CAPITOLO 1

Misure finite ed incrementali di tensione e deformazione

1.1 Introduzione……………………………………………………………..………………1-2
1.2 Cinematica……………………………………………………………………….………1-2
1.3 Misure della deformazione………………………………………………….…………1-5
1.4 Analisi del moto…………………………………………………………….………...1-7
1.5 Obiettività rispetto ad un cambiamento di osservatore……………………………1-9
1.6 Equazione di continuità…………………………………………………….….….…1-9
1.7 Forze e tensioni……………………………………………………………………..1-10
1.8 Tensori delle tensioni coniugati…………………………...………………………1-13
1.9 Indifferenza materiale……………………………………………………………1-16
1.10 Derivate delle tensioni…..…………………………………………………….…1-16
1.11 Derivate delle deformazioni………………….………………………………………1-19

1.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno brevemente richiamati alcuni concetti della meccanica del continuo utili per lo sviluppo del lavoro. Per una trattazione esauriente dell'argomento si rimanda ai testi Gurtin (1981), Malvern (1969), Ogden (1984), Truesdell e Noll (1965), Wang e Truesdell (1973).

1.2 CINEMATICA

Un corpo è un insieme di particelle che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una regione B dello spazio euclideo $\mathcal{E}$. Una configurazione è una applicazione biunivoca χ (di classe C^2 insieme alla sua inversa χ^{-1}) che ad ogni particella P associa un punto di $\mathcal{E}$, identificato con il vettore posizione di P nella configurazione χ ed indicato con $\boldsymbol{x}$. Se si sceglie una configurazione di riferimento χ_0 per il corpo e si indica con B_0 la regione dello spazio occupata dal corpo in tale configurazione, la posizione di una particella $\boldsymbol{x}$ in una generica configurazione χ al tempo t può essere messa in relazione direttamente con la sua posizione nella configurazione di riferimento $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t). \tag{1.1}$$

Con questa nuova definizione χ è un'applicazione da B_0 in B e dipende implicitamente dalla scelta della configurazione di riferimento. Per ogni t fissato, χ viene chiamata una deformazione dalla configurazione di riferimento, e l'equazione (1.1) definisce un moto come una famiglia di deformazioni nel parametro t. Si assume che χ sia un campo vettoriale di classe C^2 su $B_0 x(0,t)$. Si indica con traiettoria di un corpo $\mathcal{T}$ l'insieme $\{(\boldsymbol{x},t) \mid \boldsymbol{x} \in B, t \in \mathbb{R}\}$.

Il gradiente della deformazione relativo alla configurazione di riferimento, indicato con $\boldsymbol{F}$, è il tensore

$$\boldsymbol{F} = \nabla\chi(\boldsymbol{X}), \tag{1.2}$$

soggetto alla restrizione $det\,\boldsymbol{F} > 0$ e descrive come un arbitrario elemento lineare $d\boldsymbol{X}$ nel punto $\boldsymbol{X}$ si trasforma nell'elemento lineare $d\boldsymbol{x}$ nel punto $\boldsymbol{x}$ della configurazione B. L'applicazione puntuale del teorema di decomposizione polare (Gurtin, 1981), fornisce

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU} = \boldsymbol{VR}\,, \tag{1.3}$$

nella quale $\boldsymbol{R} \in \mathrm{Orth}^+$, mentre $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V} \in \mathrm{Sym}^+$. Le decomposizioni sono uniche, infatti

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^{1/2}, \quad \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)^{1/2} \quad , \tag{1.4}$$

ed i tensori $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ sono chiamati rispettivamente tensore destro e sinistro della deformazione. Gli autovettori unitari $\boldsymbol{u}^{(i)}$ di $\boldsymbol{U}$ sono chiamati assi principali Lagrangiani, mentre quelli $\boldsymbol{v}^{(i)}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{(i)}$ di $\boldsymbol{V}$, assi principali Euleriani. Gli autovalori di $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$, λ_i, si chiamano deformazioni principali. Di solito è più conveniente lavorare con i tensori della deformazione destro o sinistro di *Cauchy-Green*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\,. \tag{1.5}$$

La descrizione di un fenomeno fisico relativo alla deformazione di un corpo si dice *Lagrangiana* se basata su campi definiti sulla configurazione di riferimento B_0, *Euleriana* se basata su campi definiti sulla configurazione attuale B. In genere un campo scalare o vettoriale può essere definito su B o B_0. Se, ad esempio φ è definito su B allora il corrispondente campo Lagrangiano è definito da

$$\Phi(\boldsymbol{X}) = \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi[\chi(\boldsymbol{X})]\,; \tag{1.6}$$

mentre se Φ è definito su B_0 il corrispondente campo Euleriano è

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{X}) = \Phi[\chi^{-1}(\boldsymbol{x})] \tag{1.7}$$

Deformazione di un elemento di volume e di superficie. Un elemento infinitesimo di volume dv_R nel punto $\boldsymbol{X}$ della configurazione di riferimento si trasforma nella configurazione deformata secondo la relazione

$$dv = det\,\boldsymbol{F} dv_R = J dv_R\,, \tag{1.8}$$

con J lo Jacobiano della trasformazione $x_i = \chi_i(X_j)$. Se J=1 in tutti i punti $\boldsymbol{X}$ la deformazione si dice isocora. Analogamente, un elemento di superficie ds_R di normale $\boldsymbol{n}_R$ nella configurazione B_0 si trasforma secondo la formula di *Nanson*

$$\boldsymbol{n} ds = J\,\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}_R ds_R\,, \tag{1.9}$$

dove ds è l'elemento di superficie di normale $\boldsymbol{n}$ nella configurazione deformata.

Cambiamento della configurazione di riferimento. Un osservatore è un'applicazione biunivoca che assegna ad ogni evento fisico una coppia costituita dalla posizione $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ e dal tempo $t \in \mathbb{R}$. Per una fissata configurazione di riferimento che non dipende dall'osservatore, due distinti osservatori O ed O^* registrano rispettivamente i due percorsi

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t), \qquad \boldsymbol{x}^* = \chi^*(\boldsymbol{X}, t^*) \tag{1.10}$$

per una fissata particella del corpo che occupa nella configurazione di riferimento la posizione $\boldsymbol{X}$. I due moti definiti nella (1.10) differiscono per il moto relativo di un osservatore rispetto all'altro, e quindi sono legati dalla relazione

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}, \quad t^* = t - a\,, \tag{1.11}$$

con $\boldsymbol{c}(t)$ vettore arbitrario e $\boldsymbol{Q}(t) \in \mathrm{Orth}^+$ ed a uno scalare arbitrario. Di conseguenza differenziando la (1.11) rispetto ad $\boldsymbol{X}$ il gradiente della deformazione soddisfa la seguente trasformazione

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.12}$$

con $\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{X}, t) = \mathrm{Grad}\,\chi^*(\boldsymbol{X}, t^*)$ e $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) = \mathrm{Grad}\,\chi(\boldsymbol{X}, t)$. Si può dimostrare che l'effetto di un cambiamento di osservatore è equivalente a sovrapporre la deformazione rigida $\kappa(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}$ alla deformazione $\chi(\boldsymbol{X}, t)$.

Deformazione relativa. Per quanto segue, è utile usare la configurazione al tempo *t*, $\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t)$ piuttosto che χ_0 come riferimento. E' possibile definire, quindi, la deformazione relativa

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \chi_{(t)}(\boldsymbol{x}, \tau), \tag{1.13}$$

che definisce $\bar{\boldsymbol{x}}$ come la posizione al tempo τ della particella che al tempo t occupa la posizione $\boldsymbol{x}$. Il gradiente di $\chi_{(t)}$ viene definito come

$$\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau) = \nabla\chi_{(t)}(\boldsymbol{x}, \tau), \qquad \left[\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\chi_{(t)\,i}(\boldsymbol{x}, \tau), \tag{1.14}$$

e soddisfa la proprietà:

$$\boldsymbol{F}_{(t)}(t) = \boldsymbol{1}\,. \tag{1.15}$$

Cambiamento della configurazione di riferimento. Siano $\boldsymbol{X}$ e $\hat{\boldsymbol{X}}$ le posizioni di una particella in due generiche configurazioni di riferimento, $\chi(\boldsymbol{X}, t)$ e $\hat{\chi}(\hat{\boldsymbol{X}}, t)$ le relative deformazioni, e $\boldsymbol{P} = \nabla\lambda$ il gradiente della trasformazione $\hat{\boldsymbol{X}} = \lambda(\boldsymbol{X})$ tra le due configurazioni. La regola di derivazione per funzioni composte porta a

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{F} = \nabla\chi(\boldsymbol{X}, t), \qquad \hat{\boldsymbol{F}} = \nabla\hat{\chi}(\hat{\boldsymbol{X}}, t)\,. \tag{1.16}$$

In particolare, se $\hat{\boldsymbol{X}}$ indica la posizione di una particella al tempo t la (1.16) fornisce

$$\boldsymbol{F}(\tau) = \boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\boldsymbol{F}(t)\,. \tag{1.17}$$

1.3 MISURE DELLA DEFORMAZIONE

Nei problemi di meccanica dei solidi risulta importante un'opportuna scelta di una misura della deformazione. Il problema è stato studiato da Hill (1968a; 1968b; 1970; 1972), ed in seguito ripreso da Ogden (1974, 1983).

Un materiale si dice deformato localmente in $\boldsymbol{X}$ se la quantità

$$\left|d\boldsymbol{x}\right|^2 - \left|d\boldsymbol{X}\right|^2 = d\boldsymbol{X}\bullet(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\text{-}\boldsymbol{1})d\boldsymbol{X}\ , \qquad (1.18)$$

risulta non nulla ed il tensore ½($\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$-$\boldsymbol{1}$), detto tensore di deformazione di *Green-St. Venant* ed indicato con $\boldsymbol{E}$, può essere considerato come una misura della deformazione. In maniera alternativa, dalla relazione

$$\left|d\boldsymbol{x}\right|^2 - \left|d\boldsymbol{X}\right|^2 = d\boldsymbol{x}\bullet(\boldsymbol{1}\text{-}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1})d\boldsymbol{x}\ , \qquad (1.19)$$

si definisce il tensore di *Almansi-Hamel* come ½($\boldsymbol{I}$-$\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}$).

Lo spostamento di una particella P dalla configurazione di riferimento a quella corrente è definito come

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \chi(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}\ , \qquad (1.20)$$

mentre il gradiente $\boldsymbol{H}$ del campo di spostamento è dato da

$$\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}\,, \qquad (1.21)$$

per cui

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})\,. \qquad (1.22)$$

Poiché la deformazione è nulla se e solo se $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{1}$, è possibile definire altre misure di deformazione basate su $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ analoghe ai tensori di *Green- St- Venant* e di *Almansi – Hamel*. Se $\boldsymbol{f}$ è una funzione tensoriale di $\boldsymbol{U}$ coassiale con $\boldsymbol{U}$ stesso, allora si può definire come misura della deformazione il tensore $\bar{\boldsymbol{U}}$

$$\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})\,. \qquad (1.23)$$

Conviene però rivolgere l'attenzione a casi nei quali ogni valore principale $\overline{\lambda_i}$ di $\bar{\boldsymbol{U}}$ è funzione solo del corrispondente valore principale λ_i di $\boldsymbol{U}$, così che

$$\overline{\lambda_i} = f(\lambda_i) \quad i = 1,2,3\,. \qquad (1.24)$$

Otteniamo così le misure di deformazioni introdotte da Hill (1968). La funzione scalare $f{:}(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ (detta funzione scala, Hill, 1978) è tale che

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \qquad f'(\lambda) > 0 \quad \forall\lambda > 0\ .$$

La monotonicità di f assicura che ad un incremento di lunghezza di una linea materiale corrisponda un incremento di deformazione in quella direzione, mentre la condizione di normalità $f'(1)=1$ è imposta affinché tutte le misure di deformazione siano equivalenti per piccole deformazioni. Le misure di deformazione introdotte con la (1.24) sono indicate con $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ ed ammettono la seguente rappresentazione spettrale in termini di assi principali Lagrangiani:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}=\lambda_i \boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}\\&\mathscr{F}(\boldsymbol{U})=f(\lambda_i)\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}\end{aligned}. \tag{1.25}$$

Analogamente si possono definire le seguenti misure di deformazione euleriane $\mathscr{F}(\boldsymbol{V})$ coassiali con $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}=\lambda_i \boldsymbol{v}^{(i)}\otimes\boldsymbol{v}^{(i)}\\&\mathscr{F}(\boldsymbol{V})=f(\lambda_i)\boldsymbol{v}^{(i)}\otimes\boldsymbol{v}^{(i)}\end{aligned}. \tag{1.26}$$

Particolarmente utile è la sottoclasse di tensori di deformazione $\boldsymbol{E}^{(m)}$ definiti da

$$\overline{\lambda_i}=\frac{1}{m}(\lambda_i^m-1)\,, \tag{1.27}$$

nella quale il limite per $m\to 0$ definisce la deformazione logaritmica (ovvero, $\lim_{m\to 0}\frac{1}{m}(\lambda_i^m-1)=ln\lambda_i$). Alcuni elementi della classe (1.25) sono ben noti in letteratura: per esempio, quando m=0, si ottiene il tensore che va sotto il nome di *Hencky*

$$\boldsymbol{E}^{(0)}=ln\ \boldsymbol{U}\ ; \tag{1.28}$$

per $m=1$ si ottiene il tensore della deformazione di *Biot* $\boldsymbol{E}^{(1)}$

$$\boldsymbol{E}^{(1)}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{1}\,; \tag{1.29}$$

per $m=2$ si ottiene il tensore della deformazione di G*reen - St. Venant* $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{E}^{(2)}$

$$\boldsymbol{E}^{(2)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{1})\,; \tag{1.30}$$

mentre per $m=-2$ si ottiene il tensore della deformazione di *Almansi Hamel* $\boldsymbol{E}^{(-2)}$

$$\boldsymbol{E}^{(-2)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{U}^{-2})\,. \tag{1.31}$$

1.4 ANALISI DEL MOTO

La velocità di una particella che occupa la posizione **X** in una configurazione di riferimento arbitraria B_0 in termini Lagrangiani è definita come

$$\dot{\chi}(\boldsymbol{X},t)=\left.\frac{\partial\chi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}}, \tag{1.32}$$

nella quale la derivata è effettuata per **X** fissato. Analogamente l'accelerazione è definita come

$$\ddot{\chi}(\boldsymbol{X},t)=\left.\frac{\partial\dot{\chi}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}}. \tag{1.33}$$

La derivata $\partial/\partial t$ con **X** fissato viene detta derivata intrinseca, derivata materiale o derivata Lagrangiana, quella con **x** fissato viene detta derivata Euleriana. Tra le due differenti derivate temporali intercorre la seguente relazione

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}(\ )\right|_{\boldsymbol{X}}=\left.\frac{\partial}{\partial t}(\ )\right|_{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{v}\bullet\mathrm{grad}(\ ) \quad . \tag{1.34}$$

La derivata materiale del gradiente di deformazione **F** e del suo inverso $\boldsymbol{F}^{-1}$ soddisfano le seguenti relazioni

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F} \quad \dot{\boldsymbol{F}}^{-1}=-\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L} \tag{1.35}$$

avendo indicato con **L** il gradiente delle velocità *grad* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$.

La parte simmetrica di **L**, $\boldsymbol{D}=1/2(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T)$ è chiamata il tensore di velocità deformazione Euleriana poiché misura la velocità con la quale linee materiali cambiano la loro lunghezza. La parte antisimmetrica, invece, $\boldsymbol{W}=1/2(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T)$ è chiamata *spin* del corpo e rappresenta la parte di moto rigido istantaneo locale del corpo. Il moto di un corpo è rigido se e solo se $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ ed in tal caso il vettore assiale di **W** rappresenta l'asse istantaneo di rotazione. I tensori **L**, **D** e **W** si trasformano rispetto ad un cambiamento di osservatore secondo

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{x}^*,t^*)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^T(t)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t)\boldsymbol{Q}^T(t)\\ \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{x}^*,t^*)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^T(t) \qquad .\\ \boldsymbol{W}^*(\boldsymbol{x}^*,t^*)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^T(t)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t)\boldsymbol{Q}^T(t)\end{gathered} \tag{1.36}$$

Per quanto segue è utile richiamare la relazione che soddisfa la derivata materiale di J

$$\dot{J}=J\ tr\boldsymbol{L}\,. \tag{1.37}$$

Deformazioni relative. La derivata rispetto τ del gradiente della deformazione $\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)$ dalla configurazione al tempo t a quella al tempo τ, valutata a $\tau=t$, rappresenta una forma alternativa per definire il gradiente delle velocità $\boldsymbol{L}$. Utilizzando la (1.17), infatti, si ha:

$$\boldsymbol{L}(t)=\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\bigg|_{\tau=t}=\dot{\boldsymbol{F}}_{(t)}(t)=\dot{\boldsymbol{F}}(t)\boldsymbol{F}(t)^{-1}. \tag{1.38}$$

Considerando ora la decomposizione polare di $\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)$ segue che

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\bigg|_{\tau=t}=\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{R}_{(t)}(\tau)\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau)\bigg|_{\tau=t}=\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{V}_{(t)}(\tau)\boldsymbol{R}_{(t)}(\tau)\bigg|_{\tau=t}=\\&\dot{\boldsymbol{R}}_{(t)}(t)+\dot{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}_{(t)}(t)+\dot{\boldsymbol{V}}_{(t)}(t)\end{aligned}. \tag{1.39}$$

Poiché $\dot{\boldsymbol{R}}_{(t)}(t)\in$ Skw e $\dot{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t)$ e $\dot{\boldsymbol{V}}_{(t)}(t)\in$ Sym per l'unicità della decomposizione di un tensore in una parte simmetrica ed una antisimmetrica segue che:

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{(t)}(t)=\boldsymbol{W}(t),\quad \dot{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t)=\dot{\boldsymbol{V}}_{(t)}(t)=\boldsymbol{D}(t). \tag{1.40}$$

Inoltre, il tensore $\dot{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t)$ è pari alla derivata del tensore delle deformazioni infinitesime $\tilde{\boldsymbol{E}}_{(t)}(\tau)=\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)+\nabla\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}{}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)\right)$ con $\boldsymbol{u}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)=\chi_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)-\boldsymbol{x}$, prese a partire dalla configurazione al tempo t:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}_{(t)}(t)=\dot{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t). \tag{1.41}$$

Derivate materiali degli assi principali Lagrangiani ed Euleriani. Se gli assi $\boldsymbol{u}^{(i)}$ in un punto della configurazione di riferimento dipendono dal tempo t secondo

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_i,\quad \boldsymbol{Q}\in Orth^+, \tag{1.42}$$

con $\{\boldsymbol{E}_i\}$ base cartesiana fissata, allora la derivata materiale della (1.42) e l'eliminazione di $\boldsymbol{E}_i$ definisce la legge di variazione

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}=\Omega^L\boldsymbol{u}^{(i)},\quad \Omega^L=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\in Skw, \tag{1.43}$$

con Ω^L detto spin degli assi principali Lagrangiani. La (1.43) è utile per rappresentare le derivate materiali di tensori nella base $\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$: la derivata materiale di $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$, ad esempio, è

$$\begin{aligned}&\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})=\sum_{i=1}^{3}f'(\lambda_i)\dot{\lambda}_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}+\sum_{i=1}^{3}f(\lambda_i)\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}+\sum_{i=1}^{3}f(\lambda_i)\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}=\\&\sum_{i=1}^{3}f'(\lambda_i)\dot{\lambda}_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}+\sum_{i=1,3;k\neq l}\Omega^L_{kl}(\boldsymbol{u}^{(k)}\otimes\boldsymbol{u}^{(l)})\,(\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)})+\sum_{i=1,3;k\neq l}\Omega^L_{kl}(\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)})(\boldsymbol{u}^{(k)}\otimes\boldsymbol{u}^{(l)})=\\&\sum_{i=1}^{3}f'(\lambda_i)\dot{\lambda}_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}+\sum_{i\neq j}\Omega^L_{ij}\left(f(\lambda_j)-f(\lambda_i)\right)\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(j)}\end{aligned}. \tag{1.44}$$

1.5 OBIETTIVITA' RISPETTO AD UN CAMBIAMENTO DI OSSERVATORE

Le definizioni di obiettività per i campi tensoriali sono ripresi da Ogden (1984). Il concetto di obiettività permette di distinguere quali quantità fisiche dipendono intrinsecamente dall'osservatore e quelle che ne sono essenzialmente indipendenti. In pratica l'obiettività implica che ogni osservatore assegna la stessa quantità a quantità fisiche associate a tensori obiettivi.
Un campo scalare Euleriano si dice obiettivo rispetto al cambiamento di osservatore rappresentato dalla (1.11) se si trasforma secondo

$$\varphi^*(\boldsymbol{x}^*, t^*) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)\,; \tag{1.45}$$

un campo scalare Lagrangiano, invece, se

$$\Phi^*(\boldsymbol{X}, t) = \Phi(\boldsymbol{X}, t)\,. \tag{1.46}$$

Un esempio di quest'ultimo tipo è il determinante di ***F***, *J*.
Un campo vettoriale Euleriano si dice obiettivo se si trasforma secondo

$$\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}^*, t) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{1.47}$$

mentre per un campo tensoriale del secondo ordine l'analoga relazione è

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{x}^*, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{Q}^T(t)\,. \tag{1.48}$$

Un esempio di tensore Euleriano obiettivo è il tensore ***D***.
Al contrario un campo tensoriale Lagrangiano si dice obiettivo se rimane immutato a seguito di un cambiamento di osservatore

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{X}, t^*) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, t)\,. \tag{1.49}$$

Infine un tensore del secondo ordine misto quale il gradiente della deformazione ***F*** si dice obiettivo se si trasforma secondo

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{X}, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, t)\,. \tag{1.50}$$

1.6 EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

La massa *m* di un corpo che occupa in un generico istante *t* la configurazione *B* è una quantità intrinseca che non dipende dalla configurazione che il corpo occupa durante il suo moto. L'equazione

$$m = \int_{B} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})dv = \int_{B_0} \rho_R(\boldsymbol{X})dv_R \tag{1.51}$$

esprime il principio di conservazione della massa, avendo indicato con i campi scalari (di classe C^1) continui su $\overline{B}$ ρ: $B \to \mathbb{R}^+$ e ρ_R: $B_0 \to \mathbb{R}^+$, rispettivamente, la distribuzione di massa del corpo generico (o di una sua parte) nella configurazione B ed in quella di riferimento B_0 e con dv e dv_R gli appropriati elementi di volume nelle diverse configurazioni. L'integrazione è effettuata nello spazio Euclideo. La densità di massa nella configurazione di riferimento viene quindi definita utilizzando il teorema di localizzazione attraverso la (1.51) come (Gurtin, 1981)

$$\rho_R(\boldsymbol{X}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{m(\Omega_\delta)}{vol(\Omega_\delta)}, \tag{1.52}$$

con Ω_δ la palla di raggio δ centrata in $\boldsymbol{X}$. La densità di riferimento permette di determinare la densità per tutte le deformazioni. Infatti, dalla (1.51) segue la forma locale del principio di conservazione della massa

$$\rho = J^{-1}\rho_R, \tag{1.53}$$

con J determinante del gradiente della deformazione che porta da B_0 in B. Per moti isocori diventa $\rho = \rho_R$. La differenziazione materiale della (1.53) porta alla forma dinamica locale del principio di conservazione della massa

$$\dot{\rho} + \rho\, tr\ \boldsymbol{L} = 0, \tag{1.54}$$

che per moti isocori fornisce $tr\,\boldsymbol{L}$=0.

1.7 FORZE E TENSIONI

Si prendono in considerazione forze esterne di volume con risultante esercitata sulla configurazione corrente B del corpo al tempo t (o su una sua parte)

$$\boldsymbol{f}_b(B) = \int_{B} \rho \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)dv, \tag{1.55}$$

avendo indicato con il campo vettoriale $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t) : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$ continuo su $\overline{B}x[0,t)$, ρ la densità della forza di volume per unità di massa definita in $\boldsymbol{x} \in B$, e forze di contatto esercitate sulla frontiera di B (o di una sua parte) con risultante

$$\boldsymbol{f_c}(B) = \int_{\partial B} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\partial B,t)ds\ , \tag{1.56}$$

con $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\partial B,t)$ campo vettoriale continuo su $\overline{B}x[0,t)$, di classe $C^{1,0}$ su $\mathcal{J}$ per ogni ∂B, indicato come tensione agente sul punto $\boldsymbol{x}$ della superficie ∂B al tempo t, che in generale dipende dalla superficie sulla quale agisce. Si assume che il vettore tensione dipende dalla superficie solo attraverso la normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie stessa in $\boldsymbol{x}$ (postulato di *Cauchy*), per cui la notazione $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},t)$ indica la tensione agente in $\boldsymbol{x}$ su un elemento di superficie di normale $\boldsymbol{n}$. Se $\boldsymbol{x}$ appartiene alla frontiera del corpo ∂B, il vettore $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)$ si dice tensione di superficie. Un moto si dice ammissibile se $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{H}, \dot{\boldsymbol{H}}$ sono continui su $\overline{B}x[0,t)$.

Dato un sistema di forze ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$) agenti su un corpo durante un moto ammissibile si parla di processo dinamico se vengono soddisfatte le leggi del moto di Eulero rispetto ad un osservatore inerziale, per la quantità di moto $\boldsymbol{l}(B) = \int_B \rho\dot{\chi}dv$ ed il momento della quantità di moto $\boldsymbol{h}(B) = \int_B \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})\mathrm{x}\,\dot{\chi}dv$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}_b(B) + \boldsymbol{f}_c(B) = \dot{\boldsymbol{l}}(B) \\ \int_B \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})\,\mathrm{x}\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)dv + \int_{\partial B} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})\,\mathrm{x}\,\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\partial B,t)ds = \dot{\boldsymbol{h}}(B) \end{gathered} \tag{1.57}$$

Queste leggi implicano

- l'esistenza di un campo tensoriale $\boldsymbol{T}$ simmetrico di classe $C^{1,0}$ su $Bx(0,t)$, detto tensore delle tensioni di Cauchy tale che per ogni vettore $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},t) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}\ , \tag{1.58}$$

  detto tensore è un tensore simmetrico Euleriano;

- che χ, $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{b}$ soddisfano l'equazione del moto

$$div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{b} = \ddot{\chi}\ . \tag{1.59}$$

In definitiva le equazioni Euleriane che regolano il moto di un continuo sono

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho\,\mathbf{div}\,\dot{\chi} = 0 \\ div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{b} = \ddot{\chi}\ , \\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \end{cases}$$

che forniscono quattro equazioni scalari nelle dieci seguenti variabili: la densità ρ, le tre componenti di χ, e le sei componenti di $\boldsymbol{T}$. L'insieme di equazioni è completamente specificato se si definiscono le equazioni costitutive del materiale in termini di relazione tra il tensore $\boldsymbol{T}$ e t, χ, e le derivate di χ. Si può dimostrare come il tensore delle tensioni di Cauchy $\boldsymbol{T}$ è un tensore obiettivo

Una conseguenza delle leggi di Eulero è il "Teorema della potenza":

Per ogni parte del corpo B al tempo t la potenza spesa dalle forze di volume e di superficie eguaglia la potenza dello stato di tensione $\int_B \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\bullet\boldsymbol{D}dv$ *e la variazione di energia cinetica*

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\bullet\dot{\chi}ds + \int_B \rho\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)\bullet\dot{\chi}dv = \int_B \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\bullet\boldsymbol{D}dv + \frac{d}{dt}\int_B \rho\frac{|\dot{\chi}|^2}{2}dv\,. \tag{1.60}$$

Il tensore nominale di tensione. L'utilizzo della formula di *Nanson* (1.9) permette di scrivere

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}ds = \int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{n}_R ds_R$$

avendo indicato con $\boldsymbol{T}_R$ il tensore nominale delle tensioni, (primo di *Piola-Kirchhoff*) che misura l'attuale forza di contatto per unità di area nella configurazione di riferimento, definito come

$$\boldsymbol{T}_R = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}\,. \tag{1.61}$$

Il tensore è un tensore misto obiettivo e prese due basi ortonormali $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ed $\{\boldsymbol{E}_j\}$, rispettivamente nella configurazione attuale e quella di riferimento la componente $T_{R\,ij}$ rappresenta l'*i*-esima componente del vettore tensione (per unità di area di riferimento) agente su di un elemento di superficie avente normale nella direzione $\boldsymbol{E}_j$ nella configurazione di riferimento. Infatti

$$dt_i = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,ds)_i = \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{n}_R\,ds_R\bullet\boldsymbol{e}_i = T_{R\,hk}\left(\boldsymbol{e}_h\otimes\boldsymbol{E}_k\right)\boldsymbol{E}_j ds_R\bullet\boldsymbol{e}_i = T_{R\,ij}\,.$$

Le leggi del moto di Eulero possono essere riscritte in termini Lagrangiani con gli integrali valutati nella configurazione di riferimento B_0, fornendo le seguenti espressioni locali

$$\begin{aligned} &Div\ \boldsymbol{T}_R + \rho_R\boldsymbol{b} = \rho_R\ddot{\chi} \\ &\boldsymbol{T}_R\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_R^T \end{aligned}\,, \tag{1.62}$$

con la divergenza valutata rispetto ad $\boldsymbol{X}$, che insieme alla (1.53) forniscono il sistema completo delle equazioni di campo di un continuo.

1.8 TENSORI DELLE TENSIONI CONIUGATI

Seguendo Hill (1968), è possibile definire tensori delle tensioni generalizzati $\boldsymbol{T}_{\mathrm{f}} \in$ Sym relativi alle misure di deformazione $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ come tensori simmetrici che soddisfano lungo un percorso di deformazione, specificato da un certa variazione continua delle componenti di $\boldsymbol{U}$ o $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ sugli assi Lagrangiani, la relazione

$$\boldsymbol{T}_f \bullet \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}_R \bullet \dot{\boldsymbol{F}} \,, \tag{1.63}$$

dove $\boldsymbol{T}_R \bullet \dot{\boldsymbol{F}}$ rappresenta la densità della potenza dello stato di tensione per unità di volume in B_0. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{f}}$ e $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ si dicono coniugati. Considerando la famiglia di tensori di deformazione definiti dalla (1.27)

$$\boldsymbol{E}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\left(\boldsymbol{U}^m - \boldsymbol{1}\right) & m \neq 0 \\ ln\boldsymbol{U} & m = 0 \end{cases} , \tag{1.64}$$

si possono definire alcune coppie coniugate di particolare importanza. Utilizzando le (1.35) si può dimostrare come

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(2)} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DF}, \quad \dot{\boldsymbol{E}}^{(-2)} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{DF}^{-\mathrm{T}} \,, \tag{1.65}$$

formule valide rispettivamente per le derivate materiali dei tensori di *Green–Lagrange* e di *Almansi–Hamel*. La potenza dello stato di tensione per unità di volume in B_0 può essere espressa utilizzando le (1.61) e (1.65), come

$$\boldsymbol{T}_R \bullet \dot{\boldsymbol{F}} = J\boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{(2)} \bullet \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{T}^{(-2)} \bullet \dot{\boldsymbol{E}}^{(-2)} \,, \tag{1.66}$$

dove sono stati introdotti i tensori

$$\boldsymbol{T}^{(2)} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{TF}^{-T}, \quad \boldsymbol{T}^{(-2)} = J\boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{TF} \,, \tag{1.67}$$

coniugati con i tensori di deformazione di *Green - Lagrange* $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{E}^{(2)}$ e di *Almansi – Hamel* $\boldsymbol{E}^{(-2)}$. Il tensore $\boldsymbol{T}^{(2)}$ è noto come secondo tensore di *Piola-Kirchhoff*.

Il tensore delle tensioni di Kirchhoff $\boldsymbol{T}_{\mathrm{k}}=J\boldsymbol{T}$ viene introdotto per rappresentare il tensore coniugato di $\boldsymbol{D}$ nell'espressione della potenza dello stato di tensione per unità di volume nella configurazione di riferimento. E' possibile ricavare una forma esplicita per il tensore $\boldsymbol{T}^{(1)}$ coniugato della deformazione di *Biot* $\boldsymbol{E}^{(1)}$. Considerando che

$$\boldsymbol{T}^{(2)} \bullet \dot{\boldsymbol{E}}^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{(2)} \bullet (\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}^{(2)}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(2)}) \bullet \dot{\boldsymbol{U}} \,, \tag{1.68}$$

$\boldsymbol{T}^{(1)}$ può essere espresso come

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}^{(2)}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_R^T\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}_R) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}). \qquad (1.69)$$

Il tensore $\boldsymbol{T}^{(1)}$ essendo la parte simmetrica del tensore utilizzato da *Biot* (1965), $\boldsymbol{T}_R^T\boldsymbol{R}$, viene chiamato con il nome di tensore delle tensioni di *Biot*. Prese due basi ortonormali $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ed $\{\boldsymbol{E}_j\}$, rispettivamente nella configurazione attuale ed in quella di riferimento, la componente $\left(\boldsymbol{T}_R^T\boldsymbol{R}\right)_{ij}$ rappresenta l'*i*-esima componente del vettore tensione (per unità di area di riferimento) ruotato di $\boldsymbol{R}^T$ agente su un elemento di superficie avente normale nella direzione $\boldsymbol{E}_j$ nella configurazione di riferimento. Infatti vale:

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{dt}\boldsymbol{=}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{Tn}\, ds = \left(\boldsymbol{T}_R^T\boldsymbol{R}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{n}_R\, ds_R .$$

I tensori coniugati $\boldsymbol{T}^{(m)}$ ed $\boldsymbol{E}^{(m)}$ sono tensori obiettivi di tipo Lagrangiani. Utilizzando la (1.64) e la relazione di coniugio $\boldsymbol{T}^{(m)}\bullet\dot{\boldsymbol{E}}^{(m)} = \boldsymbol{T}^{(1)}\bullet\dot{\boldsymbol{E}}^{(1)}$ si ottiene la formula

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{U}^{m-1}\boldsymbol{T}^{(m)} + \boldsymbol{U}^{m-2}\boldsymbol{T}^{(m)}\boldsymbol{U} + \ldots + \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(m)}\boldsymbol{U}^{m-2} + \boldsymbol{T}^{(m)}\boldsymbol{U}^{m-1}), \qquad (1.70)$$

valida per m>0. Da questa è possibile ottenere la seguente identità

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(1)} - \boldsymbol{T}^{(1)}\boldsymbol{U} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{U}^m\boldsymbol{T}^{(m)} - \boldsymbol{T}^{(m)}\boldsymbol{U}^m). \qquad (1.71)$$

In generale assegnato un tensore di deformazione non è sempre possibile associarvi un tensore coniugato delle tensioni e viceversa: un esempio classico è il tensore di Kirchhoff $\boldsymbol{T}_k$ che non è coniugato con $\boldsymbol{D}$ poiché questo non deriva da un tensore di deformazione attraverso un'operazione di derivazione materiale.

Nell'eventualità in cui $\boldsymbol{T}^{(m)}$ ed $\boldsymbol{E}^{(m)}$ sono coassiali, è possibile ottenere un'espressione esplicita di $\boldsymbol{T}^{(m)}$ in termini di $\boldsymbol{T}^{(1)}$ e $\boldsymbol{U}$. Si noti che se $\boldsymbol{T}^{(m)}$ è coassiale con $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{T}_k$ e $\boldsymbol{V}$ sono coassiali poichè

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(1)} - \boldsymbol{T}^{(1)}\boldsymbol{U} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}) = \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{R}^T - \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{V}^2 - \boldsymbol{V}^2\boldsymbol{T_k}) \end{aligned} . \qquad (1.72)$$

Dalla (1.70), sempre nell'ipotesi di coassialità tra $\boldsymbol{T}^{(m)}$ ed $\boldsymbol{E}^{(m)}$, si ottiene

$$\boldsymbol{T}^{(m)} = \boldsymbol{T}^{(1)}\boldsymbol{U}^{-(m-1)} = \boldsymbol{U}^{-(m-1)}\boldsymbol{T}^{(1)} . \qquad (1.73)$$

Inoltre, è possibile ottenere la seguente espressione:

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} , \qquad (1.74)$$

notando che nella (1.69) $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}$ è simmetrico, poiché dalla (1.72) segue che $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T_k}\boldsymbol{R}$ è coassiale con $\boldsymbol{U}^2$ e quindi con $\boldsymbol{U}^{-1}$. Dalla (1.74) segue la seguente decomposizione per il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* :

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{(1)} . \tag{1.75}$$

Il nome di tensori generalizzati di tensione deriva dalla proprietà che nella configurazione di riferimento ***F*=*1***, tutti i tensori $\boldsymbol{T}_{\mathrm{f}}$ si riducono al tensore delle tensioni di Cauchy ***T***. In effetti, lungo una curva di deformazione monoparametrica $\boldsymbol{F}(\tau)$ che passa per ***1*** a $\tau=0$ vale

$$\boldsymbol{T}_f \bullet \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}_f \bullet \boldsymbol{D} = \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{D} \qquad per\ \ \tau = 0 , \tag{1.76}$$

essendo tutte le derivate materiali $\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})$ pari al tensore velocità di deformazione ***D*** nella configurazione di riferimento ($\tau=0$).

L'ultima asserzione può essere provata (seguendo essenzialmente Wang e Truesdell, 1973) considerando le derivate materiali di ***U*** e $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ nella rappresentazione spettrale sugli assi Lagrangiani:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{U}} &= \sum_{i=1}^{3} \dot{\lambda}_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)} + \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{L} \left(\lambda_j - \lambda_i \right) \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(j)} \\ \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) &= \sum_{i=1}^{3} f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)} + \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{L} \left(f(\lambda_j) - f(\lambda_i) \right) \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(j)} \end{aligned} , \tag{1.77}$$

che nella configurazione di riferimento ***F*=*1*** assumono la stessa espressione essendo $f'(1) = 1$ e $\lambda_i = 1$. Poiché dalla (1.40) con $t=\tau=0$, segue che $\dot{\boldsymbol{U}}(0) = \boldsymbol{D}(0)$ allora si ha

$$\left. \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) \right|_{\tau=0} = \dot{\boldsymbol{U}}(0) = \boldsymbol{D}(0) . \tag{1.78}$$

Analogamente con le stesse considerazioni e tenendo a mente la (1.40) si può dimostrare che

$$\left. \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{V}) \right|_{\tau=0} = \dot{\boldsymbol{V}}(0) = \boldsymbol{D}(0) . \tag{1.79}$$

I tensori generalizzati di deformazione sono una misura opportuna della deformazione in quanto dalla (1.41) segue che sia $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ che $\mathscr{F}(\boldsymbol{V})$ sono uguali a meno di termini di ordine superiore al primo al tensore delle deformazioni infinitesime $\tilde{\boldsymbol{E}}$, quando ***F*** è sufficientemente vicino a ***1***. Alternativamente, la sopraddetta affermazione può essere dimostrata considerando che

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\tau) &= \left. \dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}(\boldsymbol{x},\tau) \right|_{\tau=0} (\tau) + \ldots \\ \mathscr{F}(\boldsymbol{U})(\boldsymbol{x},\tau) &= \left. \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})(\boldsymbol{x},\tau) \right|_{\tau=0} (\tau) + \ldots \end{aligned} , \tag{1.80}$$

e ricordando la (1.41).

1.9 INDIFFERENZA MATERIALE

Il principio di indifferenza materiale asserisce che il comportamento del materiale è indipendente dalla scelta dell'osservatore. Questo può essere postulato matematicamente nella seguente forma:

-se le equazioni costitutive sono soddisfatte da un processo $\{\chi(\boldsymbol{X},t),\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\}$, allora devono essere soddisfatte da ogni altro processo equivalente $\{\chi*(\boldsymbol{X},t^*),\ \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{x}^*,t^*)\}$, che cioè è in relazione con $\{\chi(\boldsymbol{X},t),\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\}$ secondo

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^* = \chi*(\boldsymbol{X},t^*) = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\chi(\boldsymbol{X},t) \\ \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{x}^*,t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^T(t) \\ t^* = t - a \end{cases} , \tag{1.81}$$

con $\boldsymbol{c}(t)$ vettore arbitrario, $\boldsymbol{Q}(t) \in \mathrm{Orth}^+$ ed a uno scalare arbitrario.

1.10 DERIVATE DELLE TENSIONI

Per esprimere equazioni costitutive in forma incrementale utili per descrivere il comportamento di alcuni materiali e nei problemi di deformazioni incrementali, è necessario lavorare con tensioni incrementali che soddisfino il principio di indifferenza materiale. Anche se il tensore di Cauchy $\boldsymbol{T}$ è un tensore obiettivo, che cioè soddisfa la (1.81), la sua derivata materiale non lo è. A tale scopo è possibile definire derivate convettive (Hill, 1978) come derivate delle componenti su coordinate che seguono la deformazione del materiale considerando la configurazione corrente coincidente con quella di riferimento. La formulazione che segue è ripresa da Truesdell e Noll, 1965. La derivata propriamente *convettiva* (o di *Oldroyd*) di un tensore è definita da:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{S}} = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{F}_{(t')}(t)^T \boldsymbol{S}(t) \boldsymbol{F}_{(t')}(t)]\Big|_{t'=t} = \dot{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{L}\,, \tag{1.82}$$

nella quale per ricavare l'ultima espressione a destra è stata utilizzata la (1.38). Analogamente si definisce derivata *co-rotazionale (*o di corpo rigido, o di *Jaumann)*, la derivata convettiva associata con la rotazione $\boldsymbol{R}$ definita nella (1.3), ovvero effettuata secondo componenti prese su un sistema di coordinate rigido che ruota con il materiale:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{S}} = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{R}_{(t')}(t)^T \boldsymbol{S}(t) \boldsymbol{R}_{(t')}(t)]\Big|_{t'=t} = \dot{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\,, \tag{1.83}$$

avendo utilizzato la (1.40). Tra le due derivate convettive vale la seguente connessione:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{S}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{DS} + \boldsymbol{SD}\,. \tag{1.84}$$

L'incremento co-rotazionale (*Jaumann*) e convettivo del tensore di Cauchy $\boldsymbol{T}$ (detto anche di *Cotter-Rivlin*), a meno che il materiale non sia incomprimibile, non viene utilizzato tra le misure di tensioni incrementali poiché non è coniugato a nessuna misura di deformazione. Per questo motivo si utilizza l'incremento di *Jaumann* del tensore di Kirchhoff $\boldsymbol{T}_K$ che, come vedremo in seguito, è coniugato con la deformazione logaritmica. Allo stesso modo, si utilizza l'incremento convettivo del tensore di Kirchhoff $\boldsymbol{T}_K$, essendo questo coniugato con la misura di deformazione $\boldsymbol{E}^{(-2)}$.

Le derivate convettive e co-rotazionali del tensore $\boldsymbol{T}$ sono obiettive. Per l'incremento co-rotazionale vale, infatti:

$$\begin{aligned}\overset{o}{\boldsymbol{T}}{}^{*}(\boldsymbol{x}^{*},t) = \dot{\boldsymbol{T}}^{*} - \boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{T}^{*} + \boldsymbol{T}^{*}\boldsymbol{W}^{*} &= \overline{\boldsymbol{QTQ}^{T}}^{\,\bullet} - (\boldsymbol{QWQ}^{T} + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T})\boldsymbol{QTQ}^{T} + \boldsymbol{QTQ}^{T}(\boldsymbol{QWQ}^{T} + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}) \\ &= \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W})\boldsymbol{Q}^{T} = \boldsymbol{Q}(t)\overset{o}{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^{T}(t)\end{aligned},$$

mentre la dimostrazione di obiettività per l'incremento convettivo può essere ottenuta considerando che $\overset{\Delta}{\boldsymbol{T}}$ deriva da $\overset{o}{\boldsymbol{T}}$ a seguito dell'addizione della quantità obiettiva $\boldsymbol{DT}+\boldsymbol{TD}$. Un incremento di tensione obiettivo è noto in letteratura come flusso di tensione. Mentre gli incrementi dei tensori di deformazione generalizzati coincidono se la configurazione di riferimento coincide con quella attuale come è stato dimostrato nelle equazioni (1.77)-(1.79), lo stesso non vale per gli incrementi di tensione. Per determinare la relazione che lega differenti incrementi di tensione conviene esprimere in serie di Taylor nel punto λ_i=1 la funzione scala definita nella (1.24)

$$f(\lambda_i) = (\lambda_i - 1) + \frac{f''(1)}{2}(\lambda_i - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(\lambda_i - 1)^3 + \dots, \tag{1.85}$$

poi dalla (1.25) segue che

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) + \frac{f''(1)}{2}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^2 + \frac{f'''(1)}{6}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^3 + \dots, \tag{1.86}$$

quindi facendo la derivata materiale della (1.86) :

$$\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \dot{\boldsymbol{U}} + \frac{f''(1)}{2}[\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})\dot{\boldsymbol{U}}] + \frac{f'''(1)}{6}[\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^2 + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^2\dot{\boldsymbol{U}}] + \dots \,. \tag{1.87}$$

Dalla relazione di coniugio basata sulla potenza $\boldsymbol{T}_f \bullet \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}^{(1)} \bullet \dot{\boldsymbol{U}}$, segue sostituendo la (1.87), che

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{T}_f + \frac{f''(1)}{2}[\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{T}_f] + \frac{f'''(1)}{6}[\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^2 + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{1})^2\boldsymbol{T}_f] + \dots \,,$$

(1.88)

per cui derivando materialmente la (1.88) scritta per due generiche misure di tensione $\boldsymbol{T_f}$ e $\boldsymbol{T_{\bar{f}}}$ e valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale e sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\bar{f}} - \dot{\boldsymbol{T}}_{f} = \frac{f''(1) - \bar{f}''(1)}{2}[\boldsymbol{TD} + \boldsymbol{DT}]\,, \tag{1.89}$$

utilizzando la (1.78) e la considerazione che le tensioni generalizzate coincidono con $\boldsymbol{T}$. Se $\boldsymbol{T_f}$ indica il tensore delle tensioni $\boldsymbol{T}^{(0)}$ coniugato alla misura logaritmica della deformazione $\boldsymbol{E}^{(0)} = \ln \boldsymbol{U}$, e $\boldsymbol{T_{\bar{f}}}$ è un generico tensore delle tensioni coniugato con la famiglia di tensori della deformazione (1.64), la (1.89) assume la forma particolare

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(\mathrm{m})} - \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} = -\frac{m}{2}[\boldsymbol{TD} + \boldsymbol{DT}]\,, \tag{1.90}$$

ed è possibile ricavare delle utili relazioni tra alcuni incrementi di tensione comunemente usati. Derivando il tensore di *Green-Lagrange* nell'ipotesi che la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale, si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} = \dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{K}} - \boldsymbol{TL}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{LT}\,, \tag{1.91}$$

mentre dalla (1.90) segue

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} = \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} - \boldsymbol{TD} - \boldsymbol{DT}\,, \tag{1.92}$$

quindi dalle (1.91) e (1.92) si ottiene la relazione tra l'incremento co-rotazionale del tensore di *Kirchhoff* e l'incremento del tensore coniugato alla deformazione logaritmica:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{TW} - \boldsymbol{WT} = \overset{\circ}{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{K}} = \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)}\,. \tag{1.93}$$

Per un materiale incompressibile, essendo $\boldsymbol{T}_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{T}$, la derivata co-rotazionale del tensore di Kirchhoff (derivata di Jaumann) è uguale a quella co-rotazionale del tensore di Cauchy.

Tornando alla (1.90) si può dire che se m=-2 si ottiene l'incremento convettivo del tensore di *Kirchhoff*:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{T}}_{K} = \overset{\circ}{\boldsymbol{T}}_{K} + \boldsymbol{TD} + \boldsymbol{DT}\,. \tag{1.94}$$

Se m=2 si ottiene l'incremento del secondo tensore di Piola-Kirchhoff (detto anche incremento di Truesdell):

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} = \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} - \boldsymbol{TD} - \boldsymbol{DT}\,; \tag{1.95}$$

mentre se m=1 si ottiene l'incremento del tensore di *Biot* $\boldsymbol{T}^{(1)}$:

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} = \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{TD} + \boldsymbol{DT})\,. \tag{1.96}$$

L'incremento del tensore nominale $\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}$, invece, soddisfa la seguente relazione:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = (\dot{\boldsymbol{T}}_K - \boldsymbol{T}_K \boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{F}^{-T}, \qquad (1.97)$$

o, se la configurazione di riferimento coincide con quella attuale:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = \dot{\boldsymbol{T}}_K - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^T . \qquad (1.98)$$

Altre relazioni che saranno utili per quanto seguirà, valide se la configurazione di riferimento coincide con quella attuale, sono:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{R}} &= \overset{o}{\boldsymbol{T}}_K + \boldsymbol{W}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},\\
\overset{o}{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{K}} &= \dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{D})\\
\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} &= \dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}) \qquad (1.99)\\
\dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{R}} &= \dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{T}\\
\dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{R}} &= \overset{o}{\boldsymbol{T}}_K + \boldsymbol{L}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{D},
\end{aligned}$$

Un'altra utile connessione è quella tra l'incremento del primo tensore di Piola-Kirchhoff e quello della misura generalizzata di tensione $\boldsymbol{T}_f$. Questa può essere ottenuta eliminando $\dot{\boldsymbol{T}}^{(1)}$ dalla $(1.99)_4$ e dalla (1.89) specializzata per $f(\lambda_i) = \lambda_i - 1$:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{R}} = \dot{\boldsymbol{T}}_f + \frac{1}{2}[f''(1) - 1](\boldsymbol{D}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{T} . \qquad (1.100)$$

La relazione (1.100) fa notare come la relazione tra l'incremento del primo tensore di Piola-Kirchhoff e l'incremento della tensione generalizzata dipenda dalla scelta delle misura di deformazione. E' utile notare come tutti gli incrementi $\dot{\boldsymbol{T}}^{(\mathrm{m})}$ sono obiettivi mentre $\dot{\boldsymbol{T}}_K$ e $\dot{\boldsymbol{T}}_R$ non lo sono.

1.11 DERIVATE DELLE DEFORMAZIONI

Dalla (1.87) è possibile ricavare relazioni che legano le derivate delle diverse misure di deformazione, quando la configurazione di riferimento è presa coincidente con quella attuale. Tutte le formule che seguiranno sono ricavate nell'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida con quella attuale.

Per le derivate del primo e del secondo ordine valgono, quindi, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}&\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})=\dot{\boldsymbol{U}}\\&\ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})=\ddot{\boldsymbol{U}}+f''(1)\boldsymbol{D}^2\end{aligned}, \tag{1.101}$$

che per la sottoclasse di misure $\boldsymbol{E}^{(m)}$ si specializzano nelle seguenti espressioni

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{E}}^{(m)}=\boldsymbol{D}\\&\ddot{\boldsymbol{E}}^{(m)}=\ddot{\boldsymbol{U}}+(m-1)\boldsymbol{D}^2\end{aligned}, \tag{1.102}$$

Poiché dalla $(1.102)_2$ specializzata per la misura di deformazione di *Green-Lagrange* (m=2) segue che

$$\ddot{\boldsymbol{E}}^{(2)}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{F}}^T+\ddot{\boldsymbol{F}}\right)=\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{D}^2,$$

si ha

$$\ddot{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{F}}^T+\ddot{\boldsymbol{F}}\right)-\boldsymbol{D}^2.$$

Allora dalla $(1.101)_2$ segue che

$$\ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{F}}^T+\ddot{\boldsymbol{F}}\right)+[f''(1)-1]\boldsymbol{D}^2. \tag{1.103}$$

Dalle (1.101) e (1.102) si ricavano le seguenti relazioni per gli incrementi del secondo ordine

$$\begin{aligned}&\ddot{\boldsymbol{E}}^{(m)}=\ddot{\boldsymbol{E}}^{(1)}+(m-1)\boldsymbol{D}^2\\&\ddot{\boldsymbol{E}}^{(m)}=\ddot{\boldsymbol{E}}^{(2)}+(m-2)\boldsymbol{D}^2\end{aligned}, \tag{1.104}$$

e, quindi, la seguente approssimazione al secondo ordine per la deformazione generalizzata $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}(\boldsymbol{U})=\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})t+\ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})\frac{t^2}{2}+\boldsymbol{o}(t^2)=\boldsymbol{E}^{(1)}+\frac{f''(1)}{2}\boldsymbol{D}^2t^2+\boldsymbol{o}(t^2)=\\&\boldsymbol{E}^{(2)}+\frac{f''(1)-1}{2}\boldsymbol{D}^2t^2+\boldsymbol{o}(t^2)\end{aligned}, \tag{1.105}$$

con t parametro tipo tempo tale che $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{1}$ per t=0.

Poiché per l'incremento di deformazione tra la configurazione al tempo t=0 (che viene assunta come riferimento) e quella al tempo t, vale la seguente relazione

$$\tilde{\chi}=\dot{\chi}t+\boldsymbol{o}(t), \tag{1.106}$$

con la derivata $\dot{\chi}$ valutata per t=0, la (1.105) può essere intesa anche come un'approssimazione al secondo ordine negli incrementi di deformazione $\tilde{\chi}$ della misura di deformazione generalizzata $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$. Il tensore delle deformazioni infinitesime rimane quindi definito come:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{D}t=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\tilde{\chi}+\left[\mathrm{Grad}\tilde{\chi}\right]^T\right). \tag{1.107}$$

Per concludere, si noti che tutte le relazioni espresse in termini di derivate del primo ordine delle misure di deformazione (o di tensione) valgono (sebbene in forma approssimata) anche per i corrispondenti incrementi, sostituendo $\tilde{\chi}$ al posto di $\dot{\chi}$.