
1.2 SCOPI DEL LAVORO E COLLOCAZIONE BIBLIOGRAFICA

Nell'analisi della stabilità e della risposta non-lineare di solidi continui in stati di deformazione finita, il problema della rappresentazione della risposta del materiale assume fondamentale rilevanza ed è essenziale caratterizzare il comportamento stabile o instabile del materiale. I fenomeni d'instabilità materiale sono estremamente importanti poiché sono spesso responsabili, accanto agli effetti geometrici, dell'instabilità strutturale e, quindi, possono innescare il collasso.

Se, infatti, il materiale è stabile in tutti i punti del corpo, l'instabilità avviene per effetti instabilizzanti geometrici, ma se il materiale non è più stabile, l'instabilità è possibile anche in assenza di effetti instabilizzanti geometrici. Ovviamente esistono casi per i quali l'instabilità avviene a causa dell'interazione tra effetti geometrici e del materiale.

Nei corpi sottili (quali le travi, le piastre ed i gusci) la geometria del corpo è compatibile con campi di spostamenti incrementali ammissibili caratterizzati da componenti di deformazione trascurabili nei confronti delle rotazioni. Di conseguenza, l'instabilità può avvenire in presenza di tensioni piccole nei confronti dei moduli tangenti ed è sufficiente considerare solo l'effetto delle rotazioni per valutare il carattere di stabilità della configurazione di equilibrio. Inoltre, la differenza tra le varie misure di deformazione lavoro-coniugate può essere trascurata. In tali circostanze il materiale è in genere stabile e la perdita di stabilità avviene per tensioni prevalentemente di compressione, cui corrisponde un effetto instabilizzante dei carichi. Si ha di conseguenza un'instabilità per effetti geometrici.

Al contrario, perdite di stabilità legate al materiale avvengono in genere in corpi non sottili e principalmente in presenza di tensioni positive. In questo caso le tensioni possono avere grandezza paragonabile ai moduli tangenti e per lo studio di questo tipo di instabilità è indispensabile, quindi, considerare la differenza tra le misure di deformazione. La perdita di stabilità del materiale può avvenire, ad esempio, in materiali quali le gomme che manifestano un softening di tipo elastico o in materiali strutturali (acciaio, calcestruzzo, alluminio) in presenza di deformazioni plastiche.

In letteratura, originariamente, la stabilità del materiale è stata intesa come un'opportuna condizione imposta a priori sul comportamento del materiale (la cosiddetta "diseguaglianza costitutiva") affinché la sua descrizione costitutiva sia fisicamente ammissibile (Truesdell & Toupin, 1963; Coleman & Noll, 1964; Truesdell & Noll, 1965; Wang & Truesdell, 1973). Le analisi a riguardo hanno però sottolineato che non esiste

una disequaglianza costitutiva generalmente accettabile, sebbene talune di esse sono particolarmente rappresentative di alcune classi di materiali.

L'analisi della stabilità del materiale in letteratura ha riguardato essenzialmente tre aspetti: (1) la stabilità dell'equilibrio di un elemento materiale estratto da un continuo deformato secondo un *criterio energetico* (di seguito detto anche *statico*) applicato con un'approssimazione del secondo ordine (a questo approccio si possono ricondurre i lavori di Drucker, 1950, 1951; Hill, 1958; Coleman & Noll, 1959; Coleman, 1962; Truesdell & Toupin, 1963; Coleman & Noll, 1964; Truesdell & Noll, 1965; Hill, 1968; Hill, 1978; Petryk, 1992; Maier & Hueckel, 1979; Reese & Wriggers, 1997; Grimaldi e Luciano, 1999, Greco et al., 2001); (2) il fenomeno della *localizzazione* della deformazione in bande di taglio come possibile modo di biforcazione quasi-statico (rientrano in questo ambito i contributi di Hadamard, 1903; Hill, 1962; Hill & Hutchinson, 1975; Rudnicki & Rice, 1975; Rice, 1976; Needleman, 1979; Rice & Rudnicki, 1980; Li & Zhu, 1995; Lee, 1992; De Borst & van der Giessen, 1998); (3) la *propagazione di onde piane infinitesime* a partire da stati di deformazione finita omogenei o di *onde di accelerazione* (questo aspetto è stato esaminato da Hadamard, 1903; Hayes & Rivlin, 1961; Hill, 1962; Truesdell & Noll, 1965; Mandel, 1966; Sawyers & Rivlin, 1973; Eringen & Suhubi, 1974; Bigoni & Zaccaria, 1994; Pan & Beatty, 1999; Abeyaratne & Knowles, 1999). Pertanto, è possibile affermare che la stabilità del materiale è stata esaminata secondo un criterio *energetico* (o *statico*), di *localizzazione* e *dinamico*.

Il termine "instabilità (o stabilità) del materiale" nei numerosi studi dedicati all'argomento, appare sotto le seguenti forme: "material instability", "inherently stability", "intrinsic instability", "softening instability", "supercritical deformation", "material bifurcation", "restricted stability". In ambito statico o energetico si ritrova esplicitamente in Drucker (1950, 1951); Hill (1962, 1968, 1978); Petryk (1992), Reese & Wriggers (1997); Ryzhak (1993). In ambito dinamico, invece, emerge nei lavori di Hayes & Rivlin (1961); Hill (1962); Sawyers & Rivlin (1973, 1974); Mandel (1966); Eringen & Suhubi (1974); Petryk (1992); Bigoni & Zaccaria (1994); Abeyaratne & Knowles (1999); Pan & Beatty (1999). Infine, nell'ambito della localizzazione della deformazione compare in Hill (1962); Petryk (1992); De Borst & van der Giessen (1998); Lee (1992); Li & Zhu (1995).

Nel presente lavoro si dimostrerà come la condizione di stabilità del materiale corrisponda alla condizione di stabilità di una particolare configurazione d'equilibrio di un elemento di materiale omogeneo, espressa secondo un criterio energetico. La configurazione in esame è caratterizzata da uno stato di deformazione e di tensione uniformi. Le tensioni superficiali sull'elemento sono imposte in modo da corrispondere allo stato di tensione

uniforme presente nell'elemento. La scelta delle forze superficiali nella definizione di stabilità materiale, è una questione particolarmente delicata. Come vedremo, nell'ambito di deformazioni finite, infatti, nasce il problema di un'adeguata definizione del meccanismo di carico agente sull'elemento materiale (questo problema è stato evidenziato anche da Hill, 1978). Il meccanismo di carico deve essere definito in modo che il criterio di stabilità del materiale, dovendo descrivere una proprietà intrinseca al materiale stesso, non sia affetto dalle non-linearità geometriche. Verrà evidenziato come a seconda del meccanismo di carico scelto per rappresentare lo stato di tensione uniforme, è possibile giungere a differenti condizioni di stabilità del materiale che corrispondono alla condizione di definitezza positiva del prodotto scalare tra l'incremento di una misura di deformazione e l'incremento della misura di tensione lavoro-coniugata (il termine è inteso nel significato introdotto da Hill, 1968). Per materiali lineari la condizione di stabilità materiale rappresenta la condizione di definitezza positiva del tensore del quarto ordine dei moduli tangenti istantanei relativo alla particolare misura di deformazione. Si noti, quindi, come la stabilità del materiale secondo un criterio statico è intimamente connessa al problema delle disequaglianze costitutive, intese come restrizioni sul legame costitutivo consistenti con il comportamento fisico dei materiali. Le disequaglianze costitutive sono state analizzate in particolare dettaglio da Hill (1968); Truesdell e Noll (1965); Wang e Truesdell (1973); Ogden (1984). E' chiaro, quindi, come le disequaglianze costitutive possano essere assimilate a particolari condizioni statiche (o energetiche) di stabilità materiale.

Le prime disequaglianze costitutive formulate risalgono a Drucker (1950, 1951), che propose una disequaglianza per materiali elasto-plastici, ma il suo postulato non è privo di ambiguità nell'ambito di deformazioni finite (come fatto notare da Hill, 1968). L'analisi di Drucker porterebbe ad intendere che l'incremento di tensione utilizzato sia quello corotazionale del tensore di Cauchy, sebbene questo non appare esplicitamente nei suoi lavori. Truesdell e Toupin (1963), in seguito, analizzarono nell'ambito di materiali elastici le conseguenze delle principali disequaglianze costitutive proposte in letteratura per assicurare un comportamento fisico ammissibile. In particolare essi esaminarono la disequaglianza proposta da Coleman e Noll (1959), per materiali iperelastici, e da Coleman (1962), per materiali elastici, e derivarono da essa una condizione incrementale. Questa è stata indicata come condizione GCN⁺. Si mostrerà come tale condizione corrisponda ad esprimere la condizione di stabilità materiale mediante la misura della deformazione di Biot.

Le restrizioni espresse dalla condizione di stabilità materiale, sono state introdotte da Hill (1968), attraverso una famiglia monoparametrica di disequaglianze (disequaglianze di

Hill). Poiché la GCN^+ è un caso particolare di tali disequaglianze, queste possono essere considerate come una generalizzazione della GCN^+ . In particolare, Hill criticando la disequaglianza incrementale di Coleman e Noll sulla base di considerazioni riguardanti materiali elastici incompressibili, ha indicato la disequaglianza incrementale basata sulla derivata corotazionale (o di Jaumann) del tensore di Kirchhoff (valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale) che è coniugato con la misura di deformazione logaritmica, quale disequaglianza più plausibile per delle restrizioni a priori del legame costitutivo. Questa impone, in pratica, la condizione di definitezza positiva del tensore dei moduli tangenti associato alla misura di deformazione logaritmica. Tali restrizioni sono state utilizzate in diverse analisi di stabilità e biforcazione in materiali incrementalmente lineari o non lineari (Ariaratnam & Dubey, 1969; Miles, 1970, 1971, 1975; Hill & Hutchinson, 1975; Young, 1976; Needleman, 1979; Rice & Rudnicki, 1980; Triantafyllidis & Maker, 1985; Chau & Rudnicki, 1990; Benallal & Tvergaard, 1995; Alcaraz et al., 1997; Radi et al., 2001). Gran parte di questi lavori, essenzialmente, seguono la direzione del lavoro di Hill e Hutchinson (1975) che, estendendo i precedenti lavori di Biot (1965) e Ariaratnam & Dubey (1969), esaminarono i fenomeni d'instabilità e biforcazione per deformazioni piane di un blocco rettangolare in trazione monoassiale, costituito da un materiale incompressibile ed incrementalmente ortotropo. I due moduli istantanei di Jaumann coinvolti nel legame incrementale, furono assunti strettamente positivi in accordo con la condizione di stabilità materiale espressa attraverso la misura di deformazione logaritmica. Il modello di legame costitutivo introdotto da Hill e Hutchinson (1975), è stato successivamente utilizzato da Young (1976) che esaminò il problema di biforcazione del blocco rettangolare nel caso di tensioni di compressione. Tale legame costitutivo può essere opportunamente esteso per rappresentare materiali elasto-plastici con legge di flusso plastico di tipo associato. Needleman (1979), considerò, inoltre, tale modello materiale per rappresentare materiali elasto-plastici incompressibili con legge di flusso plastico non associata, inserendo un accoppiamento tra l'incremento di tensione media e quello di deformazione a taglio, mentre Chau & Rudnicki (1990), inclusero la compressibilità nel modello, introducendo la possibilità d'incrementi di volume proporzionali agli incrementi di tensione media e di tensione deviatorica. I modelli di Needleman e di Chau & Rudnicki, considerano limitazioni sui moduli tangenti che specializzate al caso di un materiale incrementalmente lineare, corrispondono a quelle di Hill & Hutchinson (1975).

A supporto della sua tesi, Hill ha mostrato che estendendo la condizione GCN^+ al caso di materiali incompressibili si arriva ad una contraddizione. Inoltre, solo una disequaglianza

basata sulla misura di deformazione logaritmica può essere compatibile con restrizioni a priori per materiali incompressibili.

Wang e Truesdell (1973), hanno fatto notare che la scelta di una possibile restrizione a priori sul materiale non può essere interamente basata su considerazioni valide per materiali incompressibili, e che le obiezioni poste da Hill non sono più valide se la condizione GCN^+ diventa una restrizione solo sulla parte determinata di tensione. La questione delle disequaglianze costitutive è, quindi, ancora aperta.

Nel presente lavoro si evidenzierà come per formulare completamente il criterio energetico di stabilità materiale, occorra rimuovere l'indeterminatezza lasciata nella definizione delle forze superficiali che entrano in gioco nella condizione di stabilità materiale. Per materiali incrementalmente lineari e lineari a tratti Hill (1962), ha proposto un approccio che sembra svincolare la condizione di stabilità materiale dall'interazione con tali forze superficiali. Tale approccio è stato ripreso da Petryk (1992) estendendolo a materiali incrementalmente non-lineari. Essenzialmente si considera il contorno dell'elemento materiale rigidamente vincolato e si introducono modi di deformazione del tipo "shear-band" che interessano solo una piccola porzione del corpo nel criterio energetico di stabilità. Alla luce dei risultati conseguiti in questa tesi, si verificherà come la definizione di stabilità materiale relativa a tale approccio contenga degli effetti geometrici.

In base al criterio dinamico, un materiale omogeneamente deformato di estensione infinita è considerato stabile se le velocità di propagazione per onde piane di ampiezza infinitesima sovrapposte sono reali e non nulle per ogni direzione di polarizzazione e propagazione. Il criterio dinamico di stabilità del materiale risale al lavoro di Hayes e Rivlin (1961). In questo lavoro si parla di materiale "intrinsecamente stabile" con riferimento ad un materiale isotropo in uno stato di deformazione omogenea. In un lavoro successivo Sawyers e Rivlin (1973), considerano alcune condizioni sull'energia di deformazione che assicurano l'instabilità del materiale, ossia che la velocità di propagazione delle onde sia complessa. Data l'analogia formale tra le proprietà delle onde di ampiezza infinitesima sovrapposte ad uno stato di deformazione finita e le onde di propagazione per discontinuità del secondo ordine, o onde di accelerazione (Ericksen, 1953), la suddetta condizione di stabilità del materiale può essere analogamente interpretata in termini di onde di accelerazione. Tale caratterizzazione della stabilità del materiale è strettamente legata alla condizione di ellitticità forte per il tensore dei moduli tangenti associato alla misura nominale di tensione di Piola-Kirchhoff. Diversi studiosi hanno utilizzato la condizione di ellitticità forte per ottenere possibili restrizioni a priori sul legame costitutivo (alcuni di questi sono Sawyers e Rivlin; 1974, Ogden, 1984; F. Pan e M. Beatty, 1999).

La condizione di stabilità in senso dinamico, essendo connessa alla condizione di ellitticità forte, è associata alla condizione di stabilità di un corpo omogeneamente deformato con il contorno rigidamente vincolato. Poiché questa condizione di stabilità è stata intesa in letteratura come condizione di stabilità del materiale (Hill, 1962), è evidente la particolare attenzione data all'interpretazione della stabilità materiale secondo il fenomeno di propagazione delle onde. Inoltre, Hill (1962), ha dimostrato che qualora si abbia un autovalore negativo del tensore acustico (questo implica che la condizione di ellitticità forte non sia soddisfatta), il corpo omogeneo e deformato omogeneamente con spostamenti nulli su tutto il contorno è instabile in relazione a modi del tipo a bande di taglio con spessore infinitesimo (dette anche bande di Lüders). Si ricorda, a questo proposito, che la condizione di ellitticità forte esclude la possibilità di modi di instabilità del tipo shear-bands.

E' chiaro, quindi, come il fenomeno della localizzazione della deformazione, sia per la connessione all'instabilità dinamica sia perché considerato spesso come un meccanismo precursore della frattura in un mezzo continuo, possa venire interpretato come un sintomo di instabilità materiale.

Condizioni sufficienti di instabilità materiale di tipo integrale e puntuale, ottenute essenzialmente partendo dai risultati di Hill (1962), sono state formulate da Petryk (1992) per materiali incrementalmente non-lineari che ammettono un potenziale. Fondamentalmente, le condizioni di instabilità puntuali riportate da Petryk (1992) possono essere interpretate in termini di velocità immaginarie o nulle per onde di accelerazione o di possibilità di formazione di deformazioni del tipo "shear band".

Con riferimento alla problematica sopra delineata, nella presente tesi si analizza il problema della stabilità del materiale in relazione ai fenomeni di instabilità e biforcazione dell'equilibrio. L'attenzione è rivolta principalmente a solidi caratterizzati da un legame incrementale lineare (materiali elastici ed ipoelastici) o lineare a tratti (materiali elastoplastici con legge di flusso associata e non associata), sebbene alcuni risultati sono estesi a materiali con legame incrementale positivamente omogeneo di grado uno.

Indipendentemente da connessioni con eventuali restrizioni universali a priori sul legame costitutivo, in questo lavoro la stabilità del materiale viene analizzata come un particolare stato del materiale che se violato, può portare a comportamenti strutturali (instabilità, biforcazione) che dipendono esclusivamente dal materiale stesso. In altre parole, la stabilità del materiale è intesa come una particolare condizione che caratterizza l'influenza della rappresentazione del legame costitutivo su alcuni fenomeni relativi al comportamento globale di un solido, quali l'instabilità e la biforcazione.

Gli obiettivi principali del lavoro sono:

- analizzare quale tra le diverse definizioni di stabilità del materiale, sia la più adatta a *rappresentare la risposta intrinseca del materiale*;
- investigare *gli effetti di alcune condizioni di stabilità intrinseca del materiale sui fenomeni di instabilità e biforcazione* di un corpo continuo soggetto a carichi di tipo “morto”;
- sottolineare, quindi, l'importanza di *un'appropriata descrizione del legame costitutivo* per una corretta interpretazione dei fenomeni di instabilità e biforcazione;
- stabilire possibili *connessioni tra i diversi criteri di stabilità materiale* evidenziando quali sono i fattori che regolano il passaggio tra i vari criteri.