Search, Moneta e Autarchia[*]

Nicola Amendola[†]

Sommario

Kiyotaki e Wright[12][13] hanno recentemente affrontato il problema dell'esistenza della moneta, in un contesto di equilibrio generale, mediante un approccio di search. Negli schemi analitici avanzati dai due autori il ruolo della moneta si impone a seguito della natura decentrata degli scambi, e dei connessi problemi di search, ma anche come soluzione di un problema di coordinamento strategico. Kiyotaki e Wright identificano, nel loro modello, tre equilibri simmetrici di Nash: (i) un equilibrio monetario puro; (ii) un equilibrio in strategie miste con accettabilità parziale della moneta; (iii) un equilibrio di baratto. Come sottolinea Iwai[14], dall'approccio di search emerge una teoria bootstrap della moneta in cui il valore di quest'ultima è legato alla comune convinzione che la moneta abbia effettivamente valore. L'esito di coordinamento rappresentato dall'equilibrio di tipo (iii) implica tuttavia la coesistenza di una teoria bootstrap del baratto che, in mancanza di un criterio di discriminazione, pone seri problemi interpretativi. In questo articolo viene proposta una riformulazione del modello di Kiyotaki e Wright che ammette un'opzione autarchica nell'insieme di scelta degli agenti. Il pay-off dell'opzione autarchica è, per definizione, indipendente dagli esiti di coordinamento strategico. Ciò consente di determinare sotto quali condizioni risulti possibile escludere il baratto come equilibrio di coordinamento degli scambi. Tali condizioni sono legate al saggio di preferenza intertemporale degli agenti e al saggio di rendimento della tecnologia di matching.

Parole chiave: Moneta, Search, Equilibrio Generale

[*]Un particolare ringraziamento va a Marcello Messori, per i preziosi suggerimenti ricevuti durante la fase di impostazione ed elaborazione dell'articolo. Sono inoltre grato ad Andrea Attar, Gaetano Bloise, Alessandro Brunetti, Eloisa Campioni e Silvia Francisci per i commenti ricevuti su versioni preliminari del lavoro.

[†]Università di Roma "Tor Vergata"- nicola_amendola@hotmail.com

1 Introduzione

In tempi relativamente recenti si è imposto all'attenzione degli economisti un approccio innovativo al problema dei fondamenti della teoria monetaria. Si tratta dei cosiddetti modelli di search and money proposti, a più riprese, da Kiyotaki e Wright[11][12][13], Trejos e Wright[25], Shi[23] e Iwai[14]. Questi contributi compongono un …lone di ricerca che a¤onda le sue radici nella tradizione analitica di Smith[24], Jevons[8] e Menger[17], e che si pone in una chiara linea di continuità con i pionieristici lavori di Niehans[18], Brunner e Meltzer[1], Ostroy[20], Ostroy e Starr[21] e Jones[9]. L'assunto di base dell'approccio è che l'analisi di un'economia monetaria non possa prescindere da un'esplicita rappresentazione del processo che regola le transazioni necessarie per il raggiungimento delle allocazioni desiderate. In contrapposizione allo schema di Arrow-Debreu, che prevede un rapporto anonimo fra agente e mercato, i modelli di search and money adottano una struttura di scambi decentrata di tipo bilaterale. Con particolare riferimento al modello di Kiyotaki-Wright[13][1], si immagina un'economia in cui gli agenti sono specializzati nella produzione e nel consumo dei beni. Ogni individuo autoproduce, mediante un input di consumo, un bene che non è compatibile con il suo sistema di preferenze. Per consumare, e successivamente produrre, egli deve pertanto scambiare, accedendo ad un mercato in cui gli agenti si incontrano casualmente a coppie e sono soggetti ad un vincolo di quid pro quo. La struttura totalmente decentrata delle transazioni, congiuntamente all'ipotesi di specializzazione nella produzione e nel consumo, permette di cogliere analiticamente il ben noto problema della "doppia coincidenza dei bisogni": la realizzazione di uno scambio è subordinata alla reciproca desiderabilità dei beni posseduti. Il passaggio fondamentale consiste allora nel rilevare che l'ostacolo dettato dal problema della doppia coincidenza dei bisogni giusti…ca l'adozione della moneta come strategia ottima di scambio. Il contesto analitico di search implica, difatti, una struttura subadditiva dei costi di transazione[2]; l'adozione di un intermediario degli scambi, per quanto prolunghi la catena delle transazioni, consente di ridurre il tempo medio di attesa necessario per giungere alle allocazioni desiderate. Percorrendo questa strada KW giungono a dimostrare (i) la generale esistenza di un equilibrio monetario, (i) la coesistenza della moneta con attività dal rendimento superiore, (iii) la pareto-dominanza dell'equilibrio monetario rispetto all'equilibrio di baratto[3].

[1] Da ora in poi KW.

[2] Cfr.Jones[9] eOh[19]

[3] Com'è noto i punti (i)-(iii) costituiscono problemi cruciali per una teoria della moneta in equilibrio generale, rispetto ai quali gli approcci tradizionali (money in utility function,

Vi è però un altro aspetto che emerge con chiarezza nell'analisi di KW. La scelta dello strumento atto a coordinare gli scambi è a sua volta un problema di coordinamento e specificatamente un problema di coordinamento strategico[4]. Il valore che un individuo attribuisce alla moneta, come forma di coordinamento degli scambi, non dipende solamente dall'efficienza con cui in astratto la moneta può assolvere a questo compito, ma anche dalla capacità del sistema economico di coordinarsi sulla scelta della moneta stessa come forma privilegiata di organizzazione degli scambi. Iwai[14] sintetizza efficacemente il punto osservando come l'approccio di search consenta di derivare una teoria bootstrap della moneta, in cui "......money is accepted as money by everybody merely because it is accepted as money by everybody else".

Questo aspetto se da un lato costituisce un punto di forza della modellistica di search, in quanto formalizza la comune convinzione che l'impiego della moneta sia sostenuto dalla sua generale accettabilità, dall'altro introduce un elemento di fragilità. Il modello di KW conserva infatti una caratteristica fondamentale dello schema di Diamond: la molteplicità degli equilibri. L'equilibrio monetario si accompagna sempre a un equilibrio di baratto che ha la medesima natura; rappresenta cioè un esito di coordinamento strategico in cui però gli agenti scelgono di non attribuire alcun valore alla moneta. Accanto a una teoria bootstrap della moneta, si deriva, congiuntamente, una teoria bootstrap del baratto. L'approccio di search è allora in grado di spiegarci in modo convincente perché gli agenti possano attribuire valore alla moneta ma, in modo altrettanto convincente, perché possano non attribuirgli alcun valore. Non è difficile, a questo punto, giungere a conclusioni per certi versi paradossali. Se, per assurdo, il nostro obiettivo teorico consistesse nel costruire i fondamenti di un economia di baratto, la search theory ci apparirebbe perfettamente adeguata. La possibile spiegazione del prevalere dell'equilibrio monetario rispetto all'equilibrio di baratto rimane affidata a fattori storici o istituzionali, cioè ad elementi esterni alla teoria stessa e, più in generale, alla teoria economica[5]. L'obiettivo del presente articolo è quello di risolvere questa ambiguità interpretativa riconducendo entro i confini della teoria di search il problema della discriminazione degli equilibri. Se difatti la

overlapping generations e cash in advance) evidenziano lacune e incoerenze. Cfr., ad esempio, Cartelier[2], Ostroy e Starr[22] e Hellwig[7].

[4] Non a caso, la struttura analitica del modello di KW è largamente mutuata dal modello di Diamond[4], un contributo che si colloca a pieno titolo nel filone della letteratura sui coordination failures. Per una rassegna su tale letteratura, si veda Cooper[3]

[5] Questa soluzione sembra, per altro, in aperto contrasto con la prospettiva mengeriana, a cui cui gli esponenti della search theory fanno esplicito riferimento(cfr. ad esempio Kiyotaki e Wright[12], Jones[9], Oh[19], Iwai[14], Gravelle[6]). Nella visione dell'economista austriaco, infatti, l'origine della moneta deve avere una spiegazione a-storica, che prescinda cioè da fattori storici o istituzionali.

moneta rappresenta uno strumento di coordinamento degli scambi superiore al baratto, ed è questo l'assunto pienamente condiviso dall'approccio di search, tale aspetto deve trovare un chiaro riscontro negli esiti di coordinamento del sistema economico.

La soluzione proposta in questa sede si basa principalmente sull'introduzione esplicita di un opzione autarchica nel panorama delle scelte accessibili agli agenti. In un contesto di interazione strategica, qual è quello disegnato dalla modellistica di search, la scelta autarchica si distingue proprio per l'assenza di problemi strategici. Se un agente decide di non scambiare, e dunque di non entrare in contatto con gli altri attori economici, per de…nizione non si dovrà porre il problema di quali strategie adottino gli altri agenti. L'utilità del consumo di un bene posseduto non dipende da null'altro che dal proprio sistema di preferenze. Ecco dunque che la valutazione, pure soggettiva, del valore dell'opzione autarchica risulta del tutto sganciata dalle scelte compiute dagli altri agenti. Non altrettanto possiamo dire per quanto riguarda tutte le altre opzioni che coinvolgono lo scambio. Il valore dell'opzione "moneta" o dell'opzione "baratto" dipendono crucialmente dal fatto che gli altri scambisti adottino la medesima scelta.

Ciò non vuol dire che la scelta autarchica sia indipendente dalle possibili forme di coordinamento degli scambi e dagli esiti, in termini di pay-o¤, che queste comportano, ma semplicemente che per il singolo agente il valore della scelta autarchica costituisce un riferimento assoluto indipendente dai problemi di coordinamento strategico. La presenza di questo riferimento può costituire allora la leva, o meglio, la pietra di paragone che consente di raggiungere l'obiettivo, ossia la discriminazione degli equilibri non monetari. Gli agenti sono in grado infatti di confrontare gli esiti delle varie forme di coordinamento degli scambi (moneta o baratto) con le conseguenze di una posizione autarchica. Può darsi allora, che i costi implicati da un sistema di scambio basato sul baratto siano tali da non giusti…care lo scambio, tali cioé da implicare un pay-o¤ inferiore a quello determinato dalla scelta autarchica. La presenza di un opzione autarchica comprometterebbe, allora, l'esistenza del sottoinsieme delle forme di coordinamento rappresentato dall'equilibrio di baratto, ma non necessariamente l'esistenza di un coordinamento monetario.

Il modello di KW non contempla tuttavia l'eventualità che gli agenti possano e¤ettuare una scelta autarchica. Per introdurre questa possibilità dobbiamo modi…care in maniera sostanziale il quadro analitico proposto dai due autori.

Il modo più diretto per raggiungere questo scopo consiste nel modi…care il processo che regola il rinnovo delle dotazioni. Abbiamo bisogno di un meccanismo che, pur ricreando in ogni periodo un problema di coordinamento degli scambi, generi al contempo le premesse per una scelta autarchica. La nostra ipotesi è che il rinnovo delle dotazioni non avvenga mediante autoproduzione, ma sia interamente sostenuto da una specifica categoria di agenti, che definiamo imprenditori. Gli imprenditori possono, d'altro canto, realizzare la produzione solamente ricorrendo alla mano d'opera fornita dalla distinta categoria dei lavoratori. La vitalità del sistema è garantita dal fatto che gli imprenditori producono un'eccedenza rispetto alle loro esigenze di consumo, eccedenza che può essere impiegata per l'acquisto del lavoro necessario a riavviare un ciclo di produzione.

In questo quadro, esiste evidentemente un problema di scambio tra imprenditori e lavoratori, che si ricrea di periodo in periodo, ma esiste anche l'opportunità, da parte degli imprenditori, di rinunciare allo scambio, e dunque alla produzione, consumando integralmente l'eccedenza produttiva. Quest'ultima opportunità, che si identifica in sostanza con l'opzione autarchica, non esclude automaticamente il ricorso allo scambio. La scelta autarchica da parte degli imprenditori implica difatti la rinuncia ai futuri atti di produzione e, dunque, al consumo che ne deriva; esiste perciò un trade-off ben definito. La preferibilità dell'opzione autarchica dipende dalle difficoltà che l'imprenditore incontra nel realizzare la produzione e, poiché in questi schemi analitici la produzione coincide con lo scambio, dipende in ultima analisi dalle difficoltà con cui si effettuano gli scambi. Poiché la moneta accelera il processo di scambio, le forme di coordinamento monetario delle transazioni rendono più credibile la realizzazione di equilibri non autarchici. In altri termini, può darsi il caso in cui un coordinamento degli scambi basato sul baratto non sia abbastanza efficiente da rendere la scelta produttiva competitiva rispetto alla scelta autarchica, mentre accadrebbe il contrario se gli agenti adottassero la moneta come strumento di transazione.

Nella prossima sezione introdurremo il modello di base in cui l'opzione autarchica, pur esistendo, viene resa inaccessibile per ipotesi. Evidenzieremo in particolare come questo modello sia del tutto coerente con lo schema proposto da KW. Nella sezione successiva renderemo accessibile l'opzione autarchica mostrando come in tal caso sia possibile, sotto determinate condizioni, discriminare l'equilibrio di baratto in favore di quello monetario.

2 Il modello di base

L'economia è popolata da un continuo di agenti di massa unitaria e con orizzonte temporale infinito; il tempo è discreto[6]. Gli agenti sono distinti

[6] La scelta di studiare il modello in tempo discreto nasce esclusivamente da esigenze tecniche. Per una formulazione del modello di Kiyotaki-Wright nel discreto si veda Ljungqvist, Sargent[15]

in base alle loro caratteristiche, ed in particolare vi sono P imprenditori e $1 - P$ lavoratori, dove P è un parametro esogeno. Solamente gli imprenditori hanno accesso alla tecnologia necessaria per produrre beni di consumo. Tale tecnologia consente di produrre due unità di bene di consumo omogeneo e indivisibile, ma richiede l'impiego di un'unità di lavoro specifica. I lavoratori possono produrre un'unità di lavoro indivisibile impiegando come input un'unità di bene di consumo specifica[7]. La produzione, sia dei beni che delle unità di lavoro, è istantanea. Stiamo in effetti ipotizzando la presenza di due processi produttivi, fra loro complementari, che regolano il processo di rinnovo delle dotazioni.

Poichè i lavoratori necessitano di particolari unità di bene di consumo per produrre unità di lavoro e gli imprenditori necessitano di particolari unità di lavoro per produrre beni di consumo, vi sono adeguate premesse per un problema di coordinamento degli scambi. Contrariamente a quanto avviene in KW, questo problema si colloca a monte del processo produttivo.

Assumiamo che la struttura delle specializzazioni di imprenditori e lavoratori, sia interamente descritta da un parametro esogeno x. Tale parametro identifica, al contempo, la probabilità che un generico imprenditore estragga un lavoratore che produce un'unità di lavoro adatta alla sua tecnologia e la probabilità che un generico lavoratore estragga un imprenditore che produce un bene per lui desiderabile[8]. Le condizioni di completa simmetria garantiscono che nessun bene e nessuna unità di lavoro giochino, a priori, un ruolo specifico.

Il consumo di un'unità di bene desiderabile comporta un'utilità costante $U > 0$. Gli imprenditori possono consumare direttamente i beni che producono e possono conservarli senza sopportare costi. I lavoratori non hanno

[7] Una tecnologia simile viene ipotizzata, anche se in un differente contesto, da Kiyotaki e Moore[10].

[8] Possiamo descrivere con maggior dettaglio la struttura delle specializzazioni, nel seguente modo. Supponiamo che esistano C tipi di beni di consumo prodotti e L tipi di unità di lavoro (con $C, L \in N^+$). Ogni imprenditore, per produrre, deve impiegare una specifica unità di lavoro l_i e ogni lavoratore può consumare un solo tipo di bene di consumo c_i. Per ipotesi, gli imprenditori sono uniformemente e indipendentemente distribuiti rispetto al tipo di bene di consumo prodotto e al tipo di unità lavoro utilizzata, mentre i lavoratori sono uniformemente e indipendentemente distribuiti rispetto al tipo di bene consumato e al tipo di unità di lavoro che possono offrire.

Date queste assunzioni, la probabilità che un generico imprenditore i caratterizzato da una coppia $(l_i; c_i)$ estragga, da un ipotetica urna contenente l'insieme dei lavoratori, un lavoratore che desidera il bene di consumo da lui prodotto e sia in grado di offrire l'unità di lavoro necessaria per produrlo, è data da $(1/C)(1/L)$, ed è indipendente da i, cioè dal tipo di imprenditore considerato. Il medesimo discorso vale per un generico lavoratore. Imponendo un'ulteriore grado di simmetria, nel testo si è assunto $1/C = 1/L = x.$

invece accesso ad alcuna tecnologia di conservazione dei beni[9]. Le unità di lavoro possono essere trasferite nel tempo solo dai produttori originali. In altri termini, né i lavoratori, né gli imprenditori possono acquistare unità di lavoro per rivenderle sul mercato[10].

La struttura degli scambi è totalmente decentrata. Seguendo le ipotesi standard in letteratura, assumiamo che gli agenti si incontrani casualmente a coppie secondo un processo di Bernoulli di parametro 0 < ¯ < 1. Distinguendoci però da KW, e seguendo invece Diamond[4], adottiamo una tecnologia di matching a rendimenti di scala crescenti, per cui ¯ = ¯ (n_s) con ¯^{0} > 0, dove n_s indica la misura degli agenti attivi sul mercato, ossia degli agenti che hanno una probabilità positiva di e¤ettuare scambi[11]. Quest'ultima ipotesi ci consente di cogliere le esternalità positive legate allo spessore del mercato.

Inizialmente, una frazione m di agenti, scelta casualmente, viene dotata di un'unità di moneta priva di valore intrinseco e indivisibile (in alternativa ai beni o alle unità di lavoro). Indichiamo con m_P e $m_{1 ¡ P}$, rispettivamente, la misura degli imprenditori e dei lavoratori inizialmente dotati di un'unità di moneta.

Come già accennato in precedenza, studieremo inizialmente il modello in assenza di opzione autarchica. Assumiamo perciò che gli imprenditori possano consumare la prima unità di bene prodotta ma non la seconda, che dovrà essere necessariamente reimpiegata in un nuovo ciclo produttivo. Rilasseremo successivamente questa ipotesi per derivare i nostri risultati fondamentali.

Nel quadro …n quì descritto il problema fronteggiato da imprenditori e lavoratori è di ordine strategico. Essi debbono decidere, data la distribuzione degli agenti nei vari stati e le strategie da questi ultimi adottate, se accettare o meno i beni o la moneta che gli vengono o¤erti nei possibili incontri. Siamo interessati a identi…care esiti di coordinamento che implichino l'uso della moneta, ossia esiti in cui agenti razionali accettano di scambiare attività reali con un oggetto privo di valore intrinseco. Studieremo il modello esclusivamente in condizioni di steady state e faremo riferimento, data la na-

[9] Questa ipotesi sempli…ca notevolmente l'analisi ed elimina, alla radice, la possibilità che si formi un mercato interno ai lavoratori. Siamo, in e¤etti, interessati a studiare il problema del coordinamento degli scambi fra imprenditori e lavoratori.

[10] E' la medesima ipotesi adottata da Matsuyama, Kiyotaki e Matsui[16]. Possiamo immaginare che le unità di lavoro abbiano la natura di servizi, oppure semplicemente che il commercio di un'unità di lavoro implicherebbe una qualche forma di schiavismo non accettabile.

[11] Se la probabilità di e¤ettuare scambi è nulla, gli agenti saranno, in generale, indi¤erenti rispetto alla scelta di accedere o meno al mercato. Si è di fronte a un classico caso di indeterminatezza, risolto ipotizzando l'uscita degli agenti dal mercato stesso. Tale assunzione equivale ad assumere un seppur minimo costo di ricerca, che non viene però modellato esplicitamente.

tura strategica del problema, alla nozione di equilibrio di Nash. Limiteremo, inoltre l'analisi agli equilibri simmetrici, in cui cioè agenti dello stesso tipo adottano le medesime strategie.

Per risolvere il modello adotteremo la seguente procedura: in primo luogo identificheremo le condizioni di ottimo individuale definibili a partire dalla distribuzione degli agenti e dalle strategie da questi ultimi adottate. Successivamente imporremo le condizioni di steady state per garantirci che la distribuzione degli agenti sia esprimibile in funzione delle strategie adottate. Infine isoleremo l'insieme di strategie che soddisfano le condizioni di ottimo data la distribuzione di steady state.

2.1 Le condizioni di ottimo individuale

Nell'economia fin quì descritta, i possibili stati in cui un agente imprenditore e un'agente lavoratore possono trovarsi sono:

- Stato 0 = imprenditore dotato di una unità di bene
- Stato 1 = lavoratore dotato di un'unità di lavoro
- Stato 2 = imprenditore dotato di una unità di moneta
- Stato 3 = lavoratore dotato di una unità di moneta

Indichiamo con V_j, per $j = 0; 1; 2; 3$, le value function degli agenti nei vari stati. In condizioni di steady state le value function non dipendono dal tempo e, date le condizioni di simmetria, sono identiche per ogni agente.

Come nel modello di KW, le strategie di baratto sono risolte banalmente: lavoratori e imprenditori effettuano uno scambio di baratto se, e soltanto se, si realizza una doppia coincidenza dei bisogni[12]. Il problema di imprenditori e lavoratori consiste allora nello scegliere la probabilità con cui accettare la moneta negli scambi. Indichiamo con γ_{02} la probabilità con cui un generico imprenditore è disposto ad accettare moneta in cambio di un bene e con γ_{13} la probabilità con cui un generico lavoratore è disposto ad accettare moneta in cambio di un'unità di lavoro. Siano inoltre π_{02} e π_{13} le rispettive risposte

[12] Date le ipotesi sulla tecnologia di conservazione dei beni e delle unità di lavoro, una tecnologia di scambio basata sul baratto indiretto è accessibile solamente agli imprenditori. Tuttavia, grazie alle ipotesi di simmetria, il possesso di particolari unità di bene di consumo non comporta, per gli imprenditori, alcun vantaggio nell'acquisto di unità di lavoro. Nel modello di KW le ipotesi restrittive sulla tecnologia di conservazione dei beni e delle unità di lavoro sono sostituite dalla presenza di un costo di transazione esogeno gravante sulle transazioni reali, che permette di escludere il ricorso a forme di baratto indiretto.

di un imprenditore e di un lavoratore rappresentativi rispetto alle strategie altrui. Ricorrendo alle tecniche standard di programmazione dinamica possiamo derivare le seguenti condizioni di ottimo.

$$
\begin{aligned}
rV_0 &= \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}x^2U + \frac{n_3}{n_s}x \max_{\pi_{02}} \pi_{02}(V_2 - V_0)\right] && (1)\\
rV_1 &= \beta(n_s)\left[\frac{n_0}{n_s}x^2U + \frac{n_2}{n_s}x \max_{\pi_{13}} \pi_{13}(V_3 - V_1)\right] && (2)\\
rV_2 &= \beta(n_s)\frac{n_1}{n_s}x\,\Pi_{13}(V_0 - V_2 + U) && (3)\\
rV_3 &= \beta(n_s)\frac{n_0}{n_s}x\,\Pi_{02}(V_1 - V_3 + U) && (4)
\end{aligned}
$$

dove r indica il saggio di preferenza intertemporale, che assumiamo essere identico per imprenditori e lavoratori[13].

Per una derivazione formale delle condizioni (1)-(4) si rimanda all'appendice 0.1; è opportuno tuttavia fornirne un'interpretazione intuitiva. La condizione (1) ci dice che il flusso dei rendimenti di un produttore dotato di un'unità di bene deve essere pari alla somma di due termini: il primo termine è dato dalla probabilità con cui egli incontra un lavoratore dotato di un'unità di lavoro $[\beta(n_s)\frac{n_1}{n_s}]$ moltiplicata per la probabilità che si realizzi la doppia coincidenza dei bisogni $[x^2]$ moltiplicata infine per il guadagno derivante dal produrre, consumare e ritornare allo stato precedente $[U]$[14]. Il secondo termine è dato dalla probabilità con cui egli incontra un lavoratore che possiede moneta e desidera il bene da lui prodotto $[\beta(n_s)\frac{n_3}{n_s}x]$ moltiplicata per il guadagno derivante dall'accettare moneta con probabilità π_{02}, dove quest'ultima probabilità viene scelta ottimalmente.

E' importante sottolineare che tutti gli altri incontri, che pure si possono verificare, non appaiono rilevanti per le condizioni di ottimo. Supponiamo che un imprenditore dotato di bene incontri un altro imprenditore che si trova nella medesima condizione; data la simmetria, l'eventuale scambio non potrà comportare alcun vantaggio reciproco, né altererà la distribuzione degli agenti nei vari stati[15]. Supponiamo invece che il nostro imprenditore incontri un altro imprenditore dotato di un'unità moneta; egli avrà incentivo allo scambio se e soltanto se $V_2 \geq V_0$; d'altro canto l'imprenditore con moneta ac-

[13] Questa ipotesi non è assolutamente necessaria ed ha il solo scopo di non appesantire eccessivamente la notazione.

[14] Un imprenditore nello stato 0, che effettua uno scambio di baratto con un lavoratore, esce dallo stato 0 e produce due unità di bene di consumo. La prima unità viene consumata mentre, con la seconda unità, l'imprenditore ritorna nello stato 0: Il suo guadagno netto è perciò $V_0 + U - V_0 = U$:

[15] Il guadagno netto è, in tal caso, $V_0 - V_0 = 0$:

cetterà lo scambio se e soltanto se $V_2 \leq V_0$. Ne consegue che lo scambio si può realizzare con probabilità positiva solamente quando $V_2 = V_0$, ovvero quando non comporta alcun guadagno reciproco[16]. La condizione (2) ha un'interpretazione del tutto analoga alla (1), con riferimento, però, ai lavoratori dotati di un'unità di lavoro.

La condizione (3) ci dice invece che il flusso dei rendimenti di un imprenditore dotato di moneta deve essere pari alla probabilità con cui egli incontra un lavoratore desiderato e che sia disposto ad accettare moneta $[\beta(n_s)\frac{n_1}{n_s} x \Pi_{13}]$ moltiplicata per il guadagno derivante dal produrre, consumare la prima unità di bene prodotto e passare allo stato di produttore dotato di bene $[V_0 - V_2 + U]$. Anche in questo caso, per i motivi già spiegati sopra, tutti gli altri incontri non sono rilevanti. La condizione (4) ha, con riferimento ai lavoratori dotati di un'unità di moneta, un'interpretazione analoga alla (3).

Le condizioni (1)-(4) definiscono una corrispondenza che va da (Π_{02}, Π_{13}) alle risposte ottime (π_{02}, π_{13}). Per identificare gli equilibri del modello dobbiamo determinare i punti fissi di tale corrispondenza. Osserviamo però che le strategie ottime selezionate dagli agenti non dipendono solamente da (Π_{02}, Π_{13}), ma anche dalla distribuzione degli agenti nei vari stati che regola le probabilità di incontro. Ciò, tuttavia, non costituisce un problema dal momento che è possibile determinare univocamente la distribuzione di steady state in funzione di (Π_{02}, Π_{13}). Questo è quanto mostreremo nel paragrafo successivo

2.2 Le condizioni di steady state

Nell'equilibrio di steady state la distribuzione degli agenti nei vari possibili stati è costante; ciò implica che i flussi in uscita dallo stato i, per $i = 0, 1, 2, 3$, debbano eguagliare i flussi in entrata nel medesimo stato. Data l'ipotesi di continuità sulla dimensione della popolazione, possiamo applicare la legge dei grandi numeri. I flussi aggregati sono pertanto variabili con distribuzione degenere coincidenti con il valore atteso dei flussi[17].

Nella figura 1 è illustrato lo schema dinamico del modello. Con le linee

[16] Anche in questo caso non si hanno effetti sulla distribuzione degli agenti. L'eventuale scambio comporta automaticamente l'eguaglianza tra il flusso in uscita e il flusso in entrata nello stato 0. Indichiamo con Π^P_{02} e Π^P_{20} rispettivamente, la probabilità con cui un imprenditore con bene accetta moneta da un altro imprenditore e la probabilità con cui un imprenditore con moneta accetta un bene da un altro imprenditore. Il flusso in uscita dallo stato 0 a seguito di queste transazioni è $\Pi^P_{02}\Pi^P_{20}(n_2/n_s)\, n_0$, mentre il flusso in entrata è $\Pi^P_{02}\Pi^P_{20}(n_0/n_s)\, n_2$. Come si può notare, i due flussi coincidono.

[17] Cfr. Diamond[4], Kiyotaki e Wright[12]

tratteggiate vengono indicati gli incontri che danno luogo ad opportunità di scambio e con le linee continue sono indicati i flussi effettivi che segnano il passaggio di stato.

Formalmente, in steady state devono essere rispettate le condizioni:

$$\Delta\left(\frac{n_i}{n_s}\right)/\Delta t = 0 \quad \text{per} \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

E' agevole dimostrare [cfr. appendice 0.2] che tali condizioni sono congiuntamente garantite se:

$$\frac{n_3 n_0}{n_s} x \Pi_{02} = \frac{n_1 n_2}{n_s} x \Pi_{13} \tag{5}$$

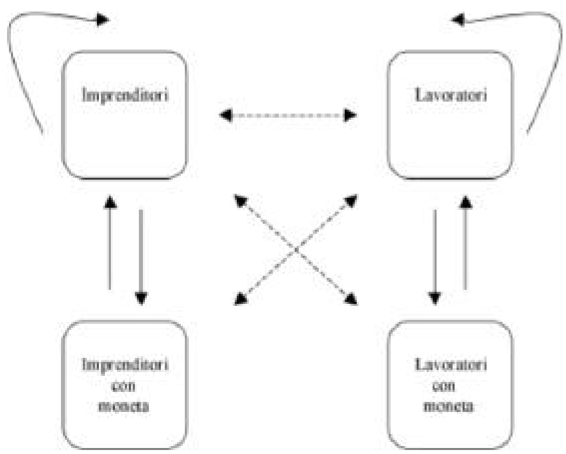

Figura 1

Supponiamo, in prima istanza, che $\Pi_{02}, \Pi_{13} > 0$, cioè che gli agenti adottino strategie di scambio monetarie. In tal caso tutti gli agenti avranno una probabilità positiva di realizzare scambi. Di conseguenza $n_s = \sum n_i = 1$ e la condizione (5) può essere riscritta nel seguente modo:

$$n_3 n_0 x \Pi_{02} = n_1 n_2 x \Pi_{13} \tag{6}$$

Alla condizione (6) dobbiamo però aggiungere i seguenti vincoli che derivano dai requisiti di coerenza rispetto alla distribuzione della popolazione fra imprenditori e lavoratori e rispetto all'ammontare di moneta immessa nel sistema:

$$\begin{aligned} n_0 + n_2 &= P & (7)\\ n_1 + n_3 &= 1 - P & (8)\\ n_3 + n_2 &= m & (9)\\ n_i &\geq 0 & (10) \end{aligned}$$

Possiamo allora dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1 Per ogni $m; m_P; P; x \in (0;1)$, e $\gamma_{02}; \gamma_{13} > 0$, il sistema (6)-(10) ha un'unica soluzione nelle variabili n_i, per $i = 0;1;2;3$. Esiste cioè un'unica distribuzione di steady state.

Dimostrazione: osserviamo anzitutto che la (6) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{n_3 n_0}{n_1 n_2} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{02}}$$

dove, date le ipotesi, $0 < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{02}} < +\infty$. Utilizzando i vincoli (7)-(9) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} n_1 &= (1 - P) - n_3 \\ n_2 &= m - n_3 \\ n_0 &= n_3 + P - m \end{aligned}$$

Tenendo conto dei vincoli (10), abbiamo che $n_3 n_0$ è una funzione continua monotona strettamente crescente di n_3, mentre $n_1 n_2$ è una funzione continua monotona strettamente decrescente di n_3. Poiché il codominio di entrambe le funzioni è in R^+, ne segue che la funzione:

$$\frac{n_3 n_0 (n_3)}{n_1 (n_3)\, n_2 (n_3)} = \varphi(n_3)$$

è continua monotona e strettamente crescente in n_3. Osserviamo però che, dati i vincoli di non-negatività, il campo di definizione di $\varphi(n_3)$ dipende dai parametri m e P; cioè $\varphi(n_3)$ è definita sull'intervallo $(a[m;P]; b[m;P])$. E' agevole verificare (cfr. appendice 0.3) che $\forall$ coppia $(m;P)$:

$$\lim_{n_3 \to a} \varphi(n_3) = 0 \text{ e } \lim_{n_3 \to b} \varphi(n_3) = +\infty$$

Ne consegue che $\exists!\, n_3^* \in (a;b)$ tale che $\varphi(n_3^*) = \gamma_{13}/\gamma_{02}$. ■

Dobbiamo considerare ora il caso in cui $\gamma_{13} = \gamma_{02} = 0$, cioè il caso in cui né i produttori ne i lavoratori sono disposti ad accettare moneta.

Proposizione 2 Per ogni $m; m_P; P; x \in (0;1)$, se $\gamma_{13} = \gamma_{02} = 0$, il sistema (5)-(10) ha un'unica soluzione nelle variabili n_i, per $i = 0;1;2;3$

Dimostrazione: se $\gamma_{13} = \gamma_{02} = 0$, sia i produttori che i lavoratori dotati di moneta non avranno alcuna opportunità di scambio e non saranno perciò attivi sul mercato. Ne consegue che $n_2 = n_3 = 0$ e $n_s = 1 - m$. Nel mercato risulteranno attivi solamente gli imprenditori dotati di un'unità di bene e i lavoratori dotati di una unità di lavoro, da cui $n_0 = P - m_P$ e $n_1 = 1 - P - m_{1-P}$. ■

2.3 Gli equilibri del modello

Un equilibrio simmetrico di steady state per l'economia in questione è dato da una collezione di valori $[n_i, \Pi_{02}; \Pi_{13}]$ con $i = 0; 1; 2; 3$, tali che risultano soddisfatte contemporaneamente le condizioni (5)-(10) e le condizioni (1)-(4) con $\pi_{02} = \Pi_{02}$ e $\pi_{13} = \Pi_{13}$. Come già accennato, gli equilibri del modello sono pienamente identificati dai punti fissi della corrispondenza che associa alla coppia $(\Pi_{02}; \Pi_{13})$ la coppia di risposte ottime $(\pi_{02}; \pi_{13})$. Tale corrispondenza è completamente definita dalle condizioni (1)-(4) poichè, come dimostrato nel paragrafo precedente, la coppia $(\Pi_{02}; \Pi_{13})$ ci consente di determinare univocamente le probabilità di incontro che caratterizzano le condizioni di ottimo individuale. Possiamo allora giungere alla seguente conclusione:

Proposizione 3 L'economia analizzata possiede tre equilibri simmetrici di steady state: I) un equilibrio in strategie pure con $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 0$; II) un equilibrio in strategie miste con $\Pi_{02} = \Pi_{13} = x$; III) un equilibrio in strategie pure con $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 1$.

Dimostrazione: le scelte ottime di π_{13} e π_{02} dipendono, rispettivamente, dal segno di $V_3 - V_1$ e $V_2 - V_0$. Dalle equazioni (1)-(4), dopo alcune manipolazioni, ricaviamo:

$$V_2 - V_0 = \frac{\beta(n_s)\,[n_1/n_s]\,xU\,[\Pi_{13} - x]}{r + \beta(n_s)\,\{[n_1/n_s]\,x\,\Pi_{13} + [n_3/n_s]\,x \max \pi_{02}\}} \tag{11}$$

$$V_3 - V_1 = \frac{\beta(n_s)\,[n_0/n_s]\,xU\,[\Pi_{02} - x]}{r + \beta(n_s)\,\{[n_0/n_s]\,x\,\Pi_{02} + [n_2/n_s]\,x \max \pi_{13}\}} \tag{12}$$

La (11) esprime il guadagno di un imprenditore, derivante dal passaggio dallo stato 0 allo stato 2, in funzione delle strategie adottate dai lavoratori. Simmetricamente, la (12) esprime il guadagno di un lavoratore, derivante dal passaggio dallo stato 1 allo stato 3, in funzione delle strategie adottate dagli imprenditori.

Dalla (11) osserviamo che se $\Pi_{13} > x$, ossia se i lavoratori accettano moneta con probabilità superiore a quella con cui accettano i beni, si ha $V_2 - V_0 > 0$. Ma allora, dalla (1), $\max \pi_{02} = 1$, cioè gli imprenditori hanno sempre convenienza ad accettare moneta. Data l'ipotesi di simmetria si ha, pertanto, $\Pi_{02} = 1$. D'altro canto, se $\Pi_{02} = 1 > x$, dalla (12) abbiamo $V_3 - V_1 > 0$ e dunque $\max \pi_{13} = 1$, cioè $\Pi_{13} = 1$. Anche i lavoratori hanno sempre convenienza ad accettare moneta. Dunque, $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 1$ costituisce un equilibrio in strategie pure, dove sia gli imprenditori che i lavoratori sono disposti ad accettare moneta con probabilità pari ad uno.

Sempre partendo dalla (11), supponiamo ora che $\gamma_{13} < x$, cioè che i lavoratori accettino moneta con probabilità inferiore a quella con cui accettano i beni. In tal caso $V_2 - V_0 < 0$. Seguendo un ragionamento analogo al caso precedente, si ha $\max \pi_{02} = 0 \Rightarrow \gamma_{02} = 0$. Ma allora, dalla (12) segue che $V_3 - V_1 < 0$, da cui $\max \pi_{13} = 0$, cioè $\gamma_{13} = 0$. $\gamma_{02} = \gamma_{13} = 0$ costituisce, pertanto, un altro equilibrio in strategie pure. In tal caso né gli imprenditori né i lavoratori sono disposti ad accettare moneta.

Esiste ovviamente un equilibrio in strategie miste in corrispondenza di $\gamma_{02} = \gamma_{13} = x$. In tale equilibrio l'accettabilità della moneta è parziale sia da parte dei lavoratori che da parte degli imprenditori. ■

In conclusione abbiamo identificato tre possibili equilibri simmetrici di steady state. Un primo equilibrio implica l'esclusione della moneta ($\gamma_{02} = \gamma_{13} = 0$) ed è associabile ad un sistema di puro baratto. Un secondo equilibrio è caratterizzato dalla completa accettabilità della moneta ($\gamma_{02} = \gamma_{13} = 1$) e possiamo identificarlo come forma di coordinamento di un'economia monetaria pura. Un terzo equilibrio, infine, rappresenta una forma di coordinamento monetario imperfetto, in cui solo una parte dei lavoratori e degli imprenditori è disponibile ad accettare la moneta come mezzo di scambio.

Com'è possibile notare, il contenuto della Proposizione 3 è del tutto coerente con i risultati ottenuti in KW. Ciò non è affatto sorprendente, dal momento che l'unica differenza sostanziale, rispetto al modello proposto dai due autori, riguarda la presenza di un'opzione autarchica, fin quì esclusa per ipotesi.

3 Il modello con opzione autarchica

Assumere che gli imprenditori non possano consumare direttamente la seconda unità di bene prodotta equivale ad imporre esogenamente una condizione di sostenibilità degli equilibri con produzione o, in altri termini, ad escludere l'eventualità che si verifichino equilibri di tipo autarchico. Se, difatti, gli imprenditori scegliessero di consumare direttamente la seconda unità prodotta il sistema potrebbe collassare verso un equilibrio in cui non vi è più produzione o, equivalentemente, in cui non vi sono più scambi.

E' evidente come tale equilibrio non risulti interessante dal punto di vista meramente interpretativo, ma è altrettanto evidente, come abbiamo avuto modo di sottolineare in precedenza, la sua importanza dal punto di vista teorico. Escludere, tramite una restrizione esogena, l'equilibrio autarchico inibisce l'analisi dei fattori che sostengono gli equilibri con produzione ed in particolare, il ruolo che tali fattori giocano negli equilibri monetari e negli equilibri di baratto. In altri termini, gli imprenditori sceglieranno di non produrre, e quindi di consumare direttamente le unità di bene disponibili per l'acquisto di unità di lavoro, in ragione dell' "efficienza" con cui il sistema di scambio adottato consente di sostenere la produzione. L'opzione autarchica permette, in sostanza, di costruire una pietra di paragone fra i vari equilibri non autarchici, ossia un meccanismo per discriminare le forme di coordinamento degli scambi individuate nel modello di base. L'obiettivo ultimo è, ovviamente, quello di determinare sotto quali condizioni sopravviva esclusivamente la forma di coordinamento che implica l'accettabilità completa o parziale della moneta. Saremmo allora in grado di spiegare non solo perché, in un sistema di decisioni totalmente decentrato, la tecnologia di transazione basata sull'impiego della moneta risulta compatibile con l'equilibrio, ma anche perché tale tecnologia possa prevalere sulle altre forme di coordinamento degli scambi.

Se ammettiamo la possibilità che la seconda unità di bene prodotta possa essere direttamente consumata dobbiamo riscrivere le condizioni di ottimo (1)-(4) nel seguente modo:

$$rV_0 = \max\left\{\beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}x^2U + \frac{n_3}{n_s}x\max\pi_{02}(V_2 - V_0)\right]; rV_{-1}\right\} \tag{13}$$

$$rV_1 = \beta(n_s)\left[\frac{n_0}{n_s}x^2U + \frac{n_2}{n_s}x\max\pi_{13}(V_3 - V_1)\right] \tag{14}$$

$$rV_2 = \beta(n_s)\frac{n_1}{n_s}x\Pi_{13}(V_0 - V_2 + U) \tag{15}$$

$$rV_3 = \beta(n_s)\frac{n_0}{n_s}x\Pi_{02}(V_1 - V_3 + U) \tag{16}$$

$$rV_{-1} = rU \tag{17}$$

Con l'indice -1 indichiamo lo stato fittizio in cui entrerà un imprenditore qualora decida di consumare direttamente l'unità di bene di cui dispone nello stato 0. Oltre alla condizione aggiuntiva (17), l'unica condizione che muta, rispetto alle (1)-(4), è la (13). Nel nuovo sistema di ipotesi, gli imprenditori in possesso di dotazioni reali possono decidere se disporne, passando allo stato -1, oppure investirle nell'acquisto di unità di lavoro. Se $V_0 > V_{-1} = U$ decideranno di non consumare ed allora

$$rV_0 = \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}x^2U + \frac{n_3}{n_s}x\max\pi_{02}(V_2 - V_0)\right]$$

mentre se $V_0 \leq V_{-1} = U$ decideranno di consumare direttamente, e

$$rV_0 = rV_{-1} = U$$

Come accennato in precedenza, noi siamo però interessati a verificare sotto quali condizioni $V_0 > V_{-1} = U$ cioè sotto quali condizioni il sistema possiede un equilibrio non autarchico. Osserviamo che, se vale la precedente diseguaglianza, le condizioni (13)-(16) coincidono con le condizioni (1)-(4), che regolano il modello di base, mentre l'equazione (17) diviene irrilevante e può essere omessa. Valgono, dunque, tutti i risultati ottenuti nel precedente paragrafo. Il punto essenziale, però, è che la value function dello stato 0, che rappresenta in sostanza il valore dell'opzione di investimento nella produzione, è differente a seconda del regime di scambio di equilibrio.

Indichiamo con V_0^B, V_0^{MS}, V_0^M le funzioni valore nello stato 0 rispettivamente nell'equilibrio di baratto, nell'equilibrio in strategie miste e nell'equilibrio monetario puro. A questo punto possiamo qualificare meglio la nostra strategia di analisi; il passo successivo sarà infatti quello di verificare sotto quali condizioni $V_0^B > U$, $V_0^{MS} > U$ e $V_0^M > U$. Se le condizioni sotto cui un equilibrio di baratto è sostenibile [$V_0^B > U$] sono più restrittive delle condizioni sotto cui sono sostenibili gli equilibri monetari [$V_0^{MS} > U$ e $V_0^M > U$] allora possiamo affermare che esisteranno situazioni in cui è esclusa l'eventualità del verificarsi di un equilibrio di baratto con produzione, possiamo cioè discriminare gli equilibri in modo da far sopravvivere solamente l'equilibrio monetario. Ovviamente, l'aspetto più interessante riguarda la natura e l'interpretazione delle restrizioni che ci consentono di discriminare gli equilibri.

3.1 La sostenibilità degli equilibri

Cominciamo, in primo luogo, ad analizzare le condizioni di sostenibilità di un equilibrio di baratto. Dalle condizioni di ottimo (13)-(17) con $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 0$ otteniamo:

$$rV_0^B = \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right]_B x^2 U$$

dove $[n_1/n_s]_B$ identifica la probabilità di incontrare un lavoratore dotato di un unità di lavoro in un equilibrio di baratto. Affinché tale equilibrio sia sostenibile deve essere $U - V_0^B < 0$ e, ricorrendo alla precedente, otteniamo:

$$U - V_0^B = \frac{U}{r}\left[r - \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right]_B x^2\right],$$

$$r < \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right] x^2 = \gamma_B$$

Osserviamo che γ_B dipende dalla distribuzione di steady state degli agenti nell'equilibrio di baratto e dal valore x che esprime il grado di specializzazione.

Dalle condizioni di stedy state per $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 0$ sappiamo che $n_s = 1 - m$ e $n_1 = 1 - P - m_{1-P}$. Sostituendo otteniamo:

$$\gamma_B = \beta(1-m)\left[\frac{1-P-m_{1-P}}{1-m}\right]x^2 \tag{18}$$

La (18) ci dice che un equilibrio di baratto è sostenibile se e soltanto se il saggio di preferenza intertemporale dei produttori è inferiore al valore di soglia γ_B. Sul piano intuitivo, il risultato si spiega come segue. Se gli imprenditori consumano subito l'unità di bene, ossia scelgono l'opzione autarchica, potranno godere di un'utilità istantanea U. L'investimento nella produzione consente invece di consumare le eventuali unità prodotte in un istante futuro, la cui distanza dipende dalle frizioni insite nel processo di scambio. Questa seconda opzione appare preferibile solamente se il saggio di preferenza degli imprenditori è sufficientemente basso, ossia se gli imprenditori non sono troppo impazienti. La misura di soglia γ_B dipenderà, ovviamente, dalla "efficienza" dell'investimento produttivo determinata, a sua volta, dal tipo di coordinamento degli scambi selezionato (nella fattispecie, il baratto) e dalle caratteristiche della tecnologia di matching.

In un equilibrio in strategie miste l'accettabilità della moneta è parziale e in particolare $\Pi_{02} = \Pi_{13} = x$. Sempre ricorrendo alle (13)-(17)abbiamo:

$$rV_0^{MS} = \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right]_{MS} x^2 U$$

Da cui :

$$U - V_0^{MS} = \frac{u}{r}\left[r - \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right]_{MS} x^2\right] < 0 \ ,$$

$$r < \beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}\right]_{MS} x^2 = \gamma_{MS}$$

Anche in questo caso, per determinare l'effettivo valore di γ_{MS}, ossia del vincolo sul saggio di preferenza intertemporale che caratterizza la sostenibilità dell'equilibrio, dobbiamo calcolare la distribuzione di steady state degli agenti.

Osserviamo, anzitutto, che nell'equilibrio in strategie miste tutti gli agenti sono attivi sul mercato e dunque $n_s = 1$. Inoltre con $\Pi_{02} = \Pi_{13} = x$ dalle (6)-(10) si ricava agevolmente $n_1 = (1-P)(1-m)$. Sostituendo otteniamo:

$$\gamma_{MS} = \beta(1)(1-P)(1-m)x^2 \tag{19}$$

Nell'equilibrio monetario puro $\Pi_{02} = \Pi_{13} = 1$; imponendo tale condizione nelle (13)-(17) e risolvendo rispetto a V_0 otteniamo

$$V_0^M = \left\{\frac{\beta(1)[n_1]_M x^2 U}{r}\right\}\left\{\frac{r+\beta(1)[n_1]_M x+\beta(1)[n_3]_M}{r+\beta(1)[n_1]_M x+\beta(1)[n_3]_M x}\right\}$$

Da cui $U < V_0\ (\ )$

$$r < \beta(1)\,[n_1]_M\, x^2 \left\{ \frac{r + \beta(1)\,[n_1]_M\, x + \beta(1)\,[n_3]_M}{r + \beta(1)\,[n_1]_M\, x + \beta(1)\,[n_3]_M\, x} \right\}$$

Dalle condizioni di steady state (5)-(10) si ricava immediatamente $[n_1]_{MS} = [n_1]_M$ e dunque la condizione di sostenibilità è rispettata per

$$r < \beta(1)\,(1-P)\,(1-m)\,x^2\,\Delta = \gamma_M \tag{20}$$

dove $\Delta = \left\{ \frac{r+\beta(1)[n_1]_M y+\beta(1)[n_3]_M}{r+\beta(1)[n_1]_M y+\beta(1)[n_3]_M x} \right\} > 1$.

3.2 La discriminazione degli equilibri

I valori γ_j, per $j = B; MS; M$, costituiscono valori di soglia per il saggio di preferenza intertemporale degli imprenditori che garantiscono la presenza di equilibri con produzione. Ad esempio, se $r < \gamma_B$ esistera un equilibrio di baratto in cui gli imprenditori decidono di non consumare direttamente l'unità di bene di cui dispongono, bensì di impiegarla per acquistare unità di lavoro. Se ciò è vero, appare ovviamente rilevante confrontare i valori che γ assume nei vari regimi di scambio.

Il valore di γ costituisce, in effetti, una sorta di saggio di rendimento della produzione condizionatamente alla forma di coordinamento degli scambi adottata. Gli imprenditori non possono massimizzare direttamente γ, poiché quest'ultima non è una variabile di scelta ma il risultato di un processo di interazione strategica, possono però escludere le forme di coordinamento degli scambi che implicano un rendimento troppo basso rispetto al saggio di preferenza intertemporale. In altri termini, se $\gamma_M > \gamma_{MS} > \gamma_B$, allora esisteranno valori di r che escludono l'equilibrio di baratto o perfino l'equilibrio monetario in strategie miste, ossia valori di r tali che $r > \gamma_{MS}$ e $r < \gamma_M$.

Il passo successivo consiste quindi nel verificare sotto quali condizioni si ha $\gamma_M > \gamma_{MS} > \gamma_B$. Analizziamo, in primo luogo, le relazioni tra il valore di soglia nell'equilibrio di baratto e il valore di soglia nell'equilibrio monetario in strategie miste. Confrontando i due valori abbiamo che $\gamma_{MS} > \gamma_B$ se e soltanto se

$$\beta(1)\,(1-P)\,(1-m) > \beta(1-m)\left[\frac{1-P-m_{1-P}}{1-m}\right] \tag{21}$$

E' interessante notare che le condizioni che garantiscono la validità della (21) dipendono anche dalla reattività di β rispetto alla dimensione del mercato.

Supponiamo che i rendimenti di scala della tecnologia di matching abbiano la seguente forma: $\beta(n_s) = \alpha n_s^{\delta}$ con $\delta \geq 1$ e $0 < \alpha \leq 1$. Quando

$\delta = 1$ i rendimenti sono lineari[18], quando $\delta > 1$ i rendimenti sono convessi. Consideriamo anzitutto il primo caso.

Proposizione 4 *Se la tecnologia di matching è a rendimenti di scala lineari, cioè $\delta = 1$, allora per ogni $m; m_P; P; x \in (0;1)$ esiste un valore m^* tale che per $m < m^*$ si ha $\gamma_{MS} > \gamma_B$; ossia, tale che la soglia di sostenibilità dell'equilibrio monetario in strategie miste è superiore alla soglia di sostenibilità dell'equilibrio di baratto.*

Dimostrazione: se $\delta = 1$ abbiamo $\beta(1-m) = \alpha(1-m)$ e $\beta(1) = \alpha$. Per brevità di notazione indichiamo con W la misura dei lavoratori $1-P$. Allora:

$$\gamma_{MS} = \alpha W(1-m)x^2 \tag{22}$$
$$\gamma_B = \alpha(W - m_W)x^2 \tag{23}$$

Possiamo, a questo punto, studiare l'andamento delle due funzioni al variare di m. Poiché la moneta complessivamente distribuita non può essere inferiore alla moneta inizialmente distribuita ai lavoratori, occorre rispettare il vincolo $m \geq m_W$. Dobbiamo dunque studiare l'andamento della (22) e della (23), per dato m_W, nell'intervallo $[m_W; 1)$.

Consideriamo anzitutto la (22). Si verifica immediatamente che $\gamma_{MS}(m)$ è monotona strettamente decrescente in m. Difatti:

$$\frac{\partial \gamma_{MS}}{\partial m} = -\alpha W x^2 < 0$$

inoltre:

$$\gamma_{MS}(m_W) = \alpha W(1-m_W)x^2 \quad \text{e} \quad \lim_{m \to 1} \gamma_{MS}(m) = 0$$

Dalla (23) abbiamo invece che γ_B è costante rispetto a m.

[18] Diamond e Maskin[5] [cfr. anche Iwai[14]] definiscono questo tipo di tecnologia come *quadrating meeting technology*. In effetti, l'ipotesi sottostante è che il numero di incontri per unità di tempo vari con il quadrato del numero di agenti presenti nel settore dello scambio. Se indichiamo con $\mu(n_s)$ il numero di incontri per unità di tempo e $\mu(n_s) = \alpha n_s^2$ allora il tasso di arrivo dei partner dello scambio è dato da $\beta = \mu(n_s)/n_s = \alpha n_s^2/n_s = \alpha n_s$. Nel nostro caso il tempo è discreto e β identifica direttamente la probabilità di incontrare un parter dello scambio. L'interpretazione rimane comunque la stessa.

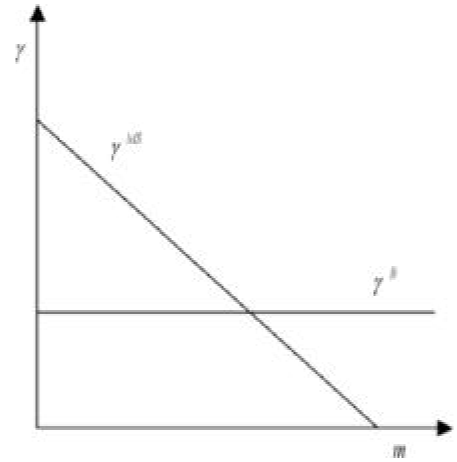

Figura 2

Possiamo rappresentare le due funzioni su di un diagramma cartesiano dove l'origine dell'asse delle ascisse è traslata nel punto m_W (vedi figura 2). Quando $m = m_W$ abbiamo $\gamma_{MS} = \alpha W(1 - m_W)x^2 > \alpha(W - m_W)x^2$. Questa situazione corrisponde al caso in cui tutta la moneta viene inizialmente attribuita ai lavoratori. Quando m aumenta γ_{MS} decresce linearmente, mentre γ_B rimane ancorato al livello iniziale. Le due funzioni si incontrano quando $m = m^* = m_W/W$[19]. Fin tanto che $m < m^*$ avremo $\gamma_{MS} > \gamma_B$.

Se dunque, la moneta immessa nel sistema non è sufficientemente elevata, relativamente alla quota dei lavoratori con moneta rispetto al totale dei lavoratori, esistono valori del saggio di preferenza intertemporale tali che $\gamma_B < r < \gamma_{MS}$ ossia tali da escludere un equilibrio di baratto con produzione. Osserviamo però che tale risultato, implicito nella Proposizione 4, è legato a condizioni particolari sui valori dei parametri (m non deve essere troppo elevata). Possiamo rendere più generale il risultato assumendo che i rendimenti della tecnologia di matching siano più "intensi". Supponiamo, difatti, che tale tecnologia non sia lineare, ma convessa.

[19] Si osservi che avremmo ottenuto il medesimo risultato ipotizzando, come in Kiyotaki e Wright[13], che anche in un equilibrio di baratto gli agenti dotati di moneta risultano attivi sul mercato, e che i rendimenti di scala della tecnologia di matching sono costanti. In tal caso, difatti, avremmo $\gamma_B = \beta(W - m_W)x^2$ e $\gamma_{MS} = \beta W(1 - m)x^2$ ossia i medesimi valori che otteniamo con rendimenti linearmente crescenti della tecnologia di matching e agenti con moneta inattivi sul mercato. In tal senso, possiamo dire che nel modello di Kiyotaki e Wright vi è l'assunzione implicita di rendimenti di scala lineari.

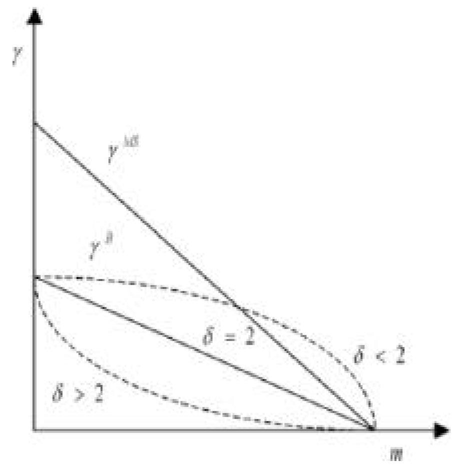

Figura 3

Proposizione 5 Se la tecnologia di matching è a rendimenti di scala convessi, con $\delta \geq 2$, allora per ogni $m; m_P; P; x \in (0; 1)$ si ha $\gamma_{MS} > \gamma_B$; la soglia di sostenibilità dell'equilibrio monetario in strategie miste è sempre superiore alla soglia di sostenibilità dell'equilibrio di baratto.

Dimostrazione: supponiamo, in primo istanza, che $\delta > 1$. In tal caso abbiamo:

$$\gamma_{MS} = \alpha W (1 - m) x^2 \tag{24}$$
$$\gamma_B = \alpha (1 - m)^{\delta - 1} (W - m_W) x^2 \tag{25}$$

La condizione che definisce γ_{MS} non subisce modificazioni rispetto al caso esaminato nella Proposizione 4, mentre γ_B ha ora un estremo inferiore più basso ed è decrescente in m. Difatti:

$$\gamma_B (m_W) = \alpha (1 - m_W)^{\delta - 1} (W - m_W) x^2 < \alpha (W - m_W) x^2$$

$$\frac{\partial \gamma_B}{\partial m} = -\alpha (\delta - 1) (1 - m)^{\delta - 2} (W - m_W) x^2$$

Come si evince dalla figura 3, il campo dei valori di m tali che $\gamma_{MS} > \gamma_B$ si estende ed è tanto più ampio quanto più elevato è δ, cioè il parametro che misura l'intensità dei rendimenti di scala della tecnologia di matching. Se $\delta \geq 2$ la funzione $\gamma_B (m)$ non è solamente decrescente, ma anche convessa e siamo perciò garantiti del fatto che giaccia tutta al di sotto della curva $\xi_B (m)$, ossia che $\gamma_{MS} > \gamma_B$ per ogni valore di m[20].■

Sempre nella figura 3, sono illustrati i possibili casi al variare di δ. Osserviamo che il divario tra i valori soglia γ_B e γ_{MS} è una funzione crescente di

[20]Se $\delta < 2$, vi saranno sempre valori di m tali che $\gamma_B > \gamma_{MS}$ (vedi appendice 0.4)

δ, ossia tende a essere tanto più ampio quanto più intensi sono i rendimenti della tecnologia di matching (vedi appendice 0.5).

Per completare il quadro, rimangono da confrontare i valori di soglia relativi all'equilibrio monetario in strategie miste e all'equilibrio monetario puro.

Proposizione 6 *Per ogni $m, m_P, P, x \in (0,1)$ vale $\gamma_M > \gamma_{MS}$, cioè la soglia di sostenibilità dell'equilibrio monetario puro è superiore alla soglia di sostenibilità dell'equilibrio in strategie miste.*

Dimostrazione: La verifica è immediata. Tenendo conto della (19) e della (20)possiamo scrivere $\gamma_M = \gamma_{MS}\Delta$. Poichè $\Delta > 1$, per qualsiasi valore dei parametri, segue $\gamma_M > \gamma_{MS}$. $\blacksquare$

Come accennato in precedenza, la Proposizione 5 e la Proposizione 6 ci consentono di definire condizioni che garantiscono la validità delle diseguaglianze $\gamma_M > \gamma_{MS} > \gamma_B$, e dunque l'esistenza di valori del saggio di preferenza intertemporale che discriminano l'equilibrio di baratto.

Proposizione 7 *Se la tecnologia di matching ha rendimenti di scala convessi con $\delta \geq 2$, allora esiste un valore r del saggio di preferenza intertemporale tale che l'equilibrio monetario puro è l'unico equilibrio di scambio sostenibile.*

Dimostrazione: Dalla proposizione 5 abbiamo $\gamma_{MS} > \gamma_B$, mentre dalla proposizione 6 abbiamo $\gamma_M > \gamma_{MS}$. Quindi vale $\gamma_M > \gamma_{MS} > \gamma_B$; ma allora esiste certamente $r > 0$ tale che $\gamma_M > r > \gamma_{MS} > \gamma_B$, cioè tale che l'equilibrio monetario puro è il solo equilibrio di scambio sostenibile. $\blacksquare$

La proposizione 7 afferma dunque che se l'efficienza del mercato e sufficientemente sensibile, rispetto alle dimensioni del mercato stesso, e se gli imprenditori sono sufficientemente impazienti, allora la tecnologia di transazione monetaria può essere l'unica forma di coordinamento degli scambi sostenibile. L'unica, cioè, che garantisca un "rendimento" della produzione competitivo rispetto alla scelta autarchica.

Fin quì abbiamo analizzato la sostenibilità degli equilibri con scambio. Abbiamo visto che tale sostenibilità è condizionata dalla presenza di un'opzione autarchica, che agisce come una sorta di minaccia sugli esiti di coordinamento degli scambi. Non abbiamo detto ancora nulla circa la reale consistenza di questa minaccia; ossia circa l'effettiva realizzabilità di un'equilibrio autarchico.

Proposizione 8 *Per ogni $m, m_P, P, x \in (0,1)$, l'economia analizzata possiede sempre un equilibrio autarchico.*

Dimostrazione: Come abbiamo visto, gli imprenditori dotati di un'unità di bene decideranno di consumare direttamente tale unità se e soltanto se:

$$\beta(n_s)\left[\frac{n_1}{n_s}x^2U+\frac{n_3}{n_s}x\max_{\pi_{02}}\pi_{02}(V_2-V_0)\right]\leq rU \tag{26}$$

Dobbiamo verificare che, se anche gli imprenditori dotati di un'unità di moneta decidono di consumare direttamente le unità di bene eventualmente prodotte, la condizione (26) è rispettata. Se cosi non fosse, la scelta autarchica non sarebbe più ottima: gli imprenditori avrebbero difatti incentivo ad investire l'unità di bene posseduta nell'acquisto di unita di lavoro.

Osserviamo anzitutto che, data la scelta autarchica, nel sistema non saranno presenti imprenditori dotati di un'unità di bene; $n_0 = 0$. D'altro canto, se $n_0 = 0$ i lavoratori con moneta non avranno una probabilità positiva di effettuare scambi. Parimenti a quanto accade in un sistema di baratto, essi saranno inattivi sul mercati, cioè $n_3 = 0$. In steady state si deve pertanto avere:

$$\frac{n_2 n_1}{n_s}x\mu_{13}=0$$

e ciò può accadere $\Leftrightarrow$ $n_1 = 0$ oppure $n_2 = 0$ o entrambe. Esaminiamo separatamente i casi

(1) $n_1 = 0$. Data la scelta autarchica, gli imprenditori con moneta acquistano unita di lavoro, producono ed escono dal mercato. Quando $n_1 = 0$, gli imprenditori non riescono a "liberarsi" integralmente dell'ammontare di moneta posseduta, o meglio, le unità di lavoro si esauriscono prima che tutti gli imprenditori con moneta riescano a produrre. In tal caso:

$$n_2 = m_P - [(1-P) - m_{1-P}] = m - (1-P)$$

ossia, la misura degli imprenditori dotati di moneta sarà pari alla misura degli imprenditori inizialmente dotati di moneta al netto dei lavoratori inizialmente dotati di un'unità di lavoro. Ricordiamo pero che $n_2 \geq 0$ e quindi $n_1 = 0 \Leftrightarrow (1-P) \leq m$. A questo punto, riscrivendo la (26) otteniamo:

$$rU \geq 0$$

che è sempre verificata, poiché $r; U > 0$:

(2) $n_2 = 0$. In tal caso, i lavoratori assorbono l'intero ammontare di moneta posseduto dagli imprenditori. In particolare, avremo

$$n_1 = (1-P) - m_{1-P} - m_P = (1-P) - m$$

La misura dei lavoratori dotati di un'unità di lavoro è pari alla misura dei lavoratori inizialmente dotati di un'unità di lavoro, al netto degli imprenditori con moneta. Tuttavia, poiché $n_1 \geq 0, n_2 = 0 \Leftrightarrow (1 - P) \geq m$. Osserviamo, pero, che se $n_2 = 0$, i lavoratori dotati di un'unità di lavoro non avranno una probabilità positiva di effettuare scambi e usciranno dal mercato (saranno inattivi). Pertanto anche $n_1 = 0$. Riscrivendo la (26), otteniamo allora:

$$rU \geq 0$$

che, come abbiamo già visto, è sempre verificata. $\blacksquare$

Quel che accade, in sostanza, è che il sistema, nel momento in cui si esauriscono tutte le opportunità di scambio, collassa inevitabilmente. Se $(1 - P) > m$, tutti gli imprenditori rimasti escono prima che si realizzi il collasso; altrimenti, una parte degli imprenditori non riuscirà ad impiegare produttivamente l'unità di moneta posseduta.

Ovviamente, l'equilibrio autarchico si realizza solamente se anche gli imprenditori con moneta selezionano la medesima strategia degli imprenditori inizialmente dotati di un'unità di bene. D'altro canto, se gli imprenditori con moneta decidessero di non consumare direttamente tutte le unità di bene prodotte, questa scelta sarebbe ottima per tutti gli imprenditori. Torneremmo, in tal caso, alla situazione che abbiamo analizzato in precedenza.

3.3 Un caso particolare

Consideriamo ora un caso particolare, in cui si impone una restrizione sulla distribuzione dell'ammontare di moneta nel sistema. Supponiamo che la moneta iniziale venga distribuita tra imprenditori e lavoratori di modo che $m_W = mW$ e $m_P = mP$. I lavoratori inizialmente dotati di moneta sono proporzionali alla misura dei lavoratori presenti nel sistema, e lo stesso vale per gli imprenditori. In questa maniera preserviamo ulteriormente la simmetria del sistema, nel senso che $m_W/m_P = W/P$. E' immediato verificare, allora, che la misura dei lavoratori dotati di un'unita di lavoro nell'equilibrio di baratto coincide con la medesima misura nell'equilibrio monetario in strategie miste. Difatti:

$$W - m_W = W - mW = W(1 - m)$$

Se i rendimenti di scala della tecnologia di matching sono lineari, si ha:

$$\gamma_B = \beta(1 - m)\left[\frac{W - m_W}{1 - m}\right]x^2 = \beta(1)W(1 - m)x^2 = \gamma_{MS}$$

Il livello di soglia per l'equilibrio in strategie miste coincide con il livello di soglia per l'equilibrio di baratto. Il risultato si spiega come segue. Quando i rendimenti di scala sono lineari, l'effetto legato allo spessore del mercato risulta neutro; la riduzione di ¯; dovuta alla minore dimensione di un mercato di baratto, è esattamente compensata dalla riduzione del denominatore $1 ¡ m$ che contribuisce a de…nire la probabilità di incontrare lavoratori con unità di lavoro. D'altro canto, in un equilibrio in strategie miste l'impiego della moneta non comporta, di per sé, alcun vantaggio; l'accettabilità della moneta coincide con quella delle attività reali. Vi è pero un ulteriore e¤etto che dobbiamo considerare, riguardante la distribuzione degli agenti nei vari stati. Se la misura di steady state dei lavoratori dotati di un'unita di lavoro e più elevata nell'equilibrio in strategie miste rispetto all'equilibrio di baratto, allora $°_{MS} > °_{B}$. Tuttavia, quando la moneta viene distribuita in maniera proporzionale tra lavoratori e imprenditori, anche questo e¤etto risulta neutro. In tale situazione solo l'equilibrio monetario puro comporta un vantaggio. L'accettabilità della moneta è superiore a quella delle altre attività e pertanto $°_{M} > °_{MS} = °_{B}$.

4 Conclusioni

Abbiamo riformulato il modello di KW introducendo un'opzione autarchica nel panorama delle scelte accessibili agli agenti. L'innovazione essenziale riguarda il processo di rinnovo delle dotazioni. Tale processo non si realizza, come in KW, mediante un semplice meccanismo di autoproduzione, bensì attraverso un più articolato rapporto di scambio tra imprenditori e lavoratori. Questa sostanziale revisione rende praticabile, per gli imprenditori, una scelta autarchica che consiste nel consumo diretto (o mancato investimento) delle proprie eccedenze produttive.

In questo nuovo quadro teorico, la vitalità del sistema dipende congiuntamente da due fattori: (i) i costi di transazione rappresentati dal tempo necessario per e¤ettuare gli scambi; (ii) il saggio di impazienza degli imprenditori. I costi di transazione dipendono a loro volta da altri due elementi: (a) il regime di scambio; (b) la tecnologia di matching. Un coordinamento degli scambi basato sull'impiego della moneta accelera gli scambi riducendo i tempi medi di attesa necessari per e¤ettuare le transazioni desiderate. I rendimenti di scala della tecnologia di matching producono esternalità positive legate allo spessore del mercato che penalizzano un sistema di scambio basato sul baratto. In generale, dunque, un'economia monetaria comporta costi di transazione più bassi rispetto a un'economia non monetaria.

Ciò non è, di per sé, su¢ciente a discriminare l'equilibrio di baratto, in quanto i regimi di scambio costituiscono l'esito di un processo di interazione strategica che può dar luogo a fallimenti di coordinamento. La presenza di un'utilità di riserva rappresentata dall'opzione autarchica consente di risolvere il problema. Gli imprenditori possono infatti confrontare l'utilità attesa di un consumo differito con l'utilità di un consumo immediato, dove il saggio di preferenza intertemporale rappresenta il peso soggettivo che essi attribuiscono al trascorrere del tempo. La Proposizione 7 dimostra che se gli imprenditori sono sufficientemente impazienti, i costi di transazione implicati da un sistema di baratto possono diventare insostenibili, mentre un sistema monetario risulta ancora praticabile.

Si noti come il senso della Proposizione 7 possa essere letto da un'altra angolatura: esistono valori del saggio di preferenza intertemporale tali per cui la moneta è necessaria se si desidera avere un equilibrio con produzione. Nell'approccio di search la moneta è vista essenzialmente come una tecnologia di transazione. Accelerando gli scambi, essa riduce i costi di transazione e, per questa via fornisce agli imprenditori un incentivo ad investire nella produzione. Senza la moneta questo incentivo viene meno e si rompe il meccanismo che sostiene la produzione e lo scambio. Da questo punto di vista, la moneta non ha una giustificazione esclusivamente normativa ma, con un parziale rimando ad argomentazioni smithiane, si configura come lo strumento essenziale che consente di passare da un'economia autarchica (o se si preferisce, di autoconsumo) ad un economia di mercato. E' in questo senso che il modello proposto permette di spiegare perchè l'equilibrio monetario possa prevalere sull'equilibrio di baratto; perchè cioè dall'approccio di search emerga una teoria bootstrap della moneta ma non una teoria bootstrap del baratto.

5 Appendice

0.1 Le condizioni di ottimo

Deriviamo anzitutto la condizione (1). Supponiamo che l'imprenditore nello stato 0 incontri un altro agente con probabilità 1. Nell'ottimo si deve avere:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{n_1}{n_s} x^2 [V_0 + U] (1+r)^{-1} + \frac{n_3}{n_s} x \max_{\pi_{02}} [\pi_{02} V_2 + (1 - \pi_{02}) V_0] (1+r)^{-1} \\ &\quad + \left(1 - \frac{n_1}{n_s} x^2 - \frac{n_3}{n_s} x\right) V_0 \end{aligned}$$

dove $\left(1 - \frac{n_1}{n_s} x^2 - \frac{n_3}{n_s} x\right)$ è la probabilità che gli incontri effettuati non possano dar luogo ad alcuna transazione. Osserviamo che $\max_{\pi_{02}} [\pi_{02} V_2 + (1 - \pi_{02}) V_0] = \max_{\pi_{02}} [V_2 - V_0] + V_0$. Tenendo conto di ciò, e semplificando, possiamo scrivere:

$$V_0 = (1+r)^{-1} \left\{ \frac{n_1}{n_s} x^2 U + \frac{n_3}{n_s} x \max_{\pi_{02}} [V_2 - V_0] \right\} + V_0 (1+r)^{-1}$$

Tuttavia, l'imprenditore incontra un agente con probabilità $\beta(n_s)$, per cui

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \beta(n_s)(1+r)^{-1}\left\{\frac{n_1}{n_s}x^2U + \frac{n_3}{n_s}x\max_{\pi'\in 2}[V_2 - V_0]\right\} + \beta(n_s)V_0(1+r)^{-1} \\
&\quad + [1-\beta(n_s)]V_0(1+r)^{-1}
\end{aligned}
$$

da cui segue, dopo alcuni passaggi

$$
rV_0 = \beta(n_s)\left\{\frac{n_1}{n_s}x^2U + \frac{n_3}{n_s}x\max_{\pi'\in 2}[V_2 - V_0]\right\}
$$

che corrisponde alla (1) nel testo. La condizione (2) si deriva in modo del tutto analogo.

Deriviamo ora la condizione (3). Supponiamo che un imprenditore nello stato 2 incontri un altro agente con probabilità 1. Nell'ottimo si ha:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \frac{n_1}{n_s}x[\Pi_{13}(V_0+U) + (1-\Pi_{13})V_2](1+r)^{-1} \\
&\quad + \left(1-\frac{n_1}{n_s}y\right)V_2(1+r)^{-1}
\end{aligned}
$$

dove $\left(1-\frac{n_1}{n_s}x\right)$ rappresenta la probabilità che gli incontri effettuati non possano dar luogo ad alcuna transazione. Semplificando otteniamo:

$$
V_2 = \frac{n_1}{n_s}x\,\Pi_{13}[V_0 - V_2 + U](1+r)^{-1} + V_2(1+r)^{-1}
$$

Tuttavia, L'imprenditore incontra un altro agente con probabilità $\beta(n_s)$, per cui

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \beta(n_s)\frac{n_1}{n_s}x\,\Pi_{13}[V_0 - V_2 + U](1+r)^{-1} + \beta(n_s)V_2(1+r)^{-1} \\
&\quad + [1-\beta(n_s)]V_2(1+r)^{-1}
\end{aligned}
$$

da cui, dopo alcuni passaggi

$$
rV_2 = \beta(n_s)\left\{\frac{n_1}{n_s}x\,\Pi_{13}[V_0 - V_2 + U]\right\}
$$

che corrisponde alla (3) nel testo. La (4) si deriva in modo analogo.

0.2 Le condizioni di steady state

In steady state dobbiamo avere:

$$\frac{\Delta n_i}{\Delta t} = 0 \text{ per } i = 0; 1; 2; 3$$

Ciò vuol dire che, in ogni stato, il flusso degli agenti in uscita deve eguagliare il flusso di agenti in entrata. Imponendo tale vincolo su ogni stato abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta n_0}{\Delta t} &= 0 \Rightarrow -\frac{n_0 n_3}{n_s} x\Pi_{02} + \frac{n_1 n_2}{n_s} x\Pi_{13} = 0 \\
\frac{\Delta n_1}{\Delta t} &= 0 \Rightarrow -\frac{n_1 n_2}{n_s} x\Pi_{13} + \frac{n_0 n_3}{n_s} x\Pi_{02} = 0 \\
\frac{\Delta n_2}{\Delta t} &= 0 \Rightarrow -\frac{n_1 n_2}{n_s} x\Pi_{13} + \frac{n_0 n_3}{n_s} x\Pi_{02} = 0 \\
\frac{\Delta n_3}{\Delta t} &= 0 \Rightarrow -\frac{n_0 n_3}{n_s} x\Pi_{02} + \frac{n_2 n_1}{n_s} x\Pi_{13} = 0
\end{aligned}$$

Come si può notare le quattro condizioni sono identiche e coincidono con la (5) nel testo.

0.3 I limiti della funzione $\varphi(n_3)$

Per dimostrare che $\lim_{n_3 \to a} \varphi(n_3) = 0$ e $\lim_{n_3 \to b} \varphi(n_3) = +\infty$ dobbiamo analizzare separatamente quattro possibili casi:

- Caso A: $m \leq \min\{P; 1 - P\}$. Allora, dati i vincoli (7)-(10), $\varphi(n_3)$ è definita su $(0; m)$ e $\lim_{n_3 \to 0} \varphi(n_3) = 0$ mentre $\lim_{n_3 \to m} \varphi(n_3) = +\infty$

- Caso B: $P \leq m \leq 1 - P$. Allora, dati i vincoli(7)-(10), $\varphi(n_3)$ è definita su $(m - P; m)$ e $\lim_{n_3 \to m - P} \varphi(n_3) = 0$ mentre $\lim_{n_3 \to m} \varphi(n_3) = +\infty$

- Caso C: $1 - P \leq m \leq P$. Allora, dati i vincoli(7)-(10), $\varphi(n_3)$ è definita su $(0; 1 - P)$ e $\lim_{n_3 \to 0} \varphi(n_3) = 0$ mentre $\lim_{n_3 \to 1 - P} \varphi(n_3) = +\infty$

- Caso D: $m \geq \max\{P; 1 - P\}$. Allora, dati i vincoli(7)-(10), $\varphi(n_3)$ è definita su $(m - P; 1 - P)$ e $\lim_{n_3 \to m - P} \varphi(n_3) = 0$ mentre $\lim_{n_3 \to 1 - P} \varphi(n_3) = +\infty$.

0.4 Valori di δ che implicano $\gamma_B < \gamma_{MS}$ per ogni m

Se la curva γ_B è convessa essa giacerà sempre al di sotto della curva γ_{MS}. Se invece è concava, ossia se $\delta < 2$, essa si troverà sempre al di sotto della curva γ_{MS} se e soltanto se il limite della sua derivata per m che tende ad uno è, in valore assoluto, inferiore alla derivata della curva γ_{MS}. Sappiamo che:

$$\frac{\partial \gamma_{MS}}{\partial m} = -\alpha W x^2$$

mentre

$$\frac{\partial \gamma_B}{\partial m} = -\alpha(\delta - 1)(1 - m)^{\delta - 2}(W - m_W)\, x^2$$

da cui

$$\left|\lim_{m \to 1} \frac{\partial \gamma_B}{\partial m}\right| = \infty > \alpha W x^2 = \left|\frac{\partial \gamma_{MS}}{\partial m}\right| \quad \forall \delta < 2$$

Dunque, finche $\delta < 2$ la curva γ_B non si troverà mai tutta al di sotto della curva γ_{MS}.

0.5 Il divario tra γ_B e γ_{MS}

E' facile verificare che il divario tra γ_B e γ_{MS} è una funzione crescente di δ. Difatti:

$$\psi = \gamma_{MS} - \gamma_B = \alpha W (1 - m)\, x^2 - \alpha (1 - m)^{\delta - 1} (W - m_W)\, x^2$$

Sappiamo che $\psi > 0 \ \forall m \Leftrightarrow \delta \geq 2$(cfr. appendice 0.4). Abbiamo inoltre:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta} = -\alpha (1 - m)^{\delta - 1} \log (1 - m)(W - m_W)\, x^2 > 0$$

poiché $(1 - m) < 1$

Riferimenti bibliografici

[1] Brunner, K., Meltzer, A. (1971) The Uses of Money in the Theory of an Exchange Economy, American Economic Review, 61

[2] Cartelier, J. (1998) Monnaie et theorie des prix: le modeles de prospection. Renouvellents-ills la question?, Draft, Universitè de Paris X, Nanterre

[3] Cooper, R. (1999) Coordination Games: Complementarities and Macroeconomics, Cambridges University Press, Cambridge

[4] Diamond, P. (1982) Aggregate Demand Management in Search Equilibrium, Journal of Political Economy, 5

[5] Diamond, P., Maskin, E. (1979) An Equilibrium Analysis of Search and Breach of contract I: Steady States, Bell Journal of Economics Vol 10

[6] Gravelle, T. (1996) What Is Old Is New Again, The Manchester School of Economic and Social Studies

[7] Hellwig M. (1993) The Challenge of Monetary Theory, European Economic Review

[8] Jevons, W.S. (1875) Money and the Mechanism of Exchange, Chapters I, II, III, ristampato in General Equilibrium Models of Monetary Economies; Studies in the Static Foundations of Monetary Theory, a cura di R.M.Starr, Academic Press, San Diego, 1989

[9] Jones, R.A. (1976) The Origin and Development of Media of Exchange, Journal of Political Economy, 84

[10] Kiyotaki, N., Moore, J. (1997) Credit Cycles, Journal of Politcal Economy, 105

[11] Kiyotaki, N., Wright, R. (1989) On Money as a Medium of Exchange, Journal of Political Economy, 97

[12] Kiyotaki, N., Wright, R. (1991) A Contribution to the Pure Theory of Money, Journal of Economic Theory, 53

[13] Kiyotaki, N., Wright, R. (1993) A Search Theoretic Approach to Monetary Economics, American Economic Review

[14] Iwai, K. (1996) The Bootstrap Theory of Money: A Search-Theoretic Foundation of Monetary Economics, Structural Change and Economics Dynamics

[15] Ljungqvist, L., Sargent, J.T. (1999) Recursive Macroeconomic Theory, Forthcoming

[16] Matsuyama, K. Kiyotaki, N., Matsui, A. (1993) Toward a Theory of International Currency, Review of Economic Studies

[17] Menger, K. (1892) On The Origin of Money, Economic Journal, Vol 2

[18] Niehans, J. (1969) Money in a Static Theory of Optimal Payment Arrangements, Journal of Money Credit and Banking

[19] Oh, S. (1989) A Theory of a generally Acceptable Medium of Exchange and Barter, Journal of Monetary Economics, 23

[20] Ostroy J.M. (1973) The informational E¢ciency of Monetary Exchange, American Economic Review, 4

[21] Ostroy, J.M. e Starr, R.M. (1974) Money and the Decentralization of Exchange, Econometrica, 6

[22] Ostroy J.M. e Starr, R.M (1990) The transaction Role of Money, in Handbook of Monetary Economics, a cura di F.Hahn e M.Friedman

[23] Shi, S. (1995) Money and Prices: A Model of Search and Bargaining, Journal of Economic Theory, 67

[24] Smith, A. (1776) An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, Trad. Italiana ISEDI, Milano

[25] Trejos, A. Wright, R (1995) Search, Bargaining, Money and Prices, Journal of Political Economy, 103