

---

## CAPITOLO 2

### *Legami costitutivi e deformazioni incremental*

---

2.1 Introduzione.....	2-2
2.2 Legami costitutivi incremental.....	2-3
2.3 Leggi di variazione dei moduli tangenziali.....	2-7
2.4 Problema incrementale di equilibrio.....	2-10
2.5 Deformazioni infinitesime sovrapposte ad uno stato di deformazione finita per materiali incrementalmente lineari: relazioni tra stabilit� ed unicit�.....	2-13
2.6 Deformazioni infinitesime sovrapposte ad uno stato di deformazione finita per materiali incrementalmente non-lineari: relazioni tra stabilit� ed unicit�.....	2-19
2.7 Modi di biforcazione localizzati.....	2-25

---

## 2.1 INTRODUZIONE

---

In questo capitolo vengono brevemente richiamati alcuni concetti della teoria del problema di equilibrio incrementale per un corpo continuo soggetto a carichi morti (formulata da Hill 1957; 1958; 1959; 1967; 1978), che saranno utilizzati nei capitoli successivi. L'attenzione sarà principalmente rivolta ai problemi di unicità della soluzione incrementale e di stabilità della configurazione di equilibrio attuale, e si considereranno essenzialmente materiali con legge costitutiva incrementale positivamente omogenea di grado uno. A questa classe appartengono, in particolare, materiali con legge costitutiva incrementale lineare e materiali elasto-plastici con risposta lineare a tratti e legge di flusso plastico associata. La teoria di Hill è stata successivamente generalizzata da Raniecki (1979), e Raniecki e Bruhns (1981), per includere materiali elasto-plastici con leggi di flusso non associate. Un cenno a tale generalizzazione sarà dato anche per tali materiali.

Dopo una breve descrizione dei legami costitutivi incrementali utilizzati nei successivi sviluppi e delle leggi che regolano la trasformazione tra diverse coppie coniugate tensione-deformazione, vengono presentate le condizioni sufficienti di unicità e di stabilità mediante l'introduzione di alcuni funzionali di esclusione. Questi ultimi, nel caso di materiali non-lineari, sono ottenuti attraverso l'utilizzo di solidi lineari di confronto. I solidi di confronto forniscono una stima conservativa della perdita di unicità e di stabilità, nel senso che l'instabilità e la biforcazione del solido reale non possono precedere l'instabilità e la biforcazione del solido di confronto. Mentre per materiali non-lineari che ammettono un potenziale è possibile identificare lo stato di biforcazione primario del solido di confronto con quello del solido reale, al contrario, per solidi che non ammettono un potenziale (materiali elasto-plastici con leggi di flusso non associate) questo non è più possibile. In altre parole, la procedura basata sul solido di confronto è conservativa nei materiali non governati da potenziale e diventa anche critica per quelli che ammettono il potenziale. Per solidi lineari il primo stato in cui si perde l'unicità e la stabilità si identifica con lo stato in cui il funzionale di esclusione perde la definitezza positiva. Inoltre, saranno esaminati sia modi di biforcazione diffusi sia localizzati corrispondenti alla formazione di bande di taglio, che sono possibili a partire da stati di deformazione omogenea.

In questo capitolo si adatterà la notazione  $\dot{\chi}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}$ , ... per gli incrementi in  $\chi$ ,  $\mathbf{F}$ , ... . A tal proposito, si ricorda che le equazioni scritte in termini di incrementi possono essere sostituite con quelle in termini di derivate utilizzando relazioni del tipo (1.106) valutate fino all'ordine coerente con l'approssimazione che si sta considerando.

---

## 2.2 LEGAMI COSTITUTIVI INCREMENTALI

---

I solidi che verranno presi in considerazione si penseranno costituiti da un materiale la cui legge costitutiva puntuale nella forma incrementale sia positivamente omogenea di grado uno esprimibile nella forma

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R (\alpha \dot{\mathbf{F}}) = \alpha \mathbf{C}^R (\dot{\mathbf{F}}) \quad \forall \alpha > 0, \quad (2.1)$$

nella quale la funzione non-lineare tensoriale  $\mathbf{C}^R(\cdot)$  dipende, generalmente, dalla storia di deformazione e dalla posizione spaziale del punto considerato, oltre che dallo stato di tensione e di deformazione attuale. Questa classe di materiali è abbastanza ampia da contenere materiali con risposta incrementale lineare (ad esempio materiali ipoelastici ed elastici) o lineare a tratti (ad esempio materiali elasto-plastici). Per materiali incrementalmente lineari il legame si riduce alla seguente relazione

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}], \quad (2.2)$$

nella quale  $\mathbf{C}^R$  è un tensore del quarto ordine detto “tensore degli pseudo-moduli” (Hill, 1978). Alla classe dei materiali incrementalmente lineari appartengono i materiali elastici, per i quali vale una relazione del tipo:

$$\mathbf{T}_R = \mathcal{H}(\mathbf{F}),$$

ed il tensore dei moduli elastici è definito come

$$\mathbf{C}^R = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{F}}, \quad C_{ijkl}^R = \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial F_{hk}}. \quad (2.3)$$

Se, inoltre, il materiale è iperelastico si ha

$$\mathbf{T}_R = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad T_{Rij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}, \quad (2.4)$$

per cui il tensore  $\mathbf{C}^R$  risulta simmetrico rispetto allo scambio tra gli indici  $i, j$  ed  $h, k$ .

Per un materiale incompressibile ( $\det \mathbf{F} = 0$ ) il tensore dei moduli elastici si riferisce alla parte della tensione che non include l'aliquota dipendente dalla pressione idrostatica arbitraria  $q$  del legame costitutivo espresso in termini del tensore di Cauchy (i.e.  $\mathbf{T} = \mathcal{S}(\mathbf{F}) + q\mathbf{1}$ ):

$$\mathbf{T}_R = \mathcal{H}(\mathbf{F}) + q\mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{C}^R = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.5)$$

Una sottoclasse di materiali appartenente alla classe (2.1), che include i materiali rappresentati dalla incrementali lineari e lineari a tratti per i quali il tensore degli pseudo-moduli gode delle proprietà di simmetria  $C_{ijkl}^R = C_{klij}^R$ , è quella caratterizzata da un

potenziale  $U$  (Hill, 1967, 1978), funzionale della storia della deformazione e funzione del gradiente della deformazione incrementale positivamente omogeneo di grado due (che soddisfa cioè, la relazione  $U(\alpha \dot{\mathbf{F}}) = \alpha^2 U(\dot{\mathbf{F}}) \quad \forall \alpha > 0$ ):

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{F}}}, \quad 2U = \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.6)$$

La (2.6)<sub>1</sub> deriva necessariamente dal teorema di Eulero per le funzioni omogenee. Dalle (2.6), ne consegue che la relazione costitutiva incrementale deve essere omogenea di grado 1 e può essere definita come:

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R \left( \frac{\dot{\mathbf{F}}}{|\dot{\mathbf{F}}|} \right) [\dot{\mathbf{F}}] = C_{ijkl}^R \left( \frac{\dot{\mathbf{F}}}{|\dot{\mathbf{F}}|} \right) \dot{F}_{kl}, \quad (2.7)$$

essendo  $C_{ijkl}^R \left( \frac{\dot{\mathbf{F}}}{|\dot{\mathbf{F}}|} \right)$  gli pseudo-moduli che soddisfano la condizione di simmetria  $C_{ijkl}^R = C_{klij}^R$  implicata dalle (2.6). Si noti che dovendo essere la (2.7) omogenea di grado uno, la funzione  $\mathbf{C}^R(\cdot)$  è omogenea di grado zero, ossia è funzione di  $\frac{\dot{\mathbf{F}}}{|\dot{\mathbf{F}}|}$ , direzione di  $\dot{\mathbf{F}}$ . Per materiali lineari a tratti la funzione  $\mathbf{C}^R(\cdot)$  è costante a tratti ed il legame costitutivo è lineare a tratti. In generale la dipendenza di  $\mathbf{C}^R(\cdot)$  dal gradiente della deformazione può essere completamente non lineare. Per questo motivo i materiali caratterizzati dalle (2.7) e (2.1) in seguito saranno indicati come incrementalmente non-lineari. Il legame (2.7) è adatto a rappresentare materiali elasto-plastici bilineari (con differenti moduli costitutivi a seconda se il gradiente di deformazione incrementale è associato allo scarico elastico od al carico plastico) con legge di flusso plastico del tipo associato.

I materiali incrementalmente lineari caratterizzati dalla (2.2), ammettono il seguente potenziale quadratico:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] \cdot \dot{\mathbf{F}}, \quad (2.8)$$

se  $C_{ijkl}^R = C_{klij}^R$  essendo  $C_{ijkl}^R = \partial^2 U / \partial \dot{F}_{ij} \partial \dot{F}_{kl}$

Espressioni equivalenti della (2.6)<sub>1</sub> in termini di altre misure di tensione possono essere ottenute nell'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida con quella attuale. In questo caso il potenziale si trasforma secondo una legge analoga a quella che soddisfa la densità di massa:

$$J^{-1} U = U_0, \quad (2.9)$$

nella quale

$$U_0 = \frac{1}{2} \mathbf{C}_0^R [\mathbf{L}] \cdot \mathbf{L},$$

$\mathbf{C}_0^R$  è il tensore degli pseudo-moduli istantanei ed  $\mathbf{L}$  è il gradiente della deformazione incrementale rispetto alle coordinate attuali. Il potenziale  $U$  si può esprimere in maniera equivalente attraverso l'incremento di Jaumann del tensore di Kirchhoff o attraverso l'incremento del secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$2U_0 = {}_0\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} = \overset{\circ}{\mathbf{T}}_K \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L} - 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}, \quad (2.10)$$

avendo sfruttato le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_R &= \overset{\circ}{\mathbf{T}}_K + \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{D}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{D} \\ \dot{\mathbf{T}}_R &= \dot{\mathbf{T}}^{(2)} + \mathbf{L}\mathbf{T} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Allora è possibile definire potenziali analoghi ad  $U$  che definiscono relazioni costitutive in termini delle misure di tensione precedentemente introdotte:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}}_K &= \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{D}}, & 2V_0 &= \overset{\circ}{\mathbf{T}}_K \cdot \mathbf{D} \\ \dot{\mathbf{T}}^{(2)} &= \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{D}}, & 2W_0 &= \dot{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ed i potenziali soddisfano le seguenti relazioni

$$V_0 - W_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\mathbf{D}, \quad 2(U_0 - W_0) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{L}. \quad (2.13)$$

Una classe di materiali elasto-plastici abbastanza ampia può essere idealizzata attraverso la seguente equazione costitutiva incrementale bilineare espressa in termini degli incrementi delle misure di coniugate di tensione e deformazione definite dalla (1.63):

$$\dot{\mathbf{T}}_f = {}^e\mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) - \dot{\mathcal{F}}_p(\mathbf{U})], \quad \dot{\mathcal{F}}_p(\mathbf{U}) = \frac{\alpha}{h} \boldsymbol{\theta} (\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad (2.14)$$

nella quale  ${}^e\mathbf{C}^f$  è il tensore dei moduli elastici tangenti,  $\dot{\mathcal{F}}_p(\mathbf{U})$  è la parte plastica della deformazione incrementale,  $h$  è uno scalare (positivo per strain-hardening, negativo per strain-softening e nullo per plasticità perfetta) che misura l'hardening plastico,  $\boldsymbol{\omega}$  è il tensore del secondo ordine simmetrico normale alla superficie di snervamento nello spazio delle tensioni,  $\boldsymbol{\theta}$  è il tensore simmetrico che definisce la direzione della parte plastica della deformazione (ovvero la normale alla superficie del potenziale plastico),  $\alpha$  è uno scalare che può assumere il valore 1 o 0 a seconda che la risposta sia, rispettivamente, plastica o elastica. Se il modulo di hardening  $h$  tende ad infinito il legame elasto-plastico si riconduce ad uno di tipo elastico. Tutte le quantità sono funzionali della storia precedente di deformazione. La legge costitutiva elasto-plastica introdotta del tipo

non-associato con opportuna definizione dei tensori  $\mathbf{w}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  si riconduce ai legami costitutivi presenti in letteratura (Rudnicki e Rice, 1975; Rice, 1977; Raniecki e Bruhns, 1981) mentre si riduce a quella classica del tipo associato (Hill, 1958) se  $\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}$ . Le leggi costitutive con flusso plastico non associato sono adatte a modellare il comportamento di metalli porosi, di polimeri, materiali ceramici e cementizi, rocce e terreni, mentre quelle con flusso associato sono più adatte per i metalli.

La relazione costitutiva (2.14) è associata all'esistenza di una superficie di snervamento  $\Phi(\mathbf{T}_f, \mathbf{Z})$ , funzione scalare (qui definita nello spazio delle tensioni) dipendente dalle tensioni e dalla variabile interna  $\mathbf{Z}$  (rappresentante una serie di scalari, vettori o tensori) che rappresenta la dipendenza dalla storia completa di deformazione. Tale funzione assume valori negativi per stati elastici e valori nulli quando sono possibili deformazioni plastiche incrementali.

Il comportamento elastico, di carico plastico e di scarico elastico, è definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ se } \Phi(\mathbf{T}_f, \mathbf{Z}) < 0 && \text{(stato elastico)} \\ &\text{o } \Phi(\mathbf{T}_f, \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \boldsymbol{\omega} \leq 0 && \text{(scarico elastico).} \\ \alpha &= 1 \text{ se } \Phi(\mathbf{T}_f, \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0 && \text{(carico plastico)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relazione (2.14) può essere espressa interamente in termini dell'incremento di deformazione  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$  notando che:

$${}^e \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \boldsymbol{\omega} = (\dot{\mathbf{T}}_f \cdot \boldsymbol{\omega}) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{h} {}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}] \cdot \boldsymbol{\omega} \right\}, \quad (2.16)$$

e richiedendo che il modulo plastico

$$g = h + \alpha {}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}] \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.17)$$

sia strettamente positivo. Allora, si ha

$$\dot{\mathbf{T}}_f = {}^e \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] - \alpha \frac{{}^e \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \boldsymbol{\omega}}{g} {}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}], \quad (2.18)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ se } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) < 0 && \text{(stato elastico)} \\ &\text{o } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \boldsymbol{\omega} \cdot {}^e \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \leq 0 && \text{(scarico elastico).} \\ \alpha &= 1 \text{ se } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \boldsymbol{\omega} \cdot {}^e \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \geq 0 && \text{(carico plastico)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

La funzione scalare  $\Psi$  rappresenta la superficie di snervamento nello spazio delle deformazioni. Il legame può essere inoltre espresso nella seguente forma compatta

$$\dot{\mathbf{T}}_f = \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})], \quad \mathbf{C}^f = {}^e \mathbf{C}^f - \alpha \frac{{}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}] \otimes {}^e \mathbf{C}^{fT} [\boldsymbol{\omega}]}{g}, \quad (2.20)$$

nella quale  ${}^e\mathbf{C}^f[\boldsymbol{\theta}] \otimes {}^e\mathbf{C}^{fT}[\boldsymbol{\mu}]$  definisce un tensore del quarto ordine di componenti

$$\left\{ {}^e\mathbf{C}^f[\boldsymbol{\theta}] \otimes {}^e\mathbf{C}^{fT}[\boldsymbol{\omega}] \right\}_{ijkl} = {}^e\mathbf{C}_{ijmn}^f \theta_{mn} {}^e\mathbf{C}_{rshk}^f \omega_{rs}.$$

Il tensore  ${}^e\mathbf{C}^f[\boldsymbol{\theta}]$  indica la direzione del flusso plastico, mentre  ${}^e\mathbf{C}^{fT}[\boldsymbol{\omega}]$  è il tensore del secondo ordine normale alla superficie di snervamento nello spazio delle deformazioni. Il tensore  $\mathbf{C}^f$ , funzione della velocità di deformazione, definisce un legame incrementale lineari a tratti.

Il legame (2.20) ammette come inverso il legame:

$$\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{C}^{f^{-1}}[\dot{\mathbf{T}}_f], \quad \mathbf{C}^{f^{-1}} = {}^e\mathbf{C}^{f^{-1}} + \frac{\alpha \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\omega}}{h}. \quad (2.21)$$

Hill (1958, 1959) ha introdotto il seguente legame costitutivo bilineare per un solido con strain-hardening e legge di flusso associata in termini dell'incremento di Jaumann del tensore di Kirchhoff, valutato con la configurazione di riferimento coincidente con quella corrente:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\kappa} &= \mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}], & \mathbf{C}_0^{(0)} &= {}^e\mathbf{C}_0^{(0)} - \frac{\alpha}{g} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{C}_0^{(0)^{-1}}[\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\kappa}], & \mathbf{C}_0^{(0)^{-1}} &= {}^e\mathbf{C}_0^{(0)^{-1}} - \frac{\alpha}{h} \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} \end{aligned}, \quad (2.22)$$

nella quale  ${}^e\mathbf{C}_0^{(0)}$  è il tensore dei moduli elastici tangenti istantanei supposto simmetrico,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  sono i tensori normali alla superficie di snervamento nello spazio delle deformazioni e delle tensioni, rispettivamente. Per un materiale di questo tipo il potenziale definito nella (2.12) assume la seguente forma:

$$2V_0 = \begin{cases} {}^e\mathbf{C}_0^{(0)}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} - \frac{\alpha}{g} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D})^2 \\ \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\kappa} \cdot {}^e\mathbf{C}_0^{(0)^{-1}}[\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\kappa}] + \frac{\alpha}{h} \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\kappa} \right)^2 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Le precedenti equazioni costitutive possono essere espresse nella forma (2.2) attraverso opportuni cambiamenti di variabili che saranno analizzati nel paragrafo successivo.

---

### 2.3 LEGGI DI VARIAZIONE DEI MODULI TANGENZIALI

---

La relazione che lega i moduli tangenziali istantanei definiti materiali con legame incrementale lineare a tratti, associati a diverse coppie coniugate di tensione e

deformazione  $[\mathbf{T}_f, \mathcal{A}(\mathbf{U})]$  può essere ricavata sfruttando l'invarianza della lavoro incrementale dello stato di tensione per unità di massa (Hill, 1978):

$$\frac{\mathbf{T}_f \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})}{\rho} = \frac{\mathbf{T}_f^* \cdot \dot{\mathcal{F}}^*(\mathbf{U})}{\rho^*}, \quad (2.24)$$

avendo indicato con la stella le quantità relative ad un'altra scelta di coppia coniugata  $[\mathbf{T}_f^*, \dot{\mathcal{F}}^*(\mathbf{U})]$  con una configurazione di riferimento la cui densità è  $\rho^*$ .

Poiché le componenti del tensore  $\mathcal{A}(\mathbf{U})$  sono funzioni delle componenti di  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$ , la (2.24) fornisce

$$\frac{\rho}{\rho^*} \mathbf{T}_f^* = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}^*(\mathbf{U})} \right]^T \mathbf{T}_f \quad (2.25)$$

nella quale  $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}^*(\mathbf{U})}$  definisce un tensore del quarto ordine di componenti

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}^*(\mathbf{U})} \right]_{ijkl} = \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{kl}^*(\mathbf{U})}.$$

Differenziando la (2.25) ed utilizzando la (2.2) ed una analoga per le variabili stella si ottiene

$$\frac{\rho}{\rho^*} \mathbf{C}_{ijkl}^f = \frac{\partial \mathcal{F}_{mn}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{ij}^*(\mathbf{U})} \frac{\partial \mathcal{F}_{rs}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{kl}^*(\mathbf{U})} \mathbf{C}_{mnr}^f + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{mn}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{ij}^*(\mathbf{U}) \partial \mathcal{F}_{kl}^*(\mathbf{U})} T_{mn}, \quad (2.26)$$

nella quale i moduli tangenziali sono riferiti al dominio nel quale ricade l'incremento corrispondente  $\dot{\mathcal{F}}^*(\mathbf{U})$  o  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$ . Dalla (2.26) si nota come i moduli non siano invarianti rispetto alla scelta di misura di deformazione, ma dipendono dalla curvatura locale della misura di deformazione.

La (2.26) può essere utilizzata per collegare moduli riferiti a diverse configurazioni di riferimento. Se i moduli stella indicano i moduli riferiti alla configurazione di riferimento attuale (moduli istantanei), per la misura di deformazione associata al tensore di Green-Lagrange  $\mathbf{E}^{(2)}$  si può ricavare la seguente relazione

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{(2)*} = J^{-1} F_{im}^T F_{jn} F_{kr} F_{ls} \mathbf{C}_{mnr}^{(2)} \quad (2.27)$$

La (2.27) segue dalle relazioni

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^{(2)} &= \mathbf{F}^T \mathbf{D}\mathbf{F} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{F}} \end{aligned},$$



nelle quali l'ultima esprime il cambiamento di  $\mathbf{F}$  con la configurazione di riferimento, essendo  $\bar{\mathbf{F}}$  gradiente della trasformazione dalla configurazione di riferimento generica a quella stella, e dai risultati:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{mn}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{ij}^*(\mathbf{U})} \right|_{\mathbf{F}^*=I} = \lim_{[\mathbf{F}^{*T} D\mathbf{F}^*]_{ij} \rightarrow 0} \frac{\bar{F}_{km} [\mathbf{F}^{*T} D\mathbf{F}^*]_{kl} \bar{F}_{ln}}{[\mathbf{F}^{*T} D\mathbf{F}^*]_{ij}} = F_{im} F_{jn} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{mn}(\mathbf{U})}{\partial \mathcal{F}_{ij}^*(\mathbf{U}) \partial \mathcal{F}_{kl}^*(\mathbf{U})} = 0.$$

La legge di trasformazione per gli pseudo-moduli rispetto alla configurazione di riferimento si ottiene attraverso l'invarianza del carico  $\mathbf{T}_R \mathbf{n}_R ds_R$  su un elemento di area  $\mathbf{n}_R ds_R$  rispetto alla scelta di configurazione di riferimento. Dalla seguente relazione

$$\dot{\mathbf{T}}_R^0 = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \dot{\mathbf{T}}_R, \quad (2.28)$$

e dalle (2.2) e (1.38) si ottiene, infatti,

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkl}^R = \mathbf{J}^{-1} F_{jm} F_{ln} \mathbf{C}_{imkn}^R. \quad (2.29)$$

Utili relazioni tra i moduli istantanei tangenziali possono essere ricavate, alternativamente, considerando la (1.92), che lega due misure generiche di tensioni generalizzate e considerando un legame incrementale di tipo lineare. Si arriva così alla seguente equazione in forma di componenti cartesiane, che esprime l'equivalenza tra due misure di proprietà del materiale:

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{\bar{f}} D_{km} = {}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^f D_{km} + \frac{f''(1) - \bar{f}''(1)}{2} (T_{ik} D_{kj} + D_{ik} T_{kj}), \quad (2.30)$$

nella quale  ${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{\bar{f}}$  e  ${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^f$  sono i tensori del quarto ordine dei moduli tangenziali istantanei (ossia, ricavati nell'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida con quella attuale) relativi a due generiche misure di tensioni generalizzate. Poiché la (2.30) deve valere per un generico  $D_{km}$  e considerando la proprietà di simmetria  $\mathbf{C}_{ijkm} = \mathbf{C}_{ijmk}$  si ottiene la seguente relazione:

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{\bar{f}} = {}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^f + \frac{f''(1) - \bar{f}''(1)}{4} (T_{ik} \delta_{jm} + T_{im} \delta_{kj} + T_{mj} \delta_{ki} + T_{kj} \delta_{mi}), \quad (2.31)$$

che preserva le condizioni di simmetria  $\mathbf{C}_{ijkm} = \mathbf{C}_{ijmk} = \mathbf{C}_{jikm}$ .

Un'altra utile relazione si ottiene esprimendo l'incremento del primo tensore di Piola-Kirchhoff in funzione di  $\dot{\mathbf{T}}^{(2)}$ , ottenendo:

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^R = {}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{(2)} + \delta_{ik} T_{mj}, \quad (2.32)$$

e specializzando la (2.31) per  ${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{\bar{f}} = {}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^{(2)}$

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^R = {}_0 \mathbf{C}_{ijkm}^f + \frac{f''(1) - 1}{4} (T_{ik} \delta_{jm} + T_{im} \delta_{kj} + T_{mj} \delta_{ki} + T_{kj} \delta_{mi}) + \delta_{ik} T_{mj}. \quad (2.33)$$

Dalla (2.31) è possibile notare che la differenza tra le varie misure dei moduli istantanei tangenziali associati a diverse tensioni generalizzate è apprezzabile solo se lo stato tensionale corrente è di un ordine di grandezza paragonabile con i moduli stessi.

Sfruttando le relazioni di cui sopra è possibile esprimere le relazioni costitutive elasto-plastiche precedentemente introdotte in termini del primo tensore di Piola-Kirchhoff.

Ad esempio se la legge costitutiva (2.20) è espressa in termini del secondo tensore di Piola-Kirchhoff e della sua deformazione lavoro-coniugata

$$\dot{\mathbf{T}}^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)}[\dot{\mathbf{E}}^{(2)}], \quad \mathbf{C}^{(2)} = {}^e\mathbf{C}^{(2)} - \alpha \frac{\mathbf{P} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g}, \quad \mathbf{P} = {}^e\mathbf{C}^f[\boldsymbol{\theta}], \quad \boldsymbol{\beta} = {}^e\mathbf{C}^{fT}[\boldsymbol{\omega}], \quad (2.34)$$

utilizzando le seguenti relazioni:

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{T}}^{(2)}, \quad \dot{\mathbf{E}}^{(2)} = \mathbf{F}^T \mathbf{D}\mathbf{F}, \quad (2.35)$$

dal confronto della

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{F}\mathbf{C}^{(2)}[\dot{\mathbf{E}}^{(2)}] \quad (2.36)$$

con la (2.2), si ottiene

$$\mathbf{C}_{ijhk}^R = T_{Rmj} F_{km}^{-1} \delta_{ih} + F_{il} F_{nd} \mathbf{C}_{lijk}^{(2)}, \quad (2.37)$$

e la condizione di carico o scarico può essere definita in termini del prodotto scalare  $\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{F}}$  invece che in termini di  $\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$ , essendo

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{E}}^{(2)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{F}^T \mathbf{D}\mathbf{F} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{F}},$$

per le proprietà di simmetria di  $\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{(2)}}$ .

Se il legame viene espresso in termini di moduli istantanei, la relazione che lega i pseudo-moduli elasto-plastici a quelli associati alla  $[\mathbf{T}_f, \mathcal{A}(\mathbf{U})]$  si ricava sostituendo nella (2.33) la (2.20)<sub>2</sub>.

---

## 2.4 PROBLEMA INCREMENTALE DI EQUILIBRIO

---

Supponiamo di conoscere una configurazione di equilibrio  $\chi(\mathbf{X})$ , non necessariamente unica, in un istante generico di un assegnato processo di carico quasi-statico per un corpo la cui posizione del generico punto materiale nella configurazione di riferimento  $B_0$  è indicata con  $\mathbf{X}$ . Si assume, inoltre, che siano noti lo stato tensionale e le variabili di stato necessarie per descrivere completamente tale stato di equilibrio. La configurazione equilibrata e nota è caratterizzata dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{T}_R + \rho_0 \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \mathbf{x} &= \bar{\chi}(\mathbf{X}) & \text{su } \partial B_0^x \\ \mathbf{F} \mathbf{T}_R^T &= \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T & \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{F}) & \text{su } \partial B_0^\sigma \end{aligned} \quad (2.38)$$

con  $\rho_0$  densità nella configurazione di riferimento,  $\mathbf{F}$  gradiente della deformazione dalla configurazione di riferimento  $\partial \chi / \partial \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{b}$  forze di volume dipendenti da  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{n}_R$  normale esterna al contorno  $\partial B_0$ . Si assume che le tensioni sono imposte sulla porzione di contorno  $\partial B_0^\sigma$ , mentre le posizioni sulla rimanente  $\partial B_0^x$  con  $\partial B_0 = \partial B_0^x \cup \partial B_0^\sigma$ . Si noti che l'equazione di equilibrio rotazionale è implicata dalla simmetria del tensore di Cauchy o dei tensori generalizzati  $\mathbf{T}_f$ .

Ci proponiamo di cercare una soluzione incrementale  $\dot{\chi}$  conseguente ai seguenti incrementi nelle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\bar{\chi}}(\mathbf{X}) & \text{su } \partial B_0^x \\ \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n}_R &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{F}) & \text{su } \partial B_0^\sigma \end{aligned} \quad (2.39)$$

avendo indicato con  $[\dot{\bullet}] = [\bullet](\mathbf{x}') - [\bullet](\mathbf{x})$  gli incrementi linearizzati delle quantità rilevanti e con  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$  la deformazione incrementale dalla configurazione  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$  a quella  $\mathbf{x}' = \chi'(\mathbf{X})$ . La deformazione incrementale è supposta piccola in modo che termini di ordine  $|\dot{\mathbf{x}}|^2$  possano essere trascurati rispetto a quelli di ordine  $|\dot{\mathbf{x}}|$ . Il gradiente della deformazione incrementale  $\dot{\mathbf{F}}$ , ad esempio, è definito come  $\partial \dot{\chi} / \partial \mathbf{X}$ .

Per ogni porzione arbitraria di volume del corpo  $P_0$ , vale la seguente relazione di equilibrio linearizzata

$$\int_{\partial P_0} (\mathbf{T}_R + \dot{\mathbf{T}}_R) \mathbf{n}_R ds_R + \int_{P_0} \rho_0 (\mathbf{b} + \dot{\mathbf{b}}) dv_R = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

che, dall'applicazione del teorema della divergenza e supponendo una eventuale superficie di discontinuità interna per l'incremento del tensore di tensione nominale, implica:

$$\begin{aligned} \text{Div } \dot{\mathbf{T}}_R + \rho_0 \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0} \\ \llbracket \dot{\mathbf{T}}_R \rrbracket \mathbf{n}_R &= \mathbf{0} \end{aligned}, \quad (2.41)$$

con la doppia parentesi quadra che indica il salto attraverso la superficie di discontinuità. La prima delle (2.41) è l'equazione di equilibrio incrementale, la seconda la condizione di continuità del vettore tensione nominale attraverso la superficie di discontinuità. L'equazione di equilibrio rotazionale, trascurando termini di ordine superiore al primo,

$$\int_{\partial P_0} (\chi + \dot{\chi} - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{T}_R + \dot{\mathbf{T}}_R) \mathbf{n}_R ds_R + \int_{P_0} \rho_0 (\chi + \dot{\chi} - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{b} + \dot{\mathbf{b}}) dv_R = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

con  $\mathbf{x}_0$  posizione di un punto arbitrario nello spazio euclideo, fornisce la seguente equazione di equilibrio rotazionale incrementale

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{T}_R^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{T}}_R^T = \dot{\mathbf{T}}_R\mathbf{F}^T + \mathbf{T}_R\dot{\mathbf{F}}^T \quad , \quad (2.43)$$

a seguito dell'applicazione del teorema di Green. Si noti che la condizione di discontinuità, in questo caso, non produce nessuna nuova equazione.

Nelle (2.41) e (2.43), l'incremento del tensore nominale per materiali lineari o lineari a tratti può essere espresso al primo ordine come

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}]_{+0}|\dot{\mathbf{F}}|$$

in termini del tensore degli pseudo-moduli  $\mathbf{C}^R$ . Per un materiale elastico  $\mathbf{C}^R$  dipende dalla deformazione nota  $\chi(\mathbf{X})$  e dalla posizione del punto considerato. Se il materiale è incompressibile si ha, invece,

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] - q\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T} + \dot{q}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{o}|\dot{\mathbf{F}}|$$

e la condizione di incompressibilità si modifica in  $tr(\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}) = 0$ .

In forma di componenti cartesiane la (2.41)<sub>1</sub>, nel caso in cui il materiale ammetta un tensore degli pseudo-moduli tangenti (materiali incrementalmente lineari o lineari a tratti), diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_l} \right) + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \\ \mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial^2 \dot{X}_k}{\partial X_l \partial X_j} + \left( \frac{\partial \mathbf{C}_{ijkl}^R}{\partial F_{mn}} \frac{\partial^2 X_m}{\partial X_n \partial X_j} \right) \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_l} + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \quad , \quad (2.44) \\ \mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial^2 \dot{X}_k}{\partial X_l \partial X_j} + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \end{aligned}$$

delle quali, la seconda vale nelle ipotesi che il materiale sia elastico, omogeneo nella configurazione di riferimento e la terza nelle ipotesi che, in aggiunta, la deformazione  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$  sia omogenea. Per un materiale incompressibile la (2.41) si trasforma nella seguente maniera

$$Div \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] + \mathbf{F}^{-T} Grad \dot{q} - \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}^{-T} Grad q + \rho_0 \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.45)$$

essendo:

$$\begin{aligned} Div(\dot{q} \mathbf{F}^{-T}) &= \mathbf{F}^{-T} Grad \dot{q} \quad , \\ Div(-q \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}^{-T}) &= -\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}^{-T} Grad q - q \mathbf{F}^{-T} Grad (tr(\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}})) \quad ' \end{aligned}$$

La (2.45) in forma di componenti diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl}^R \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_l} \right) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} - q \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial X_k} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial X_m} + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \\ C_{ijkl}^R \frac{\partial^2 \dot{x}_k}{\partial X_l \partial X_j} + \left( \frac{\partial C_{ijkl}^R}{\partial F_{mn}} \frac{\partial^2 x_m}{\partial X_j \partial X_n} \right) \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_l} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial X_k} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial X_m} + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \quad , \quad (2.46) \\ C_{ijkl}^R \frac{\partial^2 \dot{x}_k}{\partial X_l \partial X_j} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} + \rho_0 \dot{b}_i &= 0 \end{aligned}$$

con le due ultime equazioni valide rispettivamente nelle ipotesi che il materiale sia elastico, omogeneo nella configurazione di riferimento e nell'ipotesi che in, aggiunta, la deformazione  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$  sia omogenea.

Le precedenti equazioni possono essere semplificate se si ipotizza che la configurazione di riferimento coincida con quella corrente ( $\mathbf{F}=\mathbf{1}$ )

$$\begin{aligned} Div \, {}_0\dot{\mathbf{T}}_R + \rho \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{F}}_0 \mathbf{T} + {}_0\dot{\mathbf{T}}_R^T &= {}_0\dot{\mathbf{T}}_R + \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}_0^T \end{aligned} \quad (2.47)$$

con

$$\begin{aligned} {}_0\dot{\mathbf{T}}_R &= \mathbf{C}_0^R [\dot{\mathbf{F}}_0] \\ {}_0\dot{\mathbf{T}}_R &= \mathbf{C}_0^R [\dot{\mathbf{F}}_0] + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{I} - \mathbf{q} \dot{\mathbf{F}}_0^T \end{aligned} \quad (2.48)$$

valide rispettivamente per materiale senza vincoli interni e per materiale incompressibile nell'ipotesi in cui può essere definito un tensore degli pseudo-moduli. La condizione di incompressibilità diventa  $tr(\dot{\mathbf{F}}_0) = 0$  essendo  $\dot{F}_{0ij} = \partial \dot{x}_i / \partial x_j$ . Usualmente, il gradiente della deformazione incrementale valutato nella configurazione attuale si indica con  $\mathbf{L}$  in analogia con la notazione per il gradiente delle velocità, interpretando la deformazione incrementale come una velocità.

---

## **2.5 DEFORMAZIONI INFINITESIME SOVRAPPOSTE AD UNO STATO DI DEFORMAZIONE FINITA IN MATERIALI INCREMENTALMENTE LINEARI: RELAZIONI TRA STABILITÀ ED UNICITÀ**

---

In questo paragrafo prenderemo in considerazione materiali caratterizzati dalla seguente legge costitutiva incrementale lineare

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}], \quad (2.49)$$

nella quale si è implicitamente considerata la dipendenza spaziale e dallo stato di deformazione. La (2.49) è valida per rappresentare materiali elastici o ipoplastici.

**Stabilità ed unicità globale.** Negli sviluppi che seguono si suppone che le forze di volume e le forze di superficie siano di tipo morto (ossia dipendono solo da  $\mathbf{X}$ ). Prima di analizzare le questioni di unicità e di stabilità è opportuno richiamare la relazione soddisfatta dal lavoro virtuale delle forze di superficie e di volume in equilibrio con lo stato tensionale interno:

$$\int_{\partial B_0} \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R \cdot \delta \boldsymbol{\chi} ds_R + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} dv_R = \int_{B_0} \mathbf{T}_R \cdot \delta \mathbf{F} dv_R . \quad (2.50)$$

Consideriamo, ora, il problema al contorno globale (2.38) e supponiamo che esso ammetta due soluzioni  $\boldsymbol{\chi}', \boldsymbol{\chi}$  distinte la cui differenza sia  $\Delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}' - \boldsymbol{\chi}$ , soluzione differenza che soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \text{Div } \Delta \mathbf{T}_R &= \mathbf{0} \text{ in } B_0 \\ \Delta \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^x , \\ \Delta \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^\sigma \end{aligned} \quad (2.51)$$

con  $\Delta \mathbf{T}_R = \mathbf{T}'_R - \mathbf{T}_R$ , e utilizzando una formula opportunamente adattata analoga alla (2.50) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_0} \Delta \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R \cdot \Delta \boldsymbol{\chi} ds_R &= \int_{B_0} \Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R \\ \int_{\partial B_0} \Delta T_{ij} n_{Rj} \Delta \chi_i ds_R &= \int_{B_0} \Delta T_{ij} \Delta F_{ij} dv_R . \end{aligned} \quad (2.52)$$

L'integrando nell'integrale di superficie si annulla identicamente in ogni punto di  $\partial B_0$  dalle (2.51) e di conseguenza, se l'integrale a secondo membro della (2.52) è positivo per differenti deformazioni, non ci potranno essere due soluzioni distinte. Chiaramente una condizione sufficiente per l'unicità è

$$\int_{B_0} \Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} ds_R > 0 \quad \forall \Delta \boldsymbol{\chi} \neq \mathbf{0} / \Delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x . \quad (2.53)$$

Una condizione più forte che implica la (2.53) è la seguente:

$$\Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} > 0 \quad \forall \Delta \mathbf{F} \neq \mathbf{0} . \quad (2.54)$$

Per un materiale iperelastico, la condizione sufficiente di unicità si trasforma in

$$\int_{B_0} \Delta \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right) \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \boldsymbol{\chi} \neq \mathbf{0} / \Delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x , \quad (2.55)$$

con  $(\partial W / \partial \mathbf{F})_{ij} = \partial W / \partial F_{ij}$ .

Il seguente funzionale:

$$E = \int_{B_0} W dv_R - \int_{\partial B_0} \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R \cdot \boldsymbol{\chi} ds_R + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\chi} dv_R ,$$

si indica come "funzionale dell'energia". Una configurazione di equilibrio si dice globalmente stabile se vale

$$E(\chi') \geq E(\chi) \quad (2.56)$$

per ogni  $\chi'$  cinematicamente ammissibile. Se  $\chi$  è soluzione del problema di equilibrio, la condizione di minimo stretto per  $E$ :

$$E(\chi') > E(\chi) \quad \forall \chi' \neq \chi \text{ cinematicamente ammissibile,}$$

implica che la soluzione è unica. Infatti, se  $\chi' \neq \chi$  sono due soluzioni allora

$$\int_{B_0} \Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R = 0$$

e

$$E(\chi') - E(\chi) = \int_{B_0} [W(\chi') - W(\chi) - \mathbf{T}_R \cdot (\mathbf{F}' - \mathbf{F})] dv_R > 0$$

$$E(\chi) - E(\chi') = \int_{B_0} [W(\chi) - W(\chi') - \mathbf{T}_R \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}')] dv_R > 0$$

Sommando le due equazioni avremo

$$\int_{B_0} \Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R > 0,$$

contraddicendo l'ipotesi di  $\chi' \neq \chi$  soluzioni. Si noti che l'unicità non implica la stabilità e viceversa.

Di seguito si riporta uno schema riassuntivo delle condizioni prima ricavate:

$$\text{Materiali incrementalmente lineari: } \boxed{\Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \mathbf{F} \neq \mathbf{0}} \Rightarrow \boxed{\int_{B_0} \Delta \mathbf{T}_R \cdot \Delta \mathbf{F} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \chi \neq \mathbf{0} / \Delta \chi = 0 \text{ su } \partial B_0^x} \Rightarrow \text{Unicità}$$

$$\text{Materiali iperelastici: } \boxed{E(\chi') > E(\chi) \quad \forall \chi' \neq \chi} \Rightarrow \begin{cases} \text{Unicità} \\ \text{Stabilità} \end{cases}$$

**Stabilità ed unicità locale.** Piuttosto che richiedere l'unicità della soluzione sotto condizioni al contorno che producono deformazioni finite, risulta più utile formulare condizioni sufficienti che assicurino l'unicità della soluzione per variazioni infinitesime delle condizioni al contorno a partire da una nota configurazione di deformazione finita. In quanto segue, è sufficiente supporre che la deformazione incrementale  $\dot{\chi}$  sia continua e differenziabile con continuità a tratti.

Supponiamo, quindi, che alle variazioni infinitesime delle condizioni al contorno (2.39) corrispondano due soluzioni distinte  $\Delta \dot{\chi}' = \dot{\chi}' - \dot{\chi}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{T}}_R = \dot{\mathbf{T}}_R' - \dot{\mathbf{T}}_R$ , allora si ha

$$\begin{aligned} \text{Div } \Delta \dot{\mathbf{T}}_R &= \mathbf{0} \text{ in } B_0 \\ \Delta \dot{\chi} &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^x, \\ \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n}_R &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^\sigma \end{aligned} \quad (2.57)$$

operando opportune trasformazioni risulta che

$$0 = \int_{\partial B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{n}_R \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R = \int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_{Rij} \Delta \dot{F}_{ij} dv_R . \quad (2.58).$$

Se l'integrale a secondo membro della (2.52) è positivo per differenti deformazioni  $\Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = \dot{\boldsymbol{\chi}}' - \dot{\boldsymbol{\chi}}$  compatibili con le condizioni al contorno, l'ipotesi di due soluzioni incrementali distinte porterebbe ad un assurdo per la (2.58). Chiaramente una condizione sufficiente per l'unicità incrementale è

$$\int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} \mathbf{C}^R [\Delta \dot{\mathbf{F}}] \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_{Rij} \Delta \dot{F}_{ij} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x . \quad (2.59)$$

Per i materiali caratterizzati da un tensore degli pseudo-moduli simmetrico, che ammettono quindi un potenziale  $U$  del gradiente della deformazione incrementale, la (2.59) può essere espressa nella forma alternativa in termini del cosiddetto "funzionale di esclusione":

$$\int_{B_0} U(\dot{\mathbf{F}}) dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x . \quad (2.60)$$

Una condizione più forte che implica la (2.59) è la seguente:

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} = \{ \mathbf{C}^R [\Delta \dot{\mathbf{F}}] \} \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} = C^R_{ijkl} \frac{\partial \Delta \dot{\chi}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \Delta \dot{\chi}_k}{\partial X_l} > 0 \quad \forall \Delta \dot{\mathbf{F}} \neq \mathbf{0} . \quad (2.61)$$

In generale, questa equivale a richiedere la definitezza positiva del tensore del quarto ordine  $\mathbf{C}^R$ . Per un materiale iperelastico, analogamente, la condizione sufficiente di unicità si trasforma in

$$\int_{B_0} \Delta \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} \dot{\mathbf{F}} \right) \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} \Delta \dot{F}_{kl} \Delta \dot{F}_{ij} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x , \quad (2.62)$$

avendo indicato con  $(\partial W^2 / \partial F^2)_{ijkl} = \partial^2 W / \partial F_{ij} \partial F_{kl}$ .

In generale, se il tensore degli pseudo-moduli gode delle proprietà di simmetria maggiore, vale il seguente principio variazionale: il funzionale

$$\int_{B_0} U(\dot{\mathbf{F}}) dv_R - \int_{\partial B_0^c} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R - \int_{B_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x , \quad (2.63)$$

definito nella classe di deformazioni  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  cinematicamente ammissibili (i.e che soddisfano la (2.39)<sub>1</sub>), è stazionario in corrispondenza di una deformazione incrementale cinematicamente ammissibile se e solo se  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  è una soluzione attuale (unica o no) del problema incrementale di equilibrio. Infatti la variazione prima del funzionale (2.63), fornisce



$$\int_{B_0} \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] \cdot \delta \dot{\mathbf{F}} dv_R - \int_{\partial B_0^s} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R - \int_{B_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R =$$

$$- \int_{B_0} (\text{Div} \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] + \rho_0 \dot{\mathbf{b}}) \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R + \int_{\partial B_0^s} (\mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] \mathbf{n}_R - \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R, \quad (2.64)$$

per cui se  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  è soluzione del problema incrementale la variazione è identicamente nulla per ogni  $\delta \dot{\boldsymbol{\chi}}$ . Se, al contrario, il funzionale è stazionario in corrispondenza di una deformazione incrementale  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$ , il secondo membro della (2.64) risulta pari a zero, per cui utilizzando i lemmi fondamentali del calcolo variazionale si ricava che  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  è soluzione del problema di equilibrio fondamentale (vale a dire le (2.41)<sub>1</sub> e la (2.39)<sub>2</sub> sono identicamente soddisfatte).

La condizione di stabilità infinitesima ordinaria per la configurazione di equilibrio  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  postula che il lavoro interno fatto in ogni deformazione infinitesima  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  compatibile con le condizioni al contorno è non minore di quello richiesto dai carichi morti per effettuare la stessa deformazione infinitesima, ossia con lo stesso stato di tensione della configurazione attuale di equilibrio. Se il lavoro interno è maggiore di quello dei carichi morti, si parla allora di condizione di "superstabilità". Se la condizione di superstabilità viene espressa con il lavoro esterno delle forze di superficie e delle forze di volume ed il lavoro interno di deformazione calcolati fino al secondo ordine (Hill, 1978), rispettivamente pari a:

$$\int_{\partial B_0} \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R + \int_{B_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R$$

$$\int_{B_0} (\mathbf{T}_R + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{T}}_R) \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R, \quad (2.65)$$

la differenza risulta

$$\frac{1}{2} \int_{B_0} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} \mid \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^s,$$

che in termini di pseudo-moduli si trasforma in

$$\int_{B_0} \mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}] \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} \mid \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^s. \quad (2.66)$$

Se il funzionale è non-negativo si dice che la configurazione di equilibrio è al limite di stabilità. Configurazioni nelle quali la (2.66) si annulla per  $\dot{\mathbf{F}} \neq \mathbf{0}$  vengono dette di equilibrio neutro.

Le restrizioni imposte dalla (2.66) sono uguali a quelle imposte dalla (2.59) poiché  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  e  $\Delta \dot{\boldsymbol{\chi}}$  possono essere confuse tra di loro soddisfacendo le stesse condizioni al contorno. Per un solido incrementalmente lineare, la condizione di superstabilità coincide con quella

sufficiente di unicità, per cui la condizione di superstabilità implica l'unicità. La condizione di stabilità ordinaria non implica, al contrario, l'unicità.

In definitiva vale il seguente schema:

$$\boxed{\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} > 0 \quad \forall \Delta \dot{\mathbf{F}} \neq 0} \Rightarrow \boxed{\int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B_0^x} \Rightarrow \boxed{\text{Unicità incrementale}}$$

$$\uparrow \downarrow$$

$$\boxed{\text{Supestabilità infinitesima}}$$

**Biforcazione.** Quando lo stato attuale di deformazione è tale che la condizione sufficiente di unicità non è soddisfatta, la soluzione incrementale non è necessariamente unica. È possibile caratterizzare alcuni stati di deformazione nei quali la soluzione è sicuramente non unica. La differenza tra due soluzioni  $\Delta \dot{\boldsymbol{\chi}}$  del problema incrementale (2.39)-(2.41) deve soddisfare

$$\begin{aligned} \text{Div } \Delta \dot{\mathbf{T}}_R &= \text{Div } \mathbf{C}^R [\Delta \dot{\mathbf{F}}] = \mathbf{0} \\ \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^x \\ \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n}_R &= \mathbf{0} \quad \text{su } \partial B_0^\sigma \end{aligned} \quad (2.67)$$

Se le precedenti equazioni e le condizioni al contorno, essendo omogenee, sono soddisfatte solo dalla soluzione banale  $\Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}$  allora la soluzione è unica, tuttavia per alcune deformazioni la distribuzione dei moduli  $\mathbf{C}_{ijkl}^R$  (i cosiddetti “autostati”) è tale da ammettere soluzioni  $\Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = \dot{\boldsymbol{\chi}}_E$  non nulle (le “autofunzioni”) e la soluzione non è più unica. In tale circostanza, infatti, la condizione di unicità non è più soddisfatta

$$\int_{B_0} \mathbf{C}^R [\Delta \dot{\mathbf{F}}] \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{\partial B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n}_R \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R - \int_{B_0} \text{Div } \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R = 0. \quad (2.68)$$

Nell'ipotesi di simmetria del tensore degli pseudo-moduli (i.e.  $\mathbf{C}_{ijkl}^R = \mathbf{C}_{klij}^R$ ) le autofunzioni hanno la proprietà di rendere stazionario il funzionale di esclusione

$$\frac{1}{2} \int_{B_0} \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}] \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} U(\dot{\boldsymbol{\chi}}) dv_R, \quad (2.69)$$

nella classe delle funzioni  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  continue e differenziabili con continuità a tratti, che si annullano su  $\partial B_0^x$ . La variazione prima del funzionale è nulla se e solo se  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  è soluzione del problema incrementale omogeneo (2.67), infatti

$$\delta \int_{B_0} U(\dot{\boldsymbol{\chi}}) dv_R = \int_{B_0} \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}] \cdot \delta \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{\partial B_0^\sigma} (\mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}] \mathbf{n}_R) \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R - \int_{B_0} \text{Div } \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R,$$

che si annulla per ogni variazione  $\delta\dot{\chi}$ , banalmente per  $\dot{\chi} = \mathbf{0}$  ma non banalmente per le autofunzioni  $\dot{\chi}$  soluzioni della (2.67). Viceversa se la variazione è nulla, argomenti classici del calcolo variazionale portano a concludere che  $\dot{\chi} = \dot{\chi}_E$  è un'autofunzione. Il valore di stazionarietà del funzionale (2.69) è zero, come si può vedere dalla (2.68).

Gli autostati di interesse rilevante sono quelli che possono essere raggiunti durante un percorso di deformazione generato dalla variazione monotonica di un parametro  $\hat{\lambda}$  (un carico, un modulo o una dimensione geometrica) che parte da una configurazione per la quale il funzionale di esclusione è positivo e che passa, quindi, attraverso una successione di stati stabili. Se si raggiunge uno stato per il quale il funzionale è semidefinito e si annulla per alcune deformazioni incrementali ammissibili, è evidente che queste deformazioni  $\dot{\chi}_E$  rendono stazionario il funzionale di esclusione. Esso assume quindi un minimo con valore nullo in corrispondenza di tali deformazioni, che corrispondono ad autofunzioni:

$$\int_{B_0} U(\dot{\chi}_E + \alpha\dot{\chi}, \hat{\lambda}_c) dv_R \geq \int_{B_0} U(\dot{\chi}_E, \hat{\lambda}_c) dv_R = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \int_{B_0} U(\dot{\chi}_E + \alpha\dot{\chi}, \hat{\lambda}_c) dv_R \right|_{\alpha=0} = \delta \int_{B_0} U(\dot{\chi}_E, \hat{\lambda}_c) dv_R = 0$$

Queste configurazioni che godono della proprietà di avere il funzionale di esclusione semidefinito sono dette autoconfigurazioni primarie essendo le prime ad essere raggiunte lungo un percorso di deformazione stabile. In queste configurazioni la perdita di superstabilità implica la perdita definitiva di unicità.

---

## **2.6 DEFORMAZIONI INFINITESIME SOVRAPPOSTE AD UNO STATO DI DEFORMAZIONE FINITA IN MATERIALI INCREMENTALMENTE NON LINEARI: RELAZIONI TRA STABILITÀ ED UNICITÀ**

---

Supponiamo ora sempre che la deformazione incrementale  $\dot{\chi}$  sia continua e differenziabile con continuità a pezzi e che il materiale sia incrementalmente non lineare. Le stesse argomentazioni delle equazioni (2.57) e (2.58), portano alla seguente condizione sufficiente per l'unicità incrementale

$$\int_{B_0} \Delta \dot{T}_R \cdot \Delta \dot{F} dv_R = \int_{B_0} \Delta \dot{T}_{Rij} \Delta \dot{F}_{ij} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \dot{\chi} \neq \mathbf{0} / \Delta \dot{\chi} = 0 \text{ su } \partial B_0^x, \quad (2.70)$$

valida quindi per differenti deformazioni che siano compatibili con le condizioni al contorno sulla frontiera  $\partial B_0^x$  (e cioè ammissibili). Per dati omogenei (ossia  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  su  $\partial B_0^x$ ,  $\dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{n}_R = 0$  su  $\partial B_0^\sigma$ ,  $\dot{\mathbf{b}} = 0$  in  $B_0$ ) la condizione (2.60) continua a valere ed un automodo è caratterizzato dalla stazionarietà del funzionale di esclusione poiché un campo di deformazione incrementale nulla è soluzione del problema.

La condizione (2.70) è più forte della (2.59) poiché se la parte di frontiera  $\partial B_0^x$  è assente o è fissa, allora la soluzione identicamente nulla è ammissibile nella (2.70), e se accoppiata ad una generica deformazione incrementale ammissibile genera la condizione (2.59). In questo caso la (2.70) esclude biforcazioni sotto condizioni al contorno omogenee.

Genericamente lungo un percorso di deformazione può accadere che lungo un primo segmento valga la condizione (2.70) garantendo l'unicità universale (sotto condizioni al contorno omogenee e non), quindi un segmento successivo nel quale la condizione sufficiente di unicità non vale ma sussiste ancora l'unicità, poi un punto critico nel quale si manifesta la biforcazione primaria per una certa distribuzione di tensioni incrementali al contorno ed infine altre configurazioni di biforcazione primaria sotto altre distribuzioni di tensioni incrementali tra cui quelle omogenee.

La condizione (2.70) può essere indebolita nel caso in cui si conosce una soluzione: in questo caso, infatti, la diseuguaglianza può essere formulata per coppie di deformazioni incrementali contenenti la soluzione in questione.

Analogamente al caso dei materiali incrementali lineari per i quali il tensore degli pseudo-moduli gode di proprietà di simmetria maggiore, vale il seguente principio variazionale: il funzionale

$$\int_{B_0} U(\dot{\mathbf{F}}) dv_R - \int_{\partial B_0^\sigma} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} ds_R - \int_{B_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dv_R \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} \mid \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x, \quad (2.71)$$

definito nella classe di deformazioni  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  cinematicamente ammissibili (che soddisfano la (2.39)<sub>1</sub>), è stazionario in corrispondenza di una deformazione incrementale cinematicamente ammissibile se e solo se  $\dot{\boldsymbol{\chi}}$  è una soluzione attuale (unica o no) del problema incrementale di equilibrio.

La condizione (sufficiente) di superstabilità sotto carichi morti, definita analogamente al caso del materiale incrementalmente lineare come

$$\int_{B_0} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R = \int_{B_0} \mathbf{C}^R(\dot{\mathbf{F}}) \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} \mid \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0} \text{ su } \partial B_0^x, \quad (2.72)$$

ha una somiglianza formale alla condizione sufficiente di unicità, ma poiché la dipendenza dell'incremento di tensione dalla deformazione incrementale è non-lineare le due condizioni non sono equivalenti. Infatti se l'incremento che non viola le condizioni al

contorno cinematiche  $\dot{\mathbf{F}}$  può essere identificato con la differenza tra incrementi compatibili  $\Delta\dot{\mathbf{F}}$ , l'incremento infinitesimo di tensione  $\mathbf{C}^R(\dot{\mathbf{F}})$  non può essere identificato con la differenza di incrementi di tensione  $\Delta\dot{\mathbf{T}}_R$  per via della non-linearità. Le condizioni (2.72) e (2.70) sono, quindi, ben distinte. Tuttavia tra di esse esiste una connessione poiché la (2.72) è soddisfatta quando lo è la (2.70) se le condizioni al contorno sugli spostamenti incrementali sono omogenee: la (2.70), infatti, si riduce alla (2.72) se uno dei campi di deformazione incrementale è identicamente nullo. Vale quindi il seguente schema:

$$\begin{array}{c} \bar{\chi} = 0 \text{ su } \partial B_0^x \\ \boxed{\int_{B_0} \Delta\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta\dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \Delta\dot{\chi} \neq \mathbf{0} \mid \Delta\dot{\chi} = 0 \text{ su } \partial B_0^x} \\ \text{Unicità solido reale} \\ \Downarrow \\ \boxed{\int_{B_0} \mathbf{C}^R(\dot{\mathbf{F}}) \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\chi} \neq \mathbf{0} \mid \dot{\chi} = 0 \text{ su } \partial B_0^x} \\ \text{Stabilità solido reale} \end{array}$$

L'implicazione opposta, ovviamente, non vale per cui uno stato per il quale vale la condizione sufficiente di unicità è sicuramente stabile e può accadere, inoltre, che lo stato rimanga stabile anche quando la soluzione non è più unica. Per un materiale incrementalmente lineare, al contrario, uno stato caratterizzato da una soluzione non unica necessariamente è instabile.

La condizione (2.70) è di non facile applicazione per via della non univocità dell'integrando in termini di  $\Delta\dot{\chi}$ , per cui in pratica si utilizza un approccio indiretto basato su un materiale di confronto, detto solido di Hill, le cui relative quantità saranno indicate con una stella, avente un legame costitutivo incrementale lineare in corrispondenza dello stesso stato di tensione del materiale di partenza (Hill, 1958, 1967, 1978). Se la condizione di unicità (2.70) vale per il materiale di confronto e se la risposta incrementale  $\dot{\mathbf{T}}_R(\dot{\mathbf{F}})$  è relativamente convessa rispetto a quella  ${}^*\mathbf{C}^R[\dot{\mathbf{F}}]$  del materiale di confronto,

$$\Delta\dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta\dot{\mathbf{F}} \geq {}^*\mathbf{C}^R[\Delta\dot{\mathbf{F}}] \cdot \Delta\dot{\mathbf{F}}, \quad (2.73)$$

allora la biforcazione nel materiale non-lineare è esclusa: infatti, il funzionale di esclusione (2.70) per il materiale non-lineare è limitato inferiormente dal funzionale di esclusione per il materiale di confronto che è sempre positivo per ipotesi. Questo principio è noto come principio di esclusione di Hill.

La convessità relativa è invariante rispetto alla scelta della misura di tensione, sia che essa sia coniugata al gradiente della deformazione che alle misure di deformazione  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$

(Hill, 1978), per cui il verificarsi della condizione di convessità relativa per una generica misura di tensione

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \geq {}^* \mathbf{C}^f [\Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}), \quad (2.74)$$

implica la (2.73). L'equivalenza tra la convessità in termini di tensioni nominali e tensioni coniugate alla deformazione di Green-Lagrange, segue dalla relazione

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{(2)} \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}}^T \Delta \dot{\mathbf{F}} + \Delta \dot{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \Delta \dot{\mathbf{E}}^{(2)}, \quad (2.75)$$

che può essere dimostrata attraverso le seguenti relazioni:

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_R = \Delta \dot{\mathbf{F}} \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{F} \Delta \dot{\mathbf{T}}^{(2)}, \quad 2 \Delta \dot{\mathbf{E}}^{(2)} = \Delta \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \Delta \dot{\mathbf{F}}.$$

Per un solido elastoplastico con legame costitutivo incrementalmente lineare a tratti che segue la legge di flusso associato (e che ammette, quindi, un potenziale):

$$\dot{\mathbf{T}}_f = \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})], \quad \mathbf{C}^f = {}^e \mathbf{C}^f - \alpha \frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g}, \quad {}^e \mathbf{C}^f \in \text{Sym}$$

$$\alpha = 0 \text{ se } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) < 0 \quad (\text{stato elastico})$$

$$\text{ o } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \boldsymbol{\beta} \cdot [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \leq 0 \text{ (scarico elastico),}$$

$$\alpha = 1 \text{ se } \Psi(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mathbf{Z}) = 0 \text{ e } \boldsymbol{\beta} \cdot [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \geq 0 \text{ (carico plastico)}$$

la scelta ottimale per il soddisfacimento della (2.74) è dettata dalla seguente disuguaglianza

$$\left( {}^e \mathbf{C}^f - \frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \right) [\Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \leq \Delta \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}), \quad (2.76)$$

valida nell'ipotesi che il modulo plastico  $g$  sia positivo, che esprime la convessità relativa del legame bilineare elastoplastico rispetto al legame lineare del solido sempre nel ramo plasticizzato.

Infatti:

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) = \left\{ \left( {}^e \mathbf{C}^f - \frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \right) [\Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] + \frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \Delta [(1-\alpha) \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \right\} \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}), \quad (2.77)$$

e risulta che

$$\frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \Delta [(1-\alpha) \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \geq 0,$$

con l'uguaglianza valida se e solo se gli incrementi sono entrambi di carico plastico ( $\alpha=1$ ). Se gli incrementi sono elastici ( $\alpha=0$ ), il termine risulta

$$\frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \Delta [(1-\alpha) \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] = \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \Delta [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})])^2}{g} \geq 0;$$

se  $\dot{\mathcal{F}}'(\mathbf{U})$  (i. e.  $\boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathcal{F}}'(\mathbf{U}) \leq 0$ ) è elastico e  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$  è plastico (cioè  $\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \geq 0$ ) si ha

$$\frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{g} \Delta [(1-\alpha) \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] = (\boldsymbol{\beta} \cdot \Delta [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})]) (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathcal{F}}'(\mathbf{U})) \geq 0;$$

mentre se  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$  (i. e.  $\beta \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \geq 0$ ) è plastico e  $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})$  è elastico (cioè  $\beta \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \leq 0$ ) si ha

$$\frac{\beta \otimes \beta}{g} \Delta[(1 - \alpha)\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta[\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] = (\beta \cdot \Delta[\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})]) (-\beta \cdot \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})) \geq 0.$$

Questo implica che il solido di confronto nei punti plasticizzati deve avere il tensore dei moduli tangenti pari a

$${}^e\mathbf{C}^f - \frac{\beta \otimes \beta}{g},$$

mentre nei punti all'interno della funzione di snervamento pari al tensore dei moduli elastici  ${}^e\mathbf{C}^f$ . In altre parole la differenza tra il potenziale del materiale reale  $U$  e quello del materiale di confronto  $U_L$  è strettamente convessa in ogni punto del corpo.

Il problema di biforcazione per dati non omogenei si riconduce alla ricerca degli automodi primari per il solido di confronto. Può accadere che tra gli infiniti modi di deformazione (che sono soluzioni del problema incrementale non omogeneo) del solido di confronto in corrispondenza degli autostati, ci sono quelli per i quali l'incremento di deformazione in ogni punto plasticizzato corrisponde ad un carico plastico per il materiale non-lineare. In altre parole, affinché la biforcazione avvenga in corrispondenza dell'autostato primario del solido di confronto è necessario che il funzionale di esclusione (2.70) si annulli laddove si annulla il corrispondente funzionale di esclusione del solido di confronto (vedi la (2.77)): ciò avviene se e solo se per la coppia di soluzioni  $\dot{\chi}'$ ,  $\dot{\chi}$  generica del problema incrementale del solido non-lineare non avvengano condizioni di scarico elastico nei punti plasticizzati (soddisfano cioè la condizione di "no elastic unloadings"). Allora questi modi di deformazione sono anche soluzione del problema incrementale per il solido non-lineare, per cui identificano delle biforcazioni primarie per il solido non-lineare.

Il principio di esclusione di Hill, basato sulla definizione di un solido lineare di confronto la cui legge costitutiva incrementale coinvolge solo il ramo plastico dell'operatore costitutivo, può essere applicato per materiali con legge incrementale lineare a pezzi (elasto-plastici) che ammettono un potenziale (ossia caratterizzati da un legge di flusso di tipo associato). Quando il principio di esclusione non è più soddisfatto, si manifesta una effettiva biforcazione primaria solo se la soluzione fondamentale e quella biforcata producono carico plastico nelle zone plasticizzate.

Se il materiale è caratterizzato da una legge di flusso plastico non associata, e quindi non ammette un potenziale, in maniera analoga, è possibile far ricorso al principio di esclusione di Raniecki e Bruhns. Questo rappresenta una generalizzazione del principio di esclusione di Hill ai materiali con legge di flusso plastico non associata, ed è basata sull'introduzione di una famiglia di solidi lineari di confronto. Il legame costitutivo di tali

solidi di confronto è una sorta di simmetrizzazione del ramo di carico plastico dell'operatore costitutivo ed ammette un potenziale.

Il solido di confronto ammette il seguente legame costitutivo:

$$\dot{\mathbf{T}}_f = {}^* \mathbf{C}^f [\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})], \quad {}^* \mathbf{C}^f = \left( \hat{\mathbf{C}}^f \right) - \frac{\left( {}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}] + r {}^e \mathbf{C}^{fT} [\boldsymbol{\omega}] \right) \otimes \left( {}^e \mathbf{C}^f [\boldsymbol{\theta}] + r {}^e \mathbf{C}^{fT} [\boldsymbol{\omega}] \right)}{4gr}, \quad (2.78)$$

nei punti plasticizzati con  $r > 0$  e  $g > 0$ , mentre all'interno del dominio elastico è pari a

$$\dot{\mathbf{T}}_f = {}^* \mathbf{C}^f [\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{U})], \quad {}^* \mathbf{C}^f = \left( \hat{\mathbf{C}}^f \right).$$

$\left( \hat{\mathbf{C}}^f \right)$  indica la parte simmetrica del tensore  ${}^e \mathbf{C}^f$ . Il solido reale è caratterizzato dal legame (2.20), per cui è possibile dimostrare il seguente teorema di confronto analogo alla (2.74) (Raniecki e Brunhs, 1981)

$$\Delta \dot{\mathbf{T}}_f \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \geq {}^* \mathbf{C}^f [\Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U})] \cdot \Delta \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{U}). \quad (2.79)$$

Quando la (2.79) è soddisfatta, è possibile formulare la seguente condizione sufficiente di unicità:

$$\int_{B_0} {}^* \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}] \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B_0^x. \quad (2.80)$$

Nel caso di legge di flusso associata e di tensore elastico  ${}^e \mathbf{C}^f$  simmetrico, per  $r=1$  la (2.80) si riduce alla condizione di esclusione di Hill. Se la condizione (2.80) viene soddisfatta per un solido di confronto caratterizzato dal ramo plastico del legame (2.20) (si ha così un solido di confronto del tipo analogo a quello di Hill) viene esclusa la biforcazione e la perdita di stabilità corrispondente a carico plastico in tutti i punti plasticizzati nel solido reale.

Il non soddisfacimento del principio di esclusione per materiali con plasticità non associata, non assicura la possibilità di una biforcazione per il solido elasto-plastico reale. Il principio di esclusione serve però per determinare limiti inferiori a stati di biforcazione primari e di instabilità. Infatti, quando la (2.80) diventa semidefinita positiva si ha una biforcazione primaria del solido di confronto, che è il limite inferiore ad ogni stato di biforcazione del solido reale. Inoltre, lo stato nel quale il funzionale (2.80) diventa semidefinito positivo non è necessariamente uno stato di biforcazione primaria del solido reale per la mancanza di struttura variazionale delle equazioni di equilibrio. La biforcazione del solido di confronto tipo Hill, nell'ipotesi in cui non si sviluppano superfici di carico neutro, può anche permettere un limite superiore alla possibile biforcazione del solido reale. Se esiste una biforcazione tra i limiti corrispondenti alle biforcazioni nei solidi



di Raniecki e di Hill, il modo di biforcazione, infatti, deve necessariamente coinvolgere scarichi elastici.

Dalle precedenti affermazioni, è possibile ricavare le seguenti implicazioni che sono valide per solidi elastoplastici con legge associata e non associata:

$$\boxed{\int_{B_0} {}^* \mathbf{C}^R [\dot{\mathbf{F}}] \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B_0^x}$$

*Stabilità ed unicità solido di confronto*

↓

$$\boxed{\int_{B_0} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \Delta \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B_0^x}, \quad \boxed{\int_{B_0} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dv_R > 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\chi}} \neq \mathbf{0} / \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0 \text{ su } \partial B_0^x}$$

*Unicità solido reale* *Stabilità solido reale*

---

## 2.7 MODI DI BIFORCAZIONE LOCALIZZATI

---

Si analizzeranno le condizioni sotto le quali è possibile un modo di deformazione biforcuto caratterizzato da una discontinuità del gradiente della deformazione incrementale, attraverso una banda delimitata da due piani paralleli (detta "shear band"), per un corpo di estensione infinita. Le condizioni esaminate sono solo necessarie per la formazione di modi del tipo shear-band in uno specifico problema al contorno poiché, in questo caso, il modo di deformazione deve soddisfare anche le relative condizioni ai limiti. Questo tipo di biforcazione può avvenire lungo un percorso di deformazione omogeneo, accanto ad una deformazione incrementale di tipo omogeneo.

La soluzione discontinua al problema incrementale si accompagna in genere ad una intensificazione della deformazione in delle piccole bande provocando una brusca degradazione della resistenza del materiale. Per chiarezza di esposizione si prendono in considerazione separatamente il caso del materiale lineare e quello non-lineare.

**Caso lineare.** Una possibile soluzione al problema di equilibrio incrementale con dati omogenei, a partire da una configurazione caratterizzata da un gradiente di deformazione uniforme:

$${}_0 \mathbf{C}_{ijkl}^R \frac{\partial^2 \dot{\chi}_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.81)$$

formulato assumendo come configurazione di riferimento quella attuale, è

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{m} \xi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.82)$$

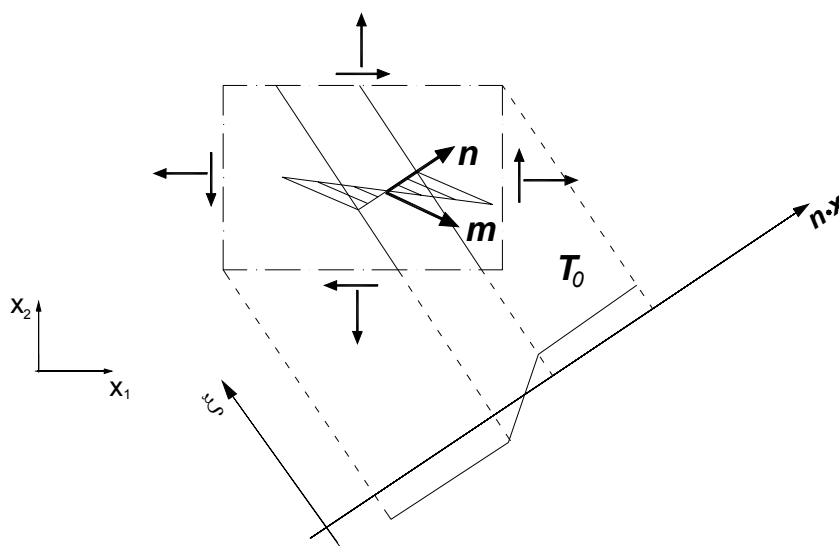
con  $\xi$  funzione scalare arbitraria continua e differenziabile a tratti. Utilizzando la (2.82), la (2.81) assume la forma:

$$\mathbf{C}_0^R [m \otimes n] n \xi'' = \mathbf{0} . \quad (2.83)$$

La (2.83) è soddisfatta banalmente se la deformazione è omogenea (cioè la funzione  $f$  è lineare), oppure se il tensore  $\mathbf{C}_0^R [m \otimes n]$  è singolare, ovvero

$$\mathbf{C}_0^R [m \otimes n] n = \mathbf{0} . \quad (2.84)$$

Nel secondo caso è possibile, quindi, una soluzione con gradiente discontinuo che dà origine alla localizzazione della deformazione in una banda limitata da piani perpendicolari ad  $n$  (vedi Fig. 2.1).



**Fig. 2.1.** Cinematica del modo di biforcazione “shear band” in un elemento materiale omogeneamente deformato.

Infatti, se  $\xi' = 0$  all'esterno di una banda limitata da facce perpendicolari ad  $n$ , mentre  $\xi' \neq 0$  all'interno di tale banda, le condizioni di equilibrio (2.83) sono ovunque soddisfatte. La compatibilità statica del vettore tensione incrementale agente lungo le facce della banda,

$${}_0 \dot{T}_R n = \mathbf{C}_0^R [m \otimes n] n \xi' , \quad (2.85)$$

attraverso le facce della banda (equazione (2.41)<sub>2</sub>), è anche assicurata essendo tale vettore ovunque nullo, poiché all'esterno della banda la deformazione ha gradiente nullo ed all'interno vale la (2.84).

Nel caso di problemi omogenei e condizioni al contorno di sole forze l'analisi della biforcazione può effettuarsi a livello locale, poiché il tensore dei moduli tangenti è costante nel corpo. Nel caso in cui il legame costitutivo deriva da un potenziale, tale potenziale è

funzione solo del gradiente della deformazione incrementale ed un autostato primario si identifica in corrispondenza della condizione di perdita di definitezza positiva della funzione  $U$ . L'automodo corrispondente, inoltre, ha necessariamente un gradiente del tipo:

$$\mathbf{L} = c_{ij} g(\mathbf{x}), \quad (2.86)$$

poiché in un autostato primario la condizione di stazionarietà di  $U$  implica

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{L}} = {}_0 \dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{0} \text{ in } B. \quad (2.87)$$

Genericamente la (2.87) è compatibile con gradienti uniformi, ed eccezionalmente può succedere che il tensore  $c_{ij}$  abbia rango uno e possano esistere modi "shear band" del tipo (2.82).

Specializzando la condizione sufficiente di unicità (2.59) ai modi (2.82), si ottiene la corrispondente condizione di esclusione della localizzazione:

$$\mathbf{C}_0^R [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (2.88)$$

che corrisponde alla condizione di ellitticità forte del tensore costitutivo (SE). La (2.88) rappresenta anche la condizione di definitezza positiva del tensore acustico

$${}_0 \mathbf{Q}_{in}(\mathbf{n}) = {}_0 \mathbf{C}_{ijnk}^R n_j n_k.$$

La perdita della condizione di esclusione della localizzazione, lungo un percorso di deformazione omogeneo implica che la condizione di localizzazione (2.84) viene soddisfatta, nelle ipotesi che il materiale ammetta un potenziale.

Se il tensore acustico è semplicemente non singolare, si dice che il tensore costitutivo è ellittico, ovvero

$$\det \mathbf{Q}_0(\mathbf{n}) \neq 0,$$

condizione meno restrittiva di quella SE.

Nel caso in cui il materiale abbia una risposta elastica ed isotropa caratterizzata dai moduli di Lamè  $\lambda, \mu$  e che la configurazione di riferimento e quella attuale coincidano con la configurazione naturale (teoria elastica infinitesima), il tensore acustico ha la seguente rappresentazione spettrale (Gurtin, 1972):

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{n}) = (2\mu + \lambda) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (2.89)$$

Ne consegue che le condizioni necessarie e sufficienti per la SE sono:

$$2\mu + \lambda > 0, \quad \mu > 0. \quad (2.90)$$

Il tensore costitutivo, invece ha i seguenti autovalori

$$2\mu + 3\lambda, \quad 2\mu,$$

quindi, la sua condizione di definitezza positiva implica la SE, ma non il contrario. La versione debole della condizione SE,

$$\mathbf{C}_0^R [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \geq 0 \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (2.91)$$

detta anche condizione di Legendre-Hadamard o condizione di semi-ellitticità forte (SSE), è necessaria per la stabilità infinitesima.

**Caso non-lineare.** Per un materiale non lineare omogeneamente deformato le condizioni necessarie affinché si verifichi una soluzione incrementale che presenti discontinuità nel gradiente attraverso una banda di taglio, accanto ad una soluzione incrementale di tipo omogeneo con gradiente  $\mathbf{L}^*$ , sono

$$\llbracket \mathbf{J}_R \rrbracket \mathbf{n} = 0, \quad \llbracket \mathbf{L} \rrbracket = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.92)$$

La prima delle (2.92) è la condizione di compatibilità statica, mentre la seconda quella cinematica. Per il modo biforcuto, quindi, all'interno della banda il gradiente è  $\mathbf{L}^* + \llbracket \mathbf{L} \rrbracket$ , all'esterno  $\mathbf{L}^*$ . Per materiali con legame lineare a tratti la (2.92)<sub>1</sub> si specializza in

$$\mathbf{C}_0^R [\mathbf{L}^* + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{n} - \mathbf{C}_0^R [\mathbf{L}^*] \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.93)$$

Se alla biforcazione, i valori del tensore costitutivo rimangono gli stessi all'interno della banda ed all'esterno, la condizione necessaria di localizzazione si trasforma in

$$\det({}_0\mathbf{C}_{ijkl}^R n_j n_l) = 0, \quad (2.94)$$

per via della linearità del tensore costitutivo.

Per il problema al contorno incrementale con dati omogenei e sole forze imposte sul contorno, la localizzazione è esclusa per una data direzione  $\mathbf{n}$  fin tanto che il potenziale è definito positivo:

$$U(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) > 0 \quad \forall \mathbf{m} \neq \mathbf{0}, \quad (2.95)$$

e la condizione di semidefinitezza positiva corrisponde necessariamente ad una biforcazione shear band.

Per problemi incrementali con dati non omogenei, il teorema di confronto di Hill implica che la localizzazione nel solido reale non può avvenire prima della localizzazione del solido lineare di confronto. Per legami elastoplastici che ammettono un potenziale, si fa riferimento al solido di confronto di Hill, mentre se il legame non è associato si introducono i solidi di Raniecki. Se la localizzazione avviene tra i limiti imposti dai solidi di confronto di Hill e di Raniecki, allora deve coinvolgere uno scarico elastico nel materiale (Raniecki e Bruhns, 1981).