x_2 - i \sin \beta c_1 x_2)$$

con $\alpha^2 = \frac{4\mu^* - 2\mu - \sqrt{(4\mu^* - 2\mu)^2 + (\sigma^2 - 4\mu^2)}}{2\mu - \sigma}$ $\beta^2 = \frac{4\mu^* - 2\mu + \sqrt{(4\mu^* - 2\mu)^2 + (\sigma^2 - 4\mu^2)}}{\sigma - 2\mu}$ (4.46).

Imponendo modi simmetrici la soluzione si può porre nella forma:

$$v(x_2) = A \sin \beta c_1 x_2 + B \sinh \alpha c_1 x_2 \quad (4.47)$$

e la relativa equazione caratteristica diventa:

$$\frac{\alpha \tan(\beta c_1 a_2)}{\beta \tanh(\alpha c_1 a_2)} = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 - 1} \right)^2 \quad (4.48)$$

Analoghi passaggi portano all'equazione caratteristica per modi antisimmetrici del tipo

$$v(x_2) = A \cos \beta c_1 x_2 + B \cosh \alpha c_1 x_2, \quad (4.49)$$

portano all'equazione caratteristica:

$$\frac{\alpha \tanh(\beta c_1 a_2)}{\beta \tan(\alpha c_1 a_2)} = - \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 - 1} \right)^2. \quad (4.50)$$

Poiché nella regione di interesse è $\beta < 2$ (Fig. 4.5), la tensione σ deve essere maggiore di $2m$. L'interfaccia E/P ($\beta=2$) è un punto di accumulazione di autovalori, nel senso che per $\sigma \rightarrow 2\mu$ da destra per valori fissati di $c_1 a_2$ si incontrano infinite soluzioni delle (4.48) e (4.50), per cui la biforcazione diventa possibile non appena σ diventa maggiore di $2m$.

4.4 MODI SHEAR BANDS NEL BLOCCO IN TENSIONE

L'equazione di equilibrio incrementale nell'ipotesi che lo stato attuale sia omogeneo, fornisce:

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{C}}_0^R [\mathbf{L}] + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{l}) = 0, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} = 0.$$

Analizziamo ora le condizioni necessarie per la formazione di modi di biforcazione del tipo shear-band per il problema al contorno esaminato al paragrafo 4.3. Utilizzando campi di velocità del tipo $v_i = m_i \xi (n_1 x_1 + n_2 x_2)$ relativi ad una deformazione non-omogenea a piani di taglio perpendicolari al vettore \mathbf{n} di componenti n_1 e n_2 , con $m_i n_i = 0$ per la condizione di incompressibilità

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \xi' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) m_i n_i = 0,$$

e supponendo \dot{q} funzione solo di $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, avremo

$$[\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi'' + \dot{q}' \mathbf{n} = 0, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j \xi'' + \dot{q}' n_i = 0. \quad (4.51)$$

Una soluzione banale per la (4.51) corrisponde ad ξ'' e \dot{q}' nulli. Se ξ'' è diverso da zero, moltiplicando scalarmente la (4.17) per \mathbf{n} avremo

$$\left\{ [\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi'' \right\} \cdot \mathbf{n} + \dot{q}' = 0, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j n_i \xi'' + \dot{q}' = 0. \quad (4.52)$$

Eliminando \dot{q}' dalla (4.52)

$$[\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi'' - \left\langle \left[[\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi'' \right] \cdot \mathbf{n} \right\rangle \mathbf{n} = 0, \quad (4.53)$$

e moltiplicando scalarmente per \mathbf{m} , si ottiene

$$\left\{ [\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi'' \right\} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j m_i \xi'' = 0. \quad (4.54)$$

Il vettore incremento di tensione nominale sui piani di taglio $n_1 x_1 + n_2 x_2 = \text{cost.}$

$$\dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n} = [\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi' + \dot{q} \mathbf{n} - q \mathbf{L}^T \mathbf{n}, \quad \dot{T}_{Rij} n_j = {}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R m_k n_l n_j \xi' + \dot{q} n_i,$$

risulta quindi per la (4.53):

$$\dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n} = \left\langle \left[[\mathbf{C}_0^R (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})] \mathbf{n} \xi' \right] \cdot \mathbf{n} + \dot{q} \right\rangle \mathbf{n} = \dot{s} \mathbf{n}, \quad (4.55)$$

con \dot{s} uniforme essendo $\dot{s}' = 0$ per la (4.52).

Se la (4.54) è soddisfatta per almeno una coppia \mathbf{n} ed \mathbf{m} , è ammissibile una soluzione con gradiente di velocità nullo ($\xi' = 0$) all'esterno di una banda limitata da piani $n_1 x_1 + n_2 x_2 = \text{cost.}$ All'interno della banda ξ' è diverso da zero e la continuità del vettore

incremento di tensione sui piani che limitano la banda è assicurata dal fatto che $\dot{T}_R n$ è ovunque uniforme, essendo all'interno valida la (4.55) ed all'esterno essendo $\dot{T}_{Rij} = \dot{q} \delta_{ij}$ con \dot{q} uniforme. Ci può essere però una discontinuità nelle componenti \dot{T}_{Rij} . Affinché il modo di biforcazione shear-band sia effettivamente ammissibile, questo deve soddisfare le condizioni al contorno.

La (4.54) esplicitata nel caso in esame fornisce:

$$\begin{aligned}
 & {}_0 C_{1111}^R n_1^4 + ({}_0 C_{1111}^R - 2{}_0 C_{1122}^R + {}_0 C_{2222}^R - {}_0 C_{1221}^R - {}_0 C_{2112}^R) n_1^2 n_2^2 + {}_0 C_{2121}^R n_2^4 = 0 \\
 & \left[\mu + \frac{1}{2} \sigma \right] n_1^4 + 2(2\mu^* - \mu) n_1^2 n_2^2 + \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma \right] n_2^4 = 0
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Nel regime parabolico l'equazione ha due soluzioni reali e, quindi, le shear-bands possono apparire simultaneamente non appena la tensione supera l'interfaccia E/P.

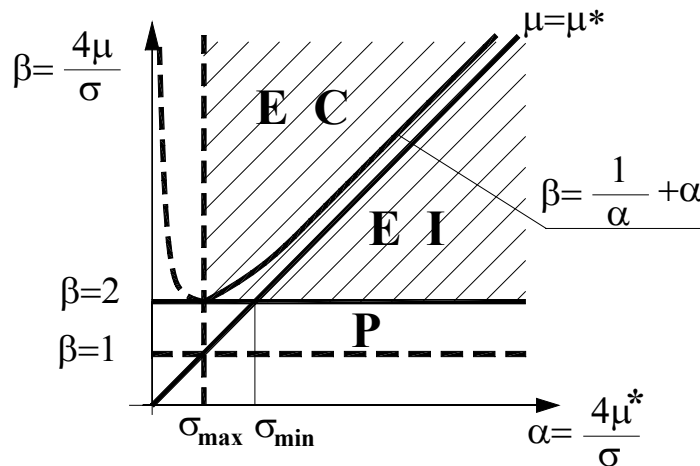


Fig. 4.10. Tensione massima e minima nel caso di isotropia incrementale.

Se $\mu = \mu^*$, ad esempio come avviene nel caso di isotropia incrementale, con la massima tensione $\sigma = 4n^*$ (Fig. 4.10) la (4.56) fornisce le radici $n_1/n_2 = \pm i, \pm \sqrt{3}/3$ per cui le shear bands sono perpendicolari a direzioni che formano con x_1 un angolo di 60° . Con la tensione minima $\sigma = 2n^*$ (Fig. 4.10), invece, le soluzioni sono $\pm i, \pm 0$ e l'angolo è di 90° .

La perdita di stabilità avviene, quindi, con la tensione massima in corrispondenza dell'annullamento del termine geometrico e del materiale, contemporaneamente, mentre con la tensione minima avviene in corrispondenza del valore massimo per il termine instabilizzante di tipo geometrico.

Per una tensione generica σ si ha che sotto le limitazioni derivanti dalla definitezza positiva di $\mathbf{C}_0^{(0)}$, i moduli ricadono sempre nel regime parabolico con radici n_1/n_2 pari a $= \pm i, \pm \sqrt{(\sigma-2\mu)/(\sigma+2\mu)}$. Inoltre la condizione di esclusione implica che $2\mu \leq \sigma$ per cui $\sqrt{(\sigma-2\mu)/(\sigma+2\mu)}$ è minore dell'unità e l'angolo che forma la normale ai piani di taglio è compreso tra $\pi/4$ e $3\pi/4$ dovendo essere $-1 < n_1/n_2 = \cot \varphi < 1$. D'altro canto le ipotesi di definitezza positiva di $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$ implicano che $\sigma/2 < 2\mu$ oltre alla condizione di esclusione $2\mu \leq \sigma$, per cui il termine $\sqrt{(\sigma-2\mu)/(\sigma+2\mu)}$ risulta minore di $\sqrt{3}/3$. L'angolo che forma la normale ai piani di taglio, in questo caso, è compreso tra $\pi/3$ e $2\pi/3$ dovendo essere $-\sqrt{3}/3 < n_1/n_2 = \cot \varphi < \sqrt{3}/3$. Le limitazioni sulle inclinazioni delle shear bands sono illustrate nella Fig. 4.11.

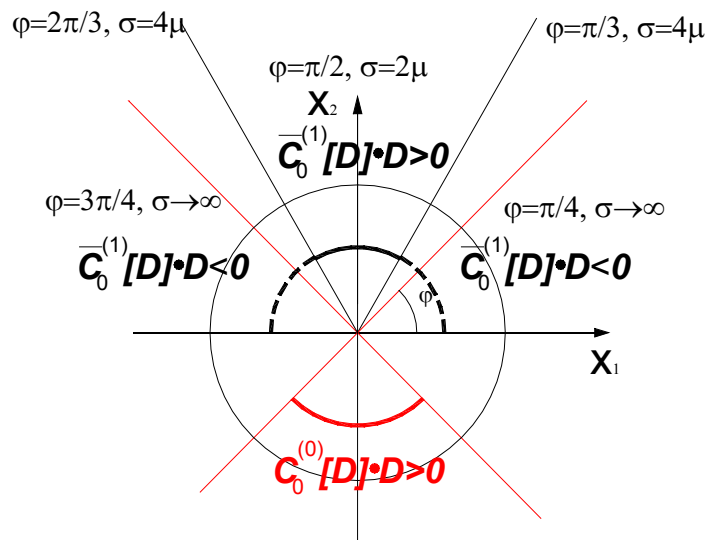


Fig. 4.11. Limitazioni per le inclinazioni delle shear bands per isotropia incrementale.

4.5 MATERIALI ISOTROPI IPERELASTICI

Per un materiale isotropo iperelastico la densità di energia di deformazione W è una funzione simmetrica $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ degli autovalori λ_i del tensore della deformazione pura \mathbf{U} . La condizione di incompressibilità $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ e di uno stato di deformazione piano in x_1 -

x_2 , impone che W sia funzione $W(\lambda)$ di $\lambda_1 = \lambda$ esclusivamente, essendo $\lambda_2 = 1/\lambda$ e $\lambda_3 = 1$. La configurazione del blocco rettangolare in termini delle coordinate attuali x_1, x_2, x_3 del punto materiale X_1, X_2, X_3 , deformato omogeneamente è definita da

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \frac{1}{\lambda} X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (4.57)$$

e le tensioni principali di Cauchy sugli assi euleriani $\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}$ coincidenti con quelli lagrangiani $\mathbf{u}^{(i)}$, sono:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + q. \quad (4.58)$$

Utilizzando le relazioni tra il tensore costitutivo tangente elastico nominale e W (Ogden, 1984)

$$\begin{cases} {}_0\mathbf{C}_{ijij}^R = \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \\ {}_0\mathbf{C}_{jjji}^R = \lambda_j^2 \left(\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \right) / (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \quad i \neq j, \\ {}_0\mathbf{C}_{jjij}^R = {}_0\mathbf{C}_{ijij}^R = {}_0\mathbf{C}_{jjji}^R - \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad i \neq j \end{cases} \quad (4.59)$$

il legame costitutivo per il materiale iperelastico isotropo si caratterizza considerando che

$$2 {}_0\mathbf{C}_{2121}^R = 2\mu - \sigma_2 + \sigma_1 = 2\lambda_1^2 \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{2\lambda^4}{\lambda^4 - 1}$$

per cui una prima equazione costitutiva risulta:

$$2\mu = (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1}. \quad (4.60)$$

Inoltre, essendo

$${}_0\mathbf{C}_{1111}^R - 2 {}_0\mathbf{C}_{2211}^R + {}_0\mathbf{C}_{2222}^R = 4\mu^* - (\sigma_1 + \sigma_2) + 2q = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2} - 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} - 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2} = 4\mu^*$$

avendo considerato che $d[\bullet]/d\lambda = \partial[\bullet]/\partial \lambda_1 - (1/\lambda_1^2) \partial[\bullet]/\partial \lambda_2$, si ha la seconda equazione costitutiva:

$$4\mu^* = \lambda \frac{d}{d\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (4.61)$$

Risulta, inoltre da

$$\lambda \frac{dW}{d\lambda} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2},$$

che

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \lambda \frac{dW}{d\lambda}. \quad (4.62)$$

Nel caso di carico di tensione $\sigma_1 > 0$ monoassiale ($\sigma_2 = 0$) si ha

$$\sigma_1 = \lambda \frac{dW}{d\lambda}, \quad (4.63)$$

essendo

$$q = -\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2},$$

per cui il carico totale, ossia la tensione principale nominale che coincide con quella di Biot $t_1^{(1)}$ essendo per un materiale isotropo $T_R = RT^{(1)}$ con $R=1$ nel caso in esame, raggiunge un massimo quando la derivata seconda di W rispetto a λ si annulla, essendo

$$t_1^B = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{dW}{d\lambda}.$$

Dalla (4.61) si nota che il modulo μ^* si annulla quando si raggiunge la massima differenza di tensioni principali, ossia quando

$$4\mu^* = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{dW}{d\lambda} \right) = \lambda \frac{dW}{d\lambda} + \lambda^2 \frac{d^2W}{d\lambda^2} = 0.$$

Per questi materiali, quindi, i moduli istantanei μ, μ^* sono funzione solo della dilatazione principale λ . Inoltre, nel caso di tensione monoassiale si raggiunge il carico massimo quando $4\mu^* = \sigma_1 = \sigma$, essendo dalla (4.63)

$$4\mu^* = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{dW}{d\lambda} \right) = \lambda \frac{dW}{d\lambda} = \sigma.$$

Per un materiale di Mooney Rivlin si ha, in particolare, che:

$$W = \frac{1}{2} \mu^0 (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2), \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \mu^0 (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \quad \mu^* = \mu = \frac{1}{2} \mu^0 (\lambda^2 + \lambda^{-2}) \quad (4.64)$$

Questo materiale è incrementalmente isotropo per tutti gli stati di deformazione.

4.6 MODI DI BIFORCAZIONE PER MATERIALI ISOTROPI IPERELASTICI

Per un materiale iperelastico isotropo caratterizzato dalle (4.60)-(4.62) il regime parabolico non può essere mai raggiunto. Infatti la condizione $ac < 0$ che in termini di

parametri a, b, d introdotti nella (4.29) si esprime $\beta^2 < 4\delta^2$, non può essere soddisfatta in quanto:

$$\beta^2 = 4 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1} \right)^2 > 4 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 = 4\delta^2. \quad (4.65)$$

Per il blocco rettangolare in tensione monoassiale costituito da questo tipo di materiale la (4.60) implica che $\beta^2 > 4$ e ne deriva che la biforcazione non può essere mai raggiunta sotto le limitazioni (4.26) sul $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$. D'altro canto le limitazioni (4.25) sul $\mathbf{C}_0^{(0)}$ implicano che la biforcazione debba avvenire al di sopra quindi della tensione corrispondente al carico massimo, $\sigma > 4\mu^*$ (si vedano la figure 4.5-6 nelle quali si nota che se il regime P è escluso, la biforcazione deve necessariamente avvenire con $\alpha < 1$ ovvero $\sigma > 4\mu^*$), nei regimi EC o H. Tale carico non viene superato con le limitazioni sul $\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}$.

La biforcazione avviene quindi necessariamente con il materiale non stabile ($\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} \leq 0$)

In particolare per un materiale Neo-Hookiano essendo $\mu = \mu^*$ le condizioni (4.33) implicano necessariamente che la biforcazione avvenga con $\beta < 2\alpha$ o $2\mu^* > \mu$ per $\sigma > 2\mu$ nel regime parabolico. Ma le (4.64) implicano che $\sigma < 2\mu$ essendo:

$$\sigma = \mu^0 (\lambda^2 - \lambda^{-2}) < 2\mu = \mu^0 (\lambda^2 + \lambda^{-2}),$$

per cui la biforcazione non può mai avvenire per le condizioni ai limiti del problema considerato.

4.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo si sono esaminati gli effetti della condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione per problemi non omogenei, illustrandoli attraverso il classico esempio proposto da Hill e Hutchinson (1975). Sono state così analizzate le restrizioni che la condizione di stabilità materiale impone sui possibili regimi dei moduli istantanei per i quali le equazioni di equilibrio incrementali sono di tipo ellittico, parabolico o iperbolico. Queste sono state confrontate con le restrizioni imposte da Hill e Hutchinson, derivanti dalla condizione di positività del tensore dei moduli tangenti $\mathbf{C}_0^{(0)}$ associato alla

misura di deformazione logaritmica (condizione di stabilità o disequaglianza di Hill). Le conseguenze sono estremamente differenti: nel caso in tensione monoassiale, ad esempio, mentre le condizioni di Hill e Hutchinson, infatti, non escludono nessun regime caratteristico per i moduli istantanei, quelle imposte dalla condizione di stabilità materiale escludono a priori il regime iperbolico. Ne consegue che le tensioni minime di biforcazione calcolate sotto le restrizioni imposte dalla condizione SM sono differenti da quelle calcolate da Hill e Hutchinson.

Al contrario del caso dei problemi omogenei, per i quali la stabilità implica la stabilità del materiale, in questo capitolo si è visto che per condizioni al contorno generiche lungo un processo di deformazione omogenea la perdita di stabilità materiale non implica la perdita di stabilità, perché la biforcazione può avvenire secondo modi non omogenei. Infatti, può accadere che pur se il materiale perde la stabilità in un punto \mathbf{x}_0 , ovvero vale

$$\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}[\mathbf{D}(\mathbf{x}_0)] \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad (4.66)$$

per una specifica deformazione incrementale \mathbf{L} non omogenea, la configurazione di equilibrio è ancora stabile, poiché la perdita di stabilità del materiale non implica necessariamente che il funzionale di stabilità

$$\int_B [\bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}] dv + \int_B \mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}] dv, \quad (4.67)$$

perda la sua definitezza positiva.

Questo avviene, invece, per problemi con condizioni al contorno con tensioni morte all-round, per i quali è sufficiente prendere in considerazione deformazioni incrementali omogenee e la (4.67) si annulla come conseguenza della (4.66).

Nel caso esaminato in questo capitolo, di conseguenza, è possibile la realizzabilità del softening del materiale secondo Biot prima della perdita di unicità e stabilità. Si nota anche che la perdita di stabilità del materiale può avvenire nonostante il tensore $\mathbf{C}_0^{(0)}$ sia ancora definito positivo.

Come per i modi di biforcazione diffusi, anche per modi di biforcazione del tipo shear bands gli effetti delle limitazioni SM e di definitezza positiva del $\mathbf{C}_0^{(0)}$ sono differenti.

Sia per problemi omogenei sia per problemi non omogenei, pertanto, è chiaro come il legame costitutivo, caratterizzato attraverso un'opportuna condizione di stabilità materiale, influenzi fortemente i fenomeni di instabilità e biforcazione di un solido. Tale influenza è regolata strettamente dalla particolare rappresentazione della condizione di stabilità materiale. In particolare, la condizione di stabilità di Hill, associata alla misura di deformazione logaritmica, e quella SM, associata invece alla deformazione di Biot,

portano a risultati assai differenti. Si conclude, pertanto, che è essenziale adottare un'appropriata definizione di stabilità materiale, per una corretta interpretazione dei fenomeni di instabilità e biforcazione.