I.4 SIMBOLOGIA MATEMATICA

Algebra tensoriale. La descrizione di un mezzo continuo necessita di funzioni che dipendono dalla posizione occupata dal materiale nello spazio fisico. A tal fine si denota con $\mathcal{E}$ lo spazio tridimensionale euclideo di punti al quale si farà sempre riferimento. I punti dello spazio euclideo $\mathcal{E}$ che possono essere messi in corrispondenza biunivoca attraverso un'applicazione bilineare da $\mathcal{E}$x$\mathcal{E}$ in $\mathcal{V}$, con $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale (reale) euclideo i cui elementi sono i vettori $\boldsymbol{v}$, sono indicati con X. Fissata un'origine arbitraria nel punto O di $\mathcal{E}$, il corrispondente vettore posizione in $\mathcal{V}$ viene indicato con

$$\boldsymbol{x}(X) = X - O\,.$$

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}$, il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, applicazione bilineare da $\mathcal{V}$x$\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}$, è denotato con $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$. Il modulo del vettore $\boldsymbol{u}$ è espresso da

$$|\boldsymbol{u}| = (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u})^{1/2}\,.$$

Se $\{\boldsymbol{e}_i\}$ indica una base ortonormale di $\mathcal{V}$ le componenti x_i del vettore $\boldsymbol{x}$ sono calcolate secondo

$$x_i = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_i\,,$$

o, alternativamente, attraverso le applicazioni e_i da $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}$,

$$e_i(X) = (X - O) \bullet \boldsymbol{e}_i\,.$$

Ne consegue, quindi, che

$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = u_i v_i\,.$$

L'insieme dell'origine O e delle tre applicazioni e_i viene indicato come un sistema di coordinate cartesiano su $\mathcal{E}$, che si assume fissato una volta per tutte.

Si denota il prodotto vettoriale di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$: fissata una base ortonormale destrogira $\{\boldsymbol{e}_i\}$ di $\mathcal{V}$ il prodotto vettoriale assume le componenti

$$(\boldsymbol{u} x \boldsymbol{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k\,,$$

essendo ε_{ijk} il simbolo alternatore.

La distinzione tra e_i ed $\boldsymbol{e}_i$ può essere ignorata ed il punto X può essere identificato con il suo vettore posizione $\boldsymbol{x}$ relativo ad O. Si indica con $\boldsymbol{A}$ un tensore, applicazione lineare da $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$ che assegna, quindi, ad ogni vettore $\boldsymbol{u}$ un vettore

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

Le componenti cartesiane del tensore sono indicate da

$$A_{ij}=\boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j \,.$$

Il tensore identità è indicato con $\boldsymbol{1}$, per cui

$$\boldsymbol{1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v},$$

e le sue componenti sono δ_{ij}.

La traccia, operatore lineare che associa ad un tensore $\boldsymbol{A}$ uno scalare tr$\boldsymbol{A}$, viene indicata con

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=A_{ii}.$$

Il trasposto di $\boldsymbol{A}$ viene denotato con $\boldsymbol{A}^T$ e, di conseguenza, vale la seguente proprietà

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,.$$

Un tensore $\boldsymbol{A}$ viene detto è simmetrico se

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T,$$

antisimmetrico se

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T.$$

Un tensore $\boldsymbol{Q}$ è detto ortogonale se

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{1}.$$

Un tensore ortogonale con determinante positivo viene detto tensore rotazione.

Si indica con lo scalare λ, un autovalore o valore principale del tensore $\boldsymbol{A}$. Il vettore di modulo unitario $\boldsymbol{n}$ tale che

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n},$$

si dice autovettore o direzione principale del tensore $\boldsymbol{A}$ corrispondente a λ. Se $\boldsymbol{A}$ è simmetrico la rappresentazione spettrale in termini della base ortonormale di autovettori $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, e dei tre corrispondenti autovalori di $\boldsymbol{A}$ λ_1, λ_2, λ_3, (non necessariamente distinti), si indica con

$$\boldsymbol{A}=\lambda_i\,\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_i.$$

Due tensori simmetrici del secondo ordine $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ si dicono *coassiali* se le direzioni dei loro autovettori (assi principali) coincidono: condizione necessaria e sufficiente è che essi commutino, ossia che valga la relazione

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

Il tensore che assegna ad ogni vettore ***u*** il vettore $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{u})$, generato dal prodotto tensoriale tra due vettori ***a*** e ***b***, viene indicato con ***a***⊗***b***. Per esso valgono le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d})\\
&\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{1} \qquad\qquad ,\\
&\mathrm{S}=S_{ij}\mathrm{e}_i\otimes\mathrm{e}_j
\end{aligned}
$$

dove l'ultima indica una rappresentazione di un tensore del secondo ordine poiché i nove tensori $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ generano l'insieme di tutti i tensori. Analogamente, il tensore del quarto ordine che assegna ad ogni tensore del secondo ordine ***C*** il tensore del secondo ordine $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{C})$, generato dal prodotto tensoriale tra i due tensori del secondo ordine ***A*** e ***B***, viene indicato con ***A***⊗***B.***

Il prodotto interno tra due tensori del secondo ordine viene indicato da

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=tr(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})=A_{ij}B_{ij}\,.$$

Il modulo di un tensore è indicato, invece, da

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}}\,.$$

Si indica il determinante di un tensore ***A***, determinante della matrice delle componenti di ***A*** rispetto ad una qualsiasi base ortonormale, con

$$\det\boldsymbol{A}=\det[\boldsymbol{A}].$$

Un tensore ***A*** si dice definito positivo se

Au¿u>0,

per ogni vettore ***u*** non nullo. Si indica con ***w*** il vettore assiale corrispondente al tensore antisimmetrico ***A***, quel vettore tale che

$$\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u},$$

per ogni vettore ***u***. Si denota con la trasformazione lineare ***C***[ ], che assegna ad ogni tensore del secondo ordine ***A*** un tensore del secondo ordine ***B***=***C***[***A***], un tensore del quarto ordine. Le sue componenti rispetto ad una base ortonormale {$\boldsymbol{e}_i$} sono indicate con

$$C_{ijkl}=\boldsymbol{e}_i\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l]\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l]\,,$$

così che in componenti indiciali la relazione ***B***= ***C***[***A***] viene espressa dalla seguente relazione

$$B_{ij}=C_{ijkl}A_{kl}.$$

Il trasposto di un tensore del quarto ordine viene indicato con $\boldsymbol{C}^T$, per cui vale la proprietà

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{A}]\,.$$

Si indica con $\mathbf{I}$ il tensore del quarto ordine identità, di componenti:

$$\mathrm{I}_{ijhk} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}\right).$$

Analisi tensoriale. Se *f* è un campo scalare, vettoriale o tensoriale, che associa ad ogni punto dell'insieme aperto $\mathscr{D}$ di $\mathscr{E}$ rispettivamente uno scalare, un vettore od un tensore appartenente allo spazio vettoriale normato (a dimensione finita) $\mathscr{W}$, si indica con $\nabla f(X)$ il gradiente di *f* in *X*, la trasformazione lineare da $\mathscr{V}$ in $\mathscr{W}$ tale che

$$f(Y) - f(X) = \nabla f(X)[Y - X] + \boldsymbol{o}(|Y - X|) \quad \text{per } Y \to X .$$

Se tale trasformazione lineare $\nabla f[\bullet]$ esiste si dice che *f* è differenziabile nel punto $X \in \mathscr{D}$ ed il gradiente può essere calcolato attraverso la seguente relazione:

$$\nabla f(X)[\boldsymbol{v}] = \frac{d}{d\alpha} f(X + \alpha \boldsymbol{v})\Big|_{\alpha=0} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V} .$$

Un campo *f*, differenziabile in ogni punto $X \in \mathscr{D}$ con ∇f continuo $\mathscr{D}$, si indica come di classe C^1 su $\mathscr{D}$. In generale, un campo *f* avente gradiente di ordine (*N*-1) di classe C^1, si indica come di classe C^N su $\mathscr{D}$. Per campi definiti su $\mathscr{D}$x*T* con *T* intervallo temporale del tipo [0,*t*), si parla di classe $C^{M,N}$ su $\mathscr{D}$x*T* (Gurtin, 1972) per un campo *f* se *f* è continuo su $\mathscr{D}$x*T* ed i campi $\nabla^{(m)} f^{(n)}$ gradienti di ordine *m* rispetto ad ***x*** con *t* fissato, delle derivate di ordine *n* rispetto a *t* con ***x*** fissato, definiti da

$$\nabla^{(m)}\mathrm{f}^{(n)},\ \mathrm{m} \in \{0,1,....\mathrm{M}\},\ \mathrm{n} \in \{0,1,....\mathrm{N}\}, \quad \mathrm{m+n} \le \max\{\mathrm{M,N}\},$$

sono continui su $\mathscr{D}$x*T*. Si indica con C^M su $\mathscr{D}$x*T* la classe $C^{M,M}$.

Se φ è un campo scalare di classe C^1 su $\mathscr{D}$, il gradiente di φ in *X*, che definisce una trasformazione lineare da $\mathscr{V}$ in $\mathbb{R}$, viene indicato dal vettore $\nabla\varphi(X)$ e viene rappresentato dalla seguente relazione:

$$\nabla\varphi(X)[\boldsymbol{v}] = \nabla\varphi(X)\bullet\boldsymbol{v} .$$

Le componenti cartesiane di $\nabla\varphi\,(X)$ si indicano con

$$(\nabla\varphi)_i = \nabla\varphi[\boldsymbol{e}_i] = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} .$$

Analogamente, se $\boldsymbol{u}$ è un campo vettoriale su $\mathscr{D}$ di classe C^1 nel punto X, allora il gradiente di $\boldsymbol{u}$ in X, trasformazione lineare da $\mathscr{V}$ in $\mathscr{V}$, viene indicato con $\nabla\boldsymbol{u}(X)$ ed è rappresentato dalla seguente relazione

$$\nabla\boldsymbol{u}(X)[\boldsymbol{v}] = \nabla\boldsymbol{u}(X)\ \boldsymbol{v}\ .$$

Le sue componenti sono indicate come

$$\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)_{ij} = \nabla\boldsymbol{u}\,[\mathbf{e}_j]\bullet\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ .$$

La divergenza di $\boldsymbol{u}$ in X viene indicata come *div* $\boldsymbol{u}$, ed è rappresentata dallo scalare

$$div\ \boldsymbol{u}(X) = tr\ \nabla\boldsymbol{u}(X)\,,$$

che ammette la seguente rappresentazione in termini di componenti

$$div\ \boldsymbol{u}(X) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ .$$

La divergenza di un campo tensoriale $\boldsymbol{S}$ differenziabile in X, viene indicata come *div* $\boldsymbol{S}$, ed è definita dalla proprietà

$$[div\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})]\bullet\boldsymbol{a} = div\ [\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}] \quad \forall\boldsymbol{a}\ .$$

Le sue componenti vengono indicate da

$$[div\ \boldsymbol{S}]_i = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\ .$$

Se $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{v}$ sono campi di classe C^1, $\boldsymbol{v}$ a valori vettoriali e $\boldsymbol{S}$ a valori tensoriali è possibile provare la seguente identità:

$$\text{div}\ \boldsymbol{S}^{\text{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\bullet\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\bullet\text{div}\boldsymbol{S}\ .$$

Se B è una regione regolare di $\mathscr{E}$ con contorno regolare a tratti (Gurtin 1972, B.II), ∂B e $\boldsymbol{T}$ un campo tensoriale continuo sulla chiusura di B, da B in Lin, e differenziabile in B allora la seguente espressione rappresenta il teorema della divergenza

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{Tn}\ dA = \int_{B} div\,\boldsymbol{T}\ dV\ ,$$

quando l'integrando a destra dell'equazione è continuo a pezzi sulla chiusura di B con $\boldsymbol{n}$ normale esterna a ∂B.

Se Λ è un funzionale a valori scalari il cui dominio di definizione è un insieme di funzioni a valori vettoriali o tensoriali $\mathscr{A}$, dette funzioni ammissibili, allora se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono funzioni ammissibili e $\boldsymbol{u}$+a$\boldsymbol{v}$œ $\mathscr{A}$ con α scalare qualsiasi, si indica la variazione prima di Λ (se esiste) con:

$$\delta\Lambda\{\boldsymbol{u}\} = \frac{d}{d\alpha}\Lambda\{\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}\}\Big|_{\alpha=0}.$$

Quando il funzionale è stazionario in $\boldsymbol{u}$, si scrive

$$\delta\Lambda\{\boldsymbol{u}\} = 0$$

per ogni $\boldsymbol{v}$.