
CAPITOLO 3

Stabilità strutturale e materiale

3.1 Introduzione.....	3-2
3.2 Stabilità per carichi morti.....	3-6
3.3 Stabilità materiale.....	3-7
3.4 Relazioni tra stabilità strutturale e materiale.....	3-10
3.5 Stabilità infinitesima.....	3-11
3.6 Criteri statici di stabilità materiale.....	3-18
3.7 Forme alternative del funzionale di stabilità.....	3-23
3.8 Diseguaglianze costitutive.....	3-25
3.9 Connessioni tra stabilità materiale e strutturale in ambito infinitesimo.....	3-26

3.1 INTRODUZIONE

Il fenomeno dell'instabilità è strettamente connesso ad effetti di non-linearità geometrica e del materiale: esso è influenzato, infatti, dalla geometria, dalle condizioni al contorno e dal comportamento del materiale. In particolare, l'instabilità del materiale può condurre all'instabilità di una configurazione di equilibrio (accompagnata eventualmente dalla biforcazione).

Gli effetti delle non-linearità di tipo geometrico governano l'instabilità di tipologie strutturali sottili (piastre, travi, gusci), la cui geometria è compatibile con insiemi di spostamenti incrementali caratterizzati da componenti di deformazione trascurabili nei confronti delle componenti di rotazione. In questi casi il materiale è in genere stabile e la perdita di stabilità avviene per tensioni prevalentemente di compressione, cui corrisponde un effetto instabilizzante dei carichi. Si parla quindi di un'instabilità per effetti geometrici. In questi casi, infatti, il materiale non influenza il modo di instabilità ma può giocare solo un ruolo quantitativo sul comportamento di instabilità. Esempi di questo tipo di instabilità sono i fenomeni di buckling che avvengono per carichi di compressione nelle travi, piastre, gusci, nei quali la scelta di un materiale o di un altro può far variare il livello del carico di buckling ma non può evitare l'instabilità.

Fenomeni di instabilità legati al comportamento del materiale, sono prevalentemente riscontrabili in corpi non sottili e sono caratterizzati da modi di biforcazione estremamente diversi da quelli di buckling. Tali modi, infatti, possono essere addirittura a deformazione omogenea, e si manifestano essenzialmente sotto carichi di trazione in regime di deformazioni assai elevate. In questo caso le tensioni possono avere grandezza paragonabile ai moduli tangenti e per lo studio di questo tipo di instabilità è indispensabile, quindi, considerare la differenza tra le misure di deformazione e dei moduli costitutivi tangenti associati.

Se il materiale non è più stabile, quindi, si può avere l'instabilità anche in assenza di effetti instabilizzanti geometrici. Ovviamente esistono diversi casi per i quali l'instabilità avviene a causa dell'interazione tra effetti geometrici e del materiale.

Nello studio del comportamento non lineare e della stabilità dei solidi in presenza di deformazioni assai elevate è quindi importante caratterizzare il comportamento stabile o meno del materiale. La stabilità del materiale può essere analizzata attraverso criteri statici o dinamici di stabilità: in questo capitolo ci occuperemo di criteri del primo tipo.

Criteri di questo tipo sono intimamente connessi al problema delle disequaglianze costitutive, intese come possibili restrizioni imposte a priori sul comportamento del

materiale affinché la sua descrizione sia fisicamente ammissibile. Essi, inoltre, richiedendo la scelta di appropriate variabili coniugate tensione-deformazione, non sono invarianti ma dipendono strettamente dalla scelta della misura di deformazione utilizzata per esprimere il legame costitutivo e portano, quindi, a conclusioni differenti in dipendenza a tale scelta (Hill, 1968). Le disequaglianze costitutive possono essere assimilate a particolari condizioni statiche (o energetiche) di stabilità materiale.

Tra le condizioni più note che possono essere interpretate tramite il criterio statico, si ricordano quella proposta da Truesdell e Toupin (1963) e quella proposta da Hill (1968). La prima corrisponde alla definitezza positiva del tensore dei moduli istantanei relativo alla misura di deformazione di Biot (detta anche condizione GCN⁺). La seconda, invece, corrisponde alla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli istantanei associato alla misura di deformazione logaritmica (questo equivale anche al tensore costitutivo che definisce il legame incrementale basato sull'incremento co-rotazionale del tensore di Kirchhoff).

Il legame costitutivo basato sull'incremento co-rotazionale (o di Jaumann) del tensore di Kirchhoff è stato adottato in diversi lavori sulla biforcazione seguendo i lavori di Hill (1958, 1975). In (Hill, 1958), infatti, viene introdotto un legame costitutivo valido per un'ampia classe di materiali elasto-plastici in termini dell'incremento di Jaumann del tensore di Kirchhoff \mathbf{T}_K . I legami costitutivi utilizzati in diversi lavori, sono basati su una tale scelta di misura di deformazione e contengono, quindi, delle restrizioni imposte sui relativi moduli tangenziali, che essenzialmente derivano dalla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti istantanei $\mathbf{C}_0^{(0)}$, associato con l'incremento di Jaumann di \mathbf{T}_K . S.T. Ariaratnam e R. N. Dubey (1968), utilizzano il suddetto legame con riferimento ad un materiale incompressibile elasto-plastico incrementalmente isotropo in uno stato di deformazione piana assumendo la costante di Lamé μ positiva (e, quindi assumendo che

$$\mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}]\cdot\mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym} \mid \text{tr}\mathbf{D} = 0. \quad (3.1)$$

con $\mathbf{C}_0^{(0)}$ tensore dei moduli elastici istantanei associato al legame elasto-plastico definito da Hill, 1958). La descrizione co-rotazionale del legame costitutivo è stata adottata in (J. P. Miles, 1970), con riferimento ad un materiale elasto-plastico con isotropia trasversa incrementale, in (J. P. Miles, 1974) con riferimento ad un materiale incompressibile elasto-plastico incrementalmente isotropo. Nel lavoro di Hill e Hutchinson (1975), e di Young (1976), si considera un materiale incrementale lineare ortotropo in uno stato di deformazione omogeneo descritto attraverso i moduli istantanei μ e μ^* . Tali moduli sono supposti positivi soddisfacendo così la condizione di definitezza positiva (3.1). In (Needleman, 1979), il legame adottato in (Hill e Hutchinson, 1975), ed in (Young, 1975),

viene generalizzato includendo l'accoppiamento tra l'incremento di tensione idrostatica e deviatorica. Rice e Rudnicki (1980), utilizzano un legame costitutivo incrementale lineare a pezzi basato sull'incremento co-rotazionale per modellare materiali elasto-plastici con superficie di snervamento non coincidente con quella del potenziale plastico. Inoltre, Chau e Rudnicki (1990), utilizzano il legame di Jaumann per analizzare la biforcazione in solidi compressibili incrementalmente lineari sensibili alla pressione idrostatica, analogamente a Needleman (1979). Il legame introdotto da Hill e Hutchinson (1975), è stato inoltre utilizzato da N. Triantafyllidis e B.N. Maker (1985) per analizzare l'instabilità microstrutturale. Infine, Benallal e Tvergaard (1995), per esaminare gli effetti nonlocali sui fenomeni di biforcazione, utilizzano un modello di plasticità gradiente nel quale si introduce un parametro che caratterizza la microstruttura del continuo nonlocale. Esprimendo l'incremento di tensione in termini corotazionali, il legame costitutivo si esprime in una maniera analoga a quello introdotto in Hill e Hutchinson (1975).

Al di là di possibili riferimenti al problema delle disequaglianze costitutive, la stabilità del materiale, però, viene intesa come un particolare stato del materiale che se violato può portare a comportamenti strutturali (instabilità, biforcazione) che dipendono esclusivamente dal materiale stesso.

In questo capitolo, la stabilità del materiale è analizzata esaminando una configurazione di equilibrio di un elemento di materiale omogeneamente deformato e soggetto ad opportune forze superficiali posizionali corrispondenti allo stato tensionale uniforme presente nell'elemento. Si dimostrerà come forze superficiali che rappresentano uno stato di tensione costante relativamente alla misura della deformazione di Biot sono una scelta opportuna per caratterizzare il comportamento del materiale (Grimaldi e Luciano, 1999; Greco et al., 2001). Queste forze superficiali, seguono il materiale nella sua rotazione e sono quindi adatte a rappresentare lo stato di tensione costante nell'elemento, non introducendo effetti estranei al materiale.

Utilizzando tali forze superficiali la condizione di stabilità materiale (SM) corrisponde alla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti istantanei associato alla coppia lavoro-coniugata tensione-deformazione $(\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)})$ con $\mathbf{T}^{(1)}$ tensore delle tensioni di Biot. Nel caso di materiali elastici, questa coincide con la condizione GCN⁺.

Nel lavoro di Reese & Wriggers (1997), la condizione di instabilità di un materiale iperelastico viene associata alla definitezza negativa del tensore costitutivo tangente $\mathbf{C}_0^{(2)}$ associato alla misura di deformazione di Green-Lagrange. L'analisi è sviluppata evidenziando in una condizione locale di stabilità, valida per deformazioni omogenee e specializzata a deformazioni incrementali con gradiente simmetrico, un termine

rappresentante l'influenza del materiale. Nessuna giustificazione viene data alla scelta della particolare suddivisione tra effetti del materiale ed effetti geometrici nel criterio di stabilità locale, che come è ben noto può effettuarsi in infiniti modi a seconda della particolare scelta della misura di deformazione. Inoltre, non poche ambiguità rimangono nella motivazione di un'analisi basata su di un criterio di stabilità locale ristretto a tensori simmetrici.

Nel presente capitolo viene riportata in dettaglio la formulazione del criterio di stabilità materiale (SM), basata sulla scelta di forze superficiali che rappresentano uno stato tensionale costante relativamente alla misura di deformazione di Biot, e ne sono riportate le motivazioni e la caratterizzazione. Inoltre, si analizza il confronto con altre possibili formulazioni in ambito statico (o energetico). Le condizioni di stabilità materiale di tipo statico sono analizzate con riferimento a materiali comprimibili ed incompressibili.

Adottato un criterio di stabilità di materiale si analizzano così gli effetti del comportamento intrinseco del materiale sul comportamento globale di un corpo continuo. A tal fine saranno analizzate le relazioni tra stabilità materiale, stabilità strutturale ed unicità. Inoltre, si esamina se lo stato di softening intrinseco del materiale (misurato cioè in termini del tensore costitutivo associato alla misura di deformazione di Biot), sia realizzabile durante una prova di carico prima che intervengano fenomeni d'instabilità e di biforcazione che disturbano l'uniformità della deformazione necessaria per misurare efficacemente le proprietà del materiale.

Si dimostra, quindi, come per un corpo omogeneo deformato omogeneamente caratterizzato da un generico legame incrementale di tipo non-lineare omogeneo di grado uno soggetto a condizioni al contorno di sole forze morte (indicato anche come "problema omogeneo"), la condizione di stabilità del materiale basata sulla positività di $\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$, sia condizione necessaria per la stabilità. Altre condizioni necessarie saranno stabilite per la condizione di stabilità materiale basata sulla positività di $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$. Un risultato assai interessante per problemi di trazione è che le condizioni di stabilità materiale secondo misure caratterizzate da $f''(1) < 0$ (ad esempio, la condizione di stabilità del materiale di Hill) non possono escludere a priori la stabilità e l'unicità. Esistono, invece, dei casi nei quali la condizione di stabilità del materiale associata a misure con $f''(1) \geq 0$, è tanto forte da poter escludere a priori la perdita di stabilità. In questi casi l'influenza della particolare descrizione del legame costitutivo (condizione di stabilità materiale) sui fenomeni di instabilità, è *particolarmente evidente*.

Viceversa per problemi che non sono del tipo omogeneo, si dimostra che la perdita di stabilità del materiale può avvenire prima della perdita di stabilità (ed eventualmente, della

biforcazione) ed il softening in termini della forma $\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$ è, quindi, realizzabile. Un caso è quello di un corpo deformato omogeneamente con spostamenti imposti su tutto il contorno. In queste ipotesi, infatti, è possibile utilizzare i due teoremi di Hadamard e Van Hove (Truesdell & Noll, 1965; Hill, 1962) e le loro generalizzazioni ai materiali lineari a tratti con legge plastica di tipo associato (Ryzhak, 1987). Viene quindi costruito un esempio per il quale il materiale può raggiungere il softening in condizioni di stabilità.

3.2 STABILITÀ PER CARICHI MORTI

Si considera un'arbitraria configurazione di equilibrio $\chi(\mathbf{X})$ di un corpo che occupa la regione B dello spazio tridimensionale Euclideo, e si considera un generico processo di spostamenti cinematicamente ammissibile a partire da B $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{X}, \tau) - \chi(\mathbf{X})$ con $0 \leq \tau \leq t$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ e nullo su ∂B^x . In quanto segue, il punto sopra le quantità indicherà la differenziazione rispetto al parametro pseudo-temporale τ .

Indicando con $W(t)$ il lavoro delle tensioni interne

$$\int_0^t \left[\int_B \mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau) dV_R \right] d\tau,$$

con $L(t)$ il lavoro dei carichi esterni

$$\int_0^t \left[\int_{\partial B^{\sigma}} \mathbf{t}_R(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{u}} ds_R + \int_B \rho_R \mathbf{b}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV_R \right] d\tau$$

e considerando come configurazione di riferimento quella di equilibrio, la configurazione di equilibrio si dice stabile se

$$W(t) - L(t) > 0, \quad (3.2)$$

per ogni processo di spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ cui corrispondono configurazioni che distano secondo un'opportuna metrica dalla configurazione di equilibrio di una quantità minore di δ . Tale condizione richiede essenzialmente una risposta positiva della struttura nel passaggio dalla configurazione di equilibrio a quella perturbata dal processo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, ossia una variazione del lavoro delle tensioni interne maggiore del lavoro dei carichi esterni. La (3.2) può essere espressa nella forma alternativa attraverso l'applicazione del teorema della divergenza:

$$\int_0^t \left[\int_B (\mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau) dv_R \right] d\tau > 0, \quad (3.3)$$

dove il pedice 0 indica che la corrispondente quantità è valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale. Per quanto segue è utile esprimere nella (3.3) il lavoro di deformazione interno in termini del tensore di *Biot*:

$$\int_0^t \left\{ \int_B [\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{U}}(\tau) - \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau)] dv_R \right\} d\tau > 0. \quad (3.4)$$

E' utile notare come la definizione di stabilità (3.3) sia influenzata da effetti geometrici, dalle condizioni al contorno e dal comportamento del materiale: per tale ragione verrà indicata in seguito anche come condizione di stabilità strutturale.

3.3 STABILITÀ MATERIALE

La stabilità del materiale è analizzata con riferimento ad un criterio statico, riprendendo la definizione precedente di stabilità intesa come lavoro di deformazione interno maggiore del lavoro delle forze esterne, ed adattandola con opportune modificazioni alla definizione di stabilità del materiale.

Per esprimere l'influenza del comportamento del materiale sulla stabilità globale e stabilire una definizione coerente di stabilità materiale è necessario depurare ogni effetto geometrico e delle condizioni al contorno dal lavoro delle tensioni interne e dal meccanismo esterno instabilizzante. La forma del criterio di stabilità dipende strettamente dalla scelta di un particolare tipo di meccanismo di carico esterno. Una scelta ragionevole è quella di rappresentare il meccanismo di carico esterno attraverso delle tensioni superficiali posizionali che rappresentano uno stato tensionale "costante".

A tal fine si analizza un elemento materiale di volume unitario soggetto ad un campo di tensioni omogeneo \mathbf{T}_0 in equilibrio con le tensioni superficiali $\mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R$ su ∂B , ed un processo di spostamenti con gradiente omogeneo $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{H}(\tau)$. Le forze esterne devono essere opportunamente definite in modo che il lavoro corrispondente non contenga effetti geometrici legati a rotazioni rigide del corpo e che, quindi, rappresentino uno stato tensionale *costante*. Forze superficiali di questo tipo devono dipendere dalla

deformazione e possono essere opportunamente definite in modo da ruotare con la rotazione rigida del materiale (Fig. 3.1):

$$\mathbf{t}_R = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{T}_0\mathbf{n}_R \quad \text{su } \partial B. \quad (3.5)$$

Infatti, il tensore di Cauchy corrispondente ad una tensione nominale pari a $\mathbf{R}(\tau)\mathbf{T}_0$ ed ad una deformazione rigida \mathbf{R} , è

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{T}_0\mathbf{F}(\tau)^\top = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{T}_0\mathbf{R}(\tau)^\top,$$

e rappresenta una tensione costante poiché nella base ruotata con la rotazione rigida del materiale $\mathbf{R}(\tau)$ tale tensore rimane immutato:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R}^\top(\tau)\mathbf{T}\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}^\top(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{T}_0\mathbf{R}(\tau)^\top\mathbf{R}(\tau). \quad (3.6)$$

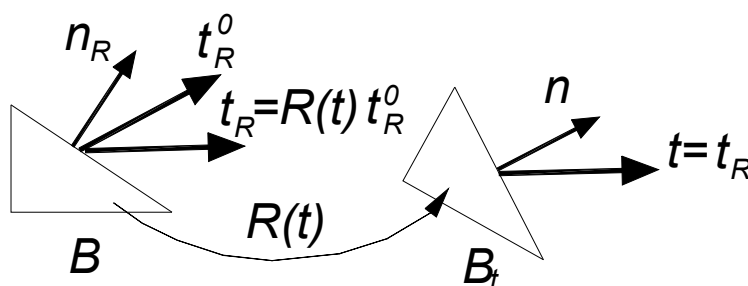


Fig. 3.1 Rappresentazione delle forze superficiali che accompagnano il materiale nella sua rotazione rigida.

D'altro canto, è necessario limitare il campo delle deformazioni ammissibili a quelle che conservano l'equilibrio dei momenti, affinché vengano esclusi fenomeni di instabilità geometrici legati allo squilibrio delle tensioni tangenziali in seguito a rotazioni rigide. Questo viene effettuato imponendo la coassialità tra \mathbf{T}_0 ed \mathbf{U} , condizione che garantisce l'equilibrio alla rotazione (Fig. 3.2). Infatti, dall'equilibrio rotazionale in termini del tensore nominale segue che

$$\mathbf{T}_R\mathbf{F}^\top = \mathbf{F}\mathbf{T}_R^\top \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{T}_0\mathbf{U}\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{T}_0\mathbf{R}^\top \rightarrow \mathbf{T}_0\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{T}_0. \quad (3.7)$$

Se la deformazione $\mathbf{F}(\tau)$ non è tale da assicurare la coassialità tra \mathbf{T}_0 ed \mathbf{U} , è possibile sempre definire forze superficiali che seguono il materiale nella rotazione rigida, ma queste non ammettono la semplice espressione (3.5). La generalizzazione delle forze superficiali (3.5) sarà analizzata al paragrafo 3.6.

Una giustificazione alternativa della condizione (3.7) può essere ottenuta imponendo che le forze superficiali di tipo follower soddisfino l'equilibrio ai momenti in seguito all'applicazione degli spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$:

$$\int_B (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \times \mathbf{R} \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R ds_R = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

L'utilizzo del teorema della divergenza, della considerazione che $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è il vettore assiale del tensore antisimmetrico $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ e notando che

$$\text{div}[(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \otimes \mathbf{R} \mathbf{T}_0] = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \otimes \text{div} \mathbf{R} \mathbf{T}_0 + \mathbf{F} \mathbf{T}_0^T \mathbf{R}^T, \quad (3.9)$$

porta alla seguente equazione:

$$\mathbf{0} = \int_B [(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{R} \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R) - (\mathbf{R} \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R) \otimes (\mathbf{x} + \mathbf{u})] ds_R = \int_B [\mathbf{F} \mathbf{T}_0^T \mathbf{R}^T - \mathbf{R} \mathbf{T}_0 \mathbf{F}^T] dv_R. \quad (3.10)$$

Essendo \mathbf{T}_0 , \mathbf{R} ed \mathbf{F} costanti, dalla (3.10) segue che:

$$\mathbf{R} \mathbf{T}_0 \mathbf{U} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{T}_0 \mathbf{R}^T, \quad (3.11)$$

e, quindi, la (3.7).

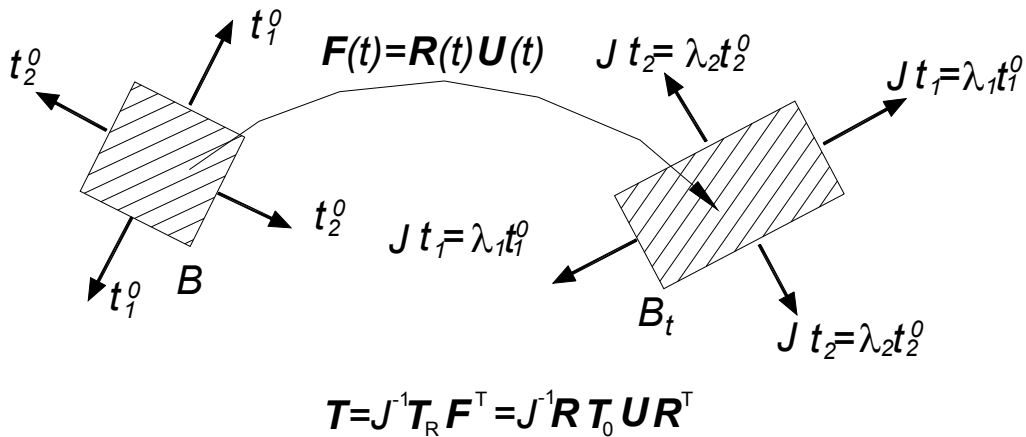


Fig. 3. 2 Deformazioni che rispettano l'equilibrio dei momenti.

Il lavoro delle forze superficiali che seguono la rotazione rigida del materiale (dette per questo motivo *follower*) per processi di deformazione che soddisfano la (3.7) diventa:

$$\begin{aligned}
 L(t) &= \int_0^t \left[\int_{\partial B} \mathbf{R}(\tau) \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R \cdot \dot{\mathbf{u}} \, ds_R \right] d\tau = \int_0^t \left[\int_B \operatorname{div} [(\mathbf{R}(\tau) \mathbf{T}_0)^T \dot{\mathbf{u}}] \, dv_R \right] d\tau = \\
 &= \int_0^t \left[\int_B \mathbf{R}(\tau) \mathbf{T}_0 \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \, dv_R \right] d\tau = \int_0^t \left[\int_B \mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{U} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}})] \, dv_R \right] d\tau = \int_0^t \left[\int_B \underline{[\mathbf{T}_0 \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{U}}]} \, dv_R \right] d\tau = (3.12), \\
 &= \int_0^t \left[\int_B \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{U}} \, dv_R \right] d\tau = \int_B \mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{U}(t) - \mathbf{1}] \, dv_R = \mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{U}(t) - \mathbf{1}]
 \end{aligned}$$

poiché il termine sottolineato è nullo essendo il prodotto scalare di un tensore simmetrico per uno antisimmetrico. Si definisce quindi per un generico processo deformativo $\mathbf{F}(\tau)$ il potenziale delle forze esterne di tipo intrinseco, che rappresentano cioè uno stato tensionale costante, attraverso la (3.12). Il lavoro (3.12) può essere visto anche come il lavoro delle forze superficiali variabili durante la deformazione in modo tale da rimanere compatibili con la misura di tensione di Biot costante $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}_0$ (Hill, 1968).

La condizione di stabilità del materiale che occupa la configurazione di equilibrio $\chi(\mathbf{X})$ nella regione B , si può quindi esprimere richiedendo che il lavoro di deformazione per ogni processo di perturbazione cinematicamente ammissibile a partire da B a gradiente costante $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, sia maggiore del lavoro delle forze esterne superficiali definite in modo da seguire il materiale nella sua rotazione rigida:

$$\int_0^t \left[\int_B (\mathbf{T}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{U}}) \, dv_R \right] d\tau = \int_0^t \left[\int_B (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{U}} \, dv_R \right] d\tau = \int_0^t \left[(\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{U}} \right] d\tau > 0, \quad (3.13)$$

avendo espresso il lavoro di deformazione attraverso la misura della tensione di Biot ed avendo considerato che la deformazione è costante.

3.4 RELAZIONI TRA STABILITÀ MATERIALE E STRUTTURALE

Per isolare nella (3.2) gli effetti del materiale da quelli dello stato tensionale e della geometria si aggiunge e si sottrae la quantità $\mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{U}}$, ottenendo:

$$\int_0^t \left\{ \int_B \left[\underbrace{(\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{\text{effetto del materiale}} + \underbrace{\mathbf{T}_0 \cdot (\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{F}})}_{\text{effetto geometrico}} \right] dv_R \right\} d\tau > 0. \quad (3.14)$$

La (3.14) evidenzia gli effetti del materiale nel primo termine e dello stato tensionale (o dei carichi morti) in B e della geometria del corpo nel secondo. La condizione di stabilità strutturale contiene in sé due aspetti: essa è influenzata in modo indipendente dalla

risposta del materiale e dallo stato di tensione nella configurazione di equilibrio di riferimento. In generale né lo stato di tensione \mathbf{T}_0 né le proprietà del materiale, possono governare singolarmente la condizione di stabilità strutturale. Se il materiale è stabile nel senso della (3.13) in tutti i punti del corpo, allora il primo termine nella (3.14) è positivo, ma il termine che caratterizza l'effetto dei carichi morti in B può essere positivo o negativo e, quindi, l'equilibrio in B può essere instabile. Viceversa, con una risposta del materiale di tipo instabile tale da rendere negativo il primo termine della (3.14) l'equilibrio in B può essere stabile.

Il primo termine nella (3.14) in generale dipende dal percorso di integrazione definito dal processo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, mentre il secondo, esprimendo l'effetto stabilizzante od instabilizzante di carichi morti, è funzione solo della deformazione finale. Di conseguenza, la (3.14) si può riscrivere come:

$$\int_0^t \left\{ \int_B \underbrace{[(\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{U}}] dV_R}_{\text{effetto del materiale}} \right\} d\tau + \int_B \underbrace{\mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{U}(t) - \mathbf{F}(t)] dV_R}_{\text{effetto geometrico}} > 0. \quad (3.15)$$

Se in corrispondenza di una configurazione di equilibrio per la quale il funzionale di stabilità è negativo (nullo) (vale a dire che esiste almeno un processo ammissibile $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ per cui il funzionale è negativo o nullo) ed il termine caratterizzante materiale soddisfa la condizione di stabilità (3.13) in tutti i punti del corpo B , allora si parla di instabilità (perdita di stabilità) per effetti geometrici. D'altro canto se in corrispondenza di una configurazione di equilibrio per la quale il funzionale di stabilità è negativo (nullo), il termine dipendente dalla geometria e dallo stato tensionale è positivo, allora si parla di instabilità (perdita di stabilità) per effetti del materiale.

3.5 STABILITÀ INFINITESIMA

Poiché la condizione (3.2) risulta di non facile applicazione, usualmente si accetta come condizione sufficiente di stabilità la (3.2) verificata per piccoli valori di t , valutata cioè lungo percorsi di deformazione infinitesimi.

Si suppone che il materiale ammetta un legame costitutivo incrementale positivamente omogeneo di grado uno tale che:

$$\mathbf{T}_R(\tau) - \mathbf{T}_0 = \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L})\tau + o(\tau), \quad (3.16)$$

dove il pedice 0 indica che la corrispondente quantità è valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale ($\tau=0$). Inoltre, \mathbf{T}_0 indica lo stato di tensione nella configurazione di riferimento ed \mathbf{L} è il gradiente delle velocità $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$.

Il legame costitutivo del materiale può essere espresso in una forma più conveniente in termini del tensore delle tensioni di Biot:

$$\mathbf{T}^{(1)}(\tau) - \mathbf{T}_0 = \mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D})\tau + o(\tau), \quad (3.17)$$

con \mathbf{D} parte simmetrica di \mathbf{L} .

La condizione di stabilità (3.3) si può esprimere sviluppando in serie in termini del parametro τ gli integrandi intorno alla posizione di equilibrio in B ed effettuando l'integrazione nel parametro temporale. Il lavoro di deformazione interno, ad esempio, è

$$\int_0^t [\mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau)] d\tau = [\mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau)]_{\tau=0} t + [\mathbf{T}_R(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau)]_{\tau=0} \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad (3.18)$$

fino a termini del secondo ordine.

Considerando un approssimazione al secondo ordine, la (3.3) si può esprimere come

$$\frac{t^2}{2} \int_B [\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L}] dv + o(t^2) > 0, \quad (3.19)$$

dove si è fatto uso del legame in termini del tensore nominale (3.16).

Utilizzando la (3.17), la condizione di stabilità (3.15) si esprime come

$$\frac{t^2}{2} \int_B \underbrace{[\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}]}_{\text{effetto del materiale}} dv + \frac{t^2}{2} \int_B \underbrace{\mathbf{T}_0 \cdot [\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D}]}_{\text{effetto geometrico}} dv + o(t^2) > 0 \quad (3.20)$$

avendo considerato il seguente sviluppo in serie della quantità $\mathbf{U}(t) - \hat{\mathbf{F}}(t)$:

$$\mathbf{U}(t) - \hat{\mathbf{F}}(t) = \dot{\mathbf{U}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{U}}_0 t^2 - \dot{\hat{\mathbf{F}}}_0 t - \ddot{\hat{\mathbf{F}}}_0 t + o(t^2), \quad (3.21)$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_0 &= \mathbf{D} \\ \ddot{\mathbf{U}}_0 &= \mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D} + \ddot{\hat{\mathbf{F}}}_0, \\ \dot{\hat{\mathbf{F}}}_0 &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

dalle formule ricavate al paragrafo 1.11.

Le (3.19) e (3.20) esprimono che al secondo ordine il lavoro fatto in ogni deformazione infinitesima compatibile con le condizioni al contorno eccede il lavoro fatto dalle forze esterne morte.

Il fattore integrando al primo termine nella (3.20) esprime la forma infinitesima della condizione di stabilità del materiale:

$$\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

che rappresenta, per un materiale incrementale lineare o lineare a tratti, la condizione di definitezza positiva del tensore del quarto ordine $\mathbf{C}_0^{(1)}$, chiamato tensore dei moduli istantanei relativo alla risposta del materiale (3.17).

La condizione di stabilità infinitesima può essere ricavata in una forma alternativa partendo dal concetto dinamico di stabilità stabilito da Dirichlet e Kelvin. Secondo quest'approccio uno stato di equilibrio si definisce stabile se nel moto che segue un disturbo arbitrario, l'ampiezza degli spostamenti addizionali tende a zero con il disturbo stesso. Hill (1957, 1958) propose la seguente condizione sufficiente di stabilità per solidi elastici ed elasto-plastici:

Condizione sufficiente affinché una configurazione di equilibrio per un corpo elasto(plastico) sia stabile è che per ogni spostamento infinitesimo geometricamente ammissibile a partire dalla configurazione di equilibrio l'energia interna immagazzinata o dissipata superi il lavoro dei carichi esterni.

Alternativamente si può dire che:

Condizione sufficiente affinché una configurazione di equilibrio per un corpo elasto(plastico) sia stabile è che per ogni perturbazione cinematicamente ammissibile a partire dalla configurazione di equilibrio l'incremento di energia cinetica sia negativo in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo.

Nella configurazione di equilibrio $\chi(\mathbf{X})$ del problema misto dell'equilibrio per il quale le tensioni sono imposte sulla porzione di contorno ∂B_0^σ , mentre gli spostamenti sulla porzione rimanente ∂B_0^x con $\partial B_0 = \partial B_0^x \cup \partial B_0^\sigma$, una *perturbazione cinematicamente ammissibile* rappresenta un campo iniziale di velocità $\dot{\chi}_0$ nullo su ∂B_0^x . Dal teorema della potenza scritto in forma Lagrangiana:

$$\int_{\partial B_0^\sigma} \mathbf{t}_R(\mathbf{X}, \tau) \cdot \dot{\chi} ds_R + \int_{B_0} \rho_R \mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau) \cdot \dot{\chi} dv_R = \int_{B_0} \mathbf{T}_R(\mathbf{X}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R + \frac{d}{d\tau} \int_{B_0} \rho_R \frac{|\dot{\chi}|^2}{2} dv_R, \quad (3.23)$$

si ricava che l'incremento dell'energia cinetica

$$\frac{d}{d\tau} \int_{B_0} \rho_R \frac{|\dot{\chi}|^2}{2} dv_R$$

è nullo all'istante iniziale poiché \mathbf{t}_R e \mathbf{b} sono in equilibrio con \mathbf{T}_R . Dalla condizione sufficiente di stabilità segue che l'energia cinetica deve avere un massimo relativo nell'istante iniziale, condizione che si esprime come

$$\left. \frac{d^2}{d\tau^2} \int_{B_0} \rho_R \frac{|\dot{\chi}|^2}{2} dv_R \right|_{t=0} < 0. \quad (3.24)$$

Dalla (3.24) segue che, nell'ipotesi di carichi morti (i.e. $\dot{\mathbf{t}}_R$ e $\dot{\mathbf{b}}$ nulli) ed utilizzando la derivata della (3.23) nell'istante iniziale,

$$\overline{\int_{B_0} \rho_R \frac{|\dot{\chi}|^2}{2} dv_R} = - \int_{B_0} \dot{\mathbf{T}}_R(\mathbf{X}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R + \left[- \int_{B_0} \mathbf{T}_R(\mathbf{X}, \tau) \cdot \ddot{\mathbf{F}} dv_R + \int_{\partial B_0^\sigma} \mathbf{t}_R(\mathbf{X}, \tau) \cdot \ddot{\chi} ds_R + \int_{B_0} \rho_R \mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau) \cdot \ddot{\chi} dv_R \right] \quad (3.25)$$

Dal teorema della divergenza si riconosce l'annullarsi del termine tra parentesi e, quindi, la condizione sufficiente di stabilità per carichi morti con la configurazione di riferimento coincidente con quella di equilibrio, si esprime:

$$\int_B {}_0\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} dv > 0, \quad \forall \dot{\chi}_0 \neq 0 / \dot{\chi}_0 = 0 \text{ su } \partial B^x, \quad (3.26)$$

dove il pedice 0 indica che la corrispondente quantità è valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale e l'incremento dello stato di tensione nominale corrisponde a $\dot{\chi}$ tramite il legame costitutivo. Se il materiale ammette legame costitutivo incrementale non lineare omogeneo di grado uno regolato dalla relazione (3.16) allora la condizione sufficiente di unicità si esprime come:

$$\int_B \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} dv > 0, \quad \forall \dot{\chi}_0 \neq 0 / \dot{\chi}_0 = 0 \text{ su } \partial B^x. \quad (3.27)$$

Il funzionale (3.27) è proporzionale all'espressione al secondo ordine nelle deformazioni incrementali della differenza tra il lavoro interno di deformazione ed il lavoro fatto dai carichi morti. In effetti, le velocità di deformazione e di tensione possono essere interpretate (sebbene non in maniera esatta ma in forma linearizzata) come incrementi infinitesimi o più semplicemente incrementi. La (3.27) specializzata al caso di materiali elastici è nota come condizione di *superstabilità infinitesima* (Truesdell e Noll, 1965).

La condizione (3.27) espressa in senso debole corrisponde alla condizione di *stabilità infinitesima* per un materiale elastico (Truesdell-Noll, 1965; Ogden, 1984) :

$$\int_B \mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} dv \geq 0, \quad \forall \dot{\chi}_0 \neq 0 / \dot{\chi}_0 = 0 \text{ su } \partial B^x. \quad (3.28)$$

Si noti che dalla definizione di spostamenti aggiuntivi si ha che

$$\dot{\chi} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau), \quad \dot{\chi}_0 = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)|_{\tau=0}.$$

Una condizione necessaria per la stabilità infinitesima per materiali elastici è espressa dal teorema di Hadamard:

$$\text{Stabilità infinitesima} \Rightarrow \mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n}, \quad (3.29)$$

condizione necessaria affinché una generica configurazione di equilibrio del problema misto al contorno di un corpo elastico sia infinitesimalmente stabile, è che valga la seguente disuguaglianza:

$$\mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \quad (3.30)$$

in ogni punto del corpo.

La (3.30), detta anche disuguaglianza di Legendre-Hadamard o condizione di semi-ellitticità forte (SSE), in senso forte corrisponde alla nota condizione di ellitticità forte SE. Poiché il teorema di Hadamard vale per un qualsiasi materiale incrementale lineare la condizione necessaria di stabilità infinitesima vale anche per i solidi di confronto di Hill e di Raniecki. Il teorema di Hadamard è stato esteso a materiali elasto-plastici (bilineari) da Ryzhak (1987). Considerando i materiali considerati al capitolo 2, caratterizzati dalla

$$\dot{\mathbf{T}}_f = \mathbf{C}^f[\dot{\mathcal{A}}(\mathbf{U})], \quad \mathbf{C}^f = {}^e\mathbf{C}^f - \alpha \frac{{}^e\mathbf{C}^f[\boldsymbol{\theta}] \otimes {}^e\mathbf{C}^{fT}[\boldsymbol{\omega}]}{g},$$

il teorema di Hadamard modificato (Ryzhak, 1987) afferma:

$$\begin{aligned} \text{Stabilità infinitesima} &\Rightarrow \mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n}, \alpha = 1 \\ \text{Stabilità infinitesima} &\Rightarrow {}^e\mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le (3.31) affermano che le condizioni di Hadamard per il tensore costitutivo relativo al ramo plastico del legame bilineare e per la parte elastica del tensore costitutivo elasto-plastico sono necessarie per la stabilità infinitesima.

La condizione di Hadamard o la SE non sono in genere sufficienti a garantire la stabilità infinitesima o la superstabilità. Nel caso di un corpo omogeneo deformato omogeneamente (per il quale quindi il tensore costitutivo è costante) con tutto il contorno soggetto a spostamenti imposti, il teorema di Van-Hove consente di affermare che per un materiale incrementalmente lineare la condizione di Hadamard (SE) è sufficiente per la stabilità infinitesima (superstabilità):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} &\Rightarrow \int_B \mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} dv \geq 0, \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq 0 / \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B \\ \mathbf{C}_0^R[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) > 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} &\Rightarrow \int_B \mathbf{C}_0^R[\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L} dv > 0, \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq 0 / \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B \end{aligned} \quad (3.32)$$

In tali circostanze la condizione di Hadamard è equivalente alla condizione di stabilità infinitesima. Analoghe condizioni valgono per i solidi di confronto di Hill e Raniecki.

Se le (3.19) e (3.20) sono applicate con le funzioni tensoriali \mathbf{C}_0^R e $\mathbf{C}_0^{(1)}$ costanti (come nel caso di un corpo omogeneo soggetto ad uno stato di deformazione omogeneo a partire da una configurazione omogenea) con lo stato di tensione nella configurazione di

rispetto a \mathbf{T}_0 uniforme e relativamente a gradienti omogenei e simmetrici $\mathbf{L}=\mathbf{D} \in \text{Sym}$, si ottiene:

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}, \quad (3.33)$$

essendo nullo il termine di secondo ordine della deformazione di Biot $\mathbf{E}^{(1)}$. La condizione

$$\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym} \neq \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

rappresenta nel caso di materiali elastici la condizione GCN⁺, condizione generalizzata di Coleman-Noll (Truesdell e Noll, 1965, Wang e Truesdell, 1973). La condizione (3.34) non è legata in maniera semplice al criterio di superstabilità infinitesima che richiede la positività dell'integrale di $\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L}$ per un generico \mathbf{L} : la (3.34) restringe, infatti, solo il lavoro corrispondente alla deformazione pura. Nella teoria delle deformazioni infinitesime classica l'unica forma di lavoro è quella relativa alla deformazione pura mentre per deformazioni infinitesime a partire da uno stato di deformazione finita i carichi morti compiono lavoro anche per rotazioni infinitesime.

Un problema di stabilità è formulato solitamente per una serie lineare di stati di equilibrio quasi statico al variare di un parametro λ , che governa l'entità delle condizioni al contorno. Per un corpo struttura che segue un percorso di equilibrio stabile nel senso che la (3.20) è verificata per ogni spostamento aggiuntivo $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0 t$ compatibile con i vincoli, ci si chiede per quale valore di λ si perde la stabilità ovvero esiste una direzione critica $\dot{\mathbf{u}}_c(\mathbf{x}, \tau)_0$ tale che

$$\int_B [\mathbf{C}_0^{(1)}(\lambda)(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}] dv + \int_B [\mathbf{T}_0(\lambda) \cdot [(\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D})]] dv \geq 0. \quad (3.35)$$

Il parametro corrispondente al suddetto *limite di stabilità* si dice valore critico e si indica con λ_c . Se il legame incrementale (3.16) è simmetrico e lineare in \mathbf{L} il limite di stabilità coincide con il punto di biforcazione della soluzione di equilibrio al crescere di λ .

Nel seguito la (3.20) e la (3.22), valide limitatamente a percorsi di deformazioni infinitesime, si considereranno rispettivamente come condizioni di stabilità della struttura e del materiale.

Nella (3.35) il primo termine, intrinseco al materiale, risulta positivo o negativo rispettivamente a seconda di una risposta stabile od instabile del materiale. Il secondo termine, invece, risulta positivo o negativo rispettivamente per un effetto stabilizzante od instabilizzante dei carichi morti presenti nella configurazione di equilibrio. La perdita di stabilità nell'ambito di modelli strutturali (piastre, travi, gusci) avviene solitamente in presenza di materiale stabile e di un effetto instabilizzante dei carichi, per tensioni \mathbf{T}_0 prevalentemente di compressione. Considerando materiali incrementalmente lineari o

lineari a tratti, infatti, quando la geometria del corpo è compatibile con insiemi di spostamenti incrementali ammissibili nel criterio (3.27), caratterizzati da componenti di deformazione D_{ij} trascurabili nei confronti delle rotazioni W_{ij} (corpi sottili, quindi), allora l'instabilità può avvenire in presenza di tensioni piccole nei confronti dei moduli tangenti. In tal caso, al secondo ordine la differenza tra le varie misure di deformazione lavoro-coniugate scompare assieme alla differenza tra i moduli costitutivi tangenti ${}_0C_{ijhk}^f$ associati. Nel funzionale di stabilità (3.27) al termine del materiale può essere sostituito un qualsiasi tensore \mathbf{C}_0^f , mentre il termine geometrico si riduce a $\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{W}$.

In presenza di tensioni prevalentemente di trazione, la perdita di stabilità può avvenire con materiale stabile od instabile potendo essere il termine $\int_B [\mathbf{T}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{D})] dv$ positivo o negativo in relazione alle velocità $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$. Le condizioni di stabilità strutturale e materiale vengono a coincidere se lo stato di tensione \mathbf{T}_0 nella configurazione di equilibrio, che è anche quella di riferimento, è nullo.

Per materiali elastici, se la tensione \mathbf{T}_0 è nulla, la condizione di stabilità equivale alla condizione di stabilità imposta nella teoria classica delle deformazioni infinitesime, secondo la quale il lavoro fatto in ogni deformazione pura infinitesima è positivo.

Inoltre, dalla (3.35) si evince che nessuna condizione sulla risposta incrementale del materiale può assicurare una condizione di stabilità strutturale per un generico stato di tensione.

Un caso particolare nel quale la condizione di stabilità strutturale è violata indipendentemente dalla risposta del materiale, è il caso di una rotazione infinitesima pura per un corpo soggetto a carichi morti su tutto il contorno in uno stato di deformazione omogeneo (indicato di seguito anche come "problema omogeneo"). A tal fine, il funzionale (3.35) può essere espresso nella forma equivalente:

$$\mathbf{C}_0^{(1)}(\lambda)(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{D} + \mathbf{W}^T \mathbf{W}), \quad (3.36)$$

che rende esplicito il ruolo delle rotazioni infinitesime sulla condizione di stabilità strutturale. Se $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ il termine $\mathbf{T}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{W}^T \mathbf{W})$ può assumere un valore negativo violando così la condizione di stabilità strutturale. Per uno stato di tensione omogeneo in un problema di trazione, il termine $\mathbf{T}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{W}^T \mathbf{W})$ si specializza in funzione delle tensioni principali in:

$$(t_1 + t_2)W_{12}^2 + (t_1 + t_3)W_{13}^2 + (t_3 + t_2)W_{32}^2, \quad (3.37)$$

per cui se una delle quantità tra parentesi si annulla (in questo caso la somma di due tensioni principali si annulla e si dice che il corpo ha un'asse di equilibrio intorno al terzo

asse principale) la rotazione attorno all'asse di equilibrio è un cinematismo che viola la condizione di stabilità strutturale per il corpo.

In seguito si indicherà come condizione di stabilità la (3.26).

3.6 CRITERI STATICI DI STABILITA' MATERIALE

Come è stato detto nei paragrafi precedenti, la definizione di stabilità del materiale necessita l'introduzione di meccanismo esterno di carico di tipo posizionale che, a sua volta, determina sensibilmente la forma della condizione di stabilità materiale. In questo paragrafo studieremo la possibilità di definire ulteriori criteri statici di stabilità materiale, in alternativa a quello basato su forze superficiali di tipo "follower" che seguono il materiale nella sua rotazione rigida, esaminato nei paragrafi precedenti.

Consideriamo un elemento di materiale omogeneo di volume unitario e forma arbitraria in una configurazione di equilibrio che occupa una regione B dello spazio tridimensionale euclideo, e supponiamo che tale configurazione sia omogeneamente deformata. L'elemento è soggetto alle tensioni superficiali $\mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R$ su ∂B corrispondenti alla tensione uniforme \mathbf{T}_0 , con \mathbf{n}_R normale ad un elemento di superficie in B . La positività della differenza tra lavoro di deformazione e lavoro delle forze superficiali in un processo di deformazione addizionale di tipo omogeneo a partire da B con gradiente $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}(\tau)$, corrisponde alla stabilità del materiale. Il processo di deformazione omogeneo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ dipendente dal parametro pseudotemporale τ , porta l'elemento materiale nella configurazione $B(\tau)$. Le forze esterne superficiali di tipo posizionale si assumono della forma:

$$\mathbf{t}_R^* = \mathbf{T}_R^*(\mathbf{F}(\tau), \mathbf{T}_0) \mathbf{n}_R, \quad (3.38)$$

nella quale il tensore uniforme \mathbf{T}_R^* corrisponde ad uno stato tensionale fittizio in equilibrio statico con le tensioni superficiali posizionali e dipende dal gradiente della deformazione addizionale $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}$, oltre che da \mathbf{T}_0 . Si noti che il tensore uniforme \mathbf{T}_R^* definisce un insieme di forze superficiali su ∂B a risultante nulla ma con momento risultante diverso da zero. Dal teorema di Green, infatti, si ha

$$\int_{\partial B} \mathbf{T}_R^* \mathbf{n}_R ds_R = \int_{\partial B} \text{div} \mathbf{T}_R^* dv_R = 0.$$

Le forze superficiali sono inizialmente corrispondenti alle tensioni superficiali $\mathbf{T}_0 \mathbf{n}_R$, per cui risulta

$$\mathbf{T}_R^*(\mathbf{1}, \mathbf{T}_0) = \mathbf{T}_0,$$

e variano nel processo di deformazione addizionale che perturba lo stato di equilibrio in B . La differenza tra lavoro di deformazione e lavoro delle forze superficiali posizionali risulta

$$W(t) - L(t) = \int_0^t \left\{ [\mathbf{T}_R(\tau) - \mathbf{T}_R^*(\tau)] \cdot \dot{\mathbf{F}}(\tau) \right\} d\tau, \quad (3.39)$$

avendo considerato che la potenza delle forze superficiali è

$$\int_{\partial B} \mathbf{t}_R^* \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau) ds_R = \int_{\partial B} \mathbf{T}_R^* \mathbf{n}_R \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau) ds_R = \mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}}, \quad (3.40)$$

ricavata applicando il teorema della divergenza e considerando che $\mathbf{T}_R^*(\tau)$ è uniforme.

Consideriamo ora deformazioni addizionali infinitesime con gradiente uniforme, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ con $0 < \tau < t$ e piccoli valori di t , e supponiamo che il materiale ammetta un legame costitutivo incrementale non lineare omogeneo di grado uno. L'approssimazione della (3.39) fino al secondo ordine in t

$$\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{T}}_R - \dot{\mathbf{T}}_R^*] \cdot \mathbf{L} t^2 + o(t^2), \quad (3.41)$$

con \mathbf{L} gradiente delle velocità $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$, porta alla seguente condizione di stabilità infinitesima del materiale:

$$[\dot{\mathbf{T}}_R - \dot{\mathbf{T}}_R^*] \cdot \mathbf{L} > 0, \quad \forall \mathbf{L} \neq \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Le quantità con il punto nella (3.42) possono anche essere interpretate come incrementi linearizzati nella deformazione infinitesima \mathbf{u} , inglobando il parametro t in $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau)_0$.

Condizioni particolari di stabilità del materiale si possono ottenere dalla (3.39) ipotizzando che le forze superficiali posizionali siano tali da corrispondere durante la deformazione ad una tensione fittizia uniforme \mathbf{T}_0 lavoro-coniugata alla deformazione generalizzata $\mathcal{A}(\mathbf{U})$, ossia tali che

$$\mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) \quad \forall \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.43)$$

Con la (3.43), la (3.39) si può riscrivere come

$$\int_0^t \left\{ [\mathbf{T}_f(\tau) - \mathbf{T}_0] \cdot \dot{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) \right\} d\tau. \quad (3.44)$$

L'approssimazione al secondo ordine della (3.44) limitatamente a percorsi di deformazione infinitesima

$$\frac{1}{2} \mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} t^2 + o(t^2), \quad (3.45)$$

fornisce la seguente condizione di stabilità materiale:

$$\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

Attraverso l'approssimazione al secondo ordine della (3.43)

$$(\mathbf{T}_0 + \dot{\mathbf{T}}_R^* \tau) \cdot (\mathbf{L} + \ddot{\mathbf{F}}_0 \tau) = \mathbf{T}_0 \cdot \left(\mathbf{L} + \left\{ \mathbf{L}^T \mathbf{L} + \ddot{\mathbf{F}}_0 + [f''(1) - 1] \mathbf{D} \mathbf{D} \right\} \tau \right) + o(\tau), \quad (3.47)$$

è possibile ottenere l'espressione della derivata del tensore $\mathbf{T}_R^*(\tau)$ nella configurazione B :

$$\dot{\mathbf{T}}_R^* = \frac{1}{2} [f''(1) - 1] (\mathbf{D} \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \mathbf{D}) + \mathbf{L} \mathbf{T}. \quad (3.48)$$

Nella (3.47) si è utilizzato lo sviluppo al secondo ordine per piccoli valori di τ , della derivata di $\mathcal{A}(\mathbf{U})$:

$$\dot{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) = \mathbf{D} + \left\{ \mathbf{L}^T \mathbf{L} + \ddot{\mathbf{F}}_0 + [f''(1) - 1] \mathbf{D} \mathbf{D} \right\} \tau + o(\tau).$$

La condizione di stabilità materiale (3.46), può essere ottenuta per altra via immaginando che il tensore $\mathbf{T}_R^*(\tau)$ sia scelto in modo tale che la differenza tra l'incremento dello stato di tensione generato dalla deformazione addizionale $\dot{\mathbf{T}}_R$ e quello dello stato tensionale fittizio $\dot{\mathbf{T}}_R^*$, sia pari all'incremento della tensione generalizzata $\dot{\mathbf{T}}_f$. La (3.42), quindi, si specializza in

$$\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D} > 0, \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (3.49)$$

e l'incremento di tensione $\dot{\mathbf{T}}_R^*$ rimane definito dalla (3.48) a seguito dell'utilizzo della (1.100). Si noti che l'incremento di tensione nominale appena definito soddisfa automaticamente l'equilibrio rotazionale perché è stato definito attraverso l'incremento di tensione $\dot{\mathbf{T}}_f$.

La condizione di stabilità del materiale secondo un criterio statico si traduce, quindi, in una restrizione sul legame costitutivo incrementale e corrisponde alla positività del tensore dei moduli tangenti istantanei relativi ad una certa misura di tensione lavoro-coniugata. Si noti, inoltre, come la stabilità del materiale secondo un criterio statico è intimamente connessa al problema delle disequaglianze costitutive, intese come restrizioni sul legame costitutivo consistenti con il comportamento fisico dei materiali (Hill, 1970; Truesdell e Noll, 1965; Wang e Truesdell, 1973; Ogden, 1984).

Un criterio di stabilità opportuno richiede la definizione di forze superficiali il cui lavoro non contenga effetti estranei al materiale dovuti a non-linearità geometriche. Un tensore delle

forze superficiali \mathbf{T}_R^* che rappresenti uno stato di tensione costante relativamente alla misura della deformazione di Biot $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{1}$, nel senso che deve valere la relazione:

$$\mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(1)} \quad \forall \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3.50)$$

è una scelta opportuna (Grimaldi e Luciano, 1999). Se le forze superficiali derivano da un tensore $\mathbf{T}_R^*(\tau)$ che soddisfa l'equilibrio rotazionale $\mathbf{T}_R^* \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}_R^{*T}$, al fine di evitare effetti instabilizzanti che nascono in seguito a rotazioni rigide, si ha

$$\mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^T \mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{U}}. \quad (3.51)$$

Dall'equilibrio alla rotazione, infatti, si ottiene

$$\mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_R^* \cdot (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{T}_R^* \mathbf{U} \mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R}^T \mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T \mathbf{T}_R^* \cdot \dot{\mathbf{U}}, \quad (3.52)$$

essendo $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ un tensore antisimmetrico.

Dalla (3.50), così, si ottiene

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \mathbf{T}_R^* + \mathbf{T}_R^{*T} \mathbf{R}). \quad (3.53)$$

La (3.53) e l'equilibrio rotazionale, forniscono come particolare soluzione

$$\mathbf{T}_R^* = \mathbf{R} \mathbf{T}_0 \quad (3.54)$$

se \mathbf{T}_0 è coassiale con \mathbf{U} . Le forze superficiali associate al tensore \mathbf{T}_R^* definito nella (3.54), seguono il materiale nella sua rotazione rigida e corrispondono a quelle introdotte in Grimaldi e Luciano (1999). Si definisce, perciò, il potenziale delle forze superficiali rappresentanti lo stato di tensione costante nell'elemento per un generico processo di deformazione $\mathbf{F}(\tau)$, come

$$L(t) = \int_0^t \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{1}) \cdot d\tau = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{E}^{(1)}. \quad (3.55)$$

Si noti che, se la deformazione $\mathbf{F}(\tau)$ non è tale da assicurare la coassialità tra \mathbf{T}_0 ed \mathbf{U} , allora le tensioni superficiali derivanti dal potenziale (3.55) non ammettono una semplice espressione. Limitatamente al primo ordine è però possibile ottenere l'espressione del tensore \mathbf{T}_R^* , derivando l'approssimazione fino a termini quadratici del potenziale (3.55) rispetto all'incremento linearizzato del gradiente della deformazione addizionale $\mathbf{L}\tau$, ottenendo così

$$\mathbf{T}_R^* = \mathbf{T}_0 + \left[\frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \mathbf{D}) + \mathbf{W}\mathbf{T}_0 \right] \tau + o(\tau). \quad (3.56)$$

Allo stesso risultato si perviene specializzando la (3.48) alla misura di deformazione lavoro-coniugata al tensore delle tensioni di Biot.

La (3.56), conduce, banalmente, alla versione incrementale della (3.54)

$$\dot{\mathbf{T}}_R^* = \mathbf{W}\mathbf{T}_0, \quad (3.57)$$

nell'ipotesi di coassialità di \mathbf{T}_0 e \mathbf{D} necessaria ai fini del soddisfacimento dell'equilibrio rotazionale incrementale:

$$\mathbf{W}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0\mathbf{L}^T = \mathbf{L}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W}. \quad (3.58)$$

Se \mathbf{T}_0 non è coassiale con \mathbf{D} , infatti, nascono le tensioni tangenziali $\frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{D})$ che assicurano l'equilibrio alla rotazione.

Limitatamente a deformazioni infinitesime, si noti che le forze superficiali corrispondenti ad un tensore di Biot costante sono le uniche nella famiglia (3.48) a seguire il materiale nella sua rotazione rigida, ossia ad avere la rappresentazione (3.57) se \mathbf{T}_0 è coassiale con \mathbf{D} .

Con le forze superficiali (3.50) o (3.54), l'approssimazione della (3.39) fino a termini quadratici in τ conduce alla seguente condizione di stabilità materiale (SM):

$$\frac{1}{2}\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} t^2 + o(t^2) > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0} \quad (3.59)$$

e cioè

$$\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (3.60)$$

e corrisponde alla condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti istantanei associato alla coppia lavoro-coniugata tensione-deformazione $(\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)})$ con $\mathbf{T}^{(1)}$ tensore delle tensioni di Biot. Nel caso di materiali elastici, la (3.60) coincide con la condizione GCN⁺.

3.7 FORME ALTERNATIVE DEL FUNZIONALE DI STABILITA'

L'integrando del funzionale (3.19) a meno di un fattore di proporzionalità positivo, utilizzando la (1.103), può essere espresso in funzione degli incrementi di tensione generalizzati $\dot{\mathbf{T}}_f$ nella forma:

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \left\{ \dot{\mathbf{T}}_f + \frac{1}{2}[f''(1) - 1](\mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{D}) + \mathbf{L}\mathbf{T} \right\} \cdot \mathbf{L}, \quad (3.61)$$

dalla quale segue che

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \underbrace{\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D}}_{\text{termine materiale}} + \underbrace{[f''(1) - 1]\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}}_{\text{termine geometrico}}. \quad (3.62)$$

Se si pensa ad un legame incrementale del tipo $\dot{\mathbf{T}}_f = \mathbf{C}_0^f(\mathbf{D})$, il primo termine della (3.62) dipende dal comportamento del materiale e rappresenta l'incremento di lavoro interno al secondo ordine, mentre il rimanente solo dalle tensioni nella configurazione di riferimento e rappresenta il lavoro del secondo ordine delle tensioni iniziali.

La formulazione alternativa della stabilità può essere ricavata per una via diversa. L'espressione della stabilità (3.14) si può formulare in maniera equivalente come:

$$\int_0^t \left\{ \int_B \left[\underbrace{(\mathbf{T}_f - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})}_{\text{effetto del materiale}} + \underbrace{\mathbf{T}_0 \cdot (\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) - \dot{\mathbf{F}})}_{\text{effetto geometrico}} \right] dv_R \right\} d\tau > 0, \quad (3.63)$$

nella quale il primo termine si riferisce impropriamente come "effetto del materiale" poiché in un certo senso rappresenta il lavoro di uno stato tensionale costante (vedi paragrafo precedente). La (3.63) approssimata al secondo ordine fornisce:

$$\int_B \left[\underbrace{\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})}_{\text{effetto del materiale}} + \underbrace{\mathbf{T}_0 \cdot (\ddot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) - \ddot{\mathbf{F}}_0)}_{\text{effetto geometrico}} \right] dv > 0, \quad (3.64)$$

il cui integrando attraverso la (1.103) è espresso dalla (3.62). Nella (3.64) e nelle formule che seguiranno, le derivate valutate nella configurazione B possono essere interpretate come incrementi linearizzati. Le equazioni espresse in termini di derivate, infatti, possono essere interpretate in senso incrementale sebbene con validità asintotica inglobando il parametro temporale τ nelle derivate. Per il gradiente della deformazione incrementale misurata a partire da B vale, ad esempio,

$$\tilde{\mathbf{F}} = \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{F}(\tau) \right|_{\tau=0} \tau + \mathbf{o}(\tau).$$

Nel caso delle misure di deformazione $\mathbf{E}^{(m)}$ la (3.62) si specializza in

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \dot{\mathbf{T}}^{(m)} \cdot \mathbf{D} + [m - 2] \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}. \quad (3.65)$$

Dalla (3.62) è possibile ricavare utili formulazioni per l'integrando del funzionale di stabilità (3.27), quale ad esempio, quella espressa in funzione dell'incremento del secondo tensore di Piola-Kirchhoff

$$\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \dot{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}. \quad (3.66)$$

Utilizzando un legame costitutivo del tipo incrementale la (3.62) si trasforma in

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} = \underbrace{\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}}_{\text{termine materiale}} + \underbrace{[f''(1) - 1] \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}}_{\text{termine geometrico}}, \quad (3.67)$$

con \mathbf{C}_0^R tensore dei moduli tangenti istantanei relativi al primo tensore di Piola-Kirchhoff e \mathbf{C}_0^f relativo ai moduli tangenti istantanei relativi ai tensori di tensione generalizzati.

Per un materiale incompressibile, il tensore delle tensioni di Cauchy è determinato da una relazione costitutiva solo a meno di un tensore arbitrario \mathbf{N} che non compie lavoro in ogni moto compatibile con il vincolo di incompressibilità, ovvero $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$. Un'analoga condizione vale per le tensioni generalizzate \mathbf{T}_f :

$$\mathbf{N}^f \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) = 0. \quad (3.68)$$

Nel caso del primo tensore di Piola-Kirchhoff si ha

$$\mathbf{N}_R = q \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.69)$$

mentre per la classe di tensori generalizzati $\mathbf{T}^{(m)}$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(1)} &= q \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{N}^{(2)} &= q \mathbf{U}^{-2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

con q scalare arbitrario, mentre la forma di $\mathbf{N}^{(m)}$ non risulta avere una semplice espressione per un generico m .

Ai fini dell'espressione del funzionale di stabilità è utile ricavare una forma esplicita per il termine $\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$. Differenziando la relazione (3.68) rispetto ad un parametro tipo tempo e valutando il risultato con la configurazione di riferimento pari a quella attuale si ottiene:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \left(\mathbf{N}^f \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \right) \right|_0 = \dot{\mathbf{N}}_0^f \cdot \mathbf{D} + q \operatorname{tr} \ddot{\mathcal{F}}_0(\mathbf{U}), \quad (3.71)$$

avendo considerato che $\mathbf{N}_0^f = q \mathbf{1}$ poiché $\dot{\mathcal{F}}_0(\mathbf{U}) = \mathbf{D}$. Differenziando poi la condizione di incompressibilità per un generico moto si ottiene:

$$0 = \left. \operatorname{tr} \dot{\mathbf{L}} \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \left(\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \left(\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \right) \right|_0 = \operatorname{tr} \ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.72)$$

per cui si ha:

$$\operatorname{tr} \ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}. \quad (3.73)$$

Dalla (1.101)₂ si ha che

$$\ddot{\mathcal{F}}_0(\mathbf{U}) = \ddot{\mathbf{U}}_0 + f''(1) \mathbf{D}^2, \quad (3.74)$$

per cui dalla (3.73) si ricava che

$$\operatorname{tr} \ddot{\mathcal{F}}_0(\mathbf{U}) = [1 + f''(1)] \operatorname{tr} \mathbf{D}^2. \quad (3.75)$$

Infine, sostituendo la (3.75) nella (3.71) si ha che

$$\dot{\mathbf{N}}_0^f \cdot \mathbf{D} = -q [1 + f''(1)] \operatorname{tr} \mathbf{D}^2, \quad \dot{\mathbf{N}}_0^f = -q [1 + f''(1)] \mathbf{D} + \dot{q} \mathbf{1}, \quad (3.76)$$

per cui la (3.62) specializzata al caso di un materiale incompressibile diventa

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - q \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \underbrace{\left\{ \mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) - q [1 + f''(1)] \mathbf{D} \right\} \cdot \mathbf{D}}_{\text{termine materiale}} + \underbrace{[f''(1) - 1] \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}}_{\text{termine geometrico}}, \quad (3.77)$$

in termini dei moduli \mathbf{C}_0^f , oppure

$$\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - q \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \underbrace{\{\mathbf{C}_0^{(m)}(\mathbf{D}) - q m \mathbf{D}\} \cdot \mathbf{D}}_{\text{termine materiale}} + \underbrace{[m - 2] \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}}_{\text{termine geometrico}}, \quad (3.78)$$

in termini dei moduli $\mathbf{C}_0^{(m)}$. Come si può vedere dalla (3.76) l'effetto della tensione arbitraria del legame costitutivo è nullo se e solo se $f''(1) = -1$, condizione che per la famiglia di tensioni $\mathbf{T}^{(m)}$ si verifica per il tensore $\mathbf{T}^{(0)}$.

Si noti che la parte indeterminata dell'incremento di tensione dipendente linearmente dal gradiente della deformazione incrementale, può essere inglobata nelle funzione di risposta incrementali $\mathbf{C}_0^R(\mathbf{L})$ o $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D})$, introducendo delle funzione di risposta opportunamente modificate $\bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{L})$ o $\bar{\mathbf{C}}_0^f(\mathbf{D})$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_R &= \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) + \dot{q} \mathbf{1} - q \mathbf{L}^T = \bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{L}) + \dot{q} \mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{T}}_f &= \mathbf{C}_0^f(\mathbf{L}) + \dot{q} \mathbf{1} - q [1 + f''(1)] \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}}_0^f(\mathbf{L}) + \dot{q} \mathbf{1} \end{aligned}$$

La (3.77) si trasforma, così, in

$$\bar{\mathbf{C}}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} = \underbrace{\bar{\mathbf{C}}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}}_{\text{termine materiale}} + \underbrace{[f''(1) - 1] \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}}_{\text{termine geometrico}}. \quad (3.79)$$

In particolare, per materiali incrementalmente lineari o lineari a tratti si ha che

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ijkl}^R &= C_{ijkl}^R - q \delta_{jk} \delta_{il} \\ \bar{C}_{ijkl}^f &= C_{ijkl}^f - \frac{q}{2} [1 + f''(1)] (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.8 DISEGUAGLIANZE COSTITUTIVE

Attraverso le (3.39), (3.44) o le (3.41) e (3.49), si possono immaginare diverse definizioni di stabilità del materiale rispettivamente in forma finita o relativamente a percorsi di deformazione infinitesima.

Nel tentativo di trovare una restrizione sul legame costitutivo consistente con il comportamento fisico dei materiali elastici, Truesdell e Noll (1965), hanno concluso che la diseuguaglianza costitutiva introdotta da Coleman e Noll (1959), che nella sua versione rafforzata (GCN⁺) corrisponde alla (3.49) espressa con la misura di deformazione di Biot

$$\dot{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{D} > 0, \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (3.81)$$

è una adeguata base per uno studio di questo tipo.

Contrapponendosi a Truesdell e Noll, Hill ha introdotto una disequaglianza costitutiva del tipo (3.49) basata sulla misura di deformazione logaritmica attraverso considerazioni su materiali incompressibili (Hill, 1968)

$$\dot{\mathbf{T}}^{(0)} \cdot \mathbf{D} > 0, \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

A supporto della sua tesi, egli ha mostrato che estendendo la condizione GCN⁺ al caso di materiali incompressibili si arriva ad una contraddizione e che solo una disequaglianza basata sulla misura di deformazione logaritmica può essere compatibile con restrizioni per materiali incompressibili. Infatti, la condizione

$$\{\mathbf{C}_0^f[\mathbf{D}] + \dot{\mathbf{N}}_0^f\} \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (3.83)$$

può essere soddisfatta solo se $\dot{\mathbf{N}}_0^f \cdot \mathbf{D} = 0$, essendo l'incremento della parte indeterminata della tensione arbitraria. Come mostrato nel paragrafo precedente questo avviene solo per $f''(1) = -1$, condizione che per la famiglia di tensioni $\mathbf{T}^{(m)}$ si verifica per il tensore $\mathbf{T}^{(0)}$.

Wang e Truesdell (1973), hanno fatto notare che la scelta di una possibile restrizione a priori sul materiale non può essere interamente basata su considerazioni valide per materiali incompressibili e che le obiezioni poste da Hill non sono più valide la (3.49) diventa una restrizione solo sulla parte determinata di tensione:

$$\{\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D})\} \cdot \mathbf{D} > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (3.84)$$

La questione delle disequaglianze costitutive rimane quindi ancora aperta. Al di là di considerazioni legate al problema delle disequaglianze costitutive, la definizione di stabilità del materiale rappresenta una particolare condizione che caratterizza l'influenza del legame costitutivo su fenomeni relativi al comportamento globale di un solido, quali l'instabilità e la biforcazione.

3.9 CONNESSIONI TRA STABILITÀ MATERIALE E STRUTTURALE IN AMBITO INFINITESIMO

Attraverso la (3.62) è possibile caratterizzare il tensore delle tensioni di Biot tra la famiglia di deformazioni $\mathbf{E}^{(m)}$ o l'incremento del tensore di Biot nella famiglia di deformazioni generalizzate $\mathcal{A}(\mathbf{U})$. A tal fine, detto S l'integrando del funzionale di stabilità (3.27), condizione sufficiente affinché S si riduca a $\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D}$ per ogni $\mathbf{L} \in \text{Sym}$ non nullo, è che

$f''(1) = 0$. La condizione diventa anche necessaria se S si riduce a $\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D}$ per ogni $\mathbf{L} \in \text{Sym}$ non nullo e per ogni \mathbf{T} , ovvero per una generica configurazione di equilibrio. In termini simbolici questo si esprime come:

$$S \equiv \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{L} \in \text{Sym} \neq \mathbf{0}, \forall \mathbf{T} \Leftrightarrow f''(1) = 0 \quad (3.85)$$

Questo si può dimostrare considerando il termine dello stato tensionale, con \mathbf{T} rappresentato lungo le direzioni principali di tensione:

$$\begin{aligned} & t_i (D_{ik} D_{ik} f''(1) + 2D_{ik} W_{ki} + W_{ki} W_{ki}) = \\ & t_1 [f''(1)(D_{11}^2 + D_{12}^2 + D_{13}^2) + 2(D_{12}W_{21} + D_{23}W_{32}) + W_{12}^2 + W_{13}^2] + \\ & t_2 [f''(1)(D_{22}^2 + D_{12}^2 + D_{33}^2) + 2(D_{12}W_{21} + D_{23}W_{32}) + W_{23}^2 + W_{21}^2] + \\ & t_3 [f''(1)(D_{33}^2 + D_{32}^2 + D_{31}^2) + 2(D_{31}W_{13} + D_{32}W_{23}) + W_{31}^2 + W_{32}^2] \end{aligned} \quad (3.86)$$

e considerando che $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ per $\mathbf{L} \in \text{Sym}$.

In altre parole, lungo percorsi di deformazione incrementali pure ($\mathbf{W} = \mathbf{0}$), il funzionale di stabilità coincide localmente con il termine materiale se la derivata seconda della funzione scala f , valutata nella configurazione di riferimento coincidente con quella attuale, è nulla.

Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $f''(1) = 0$ è che l'incremento di tensione $\dot{\mathbf{T}}_f$ coincida con l'incremento di tensione $\dot{\mathbf{T}}^{(t)}$ coniugato con la deformazione di Biot. La condizione sufficiente segue dal fatto che per la misura di Biot la derivata seconda della funzione scala è nulla essendo questa lineare. La condizione necessaria segue dalla (1.93) specializzata per $\dot{\mathbf{T}}_f = \dot{\mathbf{T}}^{(t)}$:

$$\dot{\mathbf{T}}_f - \dot{\mathbf{T}}^{(t)} = -\frac{f''(1)}{2} [\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}], \quad (3.87)$$

che per $f''(1) = 0$ implica che $\dot{\mathbf{T}}_f$ sia uguale a $\dot{\mathbf{T}}^{(t)}$. La condizione $f''(1) = 0$ non implica però che \mathbf{T}_f sia uguale a $\mathbf{T}^{(t)}$ a meno che la funzione scala sia pari a quella della sottoclasse di deformazioni $\mathbf{E}^{(m)}$.

Alla luce di quanto sopra detto, consideriamo ora la (3.35) per un corpo omogeneo soggetto a carichi morti del tipo "all round", lungo percorsi di equilibrio con deformazioni omogenee stabili fino a λ' . Supponiamo che per $\lambda = 0$ il termine del materiale sia definito positivo e che il tensore dei moduli istantanei corrisponda alla misura di tensione di Biot. Se il tensore dei moduli istantanei di Biot perde la sua condizione di definitezza positiva (ossia $\mathbf{C}_0^{(t)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} \geq 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ con l'uguaglianza valida per una certa direzione \mathbf{D}') per un certo λ' , allora necessariamente in questa configurazione si perde la stabilità (ovvero, per continuità, il funzionale di stabilità diventa semidefinito positivo in corrispondenza dello stesso valore di λ). Il contrario non vale in generale: il funzionale di stabilità, infatti, può

perdere la definitezza positiva anche se il tensore dei moduli istantanei di Biot è definito positivo come può accadere in presenza di rotazioni rigide e carichi di compressione. Se però ci si limita a deformazioni pure allora vale anche il contrario.

Infatti, se $\mathbf{C}_0^{(f)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} \geq 0$ per ogni tensore simmetrico \mathbf{D} con l'uguaglianza valida per un particolare \mathbf{D}' il funzionale necessariamente deve perdere la sua definitezza positiva sempre se ciò non è avvenuto in precedenza, come si può verificare dalla (3.62) per $\mathbf{L} = \mathbf{D}'$.

Inoltre, tra le infinite descrizioni del materiale relative a misure di tensione coniugate alla classe $\mathbf{E}^{(m)}$, in generale (ovvero per una generica configurazione di equilibrio caratterizzata da un generico \mathbf{T}), il tensore di Biot è l'unico a godere di questa proprietà se la perdita di stabilità avviene per *deformazioni simmetriche*. Per la classe di tensioni coniugate alla famiglia $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, la proprietà in questione è soddisfatta da qualsiasi tensore delle tensioni il cui incremento coincida con quello di Biot.

La dimostrazione segue dal fatto che solo se si utilizza il tensore delle tensioni di Biot nella famiglia di deformazioni $\mathbf{E}^{(m)}$ (o un qualsiasi tensore delle tensioni generalizzato il cui incremento coincida con quello di Biot per la classe di deformazioni $\mathcal{A}(\mathbf{U})$), il funzionale coincide con il termine del materiale per $\mathbf{L} \in \text{Sym}$. Infatti, se $\mathbf{C}_0^f[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} \geq 0$ per ogni tensore simmetrico \mathbf{D} con l'uguaglianza valida per un particolare \mathbf{D}' , il funzionale di stabilità diventa semidefinito positivo per $\mathbf{L} \in \text{Sym}$ pari a \mathbf{D}' (sempre nell'ipotesi che ciò non sia avvenuto prima) solo se il termine dipendente dallo stato tensionale nella configurazione attuale $[f''(1) - 1]\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ si annulla in corrispondenza di \mathbf{D}' . Questo avviene, per una generica configurazione di equilibrio caratterizzata da un generico \mathbf{T} , se e solo se $f''(1) = 0$ ovvero con l'incremento di tensione pari a quello di Biot, come si può vedere considerando la (3.86).

In definitiva si può dire che, lungo un serie lineare di stati stabili di deformazione omogenea per un corpo omogeneo, la perdita di stabilità del materiale (o alternativamente il softening dei moduli tangenti istantanei valutati in relazione alla misura di deformazione di Biot) avviene solo dopo la perdita di stabilità. Al contrario, il softening in termini dei moduli tangenti istantanei generalizzati relativi alle tensioni generalizzate \mathbf{T}_f con $f''(1) \neq 0$, in generale può avvenire anche in presenza di stati di equilibrio stabili, come si può vedere dalla (3.86). Infatti, la condizione di semidefinitezza positiva $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} \geq 0$ non implica, salvo casi particolari, che il termine dei carichi morti sia nullo per quel valore di \mathbf{D} che rende nullo $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$.

In presenza di tensioni prevalentemente di trazione (i.e. $t_i > 0$ $i=1..3$), se $f''(1)$ curvatura della funzione scala, è maggiore di zero, in generale, la condizione $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} \geq 0$ non implica che il funzionale di stabilità debba perdere la sua condizione di definitezza positiva, infatti per $\mathbf{L} \in \text{Sym}$ si ha

$$\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} \geq 0 \Rightarrow S(\mathbf{L} \in \text{Sym}) = \underbrace{\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}}_{\geq 0} + \underbrace{f''(1)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D}}_{>0} > 0 \quad (3.88)$$

e la perdita di stabilità può avvenire con $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$ negativo ossia, con materiale cosiddetto f -instabile. Se, al contrario, si ha $f''(1) < 0$ allora la perdita di stabilità materiale avviene necessariamente dopo che il funzionale perde la positività, quindi la condizione di f -instabilità non può essere raggiunta prima della perdita di stabilità strutturale.

In definitiva la condizione di f -instabilità del materiale può essere raggiunta prima della perdita di stabilità globale solo se $f''(1) > 0$, mentre se $f''(1) \leq 0$ la condizione di f -instabilità non può essere raggiunta lungo un percorso di stati di equilibrio stabili. Se $f''(1) = 0$, inoltre, la perdita di stabilità del materiale implica necessariamente che si perda la stabilità globale.

Se si utilizza come misura della stabilità del materiale il tensore $\mathbf{C}_0^{(0)}$ ($f''(1) = -1 < 0$), (Hill, 1968a)-b), 1970, 1975), è chiaro come la perdita di stabilità deve avvenire necessariamente con risposta del materiale di tipo stabile (sempre secondo la misura di deformazione di Hill). La perdita di stabilità globale avviene, quindi, con il tensore $\mathbf{C}_0^{(0)}$ definito positivo.

Riassumendo, per un corpo omogeneo di materiale incrementalmente non-lineare omogeneo di grado uno, deformato omogeneamente e con condizioni al contorno di sole forze valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{array}{l} \text{Stabilità infinitesima} \Rightarrow \text{SM} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Stabilità infinitesima} \\ f''(1) < 0 \\ t_i > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SM}^f . \\ \left. \begin{array}{l} \text{Stabilità infinitesima} \\ f''(1) > 0 \\ t_i < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SM}^f \end{array} \quad (3.89)$$

Nella (3.89) con SM si è indicata la condizione di stabilità materiale basata sulla positività di $\mathbf{C}_0^{(1)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$, mentre con SM^f si è indicata la condizione di stabilità materiale basata sulla positività di $\mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$. Ovviamente nei problemi omogenei i casi interessanti dal punto di

vista della stabilità materiale sono quelli di trazione. Per carichi di compressione, infatti, la condizione di stabilità è violata indipendentemente dalla risposta del materiale per rotazioni rigide incrementali. La perdita di stabilità del materiale (softening) in termini di $\mathbf{C}_0^{(i)}$ e di \mathbf{C}_0^f con $f''(1) > 0$ e $t_i < 0$ o con $f''(1) < 0$ e $t_i > 0$ non è realizzabile prima della perdita di stabilità, mentre è realizzabile in termini di \mathbf{C}_0^f con $f''(1) > 0$ e $t_i > 0$ o con $f''(1) < 0$ e $t_i < 0$.

La perdita di stabilità per trazione avviene necessariamente in presenza di una risposta positiva del materiale nel caso delle misure di deformazione caratterizzate da $f''(1) < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{C}_0^R(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} \geq 0 \\ f''(1) < 0 \\ t_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{C}_0^f(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0}. \quad (3.90)$$

Dalla (3.90) emerge che condizioni di stabilità materiale secondo misure caratterizzate da $f''(1) < 0$ (ad esempio, la condizione di stabilità del materiale di Hill) non possono escludere a priori la stabilità e l'unicità. Esistono, invece, dei casi per i quali la condizione di stabilità del materiale associata a misure con $f''(1) \geq 0$, è tanto forte da poter escludere a priori la perdita di stabilità. In questi casi l'influenza della particolare descrizione del legame costitutivo o condizione di stabilità materiale sui fenomeni di instabilità, è *particolarmente evidente*. Di questi casi ci occuperà nel cap. 5 assieme alle connessioni tra la stabilità del materiale, stabilità strutturale e la perdita di unicità per questo particolare problema al contorno.

Viceversa per problemi che non sono del tipo sopra analizzato, la perdita di stabilità del materiale può avvenire prima della perdita di stabilità (ed eventualmente, della biforcazione) ed il softening in termini della forma $\mathbf{C}_0^{(i)}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}$ è, quindi, realizzabile. Un caso è quello di un corpo deformato omogeneamente con spostamenti imposti su tutto il contorno. In queste ipotesi, infatti, è possibile utilizzare i due teoremi di Hadamard e Van Hove (Truesdell & Noll, 1965; Hill, 1962) e le loro generalizzazioni ai materiali lineari a tratti con legge plastica di tipo associato (Ryzhak, 1987).

Per un materiale incrementalmente lineare, in particolare, la condizione di ellitticità forte (SE) per il tensore costitutivo tangente nominale assicura la stabilità della configurazione di equilibrio e l'unicità della soluzione incrementale (eq. (3.32)), ma in genere non assicura la SM. Se vale la condizione SE il materiale può così raggiungere il softening prima di perdere la stabilità e l'unicità:

$$\dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} SE \Rightarrow \text{Stabilità(Unicità)} \\ SE \not\Rightarrow \text{Stabilità materiale} \end{array} \right. \quad (3.91)$$

Un esempio di questo tipo può essere costruito considerando un materiale convenzionale per il quale il tensore costitutivo $\mathbf{C}_0^{(1)}$ sia formalmente uguale a quello relativo alla legge di Hooke:

$$\mathbf{C}_0^{(1)} = 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + k \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (3.92)$$

con $k = \lambda + 2/3\mu$ modulo di comprimibilità volumetrica e λ, μ i moduli di Lamè misurati rispetto alle variabili lavoro-coniugate ($\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}$). \mathbf{I} indica il tensore del quarto ordine identità.

Dalla (2.33) segue che la condizione SE equivale a

$$(\mathbf{C}_0^{(1)} + \mathbf{G})[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1 \quad (3.93)$$

con

$$\mathbf{G}_{ijkl} = -\frac{1}{4} (T_{ik} \delta_{jm} + T_{im} \delta_{kj} - 3T_{mj} \delta_{ki} + T_{kj} \delta_{mi}).$$

Utilizzando la (3.92) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^{(1)}[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] &= \mu \left[1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2 \right] + (\lambda + 2\mu) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2, \\ \mathbf{G}[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] &= t_i \left[n_i^2 - \frac{1}{4} (n_i^2 + m_i^2 + 2m_k n_k m_i n_i) \right], \end{aligned} \quad (3.94)$$

e per il secondo termine nella (3.93) vale

$$\mathbf{G}[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \geq \left[\min \{t_i\} - \frac{1}{2} \max \{t_i\} \right] - \frac{1}{2} \max \{t_i\} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2. \quad (3.95)$$

Per la (3.93), quindi, vale

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_0^{(1)} + \mathbf{G})[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] &\geq \\ \left[\mu + \min \{t_i\} - \frac{1}{2} \max \{t_i\} \right] \left[1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2 \right] &+ \left[(\lambda + 2\mu) - \max \{t_i\} + \min \{t_i\} \right] (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Condizioni sufficienti per la SE sono

$$\begin{aligned} \left[\mu + \min \{t_i\} - \frac{1}{2} \max \{t_i\} \right] &> 0, \\ \left[(\lambda + 2\mu) - \max \{t_i\} + \min \{t_i\} \right] &= \left[k + \frac{4}{3} \mu - \max \{t_i\} + \min \{t_i\} \right] > 0, \end{aligned} \quad (3.97)$$

mentre il softening avviene se uno dei moduli k, μ è negativo.

Se $\left[\frac{1}{2} \max \{t_i\} - \min \{t_i\} \right] < 0$, allora per

$$\left[\frac{1}{2} \max \{t_i\} - \min \{t_i\} \right] < \mu < 0, \tag{3.98}$$

si può scegliere

$$k > \left[\max \{t_i\} - \min \{t_i\} - \frac{4}{3} \mu \right] > 0$$

per cui valgono le condizioni sufficienti per la SE (3.97), e per il teorema di Van Hove lo stato di deformazione è stabile ed unico ma con il materiale in softening.

La condizione SE non implica la SM poichè contiene degli effetti geometrici stabilizzanti-instabilizzanti al contrario della SM che dipende intrinsecamente dal materiale. E' quindi possibile dimostrare che sotto opportune limitazioni sulle tensioni (vedi capitolo 6) la condizione SM implichi la SE. Sotto queste limitazioni il softening del materiale non è più realizzabile prima della perdita di unicità e stabilità:

$$\boxed{\dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0} : \tag{3.99}$$

$$\left. \begin{array}{l} SM \\ \min \{t_i\} - \gamma \max \{t_i\} > -\min \left\{ \mathbf{C}_0^{(1)} \left(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow SE \Rightarrow \text{Stabilità(Unicità)}$$

Per un materiale incrementalmente lineare a tratti (elasto-plastico associato e non) la condizione SE per il tensore costitutivo nominale del solido di confronto (di Hill per leggi associate o di Raniecki per leggi non-associate) assicura la stabilità del solido di confronto (e la condizione SE per il tensore costitutivo reale). Questa a sua volta implica l'unicità e la stabilità per il solido reale, ma in genere non assicura la stabilità del materiale per cui il raggiungimento del softening nel range di validità della SE e, quindi, prima della perdita della stabilità e dell'unicità, non può essere escluso:

$$\boxed{\dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0} : \tag{3.100}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{SE} \\ \boxed{\text{Solido di confronto } (*\mathbf{C}_0^R)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\text{Stabilità(Unicità)}} \\ \boxed{\text{Solido confronto}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\text{Stabilità(Unicità)}} \\ \boxed{\text{Solido reale}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{SE} \\ \boxed{\text{Solido di confronto } (*\mathbf{C}_0^R)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{SE \text{ Solido reale}} \\ \Rightarrow \boxed{SM \text{ Solido reale}} \\ \Rightarrow \boxed{SM \text{ Solido di confronto}} \end{array} \right.$$

Analogamente al caso lineare riguardo alla realizzabilità del softening si può dire che:

$$\boxed{\dot{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0} : \tag{3.101}$$

$$\left. \begin{array}{l} SM \text{ Solido confronto} \Rightarrow SM \text{ Solido reale} \\ \min \{t_i\} - \gamma \max \{t_i\} > -\min \left\{ \mathbf{C}_0^{(1)} \left(\widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} SE \\ \boxed{\text{Solido di confronto } (*\mathbf{C}_0^R)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\text{Stabilità(Unicità)}} \\ \boxed{\text{Solido confronto}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\text{Stabilità(Unicità)}} \\ \boxed{\text{Solido reale}} \end{array}$$

quindi il softening del materiale di confronto, sotto le opportune restrizioni sulle tensioni, non è realizzabile prima della perdita di stabilità e di unicità.

Analoghe conclusioni possono essere raggiunte per corpi elasto-plastici omogeneamente deformati di forma parallelepipedica con spostamenti solo tangenziali sulle facce e per una particolare classe di tensori costitutivi, in virtù del teorema di Van Hove modificato (Ryzhak, 1993). Nel capitolo 4 si esaminerà il caso di un corpo di materiale incrementale lineare, ortotropo ed incompressibile soggetto a condizioni di tipo misto: anche in questo caso si dimostrerà la realizzabilità del softening del materiale prima della perdita di stabilità.