

Université
Paris Sud

Università
Roma Tor Vergata

**Fuga dalla metastabilità
per dinamiche stocastiche
conservative**

**Fuite de la métastabilité
pour dynamiques
stochastiques conservatives**

A. Gaudillère

**Tesi di dottorato
sotto la direzione
di Raphaël Cerf e Enzo Olivieri**

Anno accademico 2005-2006

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le soutien que m'apporta il y a trois ans Wendelin Werner, alors mon professeur à Orsay. C'est aussi lui qui m'a fait entrevoir le rôle que pouvait jouer l'invariance d'échelle logarithmique au dernier chapitre de ce travail. C'est enfin lui qui m'a présenté le couplage entre marches aléatoires et mouvement brownien utilisé dans ce même chapitre.

Brune Seban m'a entraîné en Italie, où, outre la langue de ce travail, j'ai tant appris. Cette thèse lui doit beaucoup, et je lui dois bien plus encore.

La seconde partie de ce travail n'a pris forme qu'après de longs mois de tentatives infructueuses pour minorer la probabilité de non-collision. L'enthousiasme et le soutien continus d'Enzo Olivieri et Betta Scoppola ont été la base sur laquelle ces difficultés ont pu être surpassées.

Raphaël Cerf m'a accordé tout au long de ce doctorat une confiance et un soutien sans lesquels ces recherches n'auraient pas été possibles.

Gabriella Tarantello m'a initié à quelques astuces de l'analyse harmonique. Elle m'a aussi transmis sa conviction que je pouvais énormément améliorer certaines estimées de la probabilité de collision que j'avais obtenues. Et elle avait raison.

Frank den Hollander m'a offert plusieurs fois la possibilité de parler à Eindhoven des questions ici traitées. Ce fut chaque fois la source d'un nombre considérable de discussions, dont Frank lui-même fut l'un des protagonistes centraux, qui permirent de faire progresser les recherches en faisant grandir en profondeur la compréhension des problèmes.

L'assiduité dans la recherche et les conseils de Francesca Nardi pour évoluer dans la vie romaine sont deux ressources que je lui suis grandement reconnaissant de m'avoir fournies tout au long de ces années.

La version finale de cette thèse doit énormément à la patience de Chelu Deiana qui en a extirpé bon nombre de formules boiteuses de mon italien encore incertain.

Les parties plus techniques de ce travail ont été élaborées à Boston grâce au climat de tranquillité dont m'ont fait bénéficier l'hospitalité et l'amitié d'Ambre Ivol.

Ce fut un réel plaisir de partager la plus grande partie des journées de travail de cette thèse en la compagnie de Benedetto Scoppola, Koli Ndreca et Gianluca Guadagni.

Salvatore Pontarelli a réalisé les simulations numériques qui ont dissipé certains de mes doutes quant à l'asymptotique exacte de la probabilité de non-collision. Il est aussi l'un de ces camarades de Tor Vergata et Orsay qui ces dernières années ont fait que les universités ne sont pas seulement des lieux où l'on cherche à comprendre le monde, mais aussi des lieux où l'on s'organise pour le changer.

A tous, merci.

Résumé

Nous étudions la fuite de la métastabilité pour un gaz de particules évoluant sous la dynamique conservative de Kawasaki à basse température et à l'intérieur d'un domaine bi-dimensionnel de volume exponentiellement grand en la température inverse β .

Nous analysons d'abord les trajectoires typiques suivies par le système, dans la version locale du modèle, lors de la première transition entre la métastabilité et la stabilité. Nous décrivons géométriquement les configurations le long de ces trajectoires, et nous montrons que l'ensemble de l'évolution va, avec très grande probabilité, de "presque-carrés" en "presque-carrés" plus grands et que le cluster qui grandit au cours de ce processus de nucléation "erre" à l'intérieur de la boîte qui le contient. De plus, le long des ces trajectoires, les fluctuations des dimensions des clusters sont limitées: si un rectangle $l \times L$ circonscrit l'un de ces clusters alors $L - l \leq 1 + 2\sqrt{L}$. Nous montrons que les fluctuations de cet ordre ne peuvent être négligées: de telles fluctuations se produisent avec probabilité "non-exponentiellement petites" en β . Ce processus diffère donc fortement de la nucléation qui a lieu sous la dynamique non-conservative de Glauber, principalement en ce qui concerne sa partie super-critique.

Nous établissons ensuite une propriété des marches aléatoires dans le plan qui permet d'étendre les résultats obtenus pour la version locale du modèle à la dynamique originale de Kawasaki. Nous donnons une minoration de la probabilité de non-collision avant un long temps T pour un système de n marches aléatoires avec obstacles fixes. Par "collision" il faut entendre collision avec les obstacles fixes aussi bien qu'entre les particules elles-mêmes. Nous expliquons comment cette propriété permet de décrire en termes de "Presque Marches Aléatoires" un gaz dilué de particules évoluant sous la dynamique de Kawasaki.

Forts de ces résultats nous pouvons prédire les principaux traits de la fuite de la métastabilité pour la dynamique originale de Kawasaki.

MOTS-CLEFS: Métastabilité, dynamiques conservatives, dynamique de Kawasaki, nucléation, probabilité de non-collision, théorie du potentiel.

CLASSEMENT PAR SUJET AMS 2000: 82C20, 82C41, 60J45.

Sommario

Studiamo la fuga dalla metastabilità per un gas di particelle sotto la dinamica conservativa di Kawasaki a bassa temperatura e all'interno di un dominio bidimensionale di volume esponenzialmente grande nella temperatura inversa β .

Analizziamo prima le traiettorie tipiche seguite dal sistema, nella versione locale del modello, nel corso della prima transizione dalla metastabilità alla stabilità. Descriviamo geometricamente le configurazioni lungo queste traiettorie tipiche e mostriamo che l'insieme dell'evoluzione va, con probabilità molto grande, di "quasi-quadrati" in "quasi-quadrati" più grandi e che il cluster che cresce nel corso di tale processo di nucleazione "vaga" all'interno della scatola che lo contiene. Inoltre, lungo queste traiettorie, le fluttuazioni delle dimensioni dei cluster sono limitate: se un rettangolo $l \times L$ circoscrive uno di questi clusters allora $L - l \leq 1 + 2\sqrt{L}$. Mostriamo che le fluttuazioni di quest'ordine non possono essere trascurate: esse si producono con delle probabilità "non esponenzialmente piccole" in β . Il processo differisce quindi fortemente dalla nucleazione tipica per la dinamica non conservativa di Glauber, principalmente per quanto riguarda la sua parte supercritica.

Proviamo nel seguito una proprietà delle passeggiate aleatorie nel piano che permette di estendere i risultati ottenuti per la versione locale del modello alla dinamica originale di Kawasaki. Diamo una stima dal basso della probabilità di non-incontro entro un tempo T lungo per un sistema di n passeggiate aleatorie con ostacoli fissi. Con "collisione" bisogna intendere collisione con gli ostacoli fissi nonché tra le particelle stesse. Spieghiamo come questa proprietà permette di descrivere in termini di "Quasi Random Walks" un gas diluito di particelle sotto la dinamica di Kawasaki.

Sulla base di questi risultati possiamo predire i tratti essenziali della fuga dalla metastabilità per la dinamica originale di Kawasaki.

PAROLE-CHIAVE: Metastabilità, dinamiche conservative, dinamica di Kawasaki, nucleazione, probabilità di non-collisione, teoria del potenziale.

CLASSIFICAZIONE PER ARGOMENTO AMS 2000: 82C20, 82C41, 60J45.

Indice

Introduction	6
Introduzione	13
I Traiettorie tipiche nel modello locale	19
1 Il modello locale	20
1.1 La dinamica	20
1.2 Nel regime di Freidlin-Wentzell	21
1.3 Reversibilità, non-degenerazione e ipotesi addizionali	22
2 Strumenti per lo studio della dinamica locale	24
2.1 La disuguaglianza isoperimetrica	24
2.2 Rettangoli circoscritti e particelle libere	28
2.3 <i>La ménagerie du cirque</i>	29
2.4 Configurazioni non-connesse	31
2.5 Cammini, cicli e cammini di cicli	33
2.6 Una prima applicazione: il varco verso la stabilità e alcune delle sue proprietà geometriche	36
3 Descrizioni locali del panorama di energia	41
3.1 Altipiani	41
3.2 Scendere da un altopiano	42
3.3 Cicli principali e discese di tipo s	44
3.4 Discese senza convizione, hs - e hg -doline	49
3.5 Discese di tipo g	50
3.6 Discese in ambito sottocritico, critico e supercritico	51
4 Dal varco allo stato fondamentale	52
4.1 Carsi e massicci	52
4.2 Tubo supercritico	55
5 Dal varco alla configurazione vuota	59
5.1 Discese di tipo g e cicli principali	59
5.2 Carsi e massicci	59
5.3 Tubo di contrazione	61
6 Dalla metastabilità alla stabilità	63
6.1 Bacino di metastabilità e tempo di fuga	63
6.2 Tubo di traiettorie di transizione tipiche	64
6.3 Salsicce	66

7	Forze e debolezze della descrizione	70
7.1	Alcuni limiti della descrizione	70
7.2	Fluttuazioni in dimensioni: “ottimalità” del risultato	73
7.3	Massicci connessi e non-connessi	79
 II Verso il modello originale: probabilità di collisione per traiettorie aleatorie nel piano		83
8	Risultati e strategia	84
8.1	Probabilità di non-collisione e Quasi Random Walks	84
8.2	Strategia e notazione	86
9	Moti browniani con un unico ostacolo	90
9.1	Il lemma chiave	90
9.2	Stime della correlazione di collisione	93
10	Da uno a tanti ostacoli	98
10.1	Raggruppamenti	98
10.2	Corridoi e stime rozze	99
10.3	Un’invarianza di scala logaritmica	104
10.4	Prova del Teorema 6	107
10.5	Prova del Teorema 5	110
 Conclusioni		111
 Conclusion		113
 Bibliografia		115

Introduction

Considérez une vapeur proche de la transition de phase et comprimez-la légèrement de façon à produire la condensation. Les particules doivent en quelque sorte “se rassembler”. Mais si la vapeur est seulement légèrement sursaturée alors un petit nombre de particules regroupées forment un édifice peu stable, facilement dispersé par l’agitation thermique. Seul un certain nombre critique de particules rassemblées formera un édifice assez stable, qui aura tendance à croître au lieu d’être dissipé. Et tant que cette “goutte critique” ne se sera pas formée la condensation n’aura pas lieu. Le système restera donc pendant un temps relativement long dans un état gazeux métastable. Combien de temps mettra-t-il à s’en échapper ? Quelle sera la forme de cette goutte critique ? Quelles trajectoires le système devra-t-il suivre pour fuir de la métastabilité ? Le système s’échappera-t-il de la métastabilité par nucléation, c’est-à-dire en formant petit à petit, “à contre-courant”, cette goutte critique, ou par coalescence, c’est-à-dire regroupant en une seule quelques gouttes sous-critiques ? Comment la croissance supercritique aura-t-elle lieu ? En bref : quelle fuite de la métastabilité ?

Ces questions ont déjà trouvé des réponses complètes ou partielles dans le cadre de la métastabilité associée à des dynamiques stochastiques *non-conservatives*. Neves et Schonmann ont d’abord étudié la métastabilité pour la dynamique de Glauber en volume fini et à très basse température T , i.e. dans le régime $\beta = T^{-1} \rightarrow +\infty$ ([5], [8]). Schonmann [9] a décrit les trajectoires typiques suivies par le système pour s’échapper de la métastabilité en dimension 2, Kotecký et Olivieri [10] ont généralisé le résultat au cas anisotropique, Ben Arous et Cerf [14] à la dimension 3. De nouvelles difficultés apparaissent dans l’étude des modèles en volume infini et à température fixée $T > 0$: elles ont été traitées, toujours dans le cadre des dynamiques non-conservatives, par Schonmann ([11], à température fixée et champ magnétique h qui va à 0), Dehghanpour et Schonmann ([18], volume infini), Schonmann et Shlosman ([19], température fixée et volume infini dans le régime $h \rightarrow 0$). Mais aucune réponse aux questions précédentes n’a encore été établie, pour le moins pas de façon rigoureuse, pour la métastabilité associée aux principales dynamiques *conservatives*. Cette thèse se veut une contribution à la résolution de ce problème.

La dynamique de Kawasaki

Le modèle de base à étudier est celui de la dynamique de Kawasaki en dimension 2 et à très basse température T , i.e. dans le régime $\beta = T^{-1} \rightarrow +\infty$, pour un gaz de particules évoluant avec exclusion et interaction et de très petite densité $\rho = \exp\{-\Delta\beta\}$, avec Δ un réel strictement positif. Le problème n’a donc pas de sens en volume fini et indépendant de β : pour assurer la présence de particules le gaz doit évoluer à l’intérieur d’un domaine Λ_β au moins exponentiellement grand en β .

Plus précisément nous considérons une boîte carrée $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$, avec conditions aux bords périodiques et de volume $|\Lambda_\beta| = \exp\{\Theta\beta\}$ pour Θ une constante positive (implicitement nous arrondissons ici les grands réels à l’entier inférieur le

plus proche, nous le ferons très souvent dans l'ensemble du travail afin d'alléger les notations) et nous définissons un processus de Markov à valeurs dans

$$\mathcal{X}_\beta := \left\{ \eta \in \{0; 1\}^{\Lambda_\beta} : \sum_{x \in \Lambda_\beta} \eta(x) = \rho |\Lambda_\beta| \right\} .$$

Étant donnée une configuration $\eta \in \mathcal{X}_\beta$ nous dirons que les sites occupés $x \in \Lambda_\beta$ sont ceux pour lesquels $\eta(x) = 1$ et nous associons à η une énergie

$$\mathbf{H}(\eta) := \sum_{\substack{\{x; y\} \subset \Lambda_\beta \\ \|x - y\| = 1}} -U \eta(x) \eta(y) ,$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne et $-U$ est une constante négative, l'énergie de liaison entre deux sites contigus occupés. La dynamique de Kawasaki est la dynamique de Metropolis associée à l'hamiltonien \mathbf{H} et décrite comme suit.

A chaque site x de Λ_β nous associons une horloge qui sonne selon un processus de Poisson d'intensité 1, de telle sorte que tous ces processus soient indépendants. Lorsqu'une horloge sonne en x alors que le système était dans une configuration η , on choisit au hasard et uniformément un site y parmi les quatre voisins de x et on considère la configuration $\eta^{\{x; y\}}$ obtenue à partir de η en déplaçant, si elle existe, la particule qui occupait le site x en y :

$$\eta^{\{x; y\}} : z \in \Lambda_\beta \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = x ; \\ \eta(y) + \eta(x) & \text{si } z = y ; \\ \eta(z) & \text{si } z \notin \{x; y\}. \end{cases}$$

Si $\eta^{\{x; y\}} \notin \mathcal{X}_\beta$, i.e. si déplacer une particule de x en y entraîne une violation de l'exclusion, alors le système reste en η . Dans le cas contraire si $\mathbf{H}(\eta^{\{x; y\}}) \leq \mathbf{H}(\eta)$ alors le système passe dans l'état $\eta^{\{x; y\}}$, sinon il passe à cet état avec probabilité

$$p := \exp \left\{ -\beta \left(\mathbf{H}(\eta^{\{x; y\}}) - \mathbf{H}(\eta) \right) \right\}$$

et reste en η avec probabilité $1 - p$.

Les valeurs relatives des paramètres U et Δ définissent divers régimes. Pour $\Delta > 2U$ nous sommes en présence d'un gas stable, le point de condensation est à $\Delta = 2U$, le cas $\Delta \in]U, 2U[$ couvre l'ensemble du régime métastable, pour $\Delta = U$ on parle de point spinodal, et $\Delta < U$ correspond à un gaz instable. Nous renvoyons le lecteur aux références [21] ou [25] pour une justification de l'ensemble de ces affirmations, et au Chapitre 2 (Lemme 2.1.1 et remarques successives) pour une justification du caractère métastable de la dynamique dans le régime $\Delta \in]U, 2U[$.

Comme nous l'écrivions plus haut le problème de la fuite de la métastabilité n'a pas encore été traité de façon rigoureuse pour cette dynamique conservative (qui conserve au cours du temps le nombre de particules, c'est-à-dire ici le nombre de sites x occupés). Mais certains résultats ont été obtenus pour des modèles simplifiés.

Le modèle à interaction localisée et le modèle local

Le modèle à interaction localisée a été introduit par den Hollander, Olivieri et Scoppola [21]. Il est obtenu à partir de la dynamique de Kawasaki décrite ci-dessus en retirant l'exclusion à l'extérieur d'une boîte carrée, *de taille finie indépendante de β* , $\bar{\Lambda} \subset \Lambda_\beta$ et l'interaction à l'extérieur de

$$\bar{\Lambda}_0 := \bar{\Lambda} \setminus \partial^- \bar{\Lambda}$$

avec $\partial^- \bar{\Lambda}$ le bord intérieur de $\bar{\Lambda}$:

$$\partial^- \bar{\Lambda} := \{x \in \bar{\Lambda} : \exists y \notin \bar{\Lambda}, \|y - x\| = 1\}.$$

Cela signifie qu'on ne prend en considération que les sites à l'intérieur de $\bar{\Lambda}_0$ pour le calcul de l'énergie, et que les particules à l'extérieur de $\bar{\Lambda}$ évoluent comme des marches aléatoires indépendantes (cf. Fig. 1 page 12, où une particule en $x \in \Lambda_\beta$ est indentifiée au carré de côté 1 centré en x).

L'idée fondamentale qui justifie l'introduction de ce modèle est que l'interaction, pour la dynamique originale de Kawasaki, entre un cluster donné et le gas qui l'entoure "devrait ressembler" à l'interaction entre ce cluster et un gas de marches aléatoires indépendantes. Comme l'écrivaient les auteurs (page 1437):

"[L]'élimination de l'interaction hors de $\bar{\Lambda}_0$ et de l'exclusion hors de $\bar{\Lambda}$ nous permet de contrôler le gaz mathématiquement. D'un point de vue physique cette approximation semble très raisonnable, parce que $\beta \rightarrow +\infty$ correspond à une limite de basse densité ($\rho = e^{-\Delta\beta}$) pour laquelle le gaz se comporte essentiellement comme un gaz idéal."

C'est cette même idée qui justifie l'introduction du modèle local qui a été largement étudié ([21], [23], [25], [26], [28]). Le modèle local n'est plus que "localement conservatif": des particules évoluent avec interaction et exclusion à l'intérieur d'une boîte finie Λ comme elles évolueraient à l'intérieur de $\bar{\Lambda}$ pour le modèle à interaction localisée (en particulier sans interaction pour les particules au bord de Λ) mais sont créées et éliminées au bord de Λ à taux $e^{-\Delta\beta}$ et 1 respectivement. (Nous définiront rigoureusement le modèle local au Chapitre 1.)

Depuis [21] on connaît le prototype de la goutte critique que le système doit former en régime métastable pour rejoindre son état fondamental lorsqu'il part, dans le cadre du modèle local, d'une boîte vide, ou, dans le cadre du modèle à interaction localisée, de la mesure d'équilibre conditionnée à

$$\left\{ \eta \in \mathcal{X}_\beta : \sum_{x \in \bar{\Lambda}} \eta(x) = 0 \right\}.$$

Avec l_c la *longueur critique* définie par

$$l_c := \left\lceil \frac{U}{2U - \Delta} \right\rceil$$

(notez que $U < \Delta < 2U$ implique $l_c \in]1, +\infty[$) ce prototype peut être décrit comme suit (cf. Fig. 2 page 12): un rectangle de dimension $(l_c - 1) \times l_c$, une protubérance et une particule libre, pour un total de $(l_c - 1)l_c + 2$ particules.

On sait aussi depuis [21] que, avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque β va à l'infini, le système forme cette goutte critique et rejoint son état fondamental en un temps qui va comme $e^{\Gamma\beta}$, avec Γ l'énergie locale du prototype de la goutte critique. L'énergie locale est définie pour le modèle local par

$$\hat{H}(\eta) := \sum_{\substack{\{x,y\} \subset \Lambda_0 \\ \|x-y\|=1}} -U\eta(x)\eta(y) + \sum_{x \in \Lambda} \Delta\eta(x) \quad \text{pour } \eta \in \mathcal{X} := \{0,1\}^\Lambda,$$

avec, comme précédemment, $\Lambda_0 := \Lambda \setminus \partial^- \Lambda$.

Après [21] il y a donc deux questions fondamentales auxquelles nous devons répondre pour compléter l'étude de la métastabilité pour le modèle local et faire progresser celle du modèle original (Kawasaki). Quelles sont les trajectoires typiques

suivies par le système pour rejoindre son état fondamental dans le cadre du modèle local ? Dans quelle mesure les résultats sur les modèle locaux et à interaction localisée permettent-ils d'étudier le modèle original ? Nous avons déjà répondu [25] à la première question et la première partie de ce travail reprendra ces résultats déjà publiés. Comparés aux résultats connus en volume fini pour la dynamique non-conservative de Glauber [9], ils montrent un comportement qualitativement très différent pour cette dynamique localement conservative. Dans la deuxième partie de ce travail nous étudierons la probabilité de collision entre particules qui évoluent selon la loi de marches aléatoires indépendantes et au milieu d'obstacles fixes. Ce résultat est décisif pour justifier rigoureusement le fait qu'à basse densité un gaz soumis à la dynamique de Kawasaki "*se comporte essentiellement comme un gaz idéal*".

Trajectoires typiques pour le modèle local

Nous décrirons, pour la chaîne de Markov du modèle local $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (en volume fini il sera équivalent et plus commode de définir un processus discret), le mécanisme de transition de l'état métastable $\underline{0}$, qui correspond à une boîte vide,

$$\forall x \in \Lambda, \underline{0}(x) := 0,$$

à l'état fondamental $\underline{1}_0$ qui, pour Λ assez grand, est la configuration dont les sites occupés sont exactement ceux de Λ_0 :

$$\forall x \in \Lambda, \underline{1}_0(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \Lambda_0.$$

Plus précisément nous décrirons les trajectoires suivies par le système entre les temps θ et $\tau_{\underline{1}_0}$, avec

$$\tau_{\underline{1}_0} := \inf \{k \geq 0 : \eta_k = \underline{1}_0\},$$

et

$$\theta := \sup \{k \leq \tau_{\underline{1}_0} : \eta_k = \underline{0}\}.$$

Il s'agit de décrire d'une part le chemin que le système suivra pour s'échapper du bassin d'attraction de $\underline{0}$ (partie sous-critique) et d'autre part la descente vers l'état fondamental (partie super-critique). Nous décrirons un *tube de trajectoires typiques de transition* \mathbf{TT}^δ , ensemble de chemins de $\underline{0}$ à $\underline{1}_0$ qui contient, avec une probabilité exponentiellement proche de 1, le chemin suivi par le système pendant la transition:

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{\theta \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \notin \mathbf{TT}^\delta \right) < 0.$$

(Le paramètre δ de la notation est un réel strictement positif qui peut être choisi arbitrairement proche de 0 et dont le sens sera précisé plus loin.) Le long de ces chemins contenus dans \mathbf{TT}^δ , se produit une nucléation dont voici les caractéristiques plus significatives, les points en commun et les différences avec la nucléation sous la dynamique non-conservative de Glauber.

- Comme pour le cas non-conservatif ces chemins visitent, dans leur partie sous-critique, une succession croissante de presque-carrés (configurations rectangulaires dont la longueur et la largeur diffèrent d'une unité au plus): partant d'un presque-carré de dimensions $l_1 \times l_2$, avec

$$l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1,$$

ils rejoignent, après certaines fluctuations qui seront discutées dans les points suivants, un presque-carré plus grand de dimensions $l_2 \times (l_1 + 1)$. Mais, contrairement aux chemins de transitions du cas non-conservatif, *cela est vrai aussi*

de leur partie super-critique. (Rappelons que dans le cas non-conservatif les chemins typiques de la transition visitent une succession de rectangles dont chacun est obtenu en ajoutant une ligne ou une colonne au précédent. Les rectangles de la partie sous-critique sont des presque-carrés, alors que pour la partie super-critique toutes les suites de rectangles construites ainsi, et envahissant l'ensemble de la boîte, sont parcourues lors de la transition avec des probabilités qui sont toutes du même ordre.)

- Dans le cas non-conservatif un cluster croît “à partir d'un lieu fixe”, alors que dans le cas (localement) conservatif un cluster grandit *tout en errant à l'intérieur de Λ_0* . Plus précisément, pour tout $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$2 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1,$$

entre le premier instant où l'un de ces chemins atteint un presque-carré $l_1 \times l_2$ et la première fois qu'il rejoindra un presque-carré plus grand, ce chemin aura visité l'ensemble des presque-carrés $l_1 \times l_2$ contenus dans Λ_0 .

- Dans le cas non-conservatif, entre deux presque-carrés successifs de la partie sous-critique ou deux rectangles successifs de la partie super-critique, les dimensions du rectangle circonscrit au cluster qui grandit sont presque inchangées (elles varient d'une unité au plus). Au contraire, dans le cas conservatif, *les dimensions de ce rectangle subissent des fluctuations qui ne peuvent être négligées*. Si un rectangle $l \times L$, avec $l \leq L$, circonscrit un cluster de l'un de ces chemins de transition alors $L - l \leq 1 + 2\sqrt{L}$ et toute fluctuation de cet ordre se produit avec probabilité non-exponentiellement petite en β . De plus les fluctuations du type $L - l \simeq 2\sqrt{L_c}$ ou plus petites se produisent de façon typique (avec probabilité exponentiellement proche de 1).
- Les inégalités précédentes montrent que, dans le cas conservatif, *les deux dimensions des clusters des chemins de la transition sont toujours du même ordre*. Dans le cas non-conservatif cela vaut seulement pour la partie sous-critique.

La description des chemins de transition pour la dynamique de Glauber a été faite [9] en termes de suites d'*ensembles de permanence*. Les ensembles de permanence sont des régions de l'espace des états construites comme unions connexes de certains ensembles particuliers appelés *cycles* (cf. Section 2.5 pour la définition des cycles). La description de notre tube \mathbf{TT}^δ ne sera plus faite en termes de suites d'ensembles de permanence mais en termes de *réunions* d'objets analogues. Nous appellerons *karsts* ces objets et *massifs* ces réunions en nous inspirant d'une analogie assez utile que l'on peut faire entre certains traits caractéristiques des reliefs karstiques et les traits importants du paysage énergétique que nous devons analyser. Le paramètre δ est relié au contrôle du temps passé le long de ces chemins de transition à l'intérieur de chaque massif. L'ensemble de ces résultats sera énoncé de façon précise aux Sections 6.2, 6.3 et 7.2.

Vers le modèle original

Notez qu'en dimension 2, du fait de la propriété de récurrence des marches aléatoires, le fait qu'un gaz dilué se comporte essentiellement comme un gaz idéal est loin d'être évident. Dans la deuxième partie de ce travail nous donnerons une minoration de la probabilité de non-collision avant le temps T pour un système de n particules évoluant sur \mathbb{Z}^2 , au milieu d'un nombre fini d'obstacles fixes de périmètre total inférieur à p , suivant la loi de marches aléatoires indépendantes. Par “collision” il faut ici entendre collision entre les particules elles-mêmes ou bien entre particules

et obstacles fixes. Avec \mathcal{T}_c le temps de première collision on aura un résultat du type (cf. Théorème 5 page 84)

$$P(\mathcal{T}_c > T) \geq \frac{1}{(\ln T)^\nu}$$

avec

$$\nu = c_0 n^4 p^2 \ln p$$

et $c_0 > 0$, une constante universelle, indépendante de tout paramètre du problème. Cette minoration, uniforme en la configuration de départ des particules, affirme que la probabilité de non-collision avant T ne peut décroître que “lentement” vers 0. On pourrait donc dire que les marches aléatoires sur \mathbb{Z}^2 sont *collectivement* “faiblement récurrentes”. Et de fait ce résultat sera suffisant pour décrire en termes de “Presque Marches Aléatoires” le gaz très dilué ($\rho = \exp\{-\Delta\beta\}$ et $\beta \rightarrow +\infty$) évoluant sous la dynamique de Kawasaki. Cela fera l’objet d’un autre travail [30] mais nous donnerons ici l’heuristique du problème.

Ce résultat permet donc de dessiner une stratégie pour étendre au cas du modèle original (Kawasaki) les méthodes qui ont été utilisées dans l’étude du modèle à interaction localisée [21] pour généraliser les résultats obtenus sur le modèle local. Nous pouvons donc aujourd’hui prédire ce que devrait être la fuite de la métastabilité pour le modèle original. Nous réservons à la conclusion de ce travail la description des résultats auxquels non seulement nous pouvons aujourd’hui nous attendre mais dont l’obtention rigoureuse est aussi désormais à porté de main. Nous pouvons donc conclure avec les mêmes vers que Rosa Luxemburg dans les dernières semaines de l’année 1918:

Uns fehlt ja nichts, mein Weib, mein Kind,
als all das, was durch uns gedeiht,
um so frei zu sein, wie die Vögel sind: nur Zeit! ¹

1

Rien ne nous manque, ma femme, mon enfant,
sinon tout ce qui grâce à nous grandit,
pour être libres comme les oiseaux: seulement le temps !

Du poème de Richard Dehmel *Der Arbeitsmann*, Rosa Luxemburg, *Die junge Garde* (Berlin)
4 décembre 1918.

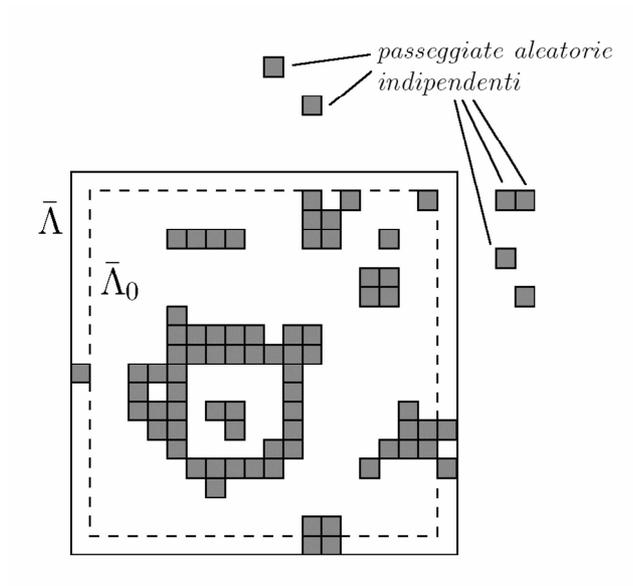


Figura 1: Il modello a interazione localizzata

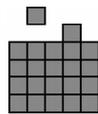


Figura 2: Il prototipo della goccia critica nel caso $l_c = 5$.

Introduzione

Si consideri un vapore vicino alla transizione di fase e lo si comprime leggermente in modo tale da provocare la condensazione. Le particelle devono in qualche modo “raggrupparsi”. Ma se il vapore è soltanto leggermente sovrassaturo, allora un piccolo numero di particelle raggruppate formano un edificio poco stabile, facilmente disperso dall’agitazione termica. Solo un certo numero critico di particelle raggruppate formerà un edificio abbastanza stabile, che tenderà a crescere invece di essere dissipato. E finché questa “goccia critica” non si sarà formata, la condensazione non avverrà. Il sistema rimarrà quindi per un tempo relativamente lungo in uno stato gassoso metastabile. Quanto tempo impiegherà per lasciarlo? Quale sarà la forma di questa goccia critica? Quali traiettorie il sistema dovrà seguire per fuggire dalla metastabilità? Il sistema scapperà dalla metastabilità via nucleazione, cioè formando mano a mano, “contro-corrente”, questa goccia critica, oppure via coalescenza, cioè raggruppando in una diverse gocce sottocritiche? Come avverrà la crescita supercritica? Insomma: quale fuga dalla metastabilità?

Queste domande hanno già trovato delle risposte complete o parziali nel quadro della metastabilità associata a delle dinamiche stocastiche *non-conservative*. Neves e Schonmann hanno prima studiato la metastabilità per la dinamica di Glauber in volume finito e a temperatura molto bassa T , i.e. nel regime $\beta = T^{-1} \rightarrow +\infty$ ([5], [8]). Schonmann [9] ha descritto le traiettorie tipiche seguite dal sistema per scappare dalla metastabilità in dimensione 2, Kotecký e Olivieri [10] hanno generalizzato il risultato al caso anisotropo, Ben Arous e Cerf [14] alla dimensione 3. Nuove difficoltà compaiono nello studio dei modelli in volume finito e a temperatura fissata $T > 0$: sono state trattate, sempre nell’ambito delle dinamiche non-conservative, da Schonmann ([11], a temperatura fissata et campo magnetico h che va a 0), Dehghanpour et Schonmann ([18], volume infinito), Schonmann et Shlosman ([19], temperatura fissata et volume infinito nel regime $h \rightarrow 0$). Ma non è stata data ancora nessuna risposta alle domande precedenti, almeno non in modo rigoroso, per la metastabilità associata alle principali dinamiche *conservative*. Questa tesi vuole essere un contributo alla risoluzione del problema.

La dinamica di Kawasaki

Il modello di base da studiare è quello della dinamica di Kawasaki in dimensione 2 e a temperatura molto bassa T , i.e. nel regime $\beta = T^{-1} \rightarrow +\infty$, per un gas di particelle che si evolvono con esclusione ed interazione, e di densità molto bassa $\rho = \exp\{-\Delta\beta\}$, con Δ un numero reale strettamente positivo. Il problema non ha quindi nessun senso in volume finito ed indipendente da β : per assicurare la presenza di particelle il gas deve evolvere all’interno di un dominio Λ_β almeno esponenzialmente grande in β .

Più accuratamente consideriamo una scatola quadrata $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$, con condizioni al bordo periodiche e di volume $|\Lambda_\beta| = \exp\{\Theta\beta\}$ con Θ una costante positiva (implicitamente approssimiamo qui i numeri reali grandi all’intero inferiore più vicino, lo faremo spesso nell’insieme del lavoro per alleggerire la notazione) e definiamo un

processo di Markov a valori in

$$\mathcal{X}_\beta := \left\{ \eta \in \{0; 1\}^{\Lambda_\beta} : \sum_{x \in \Lambda_\beta} \eta(x) = \rho |\Lambda_\beta| \right\} .$$

Data una configurazione $\eta \in \mathcal{X}_\beta$ diremo che i siti occupati $x \in \Lambda_\beta$ sono quelli per cui $\eta(x) = 1$ e associamo a η un'energia

$$\mathbf{H}(\eta) := \sum_{\substack{\{x; y\} \subset \Lambda_\beta \\ \|x-y\|=1}} -U \eta(x) \eta(y) ,$$

dove $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea e $-U$, costante negativa, è l'energia di legame tra due siti contigui occupati. La dinamica di Kawasaki è la dinamica di Metropolis associata a l'hamiltoniana \mathbf{H} e descritta come segue.

Ad ogni sito x di Λ_β associamo un orologio che suona secondo un processo di Poisson di intensità 1, in modo che tutti questi processi siano indipendenti. Quando squilla un orologio in x mentre il sistema stava in una configurazione η , si sceglie a caso e uniformemente un sito y tra i quattro primi vicini di x e si considera la configurazione $\eta^{\{x; y\}}$ ottenuta partendo da η e spostando, se esiste, la particella che occupava il sito x in y :

$$\eta^{\{x; y\}} : z \in \Lambda_\beta \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = x ; \\ \eta(y) + \eta(x) & \text{si } z = y ; \\ \eta(z) & \text{si } z \notin \{x; y\}. \end{cases}$$

Se $\eta^{\{x; y\}} \notin \mathcal{X}_\beta$, ovvero se spostare una particella di x in y implica una violazione dell'esclusione, allora il sistema rimane in η . Nel caso contrario se $\mathbf{H}(\eta^{\{x; y\}}) \leq \mathbf{H}(\eta)$ allora il sistema passa nello stato $\eta^{\{x; y\}}$, altrimenti passa in questo stato con probabilità

$$p := \exp \left\{ -\beta \left(\mathbf{H}(\eta^{\{x; y\}}) - \mathbf{H}(\eta) \right) \right\}$$

e rimane in η con probabilità $1 - p$.

I valori relativi dei parametri U e Δ definiscono vari regimi. Per $\Delta > 2U$ siamo in presenza di un gas stabile, il punto di condensazione sta a $\Delta = 2U$, il caso $\Delta \in]U, 2U[$ copre l'insieme del regime metastabile, per $\Delta = U$ si parla di punto spinodale, e $\Delta < U$ corrisponde a un gas instabile. Rimandiamo il lettore alle referenze [21] o [25] per una giustificazione dell'insieme di queste affermazioni, e al Capitolo 2 (Lemma 2.1.1 e osservazioni susseguenti) per una giustificazione del carattere metastabile della dinamica nel regime $\Delta \in]U, 2U[$.

Come scritto sopra il problema della fuga dalla metastabilità non è ancora stato trattato in modo rigoroso per questa dinamica conservativa (che conserva al variare del tempo il numero delle particelle, cioè dei siti x occupati). Ma alcuni risultati sono stati ottenuti per dei modelli semplificati.

Il modello a interazione localizzata e il modello locale

Il modello a interazione localizzata è stato introdotto da den Hollander, Olivieri e Scoppola [21]. È ottenuto a partire dalla dinamica di Kawasaki descritta sopra togliendo l'esclusione all'esterno di una scatola quadrata, di dimensioni finite indipendenti da β , $\bar{\Lambda} \subset \Lambda_\beta$ e l'interazione all'esterno di

$$\bar{\Lambda}_0 := \bar{\Lambda} \setminus \partial^- \bar{\Lambda}$$

con $\partial^- \bar{\Lambda}$ il bordo interno di $\bar{\Lambda}$:

$$\partial^- \bar{\Lambda} := \{x \in \bar{\Lambda} : \exists y \notin \bar{\Lambda}, \|y - x\| = 1\}.$$

Ciò vuol dire che soltanto i siti all'interno di $\bar{\Lambda}_0$ sono presi in considerazione per il calcolo dell'energia e che le particelle all'esterno di $\bar{\Lambda}$ si evolvono a modo di passeggiate aleatorie indipendenti (vedi Fig. 1 pagina 12, dove una particella in $x \in \Lambda_\beta$ è identificata al quadrato di lato 1 centrato in x).

L'idea fondamentale che giustifica l'introduzione di questo modello è che l'interazione, per la dinamica originale di Kawasaki, tra un cluster e il gas che lo circonda “dovrebbe somigliare” all'interazione tra questo cluster e un gas di passeggiate aleatorie indipendenti. Come scrivevano gli autori (pagina 1437):

“[L]’eliminazione dell’interazione fuori da $\bar{\Lambda}_0$ e dell’esclusione fuori da $\bar{\Lambda}$ ci permette di controllare il gas matematicamente. Da un punto di vista fisico quest’approssimazione sembra molto ragionevole perché $\beta \rightarrow +\infty$ corrisponde a un limite di bassa densità ($\rho = e^{-\Delta\beta}$) per il quale il gas si comporta essenzialmente come un gas ideale.”

È la stessa idea che giustifica l'introduzione del modello locale che è stato largamente studiato ([21], [23], [25], [26], [28]). Il modello locale non è che “localmente conservativo”: delle particelle si evolvono con interazione ed esclusione all'interno di una scatola finita Λ come si evolverebbero all'interno di $\bar{\Lambda}$ per il modello a interazione localizzata (in particolare senza interazione per le particelle al bordo di Λ) ma sono create e cancellate al bordo di Λ a tasso $e^{-\Delta\beta}$ e 1 rispettivamente. (Definiremo rigorosamente il modello locale al Capitolo 1.)

Dopo [21] si conosce il prototipo della goccia critica che il sistema deve formare in regime metastabile per raggiungere lo stato fondamentale quando parte, nell'ambito del modello locale, da una scatola vuota, o, nell'ambito del modello a interazione localizzata, dalla misura d'equilibrio condizionata a

$$\left\{ \eta \in \mathcal{X}_\beta : \sum_{x \in \bar{\Lambda}} \eta(x) = 0 \right\}.$$

Con l_c la *lunghezza critica* definita da

$$l_c := \left\lceil \frac{U}{2U - \Delta} \right\rceil$$

(si noti che $U < \Delta < 2U$ implica $l_c \in]1, +\infty[$) questo prototipo può essere descritto come segue (vedi Fig. 2 pagina 12): un rettangolo di dimensioni $(l_c - 1) \times l_c$, una protuberanza ed una particella libera, per un totale di $(l_c - 1)l_c + 2$ particelle.

Sappiamo anche dopo [21] che, con una probabilità che tende a 1 quando β va all'infinito, il sistema forma la goccia critica e raggiunge lo stato fondamentale in un tempo che va come $e^{\Gamma\beta}$, con Γ l'energia locale del prototipo della goccia critica. L'energia locale è definita per il modello locale da

$$\hat{H}(\eta) := \sum_{\substack{\{x;y\} \subset \Lambda_0 \\ \|x-y\|=1}} -U\eta(x)\eta(y) + \sum_{x \in \Lambda} \Delta\eta(x) \quad \text{per } \eta \in \mathcal{X} := \{0; 1\}^\Lambda,$$

con, come prima, $\Lambda_0 := \Lambda \setminus \partial^- \Lambda$.

Dopo [21] ci sono quindi due domande fondamentali a cui dobbiamo rispondere per completare lo studio della metastabilità per il modello locale e portare avanti quello del modello originale (Kawasaki). Quali sono le traiettorie tipiche seguite dal

sistema per raggiungere lo stato fondamentale nell'ambito del modello locale? In quale misura i risultati sui modelli locali e a interazione localizzata permettono di studiare il modello originale? Abbiamo già risposto [25] alla prima domanda e la prima parte di questo lavoro riprenderà i risultati già pubblicati. Essi, paragonati ai risultati noti in volume finito per la dinamica non-conservativa di Glauber [9], mostrano un comportamento molto diverso per la dinamica localmente conservativa. Nella seconda parte di questo lavoro studieremo la probabilità di collisione tra particelle che si evolvono secondo la legge di passeggiate aleatorie indipendenti e nel mezzo di ostacoli fissi. Questo risultato è decisivo per giustificare rigorosamente il fatto che a bassa densità un gas sottomesso alla dinamica di Kawasaki “*si comporta essenzialmente come un gas ideale.*”

Traiettorie tipiche per il modello locale

Descriveremo, per la catena di Markov del modello locale $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (in volume finito sarà equivalente e più comodo definire un processo discreto), il meccanismo di transizione dallo stato metastabile $\underline{0}$, che corrisponde ad una scatola vuota,

$$\forall x \in \Lambda, \underline{0}(x) := 0,$$

allo stato fondamentale $\underline{1}_0$ che, per Λ abbastanza grande, è la configurazione i cui siti occupati sono esattamente quelli di Λ_0 :

$$\forall x \in \Lambda, \underline{1}_0(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \Lambda_0.$$

Più accuratamente descriveremo le traiettorie seguite dal sistema fra i tempi θ e $\tau_{\underline{1}_0}$, con

$$\tau_{\underline{1}_0} := \inf \{k \geq 0 : \eta_k = \underline{1}_0\},$$

e

$$\theta := \sup \{k \leq \tau_{\underline{1}_0} : \eta_k = \underline{0}\}.$$

Si tratta di descrivere da un lato il cammino che il sistema seguirà per fuggire dal bacino di attrazione di $\underline{0}$ (parte sottocritica), e dall'altro la discesa verso lo stato fondamentale (parte supercritica). Descriveremo un *tubo di traiettorie tipiche di transizione* \mathbf{TT}^δ , insieme di cammini da $\underline{0}$ a $\underline{1}_0$ che contiene, con una probabilità esponenzialmente vicina a 1, il cammino seguito dal sistema nel corso della transizione:

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{\theta \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \notin \mathbf{TT}^\delta \right) < 0.$$

(Il parametro δ della notazione è un numero reale strettamente positivo che può essere scelto arbitrariamente vicino a 0 e il cui significato sarà esplicitato più avanti.) Lungo questi cammini di \mathbf{TT}^δ , avviene una nucleazione che presenta i seguenti tratti caratteristici, punti in comune e differenze con la nucleazione sotto la dinamica non-conservativa di Glauber.

- Al pari del caso non-conservativo questi cammini visitano, nella loro parte sottocritica, una successione crescente di quasi-quadrati (configurazioni rettangolari con una larghezza e una lunghezza che differiscono di un'unità al massimo): partendo da un quasi-quadrato di dimensioni $l_1 \times l_2$, con

$$l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1,$$

raggiungono, dopo alcune fluttuazioni che saranno discusse nei punti successivi, un quasi-quadrato più grande di dimensioni $l_2 \times (l_1 + 1)$. Ma, al contrario dei cammini di transizione del caso non-conservativo, *ciò è anche vero nella*

loro parte supercritica. (Ricordiamo che nel caso non-conservativo i cammini tipici della transizione visitano una successione di rettangoli ognuno dei quali è ottenuto aggiungendo una riga o una colonna al suo predecessore. I rettangoli della parte sottocritica sono dei quasi-quadrati, mentre per la parte supercritica tutte le successioni di rettangoli costruite in questo modo, e che invadono l'insieme della scatola, sono percorse durante la transizione con delle probabilità che sono tutte dello stesso ordine.)

- Nel caso non-conservativo un cluster cresce “a partire da un luogo fisso”, mentre nel caso (localmente) conservativo un cluster cresce *vagando all'interno* di Λ_0 . Più accuratamente, per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tale che

$$2 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1,$$

tra il primo istante in cui uno di questi cammini raggiunge un quasi-quadrato $l_1 \times l_2$ e la prima volta che raggiungerà un quasi-quadrato più grande, questo cammino avrà visitato l'insieme dei quasi-quadrati $l_1 \times l_2$ contenuti in Λ_0 .

- Nel caso non-conservativo, tra due quasi-quadrati successivi della parte sottocritica o due rettangoli successivi della parte supercritica, le dimensioni del rettangolo circoscritto al cluster che cresce sono quasi costanti (variano di un unità al massimo). Al contrario, nel caso conservativo, *le dimensioni del rettangolo circoscritto subiscono delle fluttuazioni che non possono essere trascurate*. Se un rettangolo $l \times L$, con $l \leq L$, circoscrive un cluster di uno di questi cammini di transizione, allora $L - l \leq 1 + 2\sqrt{L}$ e ogni fluttuazione di quest'ordine si produce con probabilità non-esponenzialmente piccola in β . Inoltre le fluttuazioni del tipo $L - l \simeq 2\sqrt{l_c}$ o più piccole si producono in modo tipico (con probabilità esponenzialmente vicina a 1).
- Le disuguaglianze precedenti mostrano che, nel caso conservativo, *le due dimensioni dei cluster dei cammini della transizione sono sempre dello stesso ordine*. Nel caso non-conservativo ciò vale soltanto per la parte sottocritica.

La descrizione dei cammini di transizione per la dinamica di Glauber è stata fatta [9] in termini di successioni di *insiemi di permanenza*. Gli insiemi di permanenza sono delle regioni dello spazio degli stati costruite come unioni connesse di alcuni insiemi particolari chiamati *cicli* (vedi la Sezione 2.5 per la definizione dei cicli). La descrizione del nostro tubo \mathbf{TT}^δ non sarà più fatta in termini di successioni di insiemi di permanenza ma in termini di *unioni* di oggetti analoghi. Chiameremo *carsi* questi oggetti e *massicci* queste unioni ispirandoci a un'analogia abbastanza utile che si può fare tra alcuni tratti caratteristici dei paesaggi carsici e i tratti più rilevanti del panorama di energia che avremo da studiare. Il parametro δ è legato al controllo del tempo passato lungo questi cammini di transizione all'interno di ogni massiccio. L'insieme dei risultati appena elencati sarà enunciato con precisione nelle Sezioni 6.2, 6.3 e 7.2.

Verso il modello originale

Si noti che in dimensione 2 la proprietà di ricorrenza delle passeggiate aleatorie rende poco evidente il fatto che un gas diluito si comporti essenzialmente come un gas ideale. Nella seconda parte di questo lavoro daremo una stima dal basso della probabilità di non-collisione entro un tempo T per un sistema di n particelle che si evolvono su \mathbb{Z}^2 , nel mezzo di un numero finito di ostacoli fissi di perimetro totale inferiore a p , sotto la legge di passeggiate aleatorie indipendenti. Con “collisione” bisogna intendere collisione tra le particelle stesse nonché tra particelle e ostacoli

fissi. Con \mathcal{T}_c il tempo di prima collisione otterremo un risultato del tipo (vedi Teorema 5 pagina 84)

$$P(\mathcal{T}_c > T) \geq \frac{1}{(\ln T)^\nu}$$

con

$$\nu = c_0 n^4 p^2 \ln p$$

e $c_0 > 0$, una costante universale, indipendente da ogni parametro del problema. Questa minorazione, uniforme nella configurazione di partenza, afferma che la probabilità di non-collisione entro T non può decrescere che “lentamente” verso 0. Si potrebbe quindi dire che le passeggiate aleatorie su \mathbb{Z}^2 sono *collettivamente* “debolmente ricorrenti”. E di fatto questo risultato sarà sufficiente per descrivere in termini di “Quasi Random Walks” il gas molto diluito ($\rho = \exp\{-\Delta\beta\}$ e $\beta \rightarrow +\infty$) che evolve sotto la dinamica di Kawasaki. Ciò sarà l’oggetto di un altro lavoro [30] ma daremo qui l’euristica del problema.

Il risultato permette quindi di disegnare una strategia per estendere al caso del modello originale (Kawasaki) i metodi che sono stati utilizzati nello studio del modello a interazione localizzata [21] per generalizzare i risultati ottenuti per il modello locale. Possiamo quindi predire oggi cosa dovrebbe essere la fuga dalla metastabilità per il modello originale. Riserviamo alla conclusione di questo lavoro la descrizione dei risultati che possiamo oggi non soltanto aspettarci ma la cui derivazione rigorosa è ormai anche a portata di mano. Possiamo quindi chiudere con gli stessi versi che usò Rosa Luxemburg alla fine dell’anno 1918:

Uns fehlt ja nichts, mein Weib, mein Kind,
als all das, was durch uns gedeiht,
um so frei zu sein, wie die Vögel sind: nur Zeit! ²

2

Nulla ci manca, moglie mia, figlio mio,
se non ogni cosa che da noi cresce,
per esser liberi quanto gli uccelli: soltanto il tempo!

Dalla poesia di Richard Dehmel *Der Arbeitsmann*, Rosa Luxemburg, *Die junge Garde* (Berlin) 4 dicembre 1918.

Parte I

Traiettorie tipiche nel modello locale

Capitolo 1

Il modello locale

1.1 La dinamica

Presentiamo qui la dinamica locale come introdotta in [21] per una scatola quadrata di dimensioni finite $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ (ad esempio $\Lambda = \{0; 1; \dots; N\}^2$), con parametro d'attività $\Delta > 0$ e con $-U < 0$ l'energia di legame di due particelle interagenti in due siti contigui. Si ricorda che due particelle che occupano due siti primi vicini in Λ risentono quest'energia di legame se e solo se entrambi i siti sono all'interno di

$$\Lambda_0 := \Lambda \setminus \partial^- \Lambda$$

(in modo tale che, con l'esempio precedente, $\Lambda_0 = \{1; 2; \dots; N-1\}^2$). Definiamo quindi una catena di Markov $(\eta_k)_{k \geq 0}$ sullo spazio degli stati

$$\mathcal{X} := \{0; 1\}^\Lambda$$

(0 per un sito vuoto e 1 per un sito occupato) che evolve partendo da una qualunque configurazione $\eta \in \mathcal{X}$ seguendo un processo a due passi. Al primo passo è scelto a caso e con legge uniforme uno spigolo nell'insieme

$$\mathcal{E}(\Lambda) := \{\{x; y\} \subset \mathbb{Z}^2 : x \text{ o } y \text{ appartiene a } \Lambda \text{ e } \|x - y\| = 1\}$$

($\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea) di cardinalità $|\mathcal{E}(\Lambda)|$. Il secondo passo dipende da η e da $\{x; y\}$ come segue.

- Se $\{x; y\} \subset \Lambda$ e $\eta(x) = \eta(y)$ allora il sistema non si muove.
- Se $\{x; y\} \subset \Lambda$ e $\eta(x) \neq \eta(y)$ scriviamo $\eta^{\{x; y\}}$ per la configurazione ottenuta partendo da η e scambiando i suoi valori in x e y . Chiamiamo n la differenza tra il numero di legami da rompere e il numero di legami da formare per andare da η a $\eta^{\{x; y\}}$. Se $n \leq 0$ il sistema si muove in $\eta^{\{x; y\}}$ con probabilità 1, e se $n > 0$ il sistema si muove in $\eta^{\{x; y\}}$ con probabilità $e^{-nU\beta}$.
- Se uno dei due siti scelti è fuori da Λ e l'altro è vuoto allora il sistema si muove con probabilità 1 nella configurazione $\eta^{\{x; y\}}$ ottenuta partendo da η e cancellando la particella in questo sito.
- Se uno dei due siti scelti è fuori da Λ e l'altro è occupato allora il sistema si muove con probabilità $e^{-\Delta\beta}$ nella configurazione $\eta^{\{x; y\}}$ ottenuta partendo da η e creando una nuova particella in questo sito.

In altre parole studiamo una “dinamica di Kawasaki con creazione e annichilazione al bordo”. L’hamiltoniana associata \hat{H} è data da

$$\hat{H}(\eta) := \sum_{\substack{\{x;y\} \subset \Lambda_0 \\ \|x-y\|=1}} -U\eta(x)\eta(y) + \sum_{x \in \Lambda} \Delta\eta(x) \quad \text{per ogni } \eta \in \mathcal{X}.$$

Per ogni η e η' in \mathcal{X} la probabilità di transizione $P(\eta, \eta')$ è data, se $\eta \neq \eta'$, da

$$P(\eta, \eta') = \sum_{\substack{\{x;y\} \in \mathcal{E}(\Lambda) \\ \eta^{\{x;y\}} = \eta'}} \frac{1}{|\mathcal{E}(\Lambda)|} \exp \left\{ -\beta [\hat{H}(\eta') - \hat{H}(\eta)]_+ \right\}$$

e, se $\eta = \eta'$, da

$$P(\eta, \eta) = 1 - \sum_{\eta' \neq \eta} P(\eta, \eta').$$

Osservazione: La dinamica descritta è ottenuta facendo una semplice “modifica al bordo” della dinamica di Kawasaki usuale. Si tratta di una dinamica di Metropolis per la quale i tassi di creazione e annichilimento delle particelle al bordo di Λ sono $e^{-\Delta\beta}$ e 1 rispettivamente. Ottenere questi tratti era lo scopo della rimozione dell’interazione fuori da Λ_0 .

1.2 Nel regime di Freidlin-Wentzell

Studieremo la dinamica a temperatura molto bassa, nel regime $\beta \rightarrow +\infty$. Siamo quindi nel regime in cui la teoria di Freidlin-Wentzell [4] fornisce gli strumenti più potenti per studiare la transizione dalla metastabilità alla stabilità. Questa ha portato alla nozione centrale di *ciclo* che fu sviluppata, dopo di essi, da vari autori (vedi ad esempio [12], [16], [17]). Detto grossolanamente i cicli sono le componenti connesse (connesse nel senso della dinamica) dell’insieme delle configurazioni sotto un livello d’energia dato. La loro principale proprietà è di essere tipicamente completamente visitati in un tempo T , con $-\frac{1}{\beta} \ln T$ dell’ordine della loro “profondità” per β grande, prima di essere lasciati.

Dei metodi generali per studiare i cammini di transizione, indipendenti dal modello studiato, sono stati proposti in [12] e [17]. Entrambi i metodi sono basati su una nozione di *cammino di cicli*, i.e. di successione di cicli comunicanti, e permettono di descrivere il tubo delle transizioni tipiche in termini di cammini di cicli o, più generalmente, in termini di successioni di *insiemi di permanenza*, ovvero di unioni connesse di cicli alla stessa “altezza”. Purtroppo, nel caso delle dinamiche conservative, a causa della forte degenerazione delle configurazioni di sella, cioè dei punti di passaggio da un ciclo a un altro lungo un cammino di cicli, e, più generalmente, a causa della grande complessità del panorama energetico, questi metodi si rivelano estremamente difficili da applicare. Servono delle nuove idee per affrontare tali difficoltà. Quelle che sfrutteremo qui daranno da un lato un’analisi meno dettagliata del panorama di energia rispetto a quello richiesto da questi metodi, ma daranno, dall’altro, dei risultati essenzialmente equivalenti (e strettamente equivalenti per quanto riguarda la parte sottocritica).

La strategia che adotteremo consiste nel limitare la descrizione delle configurazioni rilevanti per il problema della transizione ai loro tratti essenziali, in particolare *volume* (numero di particelle), *perimetro* (vedi Sezione 2.1 per una definizione precisa) e *rettangolo circoscritto*. Ciò sarà sufficiente per capire le proprietà determinanti del panorama di energia nelle vicinanze delle configurazioni. Questo panorama sarà

localmente descritto in termini di *massicci*, le cui componenti connesse saranno chiamate *carsi* e coincidono con gli insiemi di permanenza dell'analisi in termini di cammini di cicli.

La descrizione che daremo del tubo delle traiettorie tipiche, sarà fatta in termini di successioni di massicci attraversati da esse e dei tempi trascorsi all'interno di ognuno di loro. Conterrà da un lato un'informazione *a priori* più debole rispetto a una descrizione in termini di cammini di cicli o insiemi di permanenza, ma fornirà dall'altro un'informazione più dettagliata sulle caratteristiche geometriche delle configurazioni visitate nel corso della transizione.

1.3 Reversibilità, non-degenerazione e ipotesi addizionali

Denotiamo con $\hat{\mu}$ la misura di Gibbs associata all'hamiltoniana \hat{H} definita nella Sezione 1.1:

$$\hat{\mu}(\eta) := \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\hat{H}(\eta)\beta \right\} \quad \text{per ogni } \eta \in \mathcal{X},$$

dove

$$Z := \sum_{\eta \in \mathcal{X}} \exp \left\{ -\hat{H}(\eta)\beta \right\}.$$

È immediato verificare la reversibilità della catena di Markov $(\eta_k)_{k \geq 0}$ rispetto alla misura $\hat{\mu}$:

$$\forall (\eta, \eta') \in \mathcal{X}^2, \mu(\eta)P(\eta, \eta') = P(\eta', \eta)\mu(\eta').$$

Seguendo Schonmann [9] sfrutteremo questa proprietà per studiare l'uscita del processo dal bacino di attrazione dello stato metastabile.

Ci servirà anche un'ipotesi di “non-degenerazione”

$$\frac{U}{2U - \Delta} \notin \mathbb{N}.$$

Un valore intero del quoziente implicherebbe sostanziali modifiche dell'insieme del paesaggio energetico. Rimandiamo a [24] per uno studio delle difficoltà che compaiono nelle situazioni di “degenerazione” per la dinamica di Glauber.

Per evitare le particolarità che nascono con una lunghezza critica troppo corta assumeremo

$$\Delta \in \left] \frac{3}{2}U, 2U \right[$$

invece di $\Delta \in]U, 2U[$. Quest'ipotesi è equivalente a

$$l_c := \left\lceil \frac{U}{2U - \Delta} \right\rceil > 2.$$

Tuttavia, l'insieme del lavoro potrà facilmente essere adattato al caso $l_c = 2$.

Infine, allo scopo di assicurare che $\underline{\Lambda}_0$ (come definito nell'introduzione del lavoro) sia l'unico stato fondamentale, assumeremo

$$|\Lambda_0| > (2l_c)^2.$$

Ciò chiude l'elenco delle nostre ipotesi.

I capitoli successivi di questa prima parte del lavoro sono organizzati come segue. Nel Capitolo 2 introdurremo gli strumenti e le notazioni che useremo nell'insieme di questa prima parte e daremo, in quanto prima applicazione, una descrizione geometrica (parziale) del cosiddetto “varco verso la stabilità”, insieme di configurazioni

in cui combaciano le parti sottocritiche e supercritiche delle traiettorie tipiche della transizione. Nel Capitolo 3 utilizzeremo questi strumenti per dare delle descrizioni locali del panorama di energia. Esse, assieme a metodi basati sulla teoria dei cicli e dei cammini di cicli, ci permetteranno di descrivere nei Capitoli 4 e 5 dei fasci stretti di traiettorie seguite, in modo tipico, dal sistema tra il varco e lo stato fondamentale $\underline{1}_0$ o tra il varco e lo stato metastabile $\underline{0}$. Sfrutteremo allora la reversibilità del processo per dare un tubo di traiettorie tipiche di transizione nel Capitolo 6. I limiti della nostra descrizione saranno infine discussi nel Capitolo 7.

Capitolo 2

Strumenti per lo studio della dinamica locale

2.1 La disuguaglianza isoperimetrica

Prima di dare una versione della disuguaglianza isoperimetrica (d.i.p.) che utilizzeremo spesso, introduciamo qui alcune nozioni generali e la notazione di base.

Configurazioni connesse, perimetro e contorni monotoni

Ad ogni configurazione $\eta \in \mathcal{X}$ associamo un sotto-grafo di \mathbb{Z}^2 . I vertici del grafo sono i siti occupati di η e gli spigoli del grafo sono quelli che legano due particelle interagenti (i.e. due siti occupati e primi vicini all'interno di Λ_0 .) Chiamiamo *componenti connesse* di η le configurazioni i cui siti occupati sono quelli delle componenti connesse del grafo. Si noti che se $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^k$ sono le componenti connesse di η , allora

$$\eta = \eta^1 + \eta^2 + \dots + \eta^k.$$

Le componenti connesse ridotte ad un unico sito sono chiamate *particelle libere*. In particolare ogni sito occupato in $\partial^- \Lambda = \Lambda \setminus \Lambda_0$ è una particella libera.

Chiameremo *configurazione connessa* ogni configurazione η ridotta ad un'unica componente connessa. Il *bordo* di una tale configurazione sarà denotato $\partial\eta$ ed è definito come bordo del supporto $S(\eta) \subset \mathbb{R}^2$, unione dei quadrati chiusi e unitari centrati sui siti occupati di η . Chiameremo *perimetro* di η , e denoteremo $|\partial\eta|$, la lunghezza del bordo. Si noti che $\partial\eta$ può essere disegnato con gli spigoli di

$$[\mathbb{Z}^2] := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2,$$

il grafo duale di \mathbb{Z}^2 , e ciò implica che il perimetro di η è il numero degli spigoli di \mathbb{Z}^2 che attraversano il bordo.

Per una qualunque configurazione $\eta \in \mathcal{X}$ definiamo il *bordo*, $\partial\eta$, come la collezione dei bordi delle sue componenti connesse $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^k$. Definiamo anche il *perimetro* di η come la somma dei perimetri delle sue componenti connesse:

$$|\partial\eta| := |\partial\eta^1| + |\partial\eta^2| + \dots + |\partial\eta^k|.$$

A volte scriveremo “perimetro totale” invece di “perimetro” per sottolineare il fatto che $|\partial\eta|$ è dato da questa somma. Si noti che $|\partial\eta|$ è sempre un numero pari poiché così sono tutti i termini della somma. Infatti, qualunque linea di ascissa o ordinata fissata contiene un numero pari di spigoli che attraversano il bordo di una data configurazione η^0 poiché la linea “inizia” e “finisce” fuori da $S(\eta^0)$.

Associamo infine ad ogni configurazione connessa η il suo *rettangolo circoscritto* $\text{RC}(\eta)$ in \mathcal{X} :

$$\text{RC}(\eta) := \min \{R \in \mathcal{X} : S(R) \text{ è un rettangolo e } R \geq \eta\}.$$

Un argomento simile a quello usato per ottenere la parità di $|\partial\eta|$ ci dà l'importante proprietà:

$$\text{Per ogni configurazione connessa } \eta, |\partial\text{RC}(\eta)| \leq |\partial\eta|.$$

Chiameremo *contorni monotoni* le configurazioni connesse che realizzano l'uguaglianza. Le configurazioni η^0 , η^1 e η^2 della Figura 2.5 pagina 37 sono degli esempi di contorni monotoni. Altri esempi di contorni monotoni sono dati dai rettangoli stessi: diciamo che una configurazione connessa η è un *rettangolo* quando coincide con $\text{RC}(\eta)$. Per ogni $l \leq L$ denoteremo con $\mathcal{R}(l, L)$ l'insieme dei rettangoli η tali che l e L sono la larghezza e la lunghezza di $S(\eta)$. Alcuni rettangoli avranno un ruolo importante, quelli in qualche $\mathcal{R}(l, L)$ tale che $0 \leq L - l \leq 1$. Questi rettangoli sono chiamati *quasi-quadrati* e realizzano l'uguaglianza nella disuguaglianza isoperimetrica (vedi Lemma 2.1.1 sotto).

Energia di volume ed energia di superficie

Per una qualunque configurazione $\eta \in \mathcal{X}$ denoteremo con $|\eta|$ il volume, cioè il numero dei siti occupati. Possiamo allora riscrivere l'hamiltoniana come funzione di $|\eta|$ e $|\partial\eta|$:

$$\hat{H}(\eta) = (-2U + \Delta)|\eta| + \frac{U}{2}|\partial\eta|. \quad (2.1)$$

L'uguaglianza è ovvia nel caso $|\eta| \leq 1$.

Se η è una configurazione connessa tale che $|\eta| \geq 2$, allora tutti i siti occupati di η appartengono a Λ_0 e l'hamiltoniana, in questo caso, è l'hamiltoniana usuale del modello di Ising classico. La formula (2.1) è allora un risultato facile e ben noto.

Per estendere (2.1) al caso generale possiamo utilizzare la decomposizione

$$\eta = \eta^1 + \eta^2 + \dots + \eta^k,$$

dove $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^k$ sono le componenti connesse di η . Siccome per $i \neq j$, $\|x - y\| = 1$ implica $\eta^i(x)\eta^j(y) = 0$ per ogni $\{x; y\} \subset \Lambda_0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{H}(\eta) &= \sum_{\substack{\{x; y\} \subset \Lambda_0 \\ \|x - y\| = 1}} -U\eta(x)\eta(y) + \sum_{x \in \Lambda} \Delta\eta(x) \\ &= \hat{H}(\eta^1) + \hat{H}(\eta^2) + \dots + \hat{H}(\eta^k) \end{aligned}$$

e l'uguaglianza (2.1). (Si noti in particolare che ogni particella libera contribuisce per Δ alla somma che dà $\hat{H}(\eta)$.)

L'*energia di volume* e l'*energia di superficie* di una qualunque configurazione $\eta \in \mathcal{X}$ sono, rispettivamente, il primo e il secondo termine della somma in (2.1). La d.i.p. enunciata nel lemma seguente mostra quindi una relazione classica tra le due energie.

Lemma 2.1.1 (Disuguaglianza isoperimetrica) *Sia η in \mathcal{X} .*

i) Esiste un'unica coppia $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tale che

$$\begin{cases} l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1; \\ |\partial\eta| = 2(l_1 + l_2). \end{cases}$$

ii) Se $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ è tale che

$$\begin{cases} l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1; \\ |\partial\eta| \leq 2(l_1 + l_2); \end{cases}$$

allora

$$|\eta| \leq l_1 l_2.$$

Abbiamo inoltre (caso di uguaglianza):

$$|\eta| = l_1 l_2 \Leftrightarrow \eta \in \mathcal{R}(l_1, l_2).$$

Osservazione: È immediato derivare dal lemma una disuguaglianza “isovolumetrica”: per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ c'è un'unica coppia $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tale che

$$\begin{cases} l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1; \\ l_1 l_2 < n \leq l_2(l_1 + 1); \end{cases} \quad (2.2)$$

e se $\eta \in \mathcal{X}$ è tale che $|\eta| = n$ allora $|\partial\eta| \geq 2(l_1 + l_2)$, dove (l_1, l_2) è data da (2.2).

Un corollario diretto di questa disuguaglianza è il fatto che, per ogni $n \geq 2$, degli esempi di configurazioni che realizzano il minimo dell'hamiltoniana sulla varietà

$$\mathcal{N}_n := \{\eta \in \mathcal{X} : |\eta| = n\}$$

sono dati dai quasi-quadrati in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ (dove l_1 e l_2 sono dati da (2.2)) a cui è stata aggiunta una barra di lunghezza $n - l_1 l_2$ che pone sul lato più lungo del quasi-quadrato. Vedi [13] per una discussione dettagliata del problema e la sua estensione al caso tridimensionale.

Prova del lemma: Il risultato è ovvio nel caso $\eta = \mathbf{0}$. Assumiamo quindi $\eta \neq \mathbf{0}$.

Il punto i) viene soltanto dal fatto che $|\partial\eta|$ è sempre un numero pari. E l_1, l_2 sono dati da

$$l_1 = l_2 = \frac{|\partial\eta|}{4} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} l_1 = \frac{|\partial\eta|-2}{4}; \\ l_2 = \frac{|\partial\eta|+2}{4}; \end{cases}$$

a seconda della parità di $|\partial\eta|/2$.

Per provare ii) iniziamo con il caso $\eta \in \mathcal{R}(l, L)$ per qualche l e L in \mathbb{N} . In questo caso $|\partial\eta| \leq 2(l_1 + l_2)$ dà $l + L \leq l_1 + l_2$ e la Figura 2.1 mostra che ciò implica $|\eta| = lL \leq l_1 l_2$. (Si noti che nel caso $l_2 = l_1 + 1$ non ci sono punti a coordinate interi nell'area strettamente contenuta tra l'iperbole e la retta che abbiamo disegnato.) Per il caso di uguaglianza l'implicazione diretta è ancora mostrata dalla Figura 2.1. L'implicazione reciproca è ovvia.

Se η è una configurazione connessa, da

$$|\partial\text{RC}(\eta)| \leq |\partial\eta|$$

otteniamo

$$|\partial\text{RC}(\eta)| \leq 2(l_1 + l_2).$$

Il risultato applicato a $\text{RC}(\eta)$ dà

$$|\text{RC}(\eta)| \leq l_1 l_2,$$

sicché $|\eta| \leq l_1 l_2$ poiché

$$|\eta| \leq |\text{RC}(\eta)|.$$

Trattiamo il caso di uguaglianza nello stesso modo: come visto sopra

$$|\eta| \leq |\text{RC}(\eta)| \leq l_1 l_2,$$

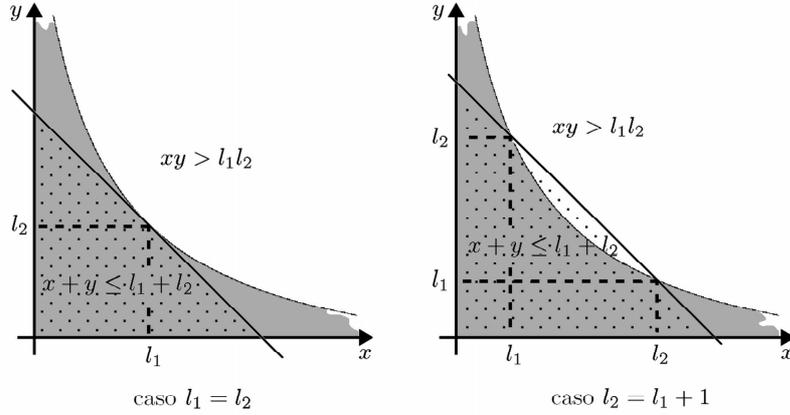


Figura 2.1: (l, L) si trova nell'area sotto la retta.

quindi, se $|\eta| = l_1 l_2$, queste disuguaglianze sono uguaglianze, $\eta = \text{RC}(\eta)$ e η è un semplice rettangolo per cui conosciamo già il risultato. E, di nuovo, l'implicazione reciproca è ovvia.

Rimane soltanto da estendere il lemma alle configurazioni non-connesse. A tale scopo utilizzeremo un modello ausiliario in volume infinito. Lavoreremo con delle configurazioni sul grafo \mathbb{Z}^2 : assumendo che, su \mathbb{Z}^2 , le coppie di siti interagenti sono le coppie di siti contigui, possiamo generalizzare nel modo più ovvio l'insieme delle nostre definizioni (componenti connesse, perimetro, ...) alle configurazioni che occupano un numero finito di siti in \mathbb{Z}^2 .

Si consideri adesso una configurazione non-connessa $\eta \in \mathcal{X}$. La configurazione su \mathbb{Z}^2 $\tilde{\eta}$ che porta i stessi siti occupati di η verifica $|\partial\tilde{\eta}| \leq |\partial\eta|$. Via traslazioni delle sue componenti connesse possiamo costruire, attaccandole insieme, una configurazione connessa su \mathbb{Z}^2 $\tilde{\eta}'$ tale che $|\tilde{\eta}'| = |\eta|$ e $|\partial\tilde{\eta}'| < |\partial\eta|$. I risultati precedenti possono essere applicati a $\tilde{\eta}'$ e deduciamo da

$$|\partial\tilde{\eta}'| < |\partial\eta| \leq 2(l_1 + l_2) \quad (2.3)$$

che

$$|\eta| = |\tilde{\eta}'| \leq l_1 l_2.$$

Infine il caso $|\eta| = l_1 l_2$ è escluso perché implicherebbe, per applicazione del lemma (caso di uguaglianza) a $\tilde{\eta}'$, che $|\partial\tilde{\eta}'| = 2(l_1 + l_2)$, e ciò contraddirebbe la disuguaglianza stretta in (2.3). \square

Osservazioni: Il risultato può essere utilizzato per provare che $\underline{\mathbf{1}}_0$ è l'unico stato fondamentale del sistema. Innanzitutto uno stato fondamentale non può avere particelle libere: cancellandole otteniamo una configurazione di energia più bassa. Una configurazione non-connessa e senza particelle libere non può neanche essere uno stato fondamentale: via traslazione delle sue componenti connesse è possibile attaccare insieme due di esse in modo tale da costruire una configurazione di energia più bassa. Uno stato fondamentale non può quindi essere altro che una configurazione connessa o la configurazione vuota $\underline{\mathbf{0}}$. Utilizzando le disuguaglianze $|\cdot| \leq |\text{RC}(\cdot)|$ e $|\partial\cdot| \geq |\partial\text{RC}(\cdot)|$ possiamo ancora ridurre quest'ultimo insieme di candidati all'essere stato fondamentale all'insieme dei rettangoli, e, utilizzando il Lemma 2.1.1, a quello dei quasi-quadrati. Un conto immediato dà allora, purché $|\Lambda_0| > (2l_c)^2$, che $\underline{\mathbf{1}}_0$ è l'unico stato fondamentale.

Il carattere metastabile del regime $\Delta \in]U, 2U[$ può anche essere visto come un'altra conseguenza del lemma. La d.i.p. implica che se $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1$ e $l_1 l_2 \leq |\Lambda_0|$ allora

$$\inf_{|\partial\eta|=2(l_1+l_2)} \hat{H}(\eta) = (-2U + \Delta)l_1 l_2 + U(l_1 + l_2).$$

Utilizzando questa formula verifichiamo subito che $\inf \hat{H}(\{\eta \in \mathcal{X} : |\partial\eta| = b\})$ cresce con $b \in 2\mathbb{N}$ finché $b \leq 4l_c - 2$ – il che corrisponde a $b \leq 2(l_1 + l_2)$ con $(l_1, l_2) = (l_c - 1, l_c)$. Di conseguenza, se l'energia di volume può dominare l'energia di superficie (facendo da $\underline{1}_0$ l'unico stato fondamentale), ciò non avviene sulle piccole scale spaziali. Al di là di una certa lunghezza, i piccoli contorni sono potenzialmente più favorevoli, in termini di energia, rispetto a quelli lunghi.

2.2 Rettangoli circoscritti e particelle libere

Il secondo strumento è un lemma che controlla geometricamente le transizioni fra configurazioni connesse e le transizioni tra configurazioni connesse e un insieme di configurazioni non-connesse. Per enunciare il lemma introduciamo una nuova notazione:

Notazione: Per un contorno rettangolare R denotiamo con R^+ l'insieme dei rettangoli ottenuti a partire da R aggiungendo una riga o una colonna.

Lemma 2.2.1 *i) Se η^1 e η^2 sono due configurazioni connesse non ridotte a semplici particelle libere e tali che $P(\eta^1, \eta^2) > 0$, allora η^1 e η^2 hanno lo stesso rettangolo circoscritto.*

ii) Sia η una configurazione fatta da una configurazione connessa η^1 tale che $|\eta^1| \geq 2$ e da una particella libera, e sia η^2 una configurazione connessa. Se $P(\eta, \eta^2) > 0$ allora

$$RC(\eta^2) = RC(\eta^1) \quad \text{oppure} \quad RC(\eta^2) \in RC(\eta^1)^+.$$

Prova: *i)* Siccome da η^1 a η^2 c'è una sola particella che si muove, il rettangolo circoscritto può cambiare da una riga sola o da una colonna sola.

Proviamo che non può guadagnare una nuova riga o colonna. Ciò implicherebbe che il rettangolo circoscritto sarebbe cresciuto come nella Figura 2.2. La particella responsabile della crescita sarebbe necessariamente venuta dal vecchio rettangolo circoscritto e il sito che occupava sarebbe ormai vuoto. Di conseguenza la nuova configurazione non sarebbe connessa e otterremmo così una contraddizione.

Nello stesso modo possiamo provare che il rettangolo circoscritto non può perdere una riga o una colonna, considerando la particella responsabile della contrazione e la posizione che occupava prima.

ii) Ci sono solo tre modi di andare in un passo solo da η a η^2 :

- cancellando la particella libera di η ;
- attaccando la particella libera a η^1 ;
- spostando una particella di η^1 per attaccarci la particella libera.

Nel primo caso otteniamo $RC(\eta^2) = RC(\eta^1)$.

Nel secondo caso, a seconda che la particella libera sia attaccata all'interno o all'esterno di $RC(\eta^1)$, otteniamo:

$$RC(\eta^2) = RC(\eta^1) \quad \text{oppure} \quad RC(\eta^2) \in RC(\eta^1)^+.$$

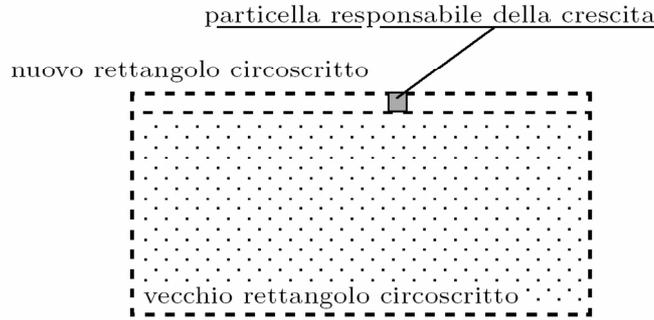


Figura 2.2: Quando il rettangolo circoscritto cresce.

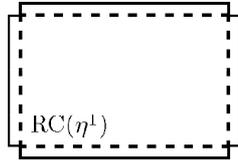


Figura 2.3: Abbiamo aggiunto una linea a ogni lato di $RC(\eta^1)$.

Nel terzo caso mostriamo come in *i*) che la particella libera non poteva stare fuori dal contorno della Figura 2.3. Se stava fuori da $RC(\eta^1)$ allora abbiamo $RC(\eta^2) \in RC(\eta^1)^+$. E se stava dentro $RC(\eta^1)$ allora possiamo provare come in *i*) che $RC(\eta^2) = RC(\eta^1)$. \square

L'ultima parte del lemma dà un controllo geometrico parziale dei fenomeni di coalescenza e frammentazione:

Definizione 2.2.2 *Se η e η' sono due configurazioni tali che $|\eta| = |\eta'|$, η è connessa e η' non-connessa, diremo che il sistema frammenta se salta (in un solo passo) da η a η' e coalesce se salta da η' to η .*

2.3 La ménagerie du cirque

Costruiamo adesso il linguaggio che useremo per descrivere geometricamente le configurazioni che avremo da considerare.

Denoteremo con $\mathbb{Q}\mathbb{Q}$ l'insieme delle dimensioni dei quasi-quadrati non ridotti ad una semplice particella libera:

$$\mathbb{Q}\mathbb{Q} := \{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq l_1, 2 \leq l_2 \text{ e } l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1\},$$

per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ definiamo

$$p(l_1, l_2) := 2(l_1 + l_2 + 1),$$

(scriveremo spesso p invece di $p(l_1, l_2)$ quando non ci sarà nessuna ambiguità) e utilizzeremo le seguenti notazioni:

- per $1 \leq k \leq l_2$, $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ è l'insieme delle configurazioni con $l_1 l_2 + k$ particelle e fatte da un unico contorno monotono di perimetro $p = p(l_1, l_2)$;

- per $1 \leq k \leq l_2$, $\mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$ è l'insieme delle configurazioni ottenute a partire da quelle in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ aggiungendo una particella libera (si noti che queste configurazioni sono fatte da $l_1 l_2 + k + 1$ particelle);
- per $k = 1$, $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2) = \mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2)$ è l'insieme delle configurazioni con $l_1 l_2 + 1$ particelle, connesse, con perimetro $p + 2$ e iscritte in un rettangolo di perimetro p ;
- per $2 \leq k \leq l_2$, $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$ è l'insieme delle configurazioni con $l_1 l_2 + k$ particelle, connesse, di perimetro $p + 2$ e iscritte in un rettangolo di perimetro p o in $\mathcal{R}(l, L)^+$ per qualche (l, L) tale che $2(l + L) = p$ e $lL \geq l_1 l_2 + k - 1$ (si noti che $2(l + L)$ e lL sono rispettivamente il perimetro e il volume delle configurazioni che appartengono a $\mathcal{R}(l, L)$);
- per $2 \leq k \leq l_2$, $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$ è l'insieme delle configurazioni con $l_1 l_2 + k$ particelle, connesse, con perimetro $p + 4$ e iscritte in un rettangolo di perimetro p o in $\mathcal{R}(l, L)^+$ per qualche (l, L) tale che $2(l + L) = p$ e $lL \geq l_1 l_2 + k - 1$;
- $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$ è l'insieme delle configurazioni non-connesse fatte da un quasi-quadrato in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ e da un domino 1×2 .

(Per alcuni piccoli o grandi valori di (l_1, l_2) alcuni degli insiemi che abbiamo appena definiti possono essere vuoti.)

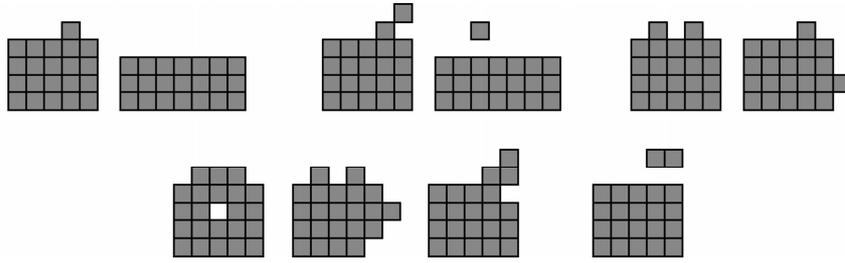


Figura 2.4: Da sinistra a destra, in alto: due configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(4, 5)$, due configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}^{fp}(4, 5)$ e due configurazioni in $\mathcal{J}_{2,2}(4, 5)$. In basso: tre configurazioni in $\mathcal{J}_{2,4}(4, 5)$ e una in $\mathcal{R}(4, 5)^{dom}$.

Osservazioni:

- L'energia è costante all'interno di ognuno degli insiemi appena definiti.
- Abbiamo $\mathcal{J}_{l_2,0}(l_1, l_2) = \mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$ (d.i.p., caso d'uguaglianza). Di conseguenza, per $(l_1, l_2) > (1, 2)$ (utilizziamo l'ordine lessicografico su \mathbb{N}^2) la coppia $(l_2 - 1, l_1)$ è anche in $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ e $\mathcal{J}_{l_1,0}^{fp}(l_2 - 1, l_1)$ è l'insieme delle configurazioni non-connesse fatte da un quasi-quadrato in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ e da una particella libera. Quest'insieme avrà un ruolo importante e sarà denotato $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$.
- Qui come nel seguito, gli apici fp e dom saranno utilizzati per indicare gli aggiunti rispettivi di una particella libera e di un domino 1×2 .
- Faremo ancora uso dell'ordine lessicografico, su \mathbb{N}^2 e \mathbb{N}^3 , senza più menzionarlo.

2.4 Configurazioni non-connesse

Il seguente lemma fornisce, sotto alcune ipotesi sulla loro energia di superficie, una descrizione delle configurazioni non-connesse e con un numero di particelle dato.

Lemma 2.4.1 *Siano $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$, $2 \leq k \leq l_2 + 1$, e $p = p(l_1, l_2) = 2(l_1 + l_2 + 1)$.*

i) Se η è una configurazione non-connessa tale che $|\eta| = l_1 l_2 + k$ e $|\partial\eta| \leq p + 4$ allora

- *nel caso $k > 2$, abbiamo*

$$\eta \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2);$$

- *nel caso $k = 2$ e $(l_1, l_2) \neq (2, 3)$, abbiamo*

$$\eta \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom};$$

- *nel caso $k = 2$ e $(l_1, l_2) = (2, 3)$, abbiamo*

$$\eta \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} \cup \mathcal{Q}^2,$$

dove \mathcal{Q}^2 è l'insieme delle configurazioni non-connesse fatte da due quadrati 2×2 .

ii) Le configurazioni con $l_1 l_2 + 1$ particelle, non-connesse e con un perimetro totale minore o uguale a $p + 2$ sono le configurazioni di $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$.

Osservazione: Il lemma implica in particolare che, per $k \geq 2$ (rispettivamente $k = 1$), ogni configurazione con $l_1 l_2 + k$ particelle e sotto il livello di energia di $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$ (rispettivamente $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$) è connessa.

Prova del lemma: Dividiamo la prova della prima parte del lemma in sei punti.

- 1) η ha al massimo due componenti connesse. Proviamo questa proprietà per assurdo. Supponiamo quindi che η abbia al minimo tre componenti connesse. Faremo alcune manipolazioni sulle componenti connesse di η per mostrare una contraddizione. Lavoreremo, come nella prova della d.i.p., con delle configurazioni su \mathbb{Z}^2 .

Chiaramente esiste una configurazione su \mathbb{Z}^2 con lo stesso numero di componenti connesse, lo stesso perimetro e lo stesso volume di η . Via traslazioni delle componenti connesse possiamo attaccare insieme le due componenti più piccole (quelle con il più piccolo numero di particelle) in un'unica componente connessa η^1 . Così facendo riduciamo il perimetro totale della configurazione di almeno due. Poi, attaccando insieme le altre componenti connesse possiamo ottenere una configurazione di perimetro $p + 2$ al massimo e fatta da due componenti connesse, η^1 e η^2 .

Per costruzione la lunghezza di $\text{RC}(\eta^1)$ è maggiore o uguale a 2. Affermiamo che $\text{RC}(\eta^2)$ ha la stessa proprietà. Infatti, se non fosse così η^2 sarebbe una semplice particella libera e la configurazione iniziale sarebbe stata fatta da tre particelle libere, ma ciò contraddirebbe l'ipotesi che η ha almeno $1 \times 2 + 2 = 4$ particelle.

Dopo altri spostamenti di η^1 e η^2 possiamo assumere che le lunghezze di $\text{RC}(\eta^1)$ e $\text{RC}(\eta^2)$ sono orientate orizzontalmente e che $\text{RC}(\eta^1)$ è sopra $\text{RC}(\eta^2)$, i.e., che ogni sito occupato di η^1 è sopra qualche sito occupato di η^2 , oppure che ogni sito occupato di η^2 è sotto qualche sito occupato di η^1 . Impilando all'interno di ogni linea verticale le particelle di η^1 sul lato inferiore di $\text{RC}(\eta^1)$

(come delle stalagmiti) e le particelle di η^2 sotto il lato superiore di $\text{RC}(\eta^2)$ (come delle stalattiti) è facile vedere che la configurazione ottenuta η' è tale che:

$$|\partial\eta'| \leq |\partial\eta^1| + |\partial\eta^2| \leq p + 2.$$

Ora, traslatando verticalmente la componente connessa superiore di η' per attaccarla alla componente inferiore, facciamo decrescere il perimetro totale di almeno 4. Otteniamo così una configurazione con $l_1l_2 + k$ particelle e un perimetro minore o uguale a $p - 2$. Ma ciò contraddice la d.i.p..

- 2) *La più piccola delle due componenti connesse è fatta da quattro particelle al massimo.* Altrimenti le due componenti connesse sarebbero fatte da almeno cinque particelle. Ciò implicherebbe che le lunghezze dei loro rettangoli circoscritti sarebbero maggiori o uguali a tre. Ma in quel caso impilando le particelle e attaccando insieme le componenti connesse come al punto precedente, avremmo ottenuto la stessa contraddizione.
- 3) *Assumiamo che la più piccola delle componenti connesse sia fatta da quattro particelle...* allora il suo perimetro è maggiore o uguale a 8. Di conseguenza l'altra componente connessa contiene $l_1l_2 + k - 4$ particelle all'interno di un perimetro minore o uguale a

$$p + 4 - 8 = p - 4 = 2(l_1 + l_2 - 1) = 2((l_2 - 1) + l_1).$$

Allora, con la d.i.p.:

$$l_1l_2 + k - 4 \leq (l_2 - 1)l_1 = l_1l_2 - l_1,$$

sicché

$$k + l_1 \leq 4.$$

Questa disuguaglianza assieme a $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ e $2 \leq k \leq l_2 + 1$ implica che la terna (l_1, l_2, k) può soltanto prendere i valori:

$$(1, 2, 2), (1, 2, 3), (2, 2, 2) \text{ o } (2, 3, 2).$$

Nei primi tre casi la più grande delle componenti connesse dovrebbe contenere $l_1l_2 + k - 4 \leq 2$ particelle, cioè meno della più piccola, e ciò costituisce una contraddizione. Nell'ultimo caso la più grande delle componenti connesse contiene $l_1l_2 + k - 4 = 4$ particelle, come la più piccola. Quindi entrambi hanno un perimetro di almeno 8. Ma, poiché la somma dei perimetri è minore o uguale a $p + 4 = 2(l_1 + l_2 + 1) + 4 = 16$, ciò implica che entrambi i perimetri sono uguali a 8. Il caso di uguaglianza della d.p.i. applicato ad ognuna delle due componenti connesse, mostra allora che entrambi sono dei quadrati 2×2 .

- 4) *Assumiamo che la più piccola delle componenti connesse sia fatta da tre particelle...* allora il suo perimetro è uguale a 8, e lo stesso argomento di prima dà:

$$l_1l_2 + k - 3 \leq (l_2 - 1)l_1 = l_1l_2 - l_1,$$

sicché

$$k + l_1 \leq 3.$$

Ciò implica $(l_1, l_2, k) = (1, 2, 2)$ e la componente connessa più grande dovrebbe contenere $l_1l_2 + k - 3 = 1$ particella, cioè meno della più piccola e otteniamo una contraddizione.

- 5) *Assumiamo che la più piccola delle componenti connesse sia fatta da due particelle...* allora il suo perimetro è uguale a 6 e la componente connessa più grande contiene $l_1 l_2 + k - 2$ particelle in un perimetro minore o uguale a $p + 4 - 6 = 2(l_1 + l_2)$. La d.i.p. dà allora $k - 2 \leq 0$, i.e. $k = 2$ e (caso di uguaglianza nella d.p.i.) la più grande delle componenti connesse è in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$.
- 6) *Assumiamo che la più piccola delle componenti connesse sia ridotta a una semplice particella libera...* allora il suo perimetro è uguale a 4 e l'altra componente connessa – chiamiamola η^1 – contiene $l_1 l_2 + k - 1$ particelle in un perimetro $|\partial\eta^1| \leq p$.

Se $|\partial\text{RC}(\eta^1)| < p$ allora, perché è un numero pari,

$$|\partial\text{RC}(\eta^1)| \leq 2(l_1 + l_2),$$

e, con la d.p.i.,

$$|\eta^1| \leq |\text{RC}(\eta^1)| \leq l_1 l_2,$$

ma ciò contraddice $k \geq 2$.

Abbiamo quindi

$$p \leq |\partial\text{RC}(\eta^1)| \leq |\partial\eta^1| \leq p,$$

i.e.

$$p = |\partial\text{RC}(\eta^1)| = |\partial\eta^1|,$$

e η^1 è un contorno monotono di perimetro p . Siccome $|\eta^1| = l_1 l_2 + k - 1$ ciò implica $\eta^1 \in \mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$ e chiude la prova della prima parte del lemma.

La prova della seconda parte del lemma può essere fatta usando le stesse tecniche dei punti 1) e 2). Siccome il vincolo sul perimetro è più forte, queste tecniche danno direttamente il fatto che la configurazione non-connessa non ha più di due componenti connesse, e che la più piccola non può contenere più di una particella. Ciò implica che la più grande contiene $l_1 l_2$ particelle in un perimetro minore o uguale a

$$p + 2 - 4 = 2(l_1 + l_2)$$

e (caso di uguaglianza nella d.p.i.) appartiene a $\mathcal{R}(l_1, l_2)$. \square

2.5 Cammini, cicli e cammini di cicli

Ricordiamo qui alcune definizioni e alcuni risultati fondamentali sui cammini di cicli.

Chiamiamo *cammino* una successione finita $\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^n$ di configurazioni tale che, per ogni $i < n$, $P(\eta^i, \eta^{i+1}) > 0$. Se φ è un cammino che parte da $\eta \in \mathcal{X}$ e finisce in $\eta' \in \mathcal{X}$ scriveremo $\varphi : \eta \rightsquigarrow \eta'$. Per un cammino

$$\varphi = (\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^n)$$

denoteremo con $|\varphi|$ la sua *lunghezza* n , scriveremo $\eta \in \varphi$ se $\eta = \eta^i$ per qualche $i \in \{0, \dots, n\}$, e denoteremo con $\overleftarrow{\varphi}$ il cammino ottenuto per inversione, cioè definito da

$$\overleftarrow{\varphi} := (\eta^n, \dots, \eta^1, \eta^0).$$

Denoteremo con Ω lo spazio delle traiettorie della catena di Markov, i.e.

$$\Omega := \mathcal{X}^{\mathbb{N}},$$

e identificheremo spesso un cammino $\varphi \in \mathcal{X}^{|\varphi|+1}$ con il sottoinsieme cilindrico di Ω

$$[\varphi] := \{\omega \in \Omega : (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \varphi\}.$$

Un sottoinsieme \mathcal{V} di \mathcal{X} è detto *connesso* se per ogni η e η' in \mathcal{V} c'è un cammino $\varphi : \eta \rightsquigarrow \eta'$ che non lascia mai \mathcal{V} .

Per ogni sottoinsieme \mathcal{V} di \mathcal{X} denoteremo con $\partial\mathcal{V}$ il suo *bordo*:

$$\partial\mathcal{V} := \{\eta' \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{V} : \exists \eta \in \mathcal{V}, P(\eta, \eta') > 0\},$$

e con $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ il suo *fondo*:

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) := \left\{ \eta \in \mathcal{V} : \hat{H}(\eta) = \inf \hat{H}(\mathcal{V}) \right\}.$$

Diciamo che un evento $\mathbf{A} \subset \Omega$ avviene *in modo tipico* per il sistema che parte da una data configurazione $\eta \in \mathcal{X}$, se avviene con una probabilità esponenzialmente vicina a 1 per β grande, i.e., se

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\mathbf{A}^c) < 0.$$

Definiamo adesso i cicli.

Definizione 2.5.1 *Diciamo che un insieme connesso di configurazioni $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ è un ciclo se verifica almeno una delle seguenti condizioni:*

- i) \mathcal{C} è ridotto a un unico elemento;
- ii) $\inf \hat{H}(\partial\mathcal{C}) > \sup \hat{H}(\mathcal{C})$ (con la convenzione $\hat{H}(\emptyset) = +\infty$).

Un ciclo che verifica la seconda delle due condizioni sarà chiamato ciclo non-banale, mentre un ciclo che verifica soltanto la prima delle due sarà chiamato ciclo banale.

L'altezza $h(\mathcal{C})$ e la profondità $d(\mathcal{C})$ di un ciclo sono definite da:

$$h(\mathcal{C}) := \begin{cases} \hat{H}(\mathcal{F}(\partial\mathcal{C})) & \text{se } \mathcal{C} \text{ è un ciclo non-banale;} \\ \hat{H}(\mathcal{C}) & \text{se } \mathcal{C} \text{ è un ciclo banale;} \end{cases}$$

e

$$d(\mathcal{C}) := h(\mathcal{C}) - \hat{H}(\mathcal{F}(\mathcal{C})).$$

Inoltre, per ogni $\eta \in \mathcal{X}$ e ogni $V > 0$, denoteremo con \mathcal{C}_η^V il ciclo non-banale fatto dall'insieme delle configurazioni raggiunte a partire da η da qualche cammino che rimane strettamente sotto il livello d'energia $\hat{H}(\eta) + V$.

Abbiamo un controllo del tempo trascorso, in modo tipico, dal sistema all'interno di un ciclo e sappiamo che visita, di nuovo in modo tipico, l'insieme del ciclo prima di lasciarlo. Inoltre abbiamo qualche controllo sulle configurazioni tramite le quale il sistema lascia un ciclo dato. Più accuratamente:

Teorema 1 *Sia $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ciclo. Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che:*

- i) per ogni η^0 in \mathcal{C}

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^0} \left(\tau_{\partial\mathcal{C}} \notin \left[e^{(d(\mathcal{C})-\delta)\beta}, e^{(d(\mathcal{C})+\delta)\beta} \right] \right) \leq -\alpha;$$

- ii) per ogni η^0 e η^1 in \mathcal{C}

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^0} (\tau_{\eta^1} > \tau_{\partial\mathcal{C}}) \leq -\alpha.$$

Inoltre, per ogni $\eta^0 \in \mathcal{C}$ e ogni $\eta^2 \in \partial\mathcal{C}$,

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^0} \left(\eta_{\tau_{\partial\mathcal{C}}} = \eta^2 \right) \geq - \left[\hat{H}(\eta^2) - h(\mathcal{C}) \right]_+.$$

Rimandiamo a [12] o [27] per la prova del teorema. Vedi anche [17] per dei risultati analoghi.

È allora utile descrivere i cammini seguiti dal processo in termini di *cammini di cicli*.

Definizione 2.5.2 *Un cammino di cicli è una successione $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ di cicli tale che*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \Phi_i \cap \partial\Phi_{i-1} \neq \emptyset.$$

Un cammino di cicli in discesa è un cammino di cicli $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ tale che

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, h(\Phi_i) \leq h(\Phi_{i-1}).$$

Una realizzazione di un cammino di cicli $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ è un cammino che segue

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Phi_n.$$

Osservazioni: Si consideri un cammino di cicli in discesa $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ e si assumi che lo stato iniziale del sistema, η_0 , appartiene a Φ_0 . Per ogni ciclo \mathcal{C} , $\sup \hat{H}(\mathcal{C}) \leq h(\mathcal{C})$. Quindi, utilizzando il teorema precedente assieme alla proprietà di Markov forte, otteniamo che, con una probabilità p_β non-esponenzialmente piccola, i.e. tale che

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln p_\beta = 0,$$

il sistema segue una realizzazione di Φ e visita successivamente l'insieme di ogni ciclo Φ_0, \dots, Φ_n .

Non intendiamo dire che una realizzazione *data* di Φ è seguita dal sistema con una probabilità non esponenzialmente piccola, ma che il sistema segue con probabilità non trascurabile il *fascio* di tutte le realizzazioni del cammino di cicli.

Utilizzeremo anche le nozioni di *V-riducibilità*, *V-cammino* e *V-equivalenza*:

Definizione 2.5.3 *Sia V un numero reale non negativo.*

Una configurazione $\eta^0 \in \mathcal{X}$ è V-riducibile se esiste un cammino

$$\varphi = (\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^n)$$

che riduce l'energia senza andare oltre il livello d'energia $\hat{H}(\eta^0) + V$, i.e. tale che

$$\hat{H}(\eta^n) < \hat{H}(\eta^0)$$

e

$$\forall i \in \{0; \dots; n\}, \hat{H}(\eta^i) \leq \hat{H}(\eta^0) + V.$$

Un V-cammino è un cammino di cicli in discesa tale che la profondità di tutti i suoi cicli, tranne forse l'ultimo, è minore o uguale a V. Per abuso di linguaggio, se Φ è un V-cammino, chiameremo anche V-cammino ognuna delle sue realizzazioni.

Due configurazioni η^0 e η^1 in \mathcal{X} sono V-equivalenti se hanno la stessa energia e se ognuna di loro può essere raggiunta da (una realizzazione di) un V-cammino che parte dall'altra.

La Figura 2.5 pagina 37 mostra (una realizzazione di) un *U-cammino* fra due configurazioni *U-equivalenti*. La prima riga della Figura 3.1 pagina 43 mostra delle configurazioni che sono tutte 0-riducibili, e si può vedere lungo la seconda riga, da sinistra a destra, una configurazione *U-riducibile*, una configurazione *U-irriducibile*, due configurazioni 0-irriducibili, una configurazione 0-riducibile e una configurazione Δ -riducibile.

2.6 Una prima applicazione: il varco verso la stabilità e alcune delle sue proprietà geometriche

La maggioranza delle idee e dei risultati che presentiamo qui erano già presenti in [21] o [24].

Come in questi lavori, introduciamo la barriera minimale di energia che separa $\underline{0}$ da $\underline{1}_0$. Così (ricordiamo che $\hat{H}(\underline{0}) = 0$)

$$\Gamma := \inf_{\varphi: \underline{0} \rightsquigarrow \underline{1}_0} \sup \hat{H}(\varphi),$$

con, per ogni $\varphi = (\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^n) \in \mathcal{X}^{n+1}$,

$$\sup \hat{H}(\varphi) := \sup_{0 \leq i \leq n} \hat{H}(\eta^i).$$

Chiamiamo *cammino ottimale* qualunque cammino $\varphi: \underline{0} \rightsquigarrow \underline{1}_0$ tale che

$$\sup \hat{H}(\varphi) = \Gamma.$$

Diremo che $\mathcal{G} \subset \hat{H}^{-1}(\Gamma)$ è un *varco verso la stabilità* se ogni cammino ottimale deve attraversare \mathcal{G} . In particolare $\hat{H}^{-1}(\Gamma)$ è un varco verso la stabilità ma identificheremo un varco più stretto di cui studieremo alcune delle proprietà geometriche. Inoltre proveremo che “a meno di 0-equivalenza”, c’è un unico varco minimale verso la stabilità (minimale per l’inclusione). Ecco perché abbiamo scritto nel titolo della sezione “il” varco verso la stabilità.

Utilizzeremo in questa sezione e nel seguito le notazioni seguenti.

Cammino di riferimento – Chiamiamo *cammino di riferimento* una famiglia di cammini $\Psi: \underline{0} \rightsquigarrow \underline{1}_0$ descritti come segue e di cui proveremo l’ottimalità. Lungo questi cammini una prima particella è creata, poi una seconda e un rettangolo 1×2 è formato da qualche parte in Λ_0 . Al passo successivo una terza particella è creata, poi attaccata ad una lunghezza del rettangolo. Una quarta particella è creata per completare un quadrato 2×2 . Poi iteriamo il processo: dopo aver raggiunto un quasi-quadrato una nuova particella è creata e attaccata ad una lunghezza del quasi-quadrato, poi un’altra particella è creata e attaccata in un “angolo esterno” del cluster, e così via fino a raggiungere un quasi-quadrato più grande. I cammini vanno così fino a $\underline{1}_0$.

Sottoinsiemi di $\mathcal{J}_{1,0}(l_1, l_2)$ – Per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ denotiamo con $\mathcal{L}_1(l_1, l_2)$ l’insieme delle configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(l_1, l_2)$ ottenute attaccando una particella a una lunghezza di una configurazione in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$. Denotiamo con $\overline{\mathcal{L}}_1(l_1, l_2)$ l’insieme delle configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(l_1, l_2)$ U -equivalenti a una configurazione in $\mathcal{L}_1(l_1, l_2)$ (vedi Figura 2.5).

Fogliazione dello spazio degli stati – Scriveremo

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_{|\Lambda|},$$

dove per ogni $n \geq 0$

$$\mathcal{N}_n := \{\eta \in \mathcal{X} : |\eta| = n\}.$$

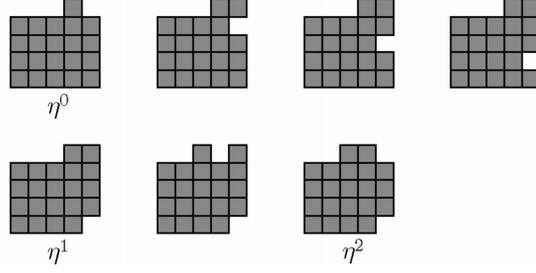


Figura 2.5: U -equivalenza fra $\eta^0 \in \mathcal{L}_1(l_1, l_2)$ e $\eta^2 \in \overline{\mathcal{L}}_1(l_1, l_2)$ nel caso $(l_1, l_2) = (4, 5)$ – anche η^1 appartiene a $\overline{\mathcal{L}}_1(l_1, l_2)$.

Cammini contenuti all'interno di un grafo – Se G è un grafo i cui vertici sono insiemi di configurazioni, diremo che un cammino φ *non può scappare da G* se φ visita soltanto delle configurazioni che appartengono ai vertici di G , e se ogni volta che φ esce da uno dei vertici, entra in uno dei primi vicini in G , i.e. segue uno spigolo del grafo. Si noti che non chiediamo in questa definizione che i vertici di G siano degli insiemi connessi di configurazioni. Di fatto i vertici della maggior parte dei grafi che useremo non saranno connessi, e, in particolare, non saranno cicli.

Varco a meno di 0-equivalenza – I cammini di transizione visitano, in modo tipico, tutti i varchi verso la stabilità, insiemi di configurazioni di sella nella giunta della loro parte sottocritica e di quella supercritica [24]. Ciò dà rilevanza all'identificazione dei varchi minimali (minimali per l'inclusione). Proveremo che

$$\mathcal{G}^* := \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_c - 1, l_c)$$

è un varco verso la stabilità, ma \mathcal{G}^* non è un varco minimale: è facile costruire un varco strettamente contenuto in \mathcal{G}^* . Inoltre potremmo provare che esistono altri varchi minimali non interamente contenuti in \mathcal{G}^* . Di fatto l'identificazione dei varchi minimali si rivela un problema difficile per questo modello.

Tuttavia, poiché vogliamo descrivere un insieme di cammini che contengono con una probabilità esponenzialmente vicina a 1 il cammino lungo il quale si svolgerà la transizione, non possiamo separare le configurazioni che studiamo dal “plateau di energia” a cui appartengono, cioè dalla loro classe di 0-equivalenza. Infatti, partendo da una qualunque configurazione η , il sistema seguirà un qualunque cammino sul plateau a cui appartiene η con una probabilità non-nulla e indipendente da β . Il problema della minimalità del varco può quindi esser considerato “a meno di 0-equivalenza”: diciamo che un varco \mathcal{G} è *minimale a meno di 0-equivalenza* se per ogni sottoinsieme stretto $\overline{\mathcal{G}}^0$ della sua classe di 0-equivalenza $\overline{\mathcal{G}}^0$ c'è un cammino ottimale che non attraversa $\overline{\mathcal{G}}^0$. Questo problema si rivela molto più semplice.

Proposizione 2.6.1 *L'insieme*

$$\mathcal{G}^* := \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_c - 1, l_c)$$

è, a meno di 0-equivalenza, l'unico varco minimale verso la stabilità. Di conseguenza

$$\Gamma = \hat{\text{H}}(\mathcal{G}^*) = (-2U + \Delta)((l_c - 1)l_c + 2) + \frac{U}{2}(4l_c + 4).$$

Inoltre, il rettangolo circoscritto al cluster di una qualunque configurazione $\eta^* \in \mathcal{G}^*$, ovvero alla componente connessa di η^* che non è ridotta a una semplice particella libera, appartiene a $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+$.

Osservazioni: Den Hollander, Olivieri e Scoppola hanno già provato che le configurazioni di $\mathcal{L}_1^{fp}(l_c - 1, l_c)$ appartengono a qualche varco verso la stabilità [21]. Per descrivere questo varco con più accuratezza seguiremo la loro prova e riscriveremo i loro argomenti nel linguaggio delle Sezioni 2.3 e 2.5. \mathcal{G}^* non è diverso dal varco che ottennero, pur non essendo definito nello stesso modo.

La Proposizione 2.6.1 dà una descrizione geometrica parziale di \mathcal{G}^* , che è completamente caratterizzato in [28]. Purtroppo non sappiamo mantenere un tale livello di precisione per la maggior parte delle configurazioni lungo i cammini del tubo che costruiremo.

Prova della proposizione: Dividiamo la prova in quattro passi. Utilizziamo prima il cammino di riferimento per ottenere una stima dall'alto di Γ , raccoglieremo poi una serie di informazioni sui cammini ottimali. Queste informazioni saranno sufficienti per provare che \mathcal{G}^* è un varco verso la stabilità e per ottenere le sue proprietà geometriche. Queste proprietà saranno infine utilizzate per mostrare che \mathcal{G}^* è, a meno di 0-equivalenza, l'unico varco verso la stabilità.

- 1) *Stima dall'alto di Γ .* Verifichiamo immediatamente che qualunque rappresentante $\Psi : \underline{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \underline{\mathcal{L}}_0$ del cammino di riferimento raggiunge il suo massimo di energia in $\mathcal{L}_1^{fp}(l_c - 1, l_c)$. (Si veda Figura 2 pagina 12 per un'illustrazione e si noti che, poiché $U/(2U - \Delta)$ non è intero, Ψ raggiunge il suo massimo di energia soltanto all'interno di quest'insieme.) Abbiamo

$$\begin{aligned} \sup \hat{H}(\Psi) &= (-2U + \Delta)((l_c - 1)l_c + 1) + \frac{U}{2} \times 2(l_c - 1 + l_c + 1) + \Delta \\ &= (-2U + \Delta)((l_c - 1)l_c) + \frac{U}{2} \times 4l_c + 2\Delta - U \\ &= \hat{H}(\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)) + 2\Delta - U \end{aligned}$$

ed è un maggiorante di Γ .

- 2) *Studio dei cammini ottimali.* Sia $\varphi : \underline{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \underline{\mathcal{L}}_0$ un cammino ottimale. Per definizione $\sup \hat{H}(\varphi) = \Gamma$, sicché la stima dall'alto precedente si può scrivere

$$\sup \hat{H}(\varphi) \leq \hat{H}(\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)) + 2\Delta - U. \quad (2.4)$$

φ deve attraversare ognuna delle varietà $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|\Lambda_0|}$ per raggiungere $\underline{\mathcal{L}}_0$. Denotiamo con $\tilde{\varphi}$ un qualunque periodo di φ all'interno di $\mathcal{N}_{(l_c-1)l_c+1}$ prima di aver raggiunto $\mathcal{N}_{(l_c-1)l_c+2}$.

- a) $\tilde{\varphi}$ parte da $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$. Ciò è una conseguenza del fatto che il punto di partenza di φ può essere scritto $\eta + \alpha$ con $\eta \in \mathcal{N}_{(l_c-1)l_c}$ e α una semplice particella libera in $\Lambda \setminus \Lambda_0$. Utilizzando la d.i.p. otterremmo una contraddizione con (2.4) se $\eta \notin \mathcal{R}(l_c - 1, l_c)$ (si noti che $\Delta + U > 2\Delta - U$.)
- b) Se $\tilde{\varphi}$ lascia $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$ allora lo fa via coalescenza. Infatti, (2.4) implica che $\tilde{\varphi}$ non può lasciare $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$ facendo crescere l'energia del sistema. L'affermazione è quindi una conseguenza del Lemma 2.4.1.
- c) Se $\tilde{\varphi}$ lascia $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$ via coalescenza allora raggiunge una configurazione $\eta \in \overline{\mathcal{L}}_1(l_c - 1, l_c)$ tale che $RC(\eta) \in \mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+$. Infatti, l'unico modo per fare così consiste nell'attaccare la particella libera a un lato del quasi-quadrato. (Le configurazioni così ottenute sono ovviamente U -equivalenti.)
- d) Dopo aver raggiunto una tale configurazione η e prima di qualsiasi frammentazione, le configurazioni visitate da $\tilde{\varphi}$ hanno tutte lo stesso rettangolo circoscritto e appartengono a $\mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c)$ o $\mathcal{J}_{1,2}(l_c - 1, l_c)$. Ciò è una conseguenza ovvia del Lemma 2.2.1 e della disuguaglianza (2.4).

- e) Se $\tilde{\varphi}$ lascia $\mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c)$ via frammentazione, $\tilde{\varphi}$ torna in $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$. Infatti, (2.4) implica che la frammentazione non può far crescere l'energia più di U , cosicché il perimetro totale della configurazione raggiunta non può salire oltre $p(l_c - 1, l_c) + 2$. Il Lemma 2.4.1 dà allora il risultato.
- f) $\tilde{\varphi}$ non può lasciare $\mathcal{J}_{1,2}(l_c - 1, l_c)$ via frammentazione. Altrimenti, come visto prima, $\tilde{\varphi}$ raggiungerebbe $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}$. Ma abbiamo

$$\partial(\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^{fp}) \cap \mathcal{J}_{1,2}(l_c - 1, l_c) = \emptyset.$$

- g) $\tilde{\varphi}$ non può scappare dal grafo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp} & & \mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c) & \end{array}$$

in quanto conseguenza dei punti precedenti.

- h) $\tilde{\varphi}$ non può scappare dal grafo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp} & & \mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \overline{\mathcal{L}}_1(l_c - 1, l_c) & \end{array}$$

Proviamo prima che le configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c)$ sono 0-irriducibili. Il Lemma 2.4.1 implica che il sistema non può frammentare lungo un cammino che non va oltre il livello di energia $\hat{H}(\mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c))$. Ciò implica da un lato che l'energia di volume rimane costante lungo il cammino, dall'altro che le configurazioni lungo tale cammino hanno tutte lo stesso rettangolo circoscritto con perimetro $4l_c$ (vedi Lemma 2.2.1), e, di conseguenza, hanno un'energia di superficie uguale a $2Ul_c$. Pertanto tale cammino non può ridurre l'energia.

La 0-irriducibilità delle configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(l_c - 1, l_c)$ implica assieme a g) che $\tilde{\varphi}$ e la sua inversione sono degli U -cammini. Sicché a), b), c) e g) danno h).

- i) Ogni configurazione in $\eta \in \overline{\mathcal{L}}_1(l_c - 1, l_c)$ e raggiunta da $\tilde{\varphi}$ verifica

$$RC(\eta) \in \mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+.$$

Ciò è una conseguenza di a), b), c), d) e h).

- 3) *Varco verso la stabilità e le sue proprietà geometriche.* La disuguaglianza (2.4) e il punto h) implicano che ogni cammino ottimale φ deve entrare in $\mathcal{N}_{(l_c-1)l_c+2}$ attraverso

$$\mathcal{G}^* := \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_c - 1, l_c).$$

Di conseguenza

$$\hat{H}(\mathcal{G}^*) \leq \sup(\hat{H}(\varphi)) = \Gamma \leq \hat{H}(\mathcal{G}^*),$$

dove l'ultima disuguaglianza è equivalente a (2.4). Queste disuguaglianze sono quindi uguaglianze e \mathcal{G}^* è un varco verso la stabilità.

Inoltre per ogni $\eta \in \overline{\mathcal{L}}_1(l_c - 1, l_c)$ esiste un cammino ottimale che visita η prima di $\mathcal{N}_{(l_c-1)l_c+2}$: si segue il cammino di riferimento fino a $\mathcal{L}_1(l_c - 1, l_c)$, poi un U -cammino fino a η e un altro U -cammino per tornare a $\mathcal{L}_1(l_c - 1, l_c)$, e si segue il cammino di riferimento fino a $\underline{\mathcal{L}}_0$. Con i) otteniamo allora

$$RC(\eta) \in \mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+.$$

- 4) \mathcal{G}^* è l'unico varco verso la stabilità a meno di 0-equivalenza. È sufficiente provare che per ogni $\eta^* \in \mathcal{G}^*$ esiste un cammino ottimale che visita soltanto configurazioni 0-equivalenti a η^* all'interno di $\hat{H}^{-1}(\Gamma)$.

Sia quindi $\eta^* \in \mathcal{G}^*$ e chiamiamo η la sua componente connessa $\overline{\mathcal{L}}_1(l_c - 1, l_c)$. Possiamo costruire un cammino $\varphi : \underline{Q} \rightsquigarrow \eta$ che rimane strettamente sotto il livello di energia Γ : si segua prima il cammino di riferimento e poi un U -cammino fino a η . $\text{RC}(\eta) \in \mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+$ implica $|\eta| < |\text{RC}(\eta)|$, sicché η possiede almeno un angolo esterno. Possiamo quindi estendere φ nel modo seguente per ottenere un cammino ottimale che attraversa $\hat{H}^{-1}(\Gamma)$ senza lasciare la classe di 0-equivalenza di η^* . Creiamo una particella libera, la attacchiamo in un angolo esterno e iteriamo il processo fino ad ottenere un rettangolo completo di $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c)^+$. Se il rettangolo appartiene a $\mathcal{R}(l_c, l_c)$ il sistema è tornato sul cammino di riferimento e seguendo arriviamo a $\underline{1}_0$, senza tornare in $\hat{H}^{-1}(\Gamma)$. Se il rettangolo ottenuto appartiene a $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c + 1)$ possiamo fare la stessa cosa dopo aver seguito il raccordo della Figura 2.6. Questo cammino non torna neppure in $\hat{H}^{-1}(\Gamma)$ e ciò dà il risultato. □

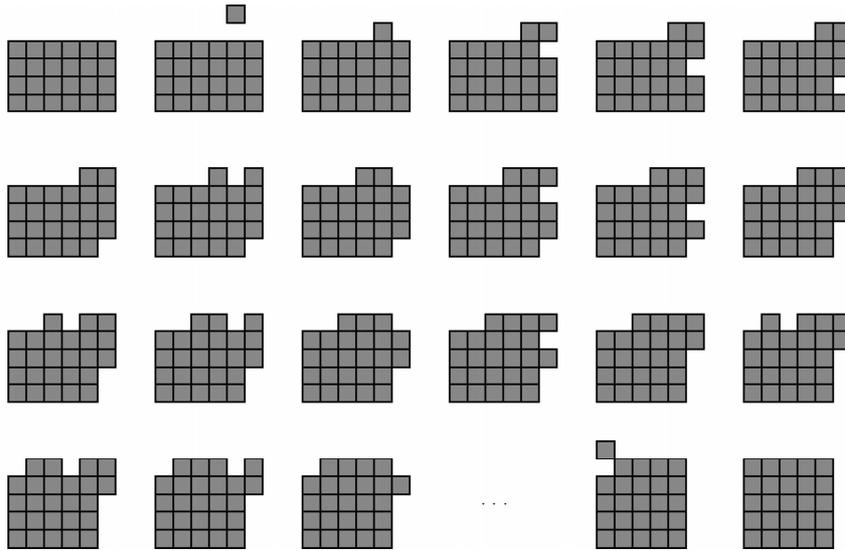


Figura 2.6: Raccordo da $\mathcal{R}(l_c - 1, l_c + 1)$ al cammino di riferimento nel caso $l_c = 5$ – I puntini rappresentano lo staccamento della protuberanza dal cluster e un cammino lungo il quale la particella libera si muove fino a raggiungere la configurazione successiva della figura.

Capitolo 3

Descrizioni locali del panorama di energia

Per costruzione il varco \mathcal{G}^* definito nel capitolo precedente è un sottoinsieme di $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$ per $(l_1, l_2, k) = (l_c - 1, l_c, 2)$. Nel presente capitolo descriveremo il panorama di energia “nelle vicinanze” delle configurazioni in $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$ per ogni (l_1, l_2, k) in

$$I := \{(l_1, l_2, k) \in \mathbb{N}^3 : (l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q} \text{ e } 2 \leq k \leq l_2\}.$$

3.1 Altipiani

Proposizione 3.1.1 *Consideriamo per $(l_1, l_2, k) \in I$ il grafo G*

$$\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} \text{ --- } \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \text{ --- } \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2) \quad \text{nel caso } k = 2,$$

$$\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \text{ --- } \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2) \quad \text{nel caso } k > 2.$$

Ogni cammino che parte da un vertice di G e lungo il quale l'energia rimane costante non può scappare da G .

Proof: Assumiamo che il sistema segue tale cammino ed esce da un vertice \mathcal{V} di G . Dobbiamo provare che segue uno spigolo di G .

- 1) *Supponiamo che $\mathcal{V} = \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$. . . il sistema salta da una configurazione fatta di un contorno monotono con perimetro p e di una particella libera, a una configurazione con la stessa energia e che appartiene a $\partial\mathcal{V}$. Non può evolvere mediante la creazione o la cancellazione di una particella perché ciò cambierebbe l'energia. Deve quindi mantenere lo stesso numero di particelle, e, di conseguenza, lo stesso perimetro $p + 4$ (per mantenere la stessa energia).*

Se il sistema raggiunge una configurazione connessa, il Lemma 2.2.1 ci indica che tale configurazione deve essere iscritta in $\text{RC}(\eta)$ oppure in un rettangolo di $\text{RC}(\eta)^+$. E ciò significa che il sistema raggiunge $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$.

Se il sistema raggiunge una configurazione non-connessa, il Lemma 2.4.1 ci indica che siamo nel caso $k = 2$ e che tale configurazione appartiene a $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$, o eventualmente – nel caso $l_1 = 2, l_2 = 3, k = 2$ – a \mathcal{Q}^2 , insieme delle configurazioni fatte da due quadrati 2×2 . Ma è chiaro che

$$\inf \hat{H}(\partial\mathcal{Q}^2) > \hat{H}(\mathcal{Q}^2), \quad (3.1)$$

e possiamo escludere quest'ultima opzione .

2) *Supponiamo che* $\mathcal{V} = \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} \dots$ (e siamo quindi nel caso $k = 2$).
Chiaramente

$$\partial(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \cap \left\{ \eta' \in \mathcal{X} : \hat{H}(\eta') \leq \hat{H}(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \right\} \subset \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \quad (3.2)$$

e il sistema raggiunge $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$.

3) *Supponiamo infine che* $\mathcal{V} = \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2) \dots$ possiamo provare come in 1) che il sistema deve mantenere lo stesso numero di particelle e lo stesso perimetro. Ma lasciare $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$ in tali condizioni implica (vedi Lemma 2.2.1) una frammentazione. Quindi (vedi Lemma 2.4.1) per mantenere la stessa energia il sistema deve entrare in $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$ o eventualmente (se $k = 2$) $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$, oppure (se $l_1 = 2, l_2 = 3, k = 2$) \mathcal{Q}^2 . Ma (3.1) e (3.2) implicano che dobbiamo escludere queste ultime opzioni.

□

Definizione 3.1.2 *Per* $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$ *chiameremo* altopiano *e denoteremo* $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ *(con la* \mathcal{U} *dall'inglese "upland") l'unione*

$$\mathcal{U}_k(l_1, l_2) := \begin{cases} \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} \cup \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2) & \text{se } k = 2; \\ \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2) & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

Si noti che tutte le configurazioni all'interno di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ hanno la stessa energia e lo stesso numero di particelle: $l_1 l_2 + k$.

Si noti infine che, in generale, un altopiano non è connesso: è facile vedere che se η è una configurazione in $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$ con il domino "lontano dal rettangolo", allora la componente connessa in $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ che contiene η coincide con $\{\eta\}$.

3.2 Scendere da un altopiano

Definizione 3.2.1 *Sia* $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$. *Chiamiamo* discesa *dall'altopiano* $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ *ogni cammino ridotto ad un unico passo* (η^0, η^1) *tale che*

$$\begin{cases} \eta^0 \in \mathcal{U}_k(l_1, l_2); \\ \hat{H}(\eta^1) < \hat{H}(\eta^0). \end{cases}$$

Diciamo che una discesa è di

- tipo s (s per shrinking) *se* η^1 *appartiene a* $\mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$ *e* η^1 *è* U -*riducibile;*
- tipo hs (hs per half-hearted shrinking) *se* η^1 *appartiene a* $\mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$ *e* η^1 *è* U -*irriducibile;*
- tipo hg (hg per half-hearted growing) *se* η^1 *appartiene a* $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$ *e* η^1 *è* 0 -*irriducibile;*
- tipo g (g per growing) *se* η^1 *appartiene a* $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$ *e* η^1 *è* 0 -*riducibile, o se* η^1 *appartiene a* $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$.

La Figura 3.1 mostra qualche esempio.

Proposizione 3.2.2 *Per ogni* $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$, *ogni discesa dall'altopiano* $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ *è di tipo* s, hs, hg *o* g .

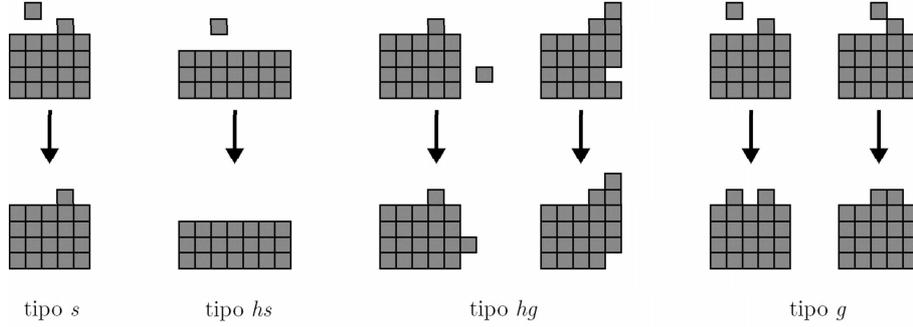


Figura 3.1: Esempi di discese di tipo s , hs , hg e g , dall'altopiano $\mathcal{U}_2(4, 5)$.

Prima di scrivere la prova della proposizione potrebbe essere utile giustificare la notazione. Una discesa di tipo s o hs corrisponde ad una perdita di particelle. Può quindi essere vista come tentativo del sistema di andare verso $\underline{0}$. Al contrario una discesa di tipo hg o g corrisponde alla costituzione di un cluster più grande o più stabile e può quindi essere vista come tentativo del sistema di andare verso $\underline{1}_0$.

Proveremo in seguito che tali tentativi di tipo hs e hg sono sempre *half-hearted* (letteralmente “con mezzo cuore”, cioè “senza convinzione”): cadono in cicli che sono come delle valli poco profonde che chiameremo *doline*, e ciò significa che per lasciare tale ciclo, il sistema dovrà, in modo tipico, risalire sull'altopiano. Le discese di tipo s o g si riveleranno essere tentativi più efficienti per andare verso $\underline{0}$ o $\underline{1}_0$. Si veda la Sezione 3.6 per una discussione più dettagliata.

Prova della proposizione: Da

$$\partial(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \cap \left\{ \eta \in \mathcal{X} : \hat{H}(\eta) \leq \hat{H}(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \right\} \subset \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$$

deduciamo

$$\partial(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \cap \left\{ \eta \in \mathcal{X} : \hat{H}(\eta) < \hat{H}(\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}) \right\} = \emptyset.$$

Quindi, per ogni discesa (η^0, η^1) da un altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$,

$$\eta^0 \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2).$$

- 1) *Assumiamo che η^0 appartiene a $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$. . .* da η^0 a η^1 il sistema non può aggiungere una nuova particella perché ciò aumenterebbe l'energia. Se raggiunge η^1 cancellando la particella libera di η^0 cade in $\mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$ e (η^0, η^1) è di tipo hs o s .

Possiamo quindi restringerci all'analisi del caso $|\eta^0| = |\eta^1|$. In questo caso $\hat{H}(\eta^1) < \hat{H}(\eta^0)$ implica $|\partial\eta^1| < |\partial\eta^0| = p + 4$ dove $p = p(l_1, l_2)$. Quindi (v. Lemma 2.4.1) η^1 è una configurazione connessa. Il suo perimetro è minore o uguale a $p + 2$ e (v. Lemma 2.2.1) il rettangolo circoscritto di η^1 verifica i criteri per l'appartenenza a $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$. In particolare $|\partial RC(\eta^1)|$ è uguale a p o $p + 2$. Inoltre abbiamo sempre la disuguaglianza $|\partial RC(\eta^1)| \leq |\partial\eta^1|$, e ci sono quindi pochi casi possibili:

- se $|\partial\text{RC}(\eta^1)| = p$

allora $|\partial\eta^1| = p$,
quindi $\eta^1 \in \mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$, i.e. (η^0, η^1) è di tipo g ,

oppure $|\partial\eta^1| = p + 2$,
quindi $\eta^1 \in \mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$, i.e. (η^0, η^1) è di tipo hg o g ,

- se $|\partial\text{RC}(\eta^1)| = p + 2$

allora $|\partial\eta^1| = p + 2$,
quindi $\eta^1 \in \mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$, i.e. (η^0, η^1) è di tipo hg o g .

- 2) *Assumiamo che η^0 appartiene a $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$. . . da η^0 a η^1 il sistema non può aggiungere una nuova particella (ciò aumenterebbe l'energia) e non può neanche cancellare una particella (le configurazioni in $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$ non possiedono nessuna particella libera). Sicché $|\eta^0| = |\eta^1|$ e, come precedentemente, otteniamo che η^1 deve essere una configurazione connessa. Il suo perimetro è minore o uguale a $p + 2$ e il Lemma 2.2.1 implica $\text{RC}(\eta^1) = \text{RC}(\eta^0)$. A questo punto possiamo concludere come nel caso precedente.*

□

3.3 Cicli principali e discese di tipo s

I cicli principali, già introdotti in [21], possono esser visti come lo scheletro del tubo che costruiremo.

Definizione 3.3.1 *Chiamiamo cicli principali i cicli C_η^r (v. Definizione 2.5.1) dove η sta in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ per qualche coppia (l_1, l_2) tale che $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q} \setminus \{(1, 2)\}$ e r è dato da:*

$$r = r(l_1, l_2) := \min\{(2U - \Delta)(l_1 - 2) + 2U, 2\Delta - U\}.$$

La proposizione successiva mostra che η tiene soltanto un ruolo minore nella definizione precedente.

Proposizione 3.3.2 *Se η e η' sono entrambi in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ per qualche $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ tale che $(l_1, l_2) \neq (1, 2)$, allora i cicli principali C_η^r e $C_{\eta'}^r$ coincidono.*

Prova: Per costruzione $C_\eta^{2U} \subset C_\eta^r$ poiché $2U \leq r$ (ricordiamo che assumiamo $\Delta \geq 3U/2$). Ora, $\mathcal{R}(l_1, l_2) \subset C_\eta^{2U}$ come mostrato dalle Figure 3.2 e 3.3: “i quasi-quadrati si possono muovere lungo un Δ -cammino”. E ciò basta per concludere. □

I cicli principali possono essere descritti nel linguaggio della Sezione 2.3 come segue.

Proposizione 3.3.3 *Sia $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q} \setminus \{(1, 2)\}$. Definiamo $(l'_1, l'_2) = (l_2 - 1, l_1)$ (si noti che $(l'_1, l'_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$) e*

$$m := \begin{cases} 2 & \text{se } l_1 < l_c; \\ l_1 - l_c + 2 & \text{se } l_1 \geq l_c. \end{cases}$$

Se $\eta^0 \in \mathcal{R}(l_1, l_2)$ allora ogni cammino all'interno del ciclo principale $C_{\eta^0}^r$ non può scappare dal grafo della Figura 3.4. Ciò implica in particolare che $\eta^0 \in \mathcal{F}(C_{\eta^0}^r)$.

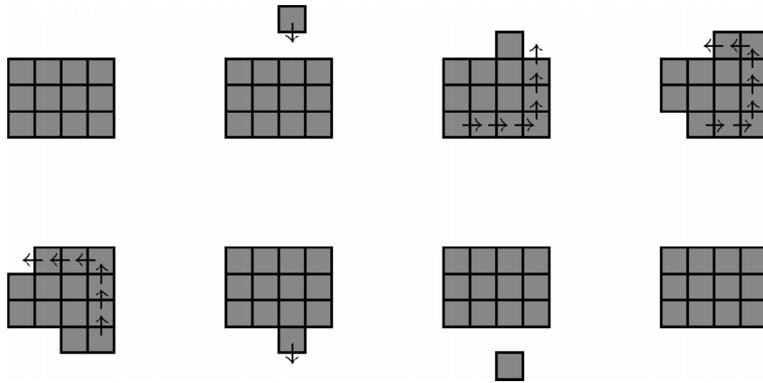


Figura 3.2: Traslazione di un quasi-quadrato 3×4 .

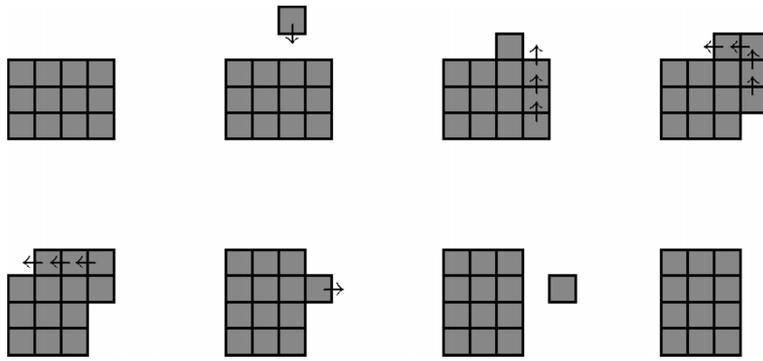


Figura 3.3: Rotazione di un quasi-quadrato 3×4 .

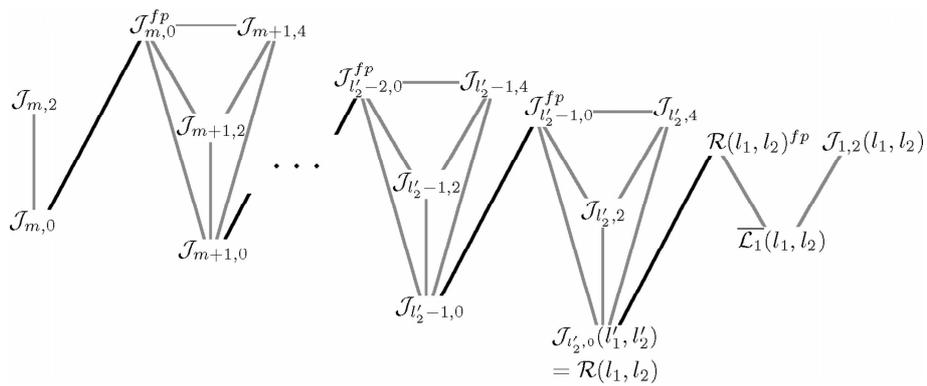


Figura 3.4: Struttura dei cicli principali – Quando l'argomento di $\mathcal{J}_{a,b}$ è omissso, bisogna leggere $\mathcal{J}_{a,b}(l'_1, l'_2)$. Abbiamo provato a rispettare le altezze relative (in termini di energia) dei diversi insiemi. Gli spigoli neri corrispondono a delle transizioni tra delle varietà \mathcal{N}_n e $\mathcal{N}_{n'}$ distinte. Gli spigoli grigi legano gli insiemi all'interno di una stessa varietà \mathcal{N}_n .

Inoltre, se $l_1 < l_c$ allora

$$\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta^0}^r) \subset \mathcal{J}_{1,0}^{fp}(l'_1, l'_2) \cup \mathcal{J}_{2,4}(l'_1, l'_2),$$

e se $l_c \leq l_1$ allora

$$\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta^0}^r) \subset \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_1, l_2).$$

Sicché, in entrambi i casi, $d(\mathcal{C}_{\eta^0}^r) = r$.

Prova: Sia φ un cammino all'interno di $\mathcal{C}_{\eta^0}^r$. Per provare che φ non può scappare dal grafo, la definizione di $\mathcal{C}_{\eta^0}^r$ ci permette di assumere, senza perdita di generalità, che φ parte da η^0 . Proviamo nel seguito che se η e η' sono due configurazioni successive del cammino, se η appartiene a un vertice \mathcal{V} del grafo e se $\eta' \in \partial\mathcal{V}$, allora η' appartiene a un vicino di \mathcal{V} nel grafo. Ciò basta (per induzione sulla lunghezza di φ) per ottenere la prima parte della proposizione.

Sia quindi (η, η') una tale coppia di configurazioni su φ . Nella Tabella 3.1 diamo l'elenco dei vertici che possono contenere η assieme ai loro rispettivi livelli di energia. Inoltre, per costruzione di $\mathcal{C}_{\eta^0}^r$, sappiamo che

$$\hat{H}(\eta') < \hat{H}(\eta^0) + r. \quad (3.3)$$

Studiamo adesso vari casi.

Vertice	Energia
$\mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$ con $m \leq k \leq l'_2$	$\hat{H}(\eta^0) + (2U - \Delta)(l_1 - k)$
$\mathcal{J}_{k,2}(l'_1, l'_2)$ con $m \leq k \leq l'_2$	$\hat{H}(\eta^0) + (2U - \Delta)(l_1 - k) + U$
$\mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$ con $m \leq k \leq l'_2 - 1$	$\hat{H}(\eta^0) + (2U - \Delta)(l_1 - k) + \Delta$
$\mathcal{J}_{k,4}(l'_1, l'_2)$ con $m + 1 \leq k \leq l'_2$	$\hat{H}(\eta^0) + (2U - \Delta)(l_1 - k) + 2U$
$\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp} = \mathcal{J}_{l'_2,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$	$\hat{H}(\eta^0) + \Delta$
$\overline{\mathcal{L}}_1(l_1, l_2)$	$\hat{H}(\eta^0) + \Delta - U$
$\mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2)$	$\hat{H}(\eta^0) + \Delta$

Tabella 3.1: Le energie dei vertici del grafo.

Se $|\eta'| > |\eta|$ allora $\eta' \in \mathcal{V}^{fp}$ e $\hat{H}(\eta') = \hat{H}(\eta) + \Delta$. La disuguaglianza (3.3) assieme ai dati della Tabella 3.1 implica $\eta \in \mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$ per qualche k tale che $m \leq k \leq l'_2$, ovvero $\eta' \in \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$: il sistema segue quindi uno spigolo nero del grafo.

Se $|\eta'| < |\eta|$ allora η possiede una particella libera rimossa dal sistema per andare in η' . η appartiene quindi a qualche $\mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$ con $m \leq k \leq l'_2$ e η' appartiene a $\mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$: ancora una volta, il sistema segue uno spigolo nero del grafo.

Possiamo quindi assumere

$$l'_1 l'_2 + m \leq |\eta| = |\eta'| \leq l_1 l_2 + 1.$$

Innanzitutto, esattamente come nello studio dei cammini ottimali nella prova della Proposizione 2.6.1, possiamo mostrare che le parti di φ che rimangono all'interno della varietà $\mathcal{N}_{l_1 l_2 + 1}$ non possono scappare dal grafo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp} & & \mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{L}_1(l_1, l_2) & \end{array}$$

(i cammini ottimali avevano questa proprietà con $(l_1, l_2) = (l_c - 1, l_c)$). Possiamo quindi assumere

$$|\eta| = |\eta'| = l'_1 l'_2 + k, \text{ per qualche } k \text{ tale che } m \leq k \leq l'_2.$$

Per $k > m$ il vertice che contiene η è uno dei quattro insiemi $\mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$, $\mathcal{J}_{k,2}(l'_1, l'_2)$, $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$ e $\mathcal{J}_{k,4}(l'_1, l'_2)$. η' ha la stessa energia di volume di η e la differenza tra la sua energia di superficie e quella di η è un multiplo di U . Utilizzando (3.3) e i dati della Tabella 3.1 otteniamo allora che, saltando da η a η' , il sistema non può aumentare la sua energia di superficie da più di

- $2U$ se $\eta \in \mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$;
- U se $\eta \in \mathcal{J}_{k,2}(l'_1, l'_2)$;
- 0 se η appartiene a $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2) \cup \mathcal{J}_{k,4}(l'_1, l'_2)$.

In ogni caso il perimetro di η' è minore o uguale a $p' + 4$ con $p' = 2(l'_1 + l'_2 + 1)$. Siccome $k > 2$, se η' è una configurazione non connessa, appartiene (v. Lemma 2.4.1) a $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$. Di conseguenza η e η' non possono essere entrambi non-connesse e abbiamo soltanto tre possibilità: o il sistema frammenta e di conseguenza segue uno spigolo grigio che lo porta in $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$, o il sistema coalesce e η appartiene a $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2)$, oppure η e η' sono entrambe connesse.

Negli ultimi due casi, il rettangolo circoscritto di η verifica le condizioni necessarie per appartenere a $\mathcal{J}_{k,2}(l'_1, l'_2)$ e $\mathcal{J}_{k,4}(l'_1, l'_2)$ (v. Lemma 2.2.1) e, in particolare, abbiamo $|\partial\text{RC}(\eta')| \geq p'$ con $p' = 2(l'_1 + l'_2 + 1)$. Così

$$p' \leq |\partial\text{RC}(\eta')| \leq |\partial\eta'| \leq p' + 4,$$

e dato che $|\partial\eta'|$ è un numero pari, ciò implica $|\partial\eta'| = p' = |\partial\text{RC}(\eta')|$, o $|\partial\eta'| = p' + 2$ oppure $|\partial\eta'| = p' + 4$. In altre parole η' appartiene a $\mathcal{J}_{k,0}(l'_1, l'_2)$, $\mathcal{J}_{k,2}(l'_1, l'_2)$, o $\mathcal{J}_{k,4}(l'_1, l'_2)$: il sistema segue uno spigolo grigio del grafo.

Infine possiamo trattare il caso $k = m$ nello stesso modo. η appartiene a $\mathcal{J}_{m,0}(l'_1, l'_2)$ o $\mathcal{J}_{m,2}(l'_1, l'_2)$ e, utilizzando (3.3), otteniamo questa volta $|\partial\eta| \leq p' + 2$. Poiché $m \geq 2$, il sistema non può frammentare (v. Lemma 2.4.1), sicché $\text{RC}(\eta')$ e $\text{RC}(\eta)$ coincidono (v. Lemma 2.2.1). Utilizzando

$$p' \leq |\partial\text{RC}(\eta)| = |\partial\text{RC}(\eta')| \leq |\partial\eta'| \leq p' + 2$$

concludiamo che η' appartiene a $\mathcal{J}_{m,0}(l'_1, l'_2)$ o $\mathcal{J}_{m,2}(l'_1, l'_2)$: il sistema segue uno spigolo grigio del grafo.

Per provare la seconda parte della proposizione, notiamo prima che la costruzione del cammino di riferimento da $\underline{0}$ a $\underline{1}_0$ ci permette di affermare l'esistenza di una configurazione η^1 in $\mathcal{L}_1^{fp}(l'_1, l'_2)$ se $l_1 < l_c$, o in $\mathcal{L}_1^{fp}(l_1, l_2)$ se $l_1 \geq l_c$, tale che $\eta^1 \in \partial\mathcal{C}_\eta^r$ e $\hat{\text{H}}(\eta^1) = \hat{\text{H}}(\eta^0) + r$. Ciò implica che

$$\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta^0}^r) \subset \hat{\text{H}}^{-1}(\hat{\text{H}}(\eta^0) + r).$$

Inoltre, la prima parte già provata della proposizione ci indica che ogni configurazione del bordo di $\mathcal{C}_{\eta^0}^r$ appartiene al bordo di un vertice \mathcal{V} del grafo.

Ora se η' appartiene a un tale bordo $\partial\mathcal{V}$ e se

$$\hat{\text{H}}(\eta') = \hat{\text{H}}(\eta^0) + r,$$

allora le tecniche usate nella prima parte della prova danno

$$\eta' \in \mathcal{J}_{m-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2) \cup \mathcal{J}_{m,4}(l'_1, l'_2) \cup \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_1, l_2).$$

Ciò implica che $\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta_0}^r)$ è un sottoinsieme di quest'unione. Perché $U/(2U - \Delta)$ non è intero possiamo escludere il caso

$$\hat{H}(\mathcal{J}_{m-1,0}^{fp}(l'_1, l'_2) \cup \mathcal{J}_{m,4}(l'_1, l'_2)) = \hat{H}(\overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_1, l_2)),$$

e otteniamo il risultato. \square

La proposizione successiva sottolinea il legame tra cicli principali e discese di tipo s .

Proposizione 3.3.4 *i) Per ogni (l_1, l_2) in $\mathbb{Q}\mathbb{Q}$ e $2 \leq k \leq l_2$, le configurazioni in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ sono U -irriducibili.*

ii) Se esiste una discesa di tipo s da un altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ per qualche $(l_1, l_2, k) \in \mathbb{I}$ allora $k = 2$. Inoltre se $(l_1, l_2) > (1, 2)$, allora tale discesa cade dentro il ciclo principale \mathcal{C}_η^r associato a qualunque $\eta \in \mathcal{R}(l_1, l_2)$.

Prova: Siano $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$, $2 \leq k \leq l_2$ e $\eta \in \mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$. Seguendo un qualunque cammino che parte da η e rimane strettamente sotto il livello di energia $\hat{H}(\eta) + \Delta$ il sistema non può frammentare (v. Lemma 2.4.1), e conserva quindi lo stesso rettangolo circoscritto (v. Lemma 2.2.1). Pertanto, lungo tale cammino, l'energia di volume è costante e, poiché η è un contorno monotono, $\hat{H}(\eta)$ è un minorante dell'energia. Di conseguenza, η non può essere U -ridotto. Ciò prova *i*).

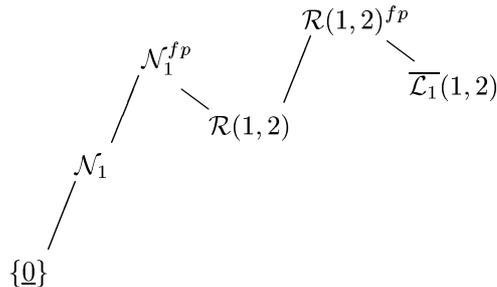
Consideriamo ora una discesa (η^0, η^1) , di tipo s , da un altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$. η^1 appartiene a $\mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$ ed è U -riducibile. Il primo punto della proposizione dà quindi $k = 2$. Inoltre, siccome c'è un cammino che parte da η^1 e riduce l'energia senza andare oltre il livello d'energia $\hat{H}(\eta^1) + U$, l'argomento del paragrafo precedente mostra che, seguendo questo cammino, il sistema deve frammentare. Il Lemma 2.4.1 ci indica allora che il cammino deve visitare una configurazione fatta da qualche $\eta \in \mathcal{R}(l_1, l_2)$ e da una particella libera. A questo punto è chiaro che, se $(l_1, l_2) > (1, 2)$, η^1 appartiene al ciclo principale \mathcal{C}_η^r . \square

Diamo adesso un analogo dell'ultimo punto della Proposizione 3.3.4 nel caso $(l_1, l_2) = (1, 2)$. A tale scopo definiamo l'*embrione* \mathcal{E} come il più grande ciclo di cui il sistema che parte da $\underline{0}$ deve scappare per raggiungere l'altopiano $\mathcal{U}_2(1, 2)$:

$$\mathcal{E} := \mathcal{C}_{\underline{0}}^{4\Delta - 2U}.$$

Lo chiamiamo embrione perché ci servirà a descrivere l'incipit del nostro tubo di traiettorie di transizioni. Come per i cicli principali, abbiamo un controllo geometrico dei cammini all'interno di \mathcal{E} . Abbiamo:

Proposizione 3.3.5 *i) I cammini contenuti all'interno di \mathcal{E} non possono scappare dal grafo*



ii) $\mathcal{F}(\partial\mathcal{E}) \subset \overline{\mathcal{L}_1^{fp}}(1, 2)$ e \mathcal{E} è un ciclo di profondità $4\Delta - 2U$.

iii) L'unica terna $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$ con $(l_1, l_2) = (1, 2)$ è $(1, 2, 2)$, e ogni discesa di tipo s dall'altopiano $\mathcal{U}_2(1, 2)$ cade dentro $\overline{\mathcal{L}_1}(1, 2) \subset \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$.

È immediato verificare ognuna di queste asserzioni: omettiamo la prova della proprietà.

3.4 Discese senza convizione, hs - e hg -doline

Abbiamo visto nella sezione precedente che, quando esistono, le discese di tipo s dagli altipiani $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, cadono in alcuni cicli particolari. Individueremo in questa sezione alcuni cicli in cui cadono le discese di tipo hs e hg . Questi cicli saranno delle "doline".

Proposizione 3.4.1 *Sia $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$. Se (η^0, η^1) è una discesa di tipo hs dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, o, più generalmente, se η^1 è una configurazione U -irriducibile di $\mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2)$, allora*

i) i cammini che rimangono all'interno di $\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta$ non possono scappare dal grafo

$$\begin{array}{c} \mathcal{J}_{k-1,2}(l_1, l_2) \\ | \\ \mathcal{J}_{k-1,0}(l_1, l_2) \end{array}$$

ii) $\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta) \subset \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$.

Di conseguenza $d(\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta) = \Delta$.

Prova: Nel caso $k > 2$ i) può essere provato come il primo punto della Proposizione 3.3.3. (Ma qui la prova è più semplice, poiché lo è anche il grafo.)

Nel caso $k = 2$ dobbiamo utilizzare la U -irriducibilità di η^1 . Consideriamo un cammino φ all'interno di $\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta$. Per costruzione di $\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta$ possiamo assumere senza perdita di generalità per provare che φ rimane all'intero del grafo, che φ parte da η^1 . Ora la U -irriducibilità di η^1 implica che, lungo φ , il sistema non può frammentare. Altrimenti raggiungerebbe una configurazione in $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$ (v. Lemma 2.4.1), e a questo punto la rimozione della particella libera ci darebbe un U -cammino che ci porterebbe sotto il livello di energia di η^1 . Quindi φ percorre soltanto configurazioni connesse, di conseguenza, il sistema tiene lungo φ la stessa energia di volume, e (v. Lemma 2.2.1) lo stesso rettangolo circoscritto $\text{RC}(\eta^1)$. Il perimetro delle configurazioni visitate non può quindi oscillare che tra i due valori p e $p + 2$ e otteniamo il risultato.

Infine, come nella prova della Proposizione 3.3.3, possiamo estendere lo studio dei cammini all'interno del ciclo a quelli che lo lasciano per ottenere ii). \square

Proposizione 3.4.2 *Sia $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$. Se (η^0, η^1) è una discesa di tipo hg dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ allora*

i) $\mathcal{C}_{\eta^1}^U \subset \mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$;

ii) $\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_{\eta^1}^U) \subset \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2) \cup \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$.

Di conseguenza $d(\mathcal{C}_{\eta^1}^U) = U$.

Prova: Identica alla precedente. (Il grafo che contiene i cammini che rimangono all'interno del ciclo è in questo caso banale: ridotto ad un unico vertice, $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$.) \square

Le due ultime proposizioni possono in particolare essere interpretate come segue: dopo una discesa di tipo *hs* o *hg* dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ il sistema si trova in un ciclo senza uscite sotto il livello d'energia dell'altopiano. Perché questo ciclo è di profondità Δ o U soltanto, è come una valle chiusa e poco profonda. Secondo la definizione che segue, il ciclo è una *dolina* dell'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$.

Definizione 3.4.3 Per ogni terna (l_1, l_2, k) in \mathbf{I} chiamiamo dolina dell'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ ogni ciclo \mathcal{C} tale che

$$\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}_k(l_1, l_2).$$

In particolare chiamiamo *hs-doline* le doline $\mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta$ nelle quale cadono le discese (η^0, η^1) di tipo *hs*. Nello stesso modo, le doline $\mathcal{C}_{\eta^1}^U$ raggiunte dal sistema dopo una discesa (η^0, η^1) di tipo *hg* sono chiamate *hg-doline*. Denoteremo con $\mathcal{D}_k^{hs}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{D}_k^{hg}(l_1, l_2)$ le unioni di queste *hs-* e *hg-doline*:

$$\mathcal{D}_k^{hs}(l_1, l_2) := \bigcup_{(\eta^0, \eta^1) \text{ di tipo } hs} \mathcal{C}_{\eta^1}^\Delta,$$

$$\mathcal{D}_k^{hg}(l_1, l_2) := \bigcup_{(\eta^0, \eta^1) \text{ di tipo } hg} \mathcal{C}_{\eta^1}^U.$$

3.5 Discese di tipo g

Proposizione 3.5.1 Sia $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$.

i) Se $k < l_2$ allora ogni discesa di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ cade dentro un *hs-dolina* \mathcal{C} dell'"altopiano successivo" $\mathcal{U}_{k+1}(l_1, l_2)$, e tale che

$$\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}) \subset \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2).$$

ii) Se $k = l_2$ allora ogni discesa di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ cade dentro $\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$.

Proof: Iniziamo con la prova di un risultato preliminare: ogni discesa (η^0, η^1) di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ cade dentro un ciclo \mathcal{C}_η^Δ per qualche configurazione U -irriducibile η in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$. Per definizione di discesa di tipo g , sappiamo che η^1 sta in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ o che η^1 è una configurazione 0-riducibile in $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$. Analizziamo i due casi separatamente.

Nel primo caso, il primo punto della Proposizione 3.3.4 dà la U -irriducibilità di η^1 . Otteniamo quindi il risultato con $\eta := \eta^1$.

Nel secondo caso esiste un 0-cammino che parte da η^1 e riduce l'energia. Il Lemma 2.4.1 indica che il sistema non può frammentare lungo il cammino (altrimenti aumenterebbe l'energia). Di conseguenza l'energia di volume è costante lungo il cammino e la configurazione η raggiunta è connessa e verifica $|\partial\eta| < |\partial\eta^1| = p + 2$. In particolare abbiamo

$$|\partial\eta| \leq p. \quad (3.4)$$

Ma, lungo il 0-cammino, il rettangolo circoscritto non cambia (v. Lemma 2.2.1). Quindi, abbiamo

$$p \leq |\partial\text{RC}(\eta^1)| = |\partial\text{RC}(\eta)| \leq |\partial\eta|.$$

Ciò implica assieme a (3.4) che η appartiene a $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$. Inoltre, la Proposizione 3.3.4-*i*) indica che η è U -irriducibile. Infine abbiamo $\hat{H}(\eta^1) = \hat{H}(\eta) + U$, il che implica che l'inversione del 0-cammino è interamente contenuta, da η a η^1 , dentro \mathcal{C}_η^Δ . Ciò chiude la prova del nostro risultato preliminare.

Consideriamo ora una discesa (η^0, η^1) di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, e il ciclo \mathcal{C}_η^Δ costruito sopra. Se $k < l_2$, la Proposizione 3.4.1 ci dà $\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}_\eta^\Delta) \subset \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$. Inoltre se denotiamo con η' la configurazione ottenuta con l'aggiunto di una particella libera a η , è chiaro che (η', η) è una discesa di tipo hs dall'altopiano $\mathcal{U}_{k+1}(l_1, l_2)$. Di conseguenza \mathcal{C}_η^Δ è una hs -dolina di $\mathcal{U}_{k+1}(l_1, l_2)$ e ciò completa la prova di *i*).

Infine, poiché η^1 appartiene a \mathcal{C}_η^Δ , è raggiunto da un cammino all'interno del ciclo che parte da η . Il Lemma 2.4.1 implica che il sistema non può frammentare lungo tale cammino e otteniamo, utilizzando il Lemma 2.2.1, $\text{RC}(\eta^1) = \text{RC}(\eta)$. Siccome $\eta \in \mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ abbiamo $|\partial\text{RC}(\eta^1)| = 2(l_1 + l_2 + 1)$. E per $k = l_2$ ciò implica (d.i.p. applicata a questo rettangolo) che $\text{RC}(\eta^1) = \eta^1$ e (caso di uguaglianza nella d.i.p.) che $\eta^1 \in \mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$. \square

3.6 Discese in ambito sottocritico, critico e supercritico

Dividiamo l'insieme I in tre parti:

- quella *sottocritica* $I_{\text{sot}} := \{(l_1, l_2, k) \in I : (l_1, l_2, k) < (l_c - 1, l_c, 2)\}$;
- quella *critica* $I_c := \{(l_c - 1, l_c, 2)\}$;
- quella *supercritica* $I_{\text{sup}} := \{(l_1, l_2, k) \in I : (l_1, l_2, k) > (l_c - 1, l_c, 2)\}$;

e chiamiamo sottocritici, critici e supercritici gli oggetti associati a una terna della parte corrispondente di I . Ad esempio l'altopiano critico è

$$\mathcal{U}^* := \mathcal{U}_2(l_c - 1, l_c).$$

Abbiamo detto che le discese di tipo s e g possono essere viste come tentativi più "risolti" per andare a $\underline{0}$ e $\underline{1}_0$ rispetto alle discese di tipo hs e hg . Tuttavia vedremo che *qualunque* discesa (η^0, η^1) – i.e. anche una discesa di tipo g – da un altopiano sottocritico cade nel bacino di attrazione di $\underline{0}$, i.e. $P_{\eta^1}(\tau_{\underline{0}} < \tau_{\underline{1}_0})$ è esponenzialmente vicina a 1. Nello stesso modo *qualunque* discesa (η^0, η^1) da un altopiano supercritico cade nel bacino di attrazione di $\underline{1}_0$: $P_{\eta^1}(\tau_{\underline{0}} < \tau_{\underline{1}_0})$ è esponenzialmente vicina a 0. L'unico caso in cui le discese di tipo s e g porteranno, in modo tipico, allo stato metastabile e allo stato stabile rispettivamente, è il caso critico.

Nei capitoli successivi, per costruire i "massicci" che ci permetteranno di descrivere il nostro tubo di traiettorie di transizione, dovremo introdurre alcune s -doline supercritiche e g -doline sottocritiche. Un massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ può essere visto, in prima approssimazione, come l'unione dell'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, delle sue hs - e hg -doline, e delle sue s -doline se $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ è supercritico, o delle sue g -doline se $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ è sottocritico. Queste s - e g -doline saranno dei cicli principali. La Figura 4.2 pagina 57 schematizza il panorama critico e supercritico che controlla l'evoluzione del sistema.

Capitolo 4

Dal varco allo stato fondamentale

4.1 Carsi e massicci

Iniziamo dall'osservazione seguente: dopo aver seguito una discesa di tipo s da un altopiano supercritico $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ (ricordiamo che, dalla Proposizione 3.3.4, ciò implica $k = 2$), il ciclo principale in cui è sceso il sistema è una dolina dell'altopiano. Infatti è un ciclo di profondità $2\Delta - U$ e il fondo del suo bordo è in $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ (v. Proposizione 3.3.3). Di conseguenza, per ogni $(l_1, l_2, 2) \in I_{sup}$ chiamiamo s -dolina il ciclo principale associato alla coppia (l_1, l_2) e lo denotiamo con $\mathcal{D}_2^s(l_1, l_2)$.

Per ogni altopiano supercritico $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ denoteremo con $\mathcal{D}_k(l_1, l_2)$ l'unione delle sue s -, hs - e hg -doline, i.e., per $(l_1, l_2, k) \in I_{sup}$, definiamo:

$$\mathcal{D}_k(l_1, l_2) := \begin{cases} \mathcal{D}_k^s(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_k^{hs}(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_k^{hg}(l_1, l_2) & \text{se } k = 2; \\ \mathcal{D}_k^{hs}(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_k^{hg}(l_1, l_2) & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

Per l'altopiano supercritico il ciclo principale in cui cadono le discese di tipo s non è una dolina e definiamo:

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_2(l_c - 1, l_c) := \mathcal{D}_2^{hs}(l_c - 1, l_c) \cup \mathcal{D}_2^{hg}(l_c - 1, l_c).$$

Possiamo adesso definire i nostri oggetti fondamentali:

Definizione 4.1.1 (Carsi e massicci) Sia $(l_1, l_2, k) \in I_c \cup I_{sup}$.

Ad ogni η^0 in $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ associamo un carso $\mathcal{K}(\eta^0)$ definito come la componente connessa di η^0 nell'unione $\mathcal{U}_k(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_k(l_1, l_2)$.

Per $k = 2$ il massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2) = \mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è l'unione di tutti i carsi $\mathcal{K}(\eta^0)$ con η^0 in $\overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_1, l_2)$.

Per $k > 2$ il massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è l'unione di tutti i carsi $\mathcal{K}(\eta^0)$ con η^0 in $\mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$.

La profondità di un massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è la differenza

$$d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2)) := \hat{\mathbf{H}}(\mathcal{U}_k(l_1, l_2)) - \hat{\mathbf{H}}(\mathcal{F}(\mathcal{M}_k(l_1, l_2))).$$

Denoteremo il massiccio critico $\mathcal{M}_2(l_c - 1, l_c)$ con \mathcal{M}^* .

Osservazione: chiariremo più avanti l'importanza della distinzione fatta nella definizione precedente fra i casi $k = 2$ e $k > 2$.

Diamo adesso una descrizione geometrica dei cammini all'interno dei massicci $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ (ricordiamo che abbiamo già una descrizione geometrica dei cammini all'interno degli insiemi $\mathcal{D}_2^s(l_1, l_2)$, $\mathcal{D}_k^{hs}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{D}_k^{hg}(l_1, l_2)$). Inoltre proviamo

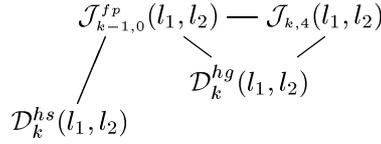
che, in modo tipico, tali cammini escono da $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ entro un tempo di ordine $e^{d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2))\beta}$ e via una discesa di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ (con qualche condizionamento nel caso critico).

A tale scopo, per ogni massiccio \mathcal{M} , denoteremo con $\mathbf{U}^s(\mathcal{M})$ e $\mathbf{U}^g(\mathcal{M})$ gli eventi

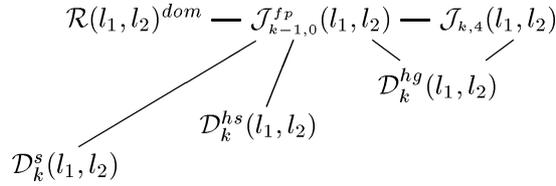
$\mathbf{U}^s(\mathcal{M}) := \{\text{La prima uscita da } \mathcal{M} \text{ è una discesa di tipo } s \text{ dal suo altopiano}\},$

$\mathbf{U}^g(\mathcal{M}) := \{\text{La prima uscita da } \mathcal{M} \text{ è una discesa di tipo } g \text{ dal suo altopiano}\}.$

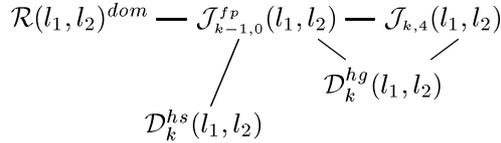
Proposizione 4.1.2 *i) Ogni cammino che rimane all'interno di un massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ con $k > 2$ non può scappare dal grafo*



ogni cammino che rimane all'interno di un massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ con $k = 2$ non può scappare dal grafo



e ogni cammino che rimane all'interno del massiccio critico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$, con $(l_1, l_2, k) = (l_c - 1, l_c, 2)$, non può scappare dal grafo



ii) Per ogni $(l_1, l_2, k) \in \mathbb{I}_c \cup \mathbb{I}_{sup}$, se $\eta^0 \in \mathcal{M}_k(l_1, l_2) \cap \mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, allora esiste una discesa di tipo g da $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ che parte da $\mathcal{K}(\eta^0)$.

iii) Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ un massiccio supercritico.

a) Esiste un $\alpha > 0$ tale che per ogni η in \mathcal{M}

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta((\mathbf{U}^g(\mathcal{M}))^c) \leq -\alpha.$$

b) Per ogni $\delta > 0$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} \geq e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta}) = -\infty.$$

c) Se η appartiene a una delle s-, hs- o hg-doline $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ (si nota che $d(\mathcal{C}) \in \{U; \Delta; 2\Delta - U\}$), allora per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} \leq e^{(d(\mathcal{C})-\delta)\beta}) \leq -\alpha,$$

e

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} < \tau_{\eta'} \text{ per qualche } \eta' \in \mathcal{C}) \leq -\alpha.$$

iv) Tutti i risultati in iii) valgono condizionatamente a $(\mathbf{U}^s(\mathcal{M}^*))^c$ per il massiccio critico \mathcal{M}^* .

Prova: Il primo punto è una conseguenza diretta delle definizioni di $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ e delle proposizioni precedenti (Proposizioni 3.1.1, 3.3.3, 3.4.1 e 3.4.2).

Per costruzione dei carsi e dei massicci il secondo punto deve soltanto esser provato per $\eta^0 \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$. (Ricordiamo che, per $k = 2$, $\overline{\mathcal{L}}_1^{-fp}(l_1, l_2) \subset \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$.) Se la più grande componente connessa di η^0 non è un rettangolo allora il risultato è chiaro: attaccando la particella libera in un angolo esterno del cluster otteniamo un cammino che rimane in $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ fino all'ultimo passo e finisce con una discesa di tipo g .

Se tale η^0 è invece fatto da un rettangolo $\eta \in \mathcal{R}(l, L)$ e da una particella libera allora il cammino mostrato dalla Figura 4.1 rimane in $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ fino all'ultimo passo e arriva in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$ purché $l < L - 1$, i.e. purché η non sia un quasi-quadrato. Ma il caso $l \geq L - 1$ è da escludere: poiché $|\partial\eta| = 2(l_2 + (l_1 + 1))$ (il che segue da $\eta^0 \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)$), avremmo (v. Lemma 2.1.1-i)) $l = l_2$ e $L = l_1 + 1$, sicché

$$|\eta^0| = |\eta| + 1 = lL + 1 = l_2(l_1 + 1) + 1 = l_1l_2 + l_2 + 1,$$

quindi $k = l_2 + 1$, e una contraddizione con $k \leq l_2$ che segue da $(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}$.

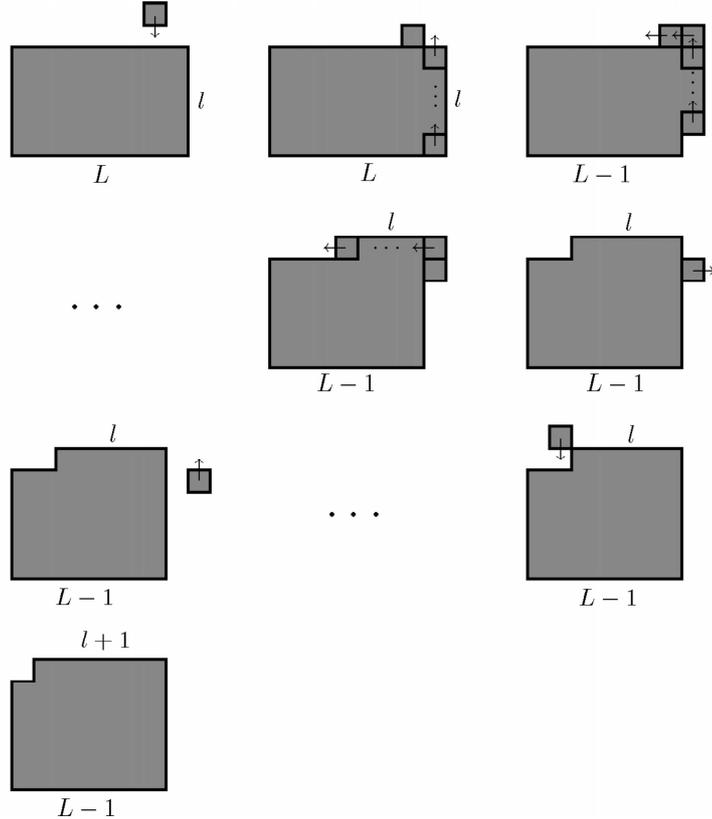


Figura 4.1: C'è sempre una discesa di tipo g .

Per quanto riguarda iii), b) e c) sono delle conseguenze classiche del Teorema 1 della Sezione 2.5. Osserviamo prima che l'argomento precedente ci dà, per ogni η in

$\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$, l'esistenza di un $d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2))$ -cammino da η a $\partial\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$. Utilizzando il Teorema 1 otteniamo quindi

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln p_\beta = 0, \quad (4.1)$$

con

$$p_\beta := \inf_{\eta \in \mathcal{M}} P_\eta \left(\tau_{\partial\mathcal{M}} \leq e^{(d(\mathcal{M})+\delta/2)\beta} \right).$$

Inoltre, dato che possiamo dividere l'intervallo $[0, e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta}]$ in $e^{(\delta/2)\beta}$ intervalli di lunghezza $e^{(d(\mathcal{M})+\delta/2)\beta}$, otteniamo con la proprietà di Markov:

$$\sup_{\eta \in \mathcal{M}} P_\eta \left(\tau_{\partial\mathcal{M}} \geq e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta} \right) \leq (1 - p_\beta)^{\exp\{(\delta/2)\beta\}}.$$

Con (4.1) otteniamo quindi, per ogni η in $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta \left(\tau_{\partial\mathcal{M}} \geq e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta} \right) = -\infty.$$

Secondo, se $\eta \in \mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ non è in $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ ma dentro una dolina \mathcal{C} , il sistema che parte da η dovrà lasciare la dolina prima di lasciare $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$. Ciò non accadrà, per ogni $\delta > 0$ e i modo tipico, prima dei tempi $e^{(d(\mathcal{C})-\delta)\beta}$ e $\tau_{\eta'}$ per qualunque $\eta' \in \mathcal{C}$ (v. Teorema 1.)

A questo punto dobbiamo soltanto provare *a)* per concludere la prova di *iii)*. Per $\eta \in \mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ c'è un $\eta^0 \in \mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ tale che $\eta \in \mathcal{K}(\eta^0)$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ per avere

$$\hat{\mathbb{H}}(\eta^0) + \varepsilon < \inf_{\eta \in \partial\mathcal{D} \setminus \mathcal{F}(\partial\mathcal{D})} \hat{\mathbb{H}}(\eta) \wedge \inf \hat{\mathbb{H}} \left(\left\{ \eta \in \partial\mathcal{U}_k(l_1, l_2) : \hat{\mathbb{H}}(\eta) > \hat{\mathbb{H}}(\eta^0) \right\} \right),$$

con $\mathcal{D} := \mathcal{D}_k(l_1, l_2)$, e consideriamo il ciclo $\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon$ (qui $\eta^0 \notin \mathcal{F}(\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon)$). Esso contiene tutto il carso $\mathcal{K}(\eta^0)$. Inoltre, ogni cammino in $\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon$ non può lasciare né $\mathcal{D}_k(l_1, l_2)$ né $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ via uno stato di energia più grande di $\hat{\mathbb{H}}(\mathcal{U}_k(l_1, l_2))$. Quindi (v. Proposizione 3.2.2) $\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon \cap \partial\mathcal{K}(\eta^0)$ è l'insieme dei punti d'arrivo delle discese di tipo *g* che partono da $\mathcal{K}(\eta^0)$. Il punto *ii)* indica che quest'insieme non è vuoto. Sicché i cammini che partono da η lo visiteranno in modo tipico prima di lasciare $\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon$, i.e., lasceranno $\mathcal{K}(\eta^0)$ mediante una discesa di tipo *g*. Denotiamo con $\mathbf{U}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{K}(\eta^0))$ quest'evento tipico, e otteniamo

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta \left((\mathbf{U}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{M}))^c \right) = \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta \left((\mathbf{U}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{K}(\eta^0)))^c \right) < 0.$$

E siccome $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è un insieme finito ciò chiude la prova di *iii)*.

Il caso critico si tratta nello stesso modo. L'unica differenza è che l'intersezione $\mathcal{C}_{\eta^0}^\varepsilon \cap \partial\mathcal{K}(\eta^0)$ diventa, in questo caso, l'insieme dei punti di arrivo delle discese di tipo *g* o *s* che partono da $\mathcal{K}(\eta^0)$. Cosicché “tipico” deve essere inteso condizionatamente a $(\mathbf{U}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{M}^*))^c$. \square

4.2 Tubo supercritico

Diamo adesso un tubo di traiettorie seguite, in modo tipico, dal sistema se parte da \mathcal{G}^* e non lascia il massiccio critico \mathcal{M}^* mediante una discesa di tipo *s* da \mathcal{U}^* . In altre parole condizioneremo a $(\mathbf{U}^{\mathfrak{s}}(\mathcal{M}^*))^c$.

Definizione 4.2.1 Per ogni $\delta > 0$ definiamo il fascio supercritico $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$, come l'insieme dei cammini φ che vanno da \mathcal{G}^* a $\underline{1}_0$ e tali che:

i) $\tau_{\underline{1}_0}(\varphi) = |\varphi|$;

ii) φ segue

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* \subset \mathcal{M}^* &= \mathcal{M}_2(l_c - 1, l_c) \rightarrow \mathcal{M}_3(l_c - 1, l_c) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow \mathcal{M}_{l_c}(l_c - 1, l_c) \rightarrow \mathcal{R}(l_c, l_c) \subset \mathcal{M}_2(l_c, l_c) \rightarrow \mathcal{M}_3(l_c, l_c) \rightarrow \cdots \\ &\cdots \rightarrow \mathcal{M}_2(l_1, l_2) \rightarrow \mathcal{M}_3(l_1, l_2) \rightarrow \cdots \\ &\cdots \rightarrow \mathcal{M}_{l_2}(l_1, l_2) \rightarrow \mathcal{R}(l_2, l_1 + 1) \subset \mathcal{M}_2(l_2, l_1 + 1) \rightarrow \cdots \\ &\cdots \rightarrow \mathcal{M}_{l_0}(l_0 - 1, l_0) \rightarrow \{\underline{1}_0\} \end{aligned}$$

con $l_0 = \sqrt{|\Lambda_0|}$;

iii) per ogni massiccio critico o supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ il tempo trascorso da φ nel corso della sua prima visita in $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è più piccolo di $e^{(d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2)) + \delta)\beta}$;

iv) per ogni massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ il tempo trascorso da φ nel corso della sua prima visita in $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è più grande di $e^{(d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2)) - \delta)\beta}$;

v) φ visita l'insieme del ciclo principale $\mathcal{D}_2^s(l_1, l_2)$ per ogni $(l_1, l_2) > (l_c - 1, l_c)$.

Si veda Figura 4.2 per un'illustrazione.

Proposizione 4.2.2 Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che, per ogni configurazione $\eta^* \in \mathcal{G}^*$:

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^*} ((\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta)^c | (\mathbf{U}^s(\mathcal{M}^*))^c) \leq -\alpha.$$

Prova: Consideriamo una discesa di tipo g da un altopiano critico o supercritico. Sappiamo che, se $k < l_2$, cade dentro una hs -dolina \mathcal{C} di $\mathcal{U}_{k+1}(l_1, l_2)$ tale che $\mathcal{F}(\partial\mathcal{C}) \subset \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$ (v. Proposizione 3.5.1). Di conseguenza la dolina è contenuta in $\mathcal{M}_{k+1}(l_1, l_2)$.

Nello stesso modo, se $k = l_2$ la discesa cade dentro $\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$ (v. Proposizione 3.5.1), quindi nella s -dolina di $\mathcal{U}_2(l_2, l_1 + 1)$. E la dolina è contenuta in $\mathcal{M}_2(l_2, l_1 + 1)$ visto che il fondo del suo bordo è contenuto in $\overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_2, l_1 + 1)$ (v. Proposizione 3.3.3).

Per concludere la prova basta allora utilizzare la proposizione precedente. \square

Osservazione: Siamo stati attenti, al terzo e al quarto punto della definizione di $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$, a scrivere la *prima* visita nel massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ perché i massicci supercritici $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ contengono alcuni dei massicci supercritici $\mathcal{M}_k(l_2 - 1, l_1)$. Più accuratamente, con

$$\tilde{\mathbf{I}}_{sup} := \{(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}_{sup} : k \leq l_2 - l_c + 2\},$$

abbiamo il risultato seguente.

Proposizione 4.2.3 Un massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ tale che $(l_1, l_2, k) \notin \tilde{\mathbf{I}}_{sup}$ è contenuto nel ciclo principale $\mathcal{D}_2^s(l_2, l_1 + 1) \subset \mathcal{M}_2(l_2, l_1 + 1)$.

Due massicci critici o supercritici $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ e $\mathcal{M}_{k'}(l'_1, l'_2)$ tali che (l_1, l_2, k) e (l'_1, l'_2, k') appartengono a $\mathbf{I}_c \cup \tilde{\mathbf{I}}_{sup}$ hanno un'intersezione vuota purché siano distinti (l_1, l_2, k) e (l'_1, l'_2, k') .

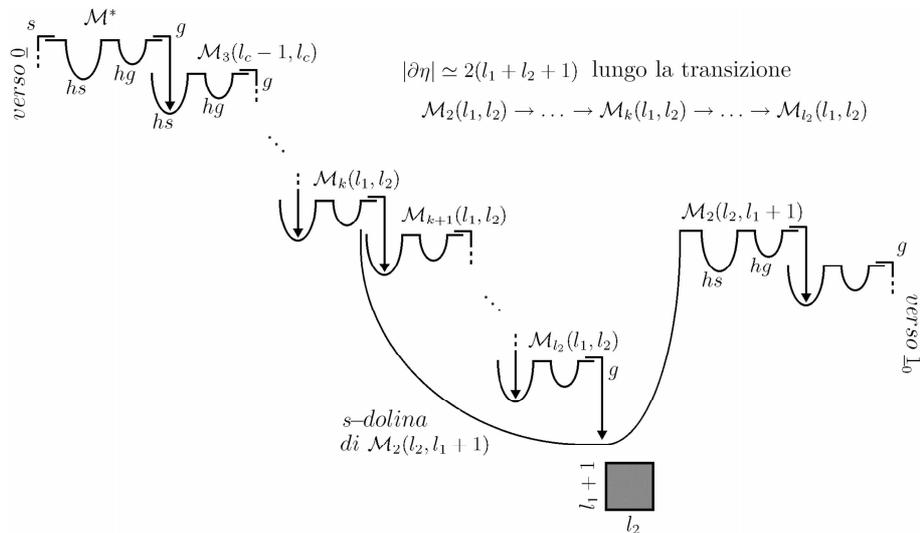


Figura 4.2: Le traiettorie in $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$ lasciano ogni massiccio supercritico mediante una discesa di tipo g finché non abbiano raggiunto lo stato stabile.

Prova: Sia η in un massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ tale che $k > l_2 - l_c + 2$. Consideriamo il cammino φ che parte da η e segue

$$\mathcal{M}_k(l_1, l_2) \longrightarrow \mathcal{M}_{k+1}(l_1, l_2) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{M}_{l_2}(l_1, l_2) \longrightarrow \mathcal{R}(l_2, l_1 + 1).$$

Un tale cammino esiste sempre perché c'è una discesa di tipo g da ogni massiccio supercritico, e abbiamo visto nella prova della Proposizione 4.2.2 che tale discesa raggiungeva il massiccio successivo. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sup \hat{H}(\varphi) &= \hat{H}(\mathcal{U}_k(l_1, l_2)) \\ &= -(2U - \Delta)(l_1 l_2 + k - 1) + \frac{U}{2}(2(l_1 + l_2 + 1)) + \Delta \\ &= \hat{H}(\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)) + (2U - \Delta)(l_2 - k + 1) + \Delta \\ &\leq \hat{H}(\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)) + (2U - \Delta)(l_c - 2) + \Delta \\ &< \hat{H}(\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)) + 2\Delta - U \\ &= \hat{H}(\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)) + r(l_2, l_1 + 1) \end{aligned}$$

e otteniamo così $\eta \in \mathcal{D}_2^s(l_2, l_1 + 1)$.

Assumiamo adesso che (l_1, l_2, k) e (l'_1, l'_2, k') sono due terne distinte che appartengono a $\mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_{sup}$. Assumiamo, ad esempio, che $(l_1, l_2, k) < (l'_1, l'_2, k')$. È immediato verificare

$$\hat{H}(\mathcal{U}_k(l_1, l_2)) > \hat{H}(\mathcal{U}_{k'}(l'_1, l'_2)). \quad (4.2)$$

Di conseguenza, se esistesse una configurazione η nell'intersezione

$$\mathcal{M}_k(l_1, l_2) \cap \mathcal{M}_{k'}(l'_1, l'_2)$$

allora η appartenerrebbe a una dolina di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$.

Inoltre, esiste un cammino che parte da η e lascia $\mathcal{M}_{k'}(l'_1, l'_2)$ mediante una discesa di tipo g . Tale cammino raggiunge la varietà $\mathcal{N}'_{l'_1 l'_2 + k'}$ e, poiché

$$l'_1 l'_2 + k' > l_1 l_2 + k,$$

esce da $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ senza andare oltre il livello di energia $\hat{H}(\mathcal{U}_k(l'_1, l'_2))$. Ma ciò contraddice, assieme a (4.2), il fatto che η appartiene a una dolina di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$. \square

In quanto conseguenza di quest'ultimo risultato, un cammino dato φ in $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$ segue una successione ordinata di carsi ($\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$) con (l_1, l_2, k) che percorre l'insieme $\mathbb{I}_c \cup \tilde{\mathbb{I}}_{\text{sup}}$ e tale che, per ogni (l_1, l_2, k) in $\mathbb{I}_c \cup \tilde{\mathbb{I}}_{\text{sup}}$, $\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$ sia una componente connessa di $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$. Per ogni (l_1, l_2, k) in $\mathbb{I}_c \cup \tilde{\mathbb{I}}_{\text{sup}}$, la parte di φ che rimane in $\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$ è una realizzazione di un cammino di cicli alla stessa altezza (doline e singole configurazioni di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$). Per $k = 2$ e $(l_1, l_2) \neq (l_c - 1, l_c)$ il primo di questi cicli è il ciclo principale $\mathcal{D}_2^s(l_1, l_2)$. La concatenazione di questi cammini di cicli è un cammino di cicli in discesa Φ di cui φ è una realizzazione.

Queste successioni ordinate ($\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$) e questi cammini di cicli Φ sono le successioni di insiemi di permanenza e i cammini di cicli che avremmo ottenuto seguendo i metodi di [12] o [17] per descrivere la parte supercritica delle transizioni tipiche dalla metastabilità alla stabilità. Tale descrizione può essere vista come approssimazione di $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$, poiché $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$ descrive anche la prima discesa nel fondo di ogni ciclo principale supercritico (v. Figura 4.2).

Capitolo 5

Dal varco alla configurazione vuota

5.1 Discese di tipo g e cicli principali

Nella Sezione 3.3 abbiamo visto che le discese di tipo s da un qualunque altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ cadevano sempre dentro un ciclo principale. Abbiamo un risultato analogo per le discese di tipo g dagli altipiani *sottocritici*.

Proposizione 5.1.1 *Sia $(l_1, l_2, k) \in \mathbb{I}_{\text{tot}}$. Ogni discesa di tipo g dall'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ cade dentro il ciclo principale $\mathcal{C}_\eta^{r(l_2, l_1+1)}$, con η un quasi-quadrato in $\mathcal{R}(l_2, l_1+1)$.*

Prova: Per qualunque (l_1, l_2, k) in \mathbb{I}_{tot} con $k > 2$ e per ogni η nell'altopiano $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, denotiamo con $\tilde{\mathcal{K}}(\eta)$ la componente connessa di η nell'unione di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ con le sue hs - e hg -doline. Denotiamo anche con $\tilde{\mathcal{M}}_k(l_1, l_2)$ l'unione

$$\tilde{\mathcal{M}}_k(l_1, l_2) := \bigcup_{\eta \in \mathcal{J}_{k-1,0}^{fp}(l_1, l_2)} \tilde{\mathcal{K}}(\eta).$$

Utilizzando la Proposizione 3.5.1, vediamo che ogni discesa di tipo g da un altopiano sottocritico $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ raggiunge $\tilde{\mathcal{M}}_{k+1}(l_1, l_2)$ se $k < l_2$, e $\mathcal{R}(l_2, l_1+1)$ se $k = l_2$. Inoltre, per ogni $(l_1, l_2, k) \in \mathbb{I}_{\text{tot}}$ tale che $k > 2$, possiamo mostrare, come nella prova della Proposizione 4.1.2-ii), che ogni $\tilde{\mathcal{K}}(\eta) \subset \tilde{\mathcal{M}}_k(l_1, l_2)$ può esser lasciato da una discesa di tipo g .

Di conseguenza, se (η^0, η^1) è una discesa di tipo g dall'altopiano sottocritico $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$, esiste una configurazione $\eta \in \mathcal{R}(l_2, l_1+1)$ e un cammino $\varphi : \eta^1 \rightsquigarrow \eta$ che segue

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k+1}(l_1, l_2) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k+2}(l_1, l_2) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{l_2}(l_1, l_2) \rightarrow \mathcal{R}(l_2, l_1+1).$$

Come nella prova della prima parte della Proposizione 4.2.3 mostriamo

$$\sup \hat{\mathbb{H}}(\varphi) < \hat{\mathbb{H}}(\eta) + r(l_2, l_1+1)$$

e otteniamo che η^1 appartiene al ciclo principale $\mathcal{C}_\eta^{r(l_2, l_1+1)}$. \square

5.2 Carsi e massicci

Costruiamo adesso i carsi e i massicci sottocritici partendo dagli altipiani sottocritici $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$. Osserviamo prima che il ciclo principale raggiunto da ogni discesa di

tipo g da un altopiano sottocritico $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ è una dolina dell'altopiano: è un ciclo di profondità più piccola di $2\Delta - U$, e il fondo del suo bordo è contenuto in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ (v. Proposizione 3.3.3). Lo chiameremo quindi g -dolina e lo denoteremo con $\mathcal{D}_2^g(l_1, l_2)$.

Denotiamo con $\mathcal{D}_2(l_1, l_2)$ l'unione di tutte le hs -, hg - e g -doline dell'altopiano sottocritico $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$:

$$\mathcal{D}_2(l_1, l_2) := \mathcal{D}_2^{hs}(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_2^{hg}(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_2^g(l_1, l_2),$$

e definiamo i carsi e i massicci sottocritici.

Definizione 5.2.1 (Carsi e massicci) Sia $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ con $(l_1, l_2) < (l_c - 1, l_c)$.

Ad ogni η^0 in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ associamo il carso $\mathcal{K}(\eta^0)$ definito come la componente connessa di η^0 in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_2(l_1, l_2)$.

Il massiccio $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è l'unione dei carsi $\mathcal{K}(\eta^0)$ tali che $\eta^0 \in \overline{\mathcal{L}_1}^{fp}(l_1, l_2)$. La sua profondità $d(\mathcal{M}_2(l_1, l_2))$ è la differenza

$$d(\mathcal{M}_2(l_1, l_2)) := \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{U}_2(l_1, l_2)) - \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(\mathcal{M}_2(l_1, l_2))).$$

Come prima abbiamo un controllo geometrico dei cammini all'interno dei massicci critici e sottocritici. Affermiamo anche che, in modo tipico, questi cammini lasciano i massicci via delle discese di tipo s (con qualche condizionamento per il caso critico):

Proposizione 5.2.2 *i) Ogni cammino all'interno di un massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ non può scappare dal grafo*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} & \text{---} & \mathcal{J}_{1,0}^{fp}(l_1, l_2) & \text{---} & \mathcal{J}_{2,4}(l_1, l_2) \\ & & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & & \mathcal{D}_2^{hs}(l_1, l_2) & & \mathcal{D}_2^g(l_1, l_2) \\ & & & \searrow & \swarrow \\ & & & & \mathcal{D}_2^{hg}(l_1, l_2) \end{array}$$

ii) Per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ con $(l_1, l_2) \leq (l_c - 1, l_c)$, se $\eta^0 \in \mathcal{M}_2(l_1, l_2) \cap \mathcal{U}_2(l_1, l_2)$, allora esiste una discesa di tipo s dall'altopiano $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ che parte da $\mathcal{K}(\eta^0)$.

iii) Per ogni massiccio sottocritico $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ esiste un $\alpha > 0$ tale che, per ogni η in \mathcal{M}

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta((\mathbf{U}^s(\mathcal{M}))^c) \leq -\alpha,$$

e, per ogni $\delta > 0$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} \geq e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta}) = -\infty.$$

Inoltre, se η appartiene a una delle hs -, hg - o g -doline $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ di $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$, allora, per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} \leq e^{(d(\mathcal{C})-\delta)\beta}) \leq -\alpha,$$

e

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_\eta(\tau_{\partial\mathcal{M}} < \tau_{\eta'} \text{ per qualche } \eta' \text{ in } \mathcal{C}) \leq -\alpha.$$

iv) Tutti i risultati in iii) valgono condizionatamente a $(\mathbf{U}^s(\mathcal{M}^*))^c$ per il massiccio critico \mathcal{M}^* .

Prova: I punti *i*), *iii*) e *iv*) possono essere dimostrati come nella prova della Proposizione 4.1.2, invertendo i ruoli delle discese di tipo *s* e *g*. Ci basta quindi scrivere la prova del punto *ii*).

È sufficiente provare il risultato nel caso $\eta^0 \in \overline{\mathcal{L}}_1^{fp}(l_1, l_2)$. È quindi sufficiente vedere che le configurazioni in $\overline{\mathcal{L}}_1(l_1, l_2)$ sono *U*-riducibile. Per definizione sono *U*-equivalenti a qualche configurazione in $\mathcal{L}_1(l_1, l_2)$, ovviamente *U*-riducibile. Ciò chiude la prova. \square

5.3 Tubo di contrazione

Diamo adesso un tubo di traiettorie da \mathcal{G}^* a $\underline{\mathcal{Q}}$ seguite, in modo tipico, dal sistema se parte \mathcal{G}^* e non lascia \mathcal{M}^* via una discesa di tipo *g*.

Definizione 5.3.1 Per ogni $\delta > 0$ definiamo il fascio sottocritico $\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta$, come l'insieme dei cammini φ da \mathcal{G}^* a $\underline{\mathcal{Q}}$ tali che:

i) $\tau_{\underline{\mathcal{Q}}}(\varphi) = |\varphi|$;

ii) φ segue

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* \subset \mathcal{M}^* &= \mathcal{M}_2(l_c - 1, l_c) \rightarrow \mathcal{M}_2(l_c - 1, l_c - 1) \\ &\rightarrow \mathcal{M}_2(l_c - 2, l_c - 1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{M}_2(l_1, l_2) \rightarrow \mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1) \rightarrow \cdots \\ &\cdots \rightarrow \mathcal{M}_2(1, 2) \rightarrow \mathcal{E} \setminus \{\underline{\mathcal{Q}}\} \rightarrow \{\underline{\mathcal{Q}}\}; \end{aligned}$$

iii) per ogni massiccio critico o sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$, il tempo trascorso da φ all'interno di $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è più piccolo di $e^{(d(\mathcal{M}_2(l_1, l_2)) + \delta)\beta}$;

iv) per ogni massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$, il tempo trascorso da φ all'interno di $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è più grande di $e^{(d(\mathcal{M}_2(l_1, l_2)) - \delta)\beta}$;

v) φ visita l'insieme del ciclo principale $\mathcal{D}_2^g(l_1, l_2)$ per ogni $(l_1, l_2) > (l_c - 1, l_c)$;

vi) φ trascorre un tempo più piccolo di $e^{(U + \delta)\beta}$ in $\mathcal{E} \setminus \{\underline{\mathcal{Q}}\}$;

vii) φ trascorre in $\mathcal{E} \setminus \{\underline{\mathcal{Q}}\}$ un tempo più grande di $e^{(U - \delta)\beta}$ prima di raggiungere $\underline{\mathcal{Q}}$.

Osservazione: Come nel capitolo precedente ogni cammino φ in $\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta$ è una realizzazione di un cammino di cicli in discesa che contiene, tra altri cicli, tutti cicli principali sottocritici. Ma la definizione di $\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta$ non descrive la prima discesa verso il fondo di ogni ciclo principale, e si può verificare che $\{\underline{\mathcal{Q}}\}$, $\mathcal{E} \setminus \{\underline{\mathcal{Q}}\}$ e i massicci sottocritici e critici sono degli insiemi di configurazioni disgiunti.

Proposizione 5.3.2 Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che, per ogni configurazione $\eta^* \in \mathcal{G}^*$:

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^*} ((\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta)^c | (\mathbf{U}^g(\mathcal{M}^*))^c) \leq -\alpha.$$

Prova: Sappiamo che per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q} \setminus \{(1, 2)\}$ le discese di tipo *s* dall'altopiano $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ cadono dentro il ciclo principale \mathcal{C}_η^s con $\eta \in \mathcal{R}(l_1, l_2)$ (Proposizione 3.3.4). Abbiamo osservato nella prova della Proposizione 3.3.3 che, se $l_1 \leq l_c - 1$, il fondo del bordo di tale ciclo principale incontra $\mathcal{L}_1^{fp}(l_2 - 1, l_1)$. Da ciò possiamo dedurre che, per $(1, 2) < (l_1, l_2) \leq (l_c - 1, l_c)$, ogni discesa di tipo *s* dall'altopiano $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ cade dentro una dolina di profondità $d(\mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1))$ dell'altopiano $\mathcal{U}_2(l_2 - 1, l_1)$ e contenuta nel massiccio $\mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1)$.

Inoltre, le discese di tipo *s* dall'altopiano $\mathcal{U}_2(1, 2)$ cadono dentro $\overline{\mathcal{L}}_1(1, 2) \subset \mathcal{E} \setminus \{\underline{\mathcal{Q}}\}$ (v. Proposizione 3.3.5). La stessa Proposizione 3.3.5 indica anche che esiste, a

partire da ogni configurazione in \mathcal{E} , un U -cammino che raggiunge $\underline{0}$. Sappiamo anche che se il sistema parte da una qualunque configurazione in \mathcal{E} andrà, in modo tipico, in $\underline{0}$ prima di lasciare \mathcal{E} . Possiamo quindi provare, nello stesso modo in cui abbiamo stabilito il controllo, dato dalla Proposizione 4.1.2, del tempo trascorso nei massicci, che, di nuovo in modo tipico, il sistema raggiungerà $\underline{0}$ entro il tempo $e^{(U+\delta)\beta}$.

Possiamo anche affermare che se il sistema parte da $\overline{\mathcal{L}_1}(1, 2)$, non raggiungerà $\underline{0}$, in modo tipico, entro il tempo $e^{(U-\delta)\beta}$. Infatti, raggiungerà $\underline{0}$, in modo tipico, prima di lasciare \mathcal{E} , ma la Proposizione 3.3.5 indica allora che dovrà prima uscire da un ciclo di profondità U . Il Teorema 1 dà quindi il risultato.

A questo punto basta utilizzare la Proposizione 5.2.2 per concludere. \square

Capitolo 6

Dalla metastabilità alla stabilità

6.1 Bacino di metastabilità e tempo di fuga

Chiamiamo *bacino di metastabilità* il più grande ciclo \mathcal{W} che contiene $\underline{0}$ e le cui configurazioni hanno un'energia più piccola di $\hat{H}(\mathcal{G}^*)$, cioè

$$\mathcal{W} := \mathcal{C}_{\underline{0}}^{\Gamma}.$$

Si noti che l'argomento utilizzato per mostrare che \mathcal{G}^* era un varco verso la stabilità ci dà:

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_{(l_c-1)l_c+1}$$

(si veda Sezione 2.6). Denotiamo allora con $\overline{\mathcal{W}}$ l'insieme delle configurazioni con non più di $(l_c - 1)l_c + 1$ particelle e che possono essere raggiunte da un cammino che parte da $\underline{0}$ e non va oltre il livello d'energia Γ .

Proposizione 6.1.1 *i) $\mathcal{F}(\partial\overline{\mathcal{W}}) = \mathcal{G}^*$ e $\hat{H}(\mathcal{F}(\partial\overline{\mathcal{W}})) - \hat{H}(\mathcal{F}(\overline{\mathcal{W}})) = \Gamma$.*

ii) Per ogni $\delta > 0$,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left(\tau_{\partial(\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^*)} \geq e^{(\Gamma+\delta)\beta} \right) = -\infty.$$

iii) Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$, tale che per β abbastanza grande, ogni cammino che parte da $\underline{0}$ uscirà da $\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^$ seguendo un cammino in $\mathbf{F}_{\text{sup}}^{\delta}$ con probabilità più grande di $1 - e^{-\alpha\beta}$.*

iv) Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$ tale che

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left(\tau_{\underline{1}_0} \notin \left[e^{(\Gamma-\delta)\beta}, e^{(\Gamma+\delta)\beta} \right] \right) \leq -\alpha.$$

Osservazioni: Nel caso $U/(2U - \Delta) \notin \mathbb{Q}$ le identità del punto *i)* sarebbero state vere con \mathcal{W} invece di $\overline{\mathcal{W}}$. In questo caso non sarebbe stato necessario introdurre l'insieme $\overline{\mathcal{W}}$ e avremmo potuto lavorare con \mathcal{W} soltanto.

L'ultimo punto è stato essenzialmente provato in [21]. Seguendo [24] può essere derivato dai risultati della Sezione 2.6 e da alcune proprietà di ricorrenza. Appare qui come semplice conseguenza dei due punti precedenti e del Teorema 1.

Prova della proposizione: Sia η una configurazione nel bordo di $\overline{\mathcal{W}}$. η è raggiunta partendo da $\underline{0}$ da un cammino che rimane, fino all'ultimo passo in $\overline{\mathcal{W}}$. Quindi,

per costruzione, o $\hat{H}(\eta) > \Gamma$, oppure $\hat{H}(\eta) \leq \Gamma$ e $|\eta| = (l_c - 1)l_c + 2$. Si noti che le configurazioni in \mathcal{G}^* sono esempi di configurazioni in $\partial\overline{\mathcal{W}}$ che corrispondono all'ultimo caso. Lo stesso argomento della Sezione 2.6 mostra che non ci sono altri esempi. Concludiamo che $\mathcal{F}(\partial\overline{\mathcal{W}}) = \mathcal{G}^*$.

Per chiudere la prova del primo punto basta dimostrare che, per ogni η tale che $0 < |\eta| \leq (l_c - 1)l_c + 1$, abbiamo $\hat{H}(\eta) > 0$. Ciò è ovvio per $|\eta| \leq 2$ e se $|\eta| \geq 3$ è una conseguenza diretta dell'osservazione che seguiva il Lemma 2.1.1.

Proviamo adesso il secondo punto. $\overline{\mathcal{W}}$ è un insieme connesso il cui fondo del bordo sta in \mathcal{U}^* e, conseguenza del primo punto, per ogni configurazione in $\overline{\mathcal{W}}$, esiste un Γ -cammino che raggiunge $\mathcal{F}(\partial\overline{\mathcal{W}})$. Possiamo quindi vedere in $\overline{\mathcal{W}}$ una sorta di dolina dell'altopiano critico, anche se non è un semplice ciclo, e non è così poco profondo: la sua "profondità" è uguale a Γ e possiamo vedere che l'ipotesi $\Delta > 3U/2$ implica $\Gamma > 2\Delta - U$. Quindi, nello stesso modo in cui abbiamo costruito i carsi, possiamo considerare l'"insieme di permanenza" \mathcal{Q} , dato dalla più grande componente connessa in $\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^*$ che contiene il ciclo \mathcal{W} . (In realtà $\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^*$ è connesso e coincide con \mathcal{Q} .) Si noti che la sua "profondità" è

$$d(\mathcal{Q}) := \hat{H}(\mathcal{U}^*) - \hat{H}(\mathcal{F}(\mathcal{Q})) = \Gamma.$$

Otteniamo quindi il punto *ii*) nello stesso modo in cui abbiamo ottenuto la stima su $\{\tau_{\partial\mathcal{M}} \geq e^{(d(\mathcal{M})+\delta)\beta}\}$ per un massiccio supercritico \mathcal{M} (Proposizione 4.1.2).

Nello stesso modo, possiamo provare che, partendo da una qualunque configurazione in \mathcal{Q} il sistema lo lascerà, in modo tipico, via una discesa di tipo g da \mathcal{U}^* . Possiamo quindi provare il terzo punto utilizzando la Proposizione 4.1.2, come abbiamo provato la proposizione che descriveva le traiettorie tipiche da \mathcal{G}^* allo stato stabile (Proposizione 4.2.2).

Dopo aver osservato che la profondità di qualunque massiccio supercritico è minore o uguale a $2\Delta - U < \Gamma$, basta utilizzare i punti *ii*) e *iii*) della proposizione con $\delta/2$ invece di δ per ottenere la stima dall'alto di $\tau_{\underline{1}_0}$.

La stima dal basso di $\tau_{\underline{1}_0}$ è una conseguenza del Teorema 1: prima di raggiungere $\underline{1}_0$ il sistema deve lasciare \mathcal{W} , ciclo di profondità Γ , e, in modo tipico, ciò non accade entro un tempo $e^{(\Gamma-\delta)\beta}$. \square

6.2 Tubo di traiettorie di transizione tipiche

Diamo qui il nostro tubo di traiettorie di transizione. Per ogni $\delta > 0$, definiamo \mathbf{TT}^δ come l'insieme dei cammini $\varphi : \underline{0} \rightsquigarrow \underline{1}_0$ ottenuti via concatenazione di un cammino in $\overleftarrow{\mathbf{F}}_{\text{tot}}^\delta$ e di un cammino in $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$. Mostreremo che \mathbf{TT}^δ è un tubo di traiettorie di transizione tipiche.

Osservazione: Vedremo che la procedura di costruzione di \mathbf{TT}^δ esclude *a priori* pezzi interi dei nostri massicci (più accuratamente, carsi interi) dall'insieme delle configurazioni lungo i cammini di \mathbf{TT}^δ . Questo è un punto centrale della discussione sui nostri risultati. Torneremo sul problema nel prossimo capitolo.

Ricordiamo che

$$\theta := \sup \{k \leq \tau_{\underline{1}_0} : \eta_k = \underline{0}\}.$$

Possiamo adesso enunciare il nostro risultato principale.

Teorema 2 *Per ogni $\delta > 0$, esiste un $\alpha > 0$, tale che per β abbastanza grande, con probabilità più grande di $1 - e^{-\alpha\beta}$, il cammino seguito fra θ e $\tau_{\underline{1}_0}$ dal processo che parte da $\underline{0}$ appartiene a \mathbf{TT}^δ .*

Ciò implica in particolare che, per β abbastanza grande,

$$P_{\underline{0}}\left(e^{(2\Delta-U-2\delta)\beta} \leq \tau_{\underline{1}_0} - \theta \leq e^{(2\Delta-U+2\delta)\beta}\right) \geq 1 - e^{-\alpha\beta}.$$

Osservazione: Il teorema indica in particolare che, in modo tipico, il sistema visita successivamente e completamente gli insiemi $\mathcal{R}(2,2)$, $\mathcal{R}(2,3)$, $\mathcal{R}(3,3)$, \dots , $\{\underline{1}_0\}$ nel corso del processo di nucleazione. Infatti, per ogni $\delta > 0$, i cammini di \mathbf{TT}^δ visitano successivamente e completamente i cicli principali che contengono $\mathcal{R}(2,2)$, $\mathcal{R}(2,3)$, $\mathcal{R}(3,3)$, \dots , $\{\underline{1}_0\}$. Cioè l'immagine di un cluster che vaga a cresce di quasi-quadrato in quasi-quadrato costituisce uno schema di nucleazione tipica.

Osserviamo anche che la prova del teorema può essere ottenuta dai nostri risultati precedenti utilizzando l'argomento basato sulla reversibilità del processo, descritto in [11] e [27]-Chapter 6. Diamo qui una prova alternativa adattata alla nostra situazione particolare.

Prova del teorema: Sia $\delta > 0$. Dalla Proposizione 6.1.1, sappiamo che, in modo tipico, il processo segue una traiettoria come descritta al punto *iii*) della proposizione e lascia $\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^*$ entro il tempo $e^{(\Gamma+\delta')\beta}$, per qualche δ' che sceglieremo più tardi. È quindi sufficiente mostrare che, in modo tipico, il cammino seguito dal processo fino a $\tau_{\theta, \mathcal{G}^*}$, con

$$\tau_{\theta, \mathcal{G}^*} := \inf \{k \geq \theta : \eta_k \in \mathcal{G}^*\},$$

finisce con un cammino in $\overleftarrow{\mathbf{F}}_{\text{tot}}^\delta$.

Abbiamo quindi da stimare dall'alto

$$p_\beta := P_{\underline{0}}\left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\theta, \mathcal{G}^*}} \in \mathbf{D}_\beta\right),$$

dove \mathbf{D}_β è l'insieme dei cammini φ da $\underline{0}$ a \mathcal{G}^* che rimangono all'interno di $\overline{\mathcal{W}} \cup \mathcal{M}^*$, hanno una lunghezza $|\varphi|$ più piccola di $m_\beta := e^{(\Gamma+\delta')\beta}$ e non finiscono con un cammino in $\overleftarrow{\mathbf{F}}_{\text{tot}}^\delta$. Utilizzando la reversibilità del processo rispetto alla misura di Gibbs $\hat{\mu}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\underline{0})p_\beta &\leq \hat{\mu}(\underline{0}) \sum_{1 \leq n \leq m_\beta} \sum_{\substack{\varphi \in \mathbf{D}_\beta \\ |\varphi|=n}} P_{\underline{0}}((\eta_k)_{0 \leq k \leq n} = \varphi) \\ &= \hat{\mu}(\underline{0})e^{-\Gamma\beta} \sum_{1 \leq n \leq m_\beta} \sum_{\substack{\varphi \in \mathbf{D}_\beta \\ |\varphi|=n}} P_{\varphi_n}((\eta_k)_{0 \leq k \leq n} = \overleftarrow{\varphi}) \\ &\leq \hat{\mu}(\underline{0})e^{-\Gamma\beta} m_\beta |\mathcal{G}^*| \sup_{\eta^* \in \mathcal{G}^*} P_{\eta^*} \left((\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta)^c \cap (\mathbf{U}^{\mathbf{g}}(\mathcal{M}^*))^c \right) \\ &\leq \hat{\mu}(\underline{0})e^{-\Gamma\beta} m_\beta |\mathcal{G}^*| \sup_{\eta^* \in \mathcal{G}^*} P_{\eta^*} \left((\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta)^c | (\mathbf{U}^{\mathbf{g}}(\mathcal{M}^*))^c \right). \end{aligned}$$

Da questa maggiorazione deduciamo, con la stima dell'ultima probabilità data dalla Proposizione 5.3.2,

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln p_\beta \leq -\Gamma + \Gamma + \delta' - \alpha$$

(dove α è dato dalla Proposizione 5.3.2) e, con la scelta $\delta' = \alpha/2$, otteniamo il risultato.

Le stime dall'alto e dal basso di $\tau_{\underline{1}_0} - \theta$ sono conseguenze delle stime temporali date nelle definizioni dei fasci $\mathbf{F}_{\text{tot}}^\delta$ e $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$ (Definizioni 5.3.1 e 4.2.1). Basta notare che, per costruzione, per ogni massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$, $d(\mathcal{M}_k(l_1, l_2)) \leq 2\Delta - U$. \square

6.3 Salsicce

Diamo qui un'informazione più dettagliata, principalmente di natura geometrica, sui cammini in \mathbf{TT}^δ (per qualunque $\delta > 0$). Per ogni coppia di interi (a, b) con $a < b$ denotiamo con $\mathcal{N}_{>a}^{\leq b}$ l'insieme

$$\mathcal{N}_{>a}^{\leq b} := \{\eta \in \mathcal{X} : a < |\eta| \leq b\}$$

e definiamo

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} := \mathcal{E} \cap \{\eta \in \mathcal{X} : |\eta| \leq 2\}$$

e

$$\mathcal{S}(1, 2) := (\mathcal{E} \cup \mathcal{M}_2(1, 2)) \cap \mathcal{N}_{>2}^{\leq 4}.$$

Siano adesso $2 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1$. Per $(l_1, l_2) < (l_c - 1, l_c)$ chiamiamo $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ l'insieme

$$\mathcal{S}(l_1, l_2) := (\mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1) \cup \mathcal{M}_2(l_1, l_2)) \cap \mathcal{N}_{>l_1 l_2}^{\leq l_1 l_2 + l_2},$$

nel caso critico $(l_1, l_2) = (l_c - 1, l_c)$ chiamiamo $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ l'insieme

$$\mathcal{S}(l_1, l_2) := \left(\mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1) \cup \bigcup_{k=2}^{l_2} \mathcal{M}_k(l_1, l_2) \cup \mathcal{M}_2(l_2, l_1 + 1) \right) \cap \mathcal{N}_{>l_1 l_2}^{\leq l_1 l_2 + l_2},$$

e per $(l_1, l_2) > (l_c - 1, l_c)$ chiamiamo $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ l'insieme

$$\mathcal{S}(l_1, l_2) := \left(\bigcup_{k=2}^{l_2} \mathcal{M}_k(l_1, l_2) \cup \mathcal{M}_2(l_2, l_1 + 1) \right) \cap \mathcal{N}_{>l_1 l_2}^{\leq l_1 l_2 + l_2}.$$

Con queste definizioni, per ogni (l_1, l_2) in \mathbf{QQ} , $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ è l'intersezione di $\mathcal{N}_{>l_1 l_2}^{\leq l_1 l_2 + l_2}$ con l'unione dell'embrío con tutti massicci sottocritici, critici e supercritici.

Per costruzione, per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbf{QQ}$, ogni configurazione di $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ appartiene a uno degli insiemi seguenti:

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}, \quad \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}, \\ & \mathcal{J}_{1,0}(l_1, l_2), \quad \mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2), \quad \mathcal{J}_{1,0}^{fp}(l_1, l_2), \\ & \quad \text{o, per } 2 \leq k \leq l_2, \\ & \mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2), \quad \mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2), \quad \mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2), \quad \text{e, se } k \neq l_2, \quad \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2). \end{aligned}$$

La maggior parte di essi contengono soltanto configurazioni connesse, gli altri contengono delle configurazioni fatte da un contorno monotono e una particella libera, o da un quasi-quadrato e un domino 1×2 .

Definizione 6.3.1 *Per ogni $(l_1, l_2) \in \mathbf{QQ}$ chiamiamo clusters di $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ le configurazioni ottenute a partire da quelle in $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ cancellando l'eventuale particella libera o domino, e chiamiamo $l \times L$ clusters i clusters circoscritti da un rettangolo di dimensioni $l \times L$.*

I clusters di $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ contengono tra $l_1 l_2$ e $l_1 l_2 + l_2$ particelle, e abbiamo il risultato seguente:

Teorema 3 *i) Per ogni $\delta > 0$, i cammini in \mathbf{TT}^δ non possono scappare da*

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} \subset \mathcal{S}_\mathcal{E} \supset \mathcal{R}(1, 2) & \text{ --- } \mathcal{R}(1, 2)^{fp} \subset \mathcal{S}(1, 2) \supset \mathcal{R}(2, 2) \text{ --- } \dots \\ \dots & \text{ --- } \mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp} \subset \mathcal{S}(l_1, l_2) \supset \mathcal{R}(l_2, l_1 + 1) \text{ --- } \dots \end{aligned}$$

$$\dots \text{ --- } \mathcal{R}(l_0 - 1, l_0)^{fp} \subset \mathcal{S}(l_0 - 1, l_0) \supset \{\underline{1}_0\}$$

con $l_0 = \sqrt{|\Lambda_0|}$, il che significa che non possono scappare da

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} \text{ --- } \mathcal{S}(1, 2) \text{ --- } \dots \text{ --- } \mathcal{S}(l_1, l_2) \text{ --- } \dots \text{ --- } \mathcal{S}(l_0 - 1, l_0),$$

e devono lasciare o penetrare ogni insieme di quest'ultimo grafo tramite una configurazione in qualche $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ o $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$.

ii) Sia $l \leq L$. Se η è un $l \times L$ cluster di qualche $\mathcal{S}(l_1, l_2)$, allora $|\eta| = l_1 l_2 + k$ per qualche $0 \leq k \leq l_2$ e, con $p = p(l_1, l_2)$:

- $(l, L) = (l_1, l_2)$ se $k = 0$,
- $2(L + l) = p$ e $L - l \leq \lfloor \sqrt{p - 4} \rfloor$ se $k = 1$,
- $2(L + l) = p$ e $L - l \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor$
oppure $2(L + l) = p + 2$ e $L - l \leq 1 + \lfloor \sqrt{p - 4(k - 1)} \rfloor$ se $k \geq 2$.

Osservazione: Il teorema mostra che il nostro tubo è contenuto all'interno di ciò che somiglia a una catena di salsicce, $\mathcal{S}(l_1, l_2)$, le cui estremità sono fatte da configurazioni in $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$ e $\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$.

Inoltre, con $l \leq L$, le ultime disuguaglianze implicano:

$$0 \leq L - l \leq 1 + 2\sqrt{L}.$$

Pertanto, per i grandi clusters del tubo (i.e. per grandi L), i lati del rettangolo circoscritto sono di lunghezze equivalenti (il quoziente va a 1).

Nello stesso tempo abbiamo che per un grande $l \times L$ cluster con $l_1 l_2 + k$ particelle

$$l_1 l_2 \leq l_1 l_2 + k \leq Ll \leq (l_1 + 1)(l_2 + 1),$$

dove abbiamo utilizzato la d.i.p. con $2(L + l) \leq p + 2 = 2(l_1 + 1 + l_2 + 1)$ per ottenere l'ultima disuguaglianza, e quindi

$$0 \leq Ll - (l_1 l_2 + k) \leq l_1 + l_2 + 1 = p/2.$$

Siccome $l \sim L$, le relazioni fra $2(l + L)$ e p che compaiono nel teorema ci danno

$$p \sim 4L = o(L^2) = o(Ll).$$

Di conseguenza il rettangolo circoscritto è quasi pieno.

Ciò significa che, visti da lontano, i grandi clusters del tubo sono semplici quadrati.

Prova del teorema: Per provare il primo punto basta vedere che le transizioni tra le varietà $\mathcal{N}_{l_1 l_2}$ e $\mathcal{N}_{l_1 l_2 + 1}$ (per $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$) lungo i cammini del tubo possono soltanto realizzarsi tramite $\mathcal{R}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$. Ma tali transizioni possono soltanto accadere

- se $(l_1, l_2) = (1, 2)$ all'interno dell'embrione \mathcal{E} ,
- se $(1, 2) < (l_1, l_2) \leq (l_c - 1, l_c)$ dentro il massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_2 - 1, l_1)$, e più accuratamente all'interno di $\mathcal{D}_2^g(l_2 - 1, l_1)$ (v. Proposizione 5.2.2-*i*), quindi all'interno di un ciclo principale,
- se $(l_1, l_2) > (l_c - 1, l_c)$ dentro il massiccio supercritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$, e più accuratamente all'interno di $\mathcal{D}_2^g(l_1, l_2)$ (v. Proposizione 4.1.2-*i*), quindi all'interno di un ciclo principale.

Il risultato segue allora dalle proposizioni che descrivono i cammini all'interno dell'embrio e dei cicli principali (Proposizioni 3.3.5 e 3.3.3).

Per provare il secondo punto iniziamo con l'osservare che i clusters di $\mathcal{S}(l_1, l_2)$ con $l_1 l_2 + 0$ particelle sono ottenuti da configurazioni in $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{fp}$ o $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$, e sono quindi in $\mathcal{R}(l_1, l_2)$.

I clusters con $l_1 l_2 + 1$ particelle sono ottenuti da configurazioni in $\mathcal{J}_{1,0}(l_1, l_2)$, $\mathcal{J}_{1,2}(l_1, l_2)$ o $\mathcal{J}_{1,0}^{fp}(l_1, l_2)$. Sono quindi dei contorni monotoni con perimetro p e un rettangolo circoscritto dello stesso perimetro e un volume maggiore o uguale a $l_1 l_2 + 1$.

I clusters con $l_1 l_2 + k$ particelle con $k \geq 2$ sono ottenuti da configurazioni in $\mathcal{J}_{k,0}(l_1, l_2)$, $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$, $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$ o (se $k \neq l_2$) $\mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$. I loro rettangoli circoscritti sono quindi di perimetro p e volume maggiore o uguale a $l_1 l_2 + k$, o ottenuti mediante l'aggiunto di una riga o una colonna a un rettangolo di perimetro p e volume maggiore o uguale a $l_1 l_2 + k - 1$ (si veda le definizioni di $\mathcal{J}_{k,2}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{J}_{k,4}(l_1, l_2)$).

Possiamo quindi concludere la prova utilizzando il lemma seguente.

Lemma 6.3.2 *Siano $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1$ e $1 \leq k \leq l_2$.*

I rettangoli in $\mathcal{R}(l, L)$ che contengono almeno $l_1 l_2 + k$ particelle e con un perimetro uguale a $p = 2(l_1 + l_2 + 1)$ sono esattamente i rettangoli di dimensioni $l \times L$ tali che

$$2(L + l) = p \quad e \quad 0 \leq L - l \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor.$$

Prova del lemma: Le ipotesi su L e l possono essere riscritte

$$\begin{cases} L + l = l_1 + l_2 + 1; \\ Ll \geq l_1 l_2 + k. \end{cases}$$

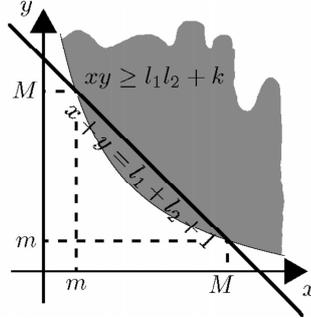


Figura 6.1: $m + M = l_1 + l_2 + 1$ e $mM = l_1 l_2 + k$.

La Figura 6.1 mostra che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2(L + l) = p; \\ 0 \leq L - l \leq \lfloor M - m \rfloor; \end{cases}$$

con m e M la più piccola e la più grande delle soluzioni dell'equazione

$$X^2 - (l_1 + l_2 + 1)X + (l_1 l_2 + k) = 0,$$

il cui discriminante è uguale a

$$D = (l_2 - l_1)^2 + p - 4k - 1.$$

Poiché $M - m = \sqrt{D}$, nel caso $l_2 - l_1 = 1$ abbiamo direttamente il risultato. Per il caso $l_2 - l_1 = 0$ basta osservare che p e, quindi, $p - 4k$ sono uguali a 2 modulo 4. Ciò implica che $p - 4k$ non può essere un quadrato perfetto e che il più grande quadrato minore o uguale a $p - 4k$ è minore o uguale a $p - 4k - 1$. E ciò si scrive

$$\lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor = \lfloor \sqrt{p - 4k - 1} \rfloor = \lfloor \sqrt{D} \rfloor.$$

□

Capitolo 7

Forze e debolezze della descrizione

7.1 Alcuni limiti della descrizione

Utilizzando il linguaggio della Sezione 2.3 abbiamo un controllo geometrico dell'insieme delle configurazioni visitate da qualche cammino del tubo \mathbf{TT}^δ (per qualunque $\delta > 0$):

$$\mathcal{T} := \{ \eta \in \mathcal{X} : \exists \varphi \in \mathbf{TT}^\delta, \eta \in \varphi \}.$$

Quest'insieme è molto rilevante per lo studio della fuga dalla metastabilità poiché, come vedremo nella sezione successiva, coincide con l'insieme delle configurazioni visitate nel corso della transizione con una probabilità non esponenzialmente piccola:

$$\mathcal{P} := \left\{ \eta \in \mathcal{X} : \liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left(\eta \in (\eta_k)_{\theta \leq k \leq \tau_{\underline{0}}} \right) = 0 \right\}.$$

Ma l'identità $\mathcal{P} = \mathcal{T}$ e il controllo geometrico che abbiamo su \mathcal{T} sono, in generale, insufficienti per dire se una configurazione data appartiene a \mathcal{P} o meno. Ci sono diversi motivi all'origine di tale limite della nostra descrizione.

Per costruzione \mathcal{T} è contenuto nell'unione degli insiemi introdotti nella Sezione 2.3. Ma si tratta di un'inclusione stretta. Ad esempio, quando abbiamo introdotto gli altipiani $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ per $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ (Sezione 3.1), abbiamo osservato che la componente connessa in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ di una configurazione in $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$ era ridotta ad un unico elemento se il domino era “lontano” dal cluster. Siccome

$$\left\{ \eta \in \mathcal{X} : \hat{H}(\eta) < \hat{H}(\mathcal{U}_2(l_1, l_2)) \right\} \cap \partial \mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom} = \emptyset,$$

tale proprietà rimane se consideriamo la componente connessa non più in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$ ma in $\mathcal{U}_2(l_1, l_2) \cup \mathcal{D}_2(l_1, l_2)$. Le configurazioni di $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$ con un domino “lontano” dal cluster non fanno quindi parte di nessun massiccio, e di conseguenza di nessun cammino in \mathbf{TT}^δ . Ma ciò costituisce un difetto abbastanza irrilevante della nostra descrizione: per risolvere il problema, avremmo potuto richiedere nella definizione di $\mathcal{R}(l_1, l_2)^{dom}$ che il domino fosse in qualche modo “vicino” al cluster.

Ora diamo un esempio più rilevante di limite della nostra descrizione. Assumiamo che $l_c = 17$ e consideriamo una configurazione $\eta^0 \in \mathcal{J}_{1,0}^{f_p}(l_c - 1, l_c) \subset \mathcal{U}^*$ come in Figura 7.1. Affermiamo che η^0 non è in \mathcal{M}^* , e quindi su nessun cammino di \mathbf{TT}^δ . Infatti la Figura 7.2 elenca il contenuto del carso $\mathcal{K}(\eta^0)$ – se aggiungiamo alle configurazioni rappresentate quelle ottenute mediante simmetria e/o rotazione a partire da esse, e quelle ottenute con uno spostamento della particella libera. (Per provare

tale risultato bisogna, ancora una volta, vedere che partendo da una qualunque di queste configurazioni, un passo fatto all'interno di $\mathcal{K}(\eta^0)$ raggiungerà un'altra di esse.) Ciò implica che non c'è nessuna discesa di tipo s da una configurazione in $\mathcal{K}(\eta^0)$, e di conseguenza che $\eta^0 \notin \mathcal{M}^*$ (v. Proposizione 5.2.2).

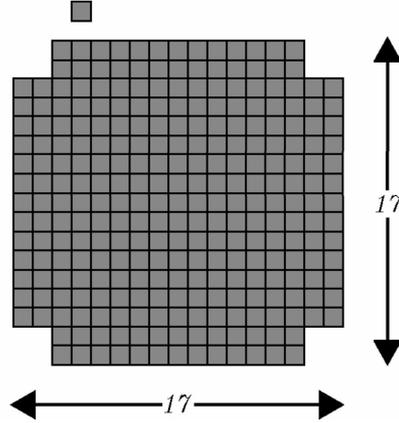


Figura 7.1: $\eta^0 \in \mathcal{J}_{1,0}^{fp}(16, 17)$.

Infine, ogni configurazione η in $\mathcal{T} \setminus \mathcal{E}$ appartiene a qualche carso di qualche massiccio sottocritico, critico o supercritico, ed è chiaro che qualunque altra configurazione all'interno dello stesso carso apparterrà anch'essa a \mathcal{T} . Ma la nostra descrizione geometrica non fa nessuna distinzione, all'interno di un massiccio dato, tra i carsi raggiunti da qualche cammino in \mathbf{TT}^δ e quelli che non lo sono. Tale distinzione implicherebbe una descrizione geometrica molto accurata dei clusters.

Tuttavia, malgrado questi limiti della nostra descrizione, proviamo nella sezione successiva che, anche se avessimo rinforzato il controllo geometrico delle configurazioni in \mathcal{P} , ciò non avrebbe portato ad un'ulteriore restrizione delle possibili dimensioni di un cluster di volume dato. In altre parole le fluttuazioni in dimensioni che compaiono nel Teorema 3 non sono prodotte da qualche debolezza della nostra descrizione, ma della dinamica stessa.

Inoltre si può osservare che, per quanto riguarda la parte sottocritica del tubo, la discussione precedente, sulla distinzione all'interno di ogni massiccio tra i carsi raggiunti da qualche cammino in \mathbf{TT}^δ e quelli che rimangono inaccessibili da qualunque cammino di \mathbf{TT}^δ , è irrilevante. Infatti, si può vedere che ogni massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ contiene un unico carso (si veda Sezione 7.3). Abbiamo quindi una descrizione quasi completa della parte sottocritica, equivalente a quelle ottenute per il caso conservativo in [9] o [14].

Al contrario, la nostra strategia porta naturalmente, nella parte supercritica, ad una descrizione in termini di una successione di massicci che, in generale, non sono ridotti ad un singolo carso. Si può allora sollevare la questione di sapere se una descrizione più accurata avrebbe soppresso questa disconnessione. Mostriamo nell'ultima sezione che la risposta è "no". Questo tratto della descrizione è, ancora una volta e con un certo aiuto dalla fortuna, conseguenza non della nostra ignoranza ma della dinamica stessa.

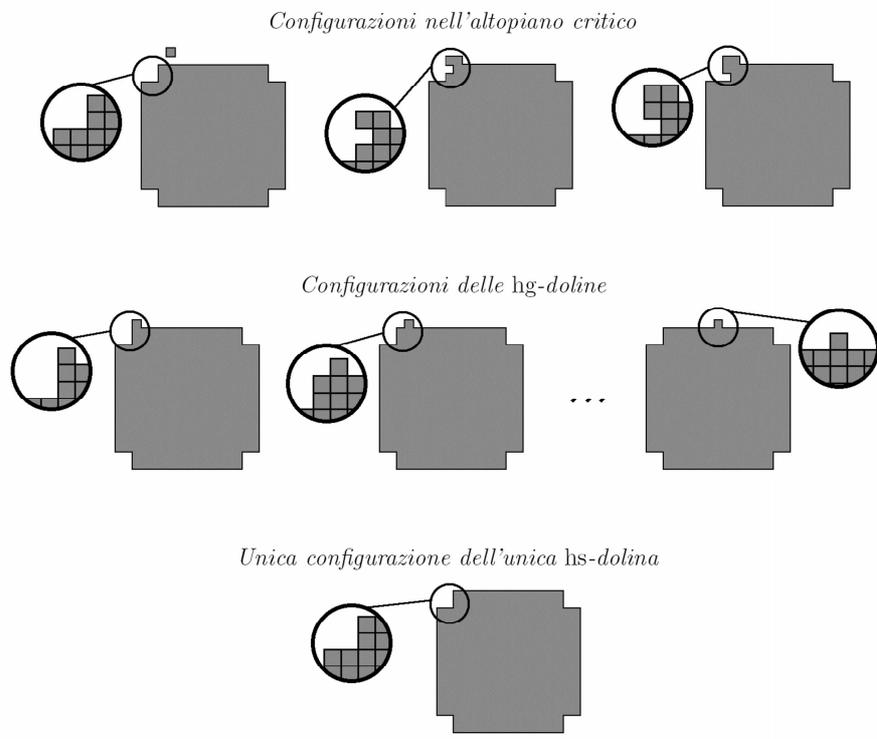


Figura 7.2: Contenuto del corso $\mathcal{K}(\eta^0)$.

7.2 Fluttuazioni in dimensioni: “ottimalità” del risultato

Proposizione 7.2.1 *I due insiemi \mathcal{P} e \mathcal{T} coincidono.*

Proveremo questo risultato utilizzando le tecniche elaborate da Schonmann nel caso della dinamica di Glauber.

Prova della proposizione: L’inclusione $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ è una conseguenza del Teorema 2, basta quindi provare che se η è una configurazione lungo un cammino φ in \mathbf{TF}^δ (qualunque sia il valore di δ) allora

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}} \left(\eta \in (\eta_k)_{\theta \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \right) = 0.$$

Per tale configurazione η , ci troviamo necessariamente in uno dei due casi seguenti.

- 1) η appartiene a un massiccio critico o supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$. In questo caso c’è una configurazione $\eta^* \in \mathcal{G}^*$ tale che φ lascia il bacino di metastabilità \mathcal{W} tramite η^* prima di seguire un cammino $\tilde{\varphi} : \eta^* \rightsquigarrow \underline{1}_0$ in $\mathbf{F}_{\text{sup}}^\delta$ tale che $\eta \in \tilde{\varphi}$. Di conseguenza φ è una realizzazione di un cammino di cicli in discesa $\Phi = (\mathcal{W}, \{\eta^*\}, \dots, \mathcal{C}(\eta), \dots, \{\underline{1}_0\})$ dove $\mathcal{C}(\eta)$ è un ciclo che contiene η (si veda la discussione alla fine della Sezione 4.2). Sotto $P_{\underline{0}}$ il sistema segue una realizzazione di Φ che visita successivamente e completamente i cicli $\mathcal{W}, \{\eta^*\}, \dots, \mathcal{C}(\eta), \dots, \{\underline{1}_0\}$ con una probabilità non-esponenzialmente piccola, e questo ci dà il risultato.
- 2) η appartiene a un massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ o all’embrio \mathcal{E} . Possiamo allora costruire due cammini di cicli in discesa come segue. Costruiamo un primo cammino di cicli $\Phi^1 = (\Phi_0^1, \dots, \Phi_{n_1}^1)$ tale che

- Φ_0^1 è un ciclo banale $\{\eta^*\} \subset \mathcal{G}^*$;
- $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, \Phi_{n_1-1}^1$ sono dei cicli contenuti in $\mathcal{W} \setminus \{\underline{0}\}$;
- $\eta \in \Phi_k^1$ per qualche $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$;
- $\Phi_{n_1}^1 = \{\underline{0}\}$.

Costruiamo il secondo cammino di cicli $\Phi^2 = (\Phi_0^2, \dots, \Phi_{n_2}^2)$ in modo tale che

- Φ_0^2 è il ciclo banale $\{\eta^*\} \subset \mathcal{G}^*$;
- $\Phi_1^2, \Phi_2^2, \dots, \Phi_{n_2}^2$ sono dei cicli contenuti in \mathcal{W}^c ;
- $\Phi_{n_2}^2 = \{\underline{1}_0\}$.

Denotiamo con $\mathbf{F}(\Phi^i)$, per ogni $i \in \{1, 2\}$, il fascio dei cammini che iniziano con una realizzazione di Φ^i e visitano successivamente e completamente i cicli $\Phi_0^i, \Phi_1^i, \dots, \Phi_{n_i}^i$. Utilizzando la proprietà di Markov forte otteniamo allora:

$$\begin{aligned} 1 &\geq P_{\underline{0}} \left(\eta \in (\eta_k)_{\theta \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \right) \\ &\geq P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}(\Phi^1)} \right) P_{\eta^*} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \in \mathbf{F}(\Phi^2) \right). \end{aligned}$$

Come prima

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\eta^*} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\underline{1}_0}} \in \mathbf{F}(\Phi^2) \right) = 0.$$

Basta quindi provare che il primo fattore dell’ultimo membro della disuguaglianza precedente non è esponenzialmente piccolo in β per ottenere il nostro risultato.

Scriviamo con l'apice \mathbf{A} il condizionamento per

$$\mathbf{A} := \{\eta_{\tau_{\partial\mathcal{W}}} = \eta^*\}.$$

Possiamo allora riscrivere la probabilità che abbiamo da stimare dal basso per concludere la prova:

$$P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1), \eta_{\tau_{\partial\mathcal{W}}} = \eta^* \right) = P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) \right) P_{\underline{0}}(\mathbf{A}).$$

Di nuovo abbiamo dal Teorema 1 che $P_{\underline{0}}(\mathbf{A})$ non è esponenzialmente piccolo in β , e per stimare il primo fattore di quest'ultimo prodotto utilizziamo la reversibilità della misura di Gibbs $\hat{\mu}$.

Definiamo

$$\theta' := \sup \{k \leq \tau_{\eta^*} : \eta_k = \underline{0}\},$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$ e ogni $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, definiamo

$$\tau_{\mathcal{V}}^i := \inf \{k \geq i : \eta_k \in \mathcal{V}\},$$

e partizioniamo lo spazio delle traiettorie secondo i valori di θ' :

$$\begin{aligned} & P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}} \left(\theta' = i, (\eta_k)_{i \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}} \left((\eta_k)_{i \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) | \theta' = i \right) P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}}(\theta' = i). \end{aligned}$$

Ora il primo fattore nella somma dell'ultimo membro della disuguaglianza non dipende da i . Infatti abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' = i \\ \eta_{\tau_{\partial\mathcal{W}}} = \eta^* \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\mathcal{W}^c} > i - 1 \\ \eta_i = \underline{0} \\ \tau_{\eta^*}^i \leq (\tau_{\underline{0}}^{i+1} \wedge \tau_{\mathcal{W}^c}^i) \end{array} \right\}.$$

e utilizzando la proprietà di Markov otteniamo:

$$\begin{aligned} & P_{\underline{0}}^{\mathbf{A}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) \right) = P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1) | \tau_{\eta^*} \leq \tau_{\underline{0}}^1 \wedge \tau_{\mathcal{W}^c} \right) \\ &= \frac{P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1), \tau_{\eta^*} \leq \tau_{\underline{0}}^1 \wedge \tau_{\mathcal{W}^c} \right)}{P_{\underline{0}} \left(\tau_{\eta^*} \leq \tau_{\underline{0}}^1 \wedge \tau_{\mathcal{W}^c} \right)} \\ &= \frac{\hat{\mu}(\underline{0}) \times P_{\underline{0}} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\eta^*}} \in \overleftarrow{\mathbf{F}}(\Phi^1), \tau_{\eta^*} \leq \tau_{\underline{0}}^1 \wedge \tau_{\mathcal{W}^c} \right)}{\hat{\mu}(\underline{0}) \times P_{\underline{0}} \left(\tau_{\eta^*} \leq \tau_{\underline{0}}^1 \wedge \tau_{\mathcal{W}^c} \right)} \\ &= \frac{P_{\eta^*} \left((\eta_k)_{0 \leq k \leq \tau_{\underline{0}}} \in \mathbf{F}(\Phi^1), \tau_{\underline{0}} \leq \tau_{\mathcal{W}^c}^1 \right) \times \hat{\mu}(\eta^*)}{P_{\eta^*} \left(\tau_{\underline{0}} \leq \tau_{\mathcal{W}^c}^1 \right) \times \hat{\mu}(\eta^*)} \\ &= P_{\eta^*} \left(\mathbf{F}(\Phi^1) | \tau_{\underline{0}} \leq \tau_{\mathcal{W}^c}^1 \right) \\ &\geq P_{\eta^*} \left(\mathbf{F}(\Phi^1), \tau_{\underline{0}} \leq \tau_{\mathcal{W}^c}^1 \right) \\ &= P_{\eta^*} \left(\mathbf{F}(\Phi^1) \right) - P_{\eta^*} \left(\mathbf{F}(\Phi^1), \tau_{\underline{0}} > \tau_{\mathcal{W}^c}^1 \right). \end{aligned}$$

Ancora una volta la prima delle ultime due probabilità non è esponenzialmente piccola in β , la seconda è più piccola di

$$\begin{aligned} & P_{\eta^*} \left(\exists k \geq \tau_{\partial\mathcal{M}^*}, k < \tau_{\underline{0}}, \eta_k \in \mathcal{W}^c \text{ e } (\mathbf{U}^{\mathbf{g}}(\mathcal{M}^*))^c \right) \\ &\leq P_{\eta^*} \left(\exists k \geq \tau_{\partial\mathcal{M}^*}, k < \tau_{\underline{0}}, \eta_k \in \mathcal{W}^c | (\mathbf{U}^{\mathbf{g}}(\mathcal{M}^*))^c \right), \end{aligned}$$

ed è quindi (v. Proposizione 5.3.2) esponenzialmente piccola in β , così otteniamo il risultato. \square

Come visto nella discussione che fece seguito all'enunciato del Teorema 3, i clusters grandi sono ben approssimati dai loro rettangoli circoscritti. Il controllo che abbiamo su di loro è "ottimale" nel seguente senso.

Teorema 4 *Siano l e L due interi tali che $1 \leq l \leq L \leq \sqrt{|\Lambda_0|}$. Assumiamo che esistono $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che valga una delle tre seguenti condizioni:*

- (a) $(l, L) = (l_1, l_2)$ e $k = 0$;
- (b) $2(L + l) = p$, $1 \leq k \leq l_2$ e $L - l \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor$;
- (c) $2(L + l) = p + 2$, $2 \leq k \leq l_2$ e $L - l \leq 1 + \lfloor \sqrt{p - 4(k - 1)} \rfloor$;

dove $p = p(l_1, l_2)$. Allora, con $n = l_1 l_2 + k$ e con $\tau_{\theta, l \times L, n}$ il tempo di prima entrata dopo θ nell'insieme delle configurazioni il cui cluster è un $l \times L$ cluster di volume n (v. Definizione 6.3.1), abbiamo

$$\liminf_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}}(\tau_{\theta, l \times L, n} \leq \tau_{\underline{1}_0}) = 0.$$

Inoltre, se una delle tre seguenti condizioni è verificata,

- (a') vale (a);
- (b') vale (b) con qualche $k \geq \max(2, l_2 - l_c + 2)$;
- (c') vale (c) con qualche $k \geq 1 + \max(2, l_2 - l_c + 2)$;

allora abbiamo il risultato ben più forte:

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \ln P_{\underline{0}}(\tau_{\theta, l \times L, n} > \tau_{\underline{1}_0}) < 0.$$

Osservazione 1: Se vale (a) per qualche (l_1, l_2, k) , allora abbiamo anche

$$2(L + l) = p - 2.$$

E siccome, per un l e un L dati, ognuna delle tre equazioni

$$\begin{aligned} 2(L + l) &= p - 2 \\ 2(L + l) &= p \\ 2(L + l) &= p + 2 \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ tale che $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 1$, in ognuna delle tre condizioni (a), (b) e (c), il vero vincolo su (l, L) non è il valore di $2(L + l)$.

Osservazione 2: Il teorema afferma in particolare che le fluttuazioni in dimensioni di ordine $L - l \sim 2\sqrt{L}$ non possono essere trascurate, e che le fluttuazioni di tipo $L - l \simeq 2\sqrt{l_c}$ o più piccole avvengono in modo tipico.

Prova del teorema: Se (a) è verificata per qualche (l_1, l_2, k) allora i Teoremi 2 e 3 danno direttamente la stima più forte.

Assumiamo ora che l e L sono tali che (b) è verificata per qualche terna $(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{k})$. Scriveremo $\hat{p} = 2(\hat{l}_1 + \hat{l}_2 + 1)$, $\hat{n} = \hat{l}_1 \hat{l}_2 + \hat{k}$ e denoteremo con $(l \times L, \hat{n})^{fp}$ l'insieme delle configurazioni fatte da un contorno monotono di perimetro \hat{p} e volume \hat{n} con un rettangolo circoscritto di dimensioni $l \times L$ e da una particella libera, i.e.

$$(l \times L, \hat{n})^{fp} := \left\{ \eta \in \mathcal{J}_{\hat{k}, 0}(\hat{l}_1, \hat{l}_2) : \text{RC}(\eta) \in \mathcal{R}(l, L) \right\}^{fp}$$

Per provare la stima più debole utilizziamo la Proposizione 7.2.1: basta vedere che qualche cammino in \mathbf{TT}^δ (per qualche $\delta > 0$) raggiunge $(l \times L, \hat{n})^{fp}$.

Osserviamo che un tale cammino può facilmente esser costruito a partire da qualunque cammino $\varphi : \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{1}_0$ che attraversa $(l \times L, \hat{n})^{fp}$ e segue la successione ordinata embrio, massicci sottocritici, critico e supercritici, “aggiungendo” le richieste che riguardano il tempo e compaiono nella definizione di \mathbf{TT}^δ . In particolare basta provare che qualche carso raggiunto dal cammino di riferimento interseca $(l \times L, \hat{n})^{fp}$.

Prima di provare tale risultato introduciamo nuove notazioni. Siano $(l_1, l_2) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ e $1 \leq k \leq l_2$. Per ogni intero d definiamo due sottoinsiemi di $\mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$, che chiameremo $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{B}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$. Diciamo che $\eta \in \mathcal{J}_{k,0}^{fp}(l_1, l_2)$ sta in $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$, rispettivamente $\mathcal{B}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$, se il suo cluster può essere costruito sdraiando una barra lungo una lunghezza, rispettivamente una larghezza, di una configurazione rettangolare di dimensioni $(l_1 - d) \times (l_2 + d)$. Affermiamo che $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$, rispettivamente $\mathcal{B}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$, non sono vuoti se

$$|2d + l_2 - l_1 - 1| \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor,$$

rispettivamente

$$2d + l_2 - l_1 + 1 \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor.$$

Proviamo adesso quest’asserzione. Consideriamo l’insieme di configurazioni rettangolari $\mathcal{R}(l_1 - d, l_2 + d)^+$ (si ricordi la notazione della Sezione 2.2). Questi rettangoli hanno dei perimetri uguali a p ed è chiaro che possiamo partizionare quest’insieme in due sottoinsiemi non-vuoti: da un lato l’insieme dei rettangoli per cui la differenza tra lunghezza e larghezza è uguale a $|2d + l_2 - l_1 - 1|$, dall’altro l’insieme dei rettangoli per cui la differenza tra lunghezza e larghezza è uguale a $2d + l_2 - l_1 + 1$. Scegliamo una configurazione R nel primo, rispettivamente nel secondo, sottoinsieme. Dal Lemma 6.3.2, se $|2d + l_2 - l_1 - 1| \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor$, rispettivamente $2d + l_2 - l_1 + 1 \leq \lfloor \sqrt{p - 4k} \rfloor$, allora $|R| \geq l_1 l_2 + k$. Possiamo quindi rimuovere da R , lungo una lunghezza, rispettivamente una larghezza, una dopo l’altra e iniziando da un angolo, delle particelle fino a raggiungere una configurazione con $l_1 l_2 + k$ particelle. Il processo arriverà a termine prima dell’esaurimento delle particelle nella linea mano a mano svuotata perché

$$(l_1 - d)(l_2 + d) = l_1 l_2 - d(l_2 - l_1) - d^2 \leq l_1 l_2 < l_1 l_2 + k. \quad (7.1)$$

Aggiungiamo una particella libera alla configurazione ottenuta e abbiamo un elemento di $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$, rispettivamente $\mathcal{B}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$. E così si chiude la prova dell’asserzione.

Osserviamo adesso che, poiché $L + l = \hat{p}/2 = \hat{l}_1 + \hat{l}_2 + 1$, abbiamo in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le uguaglianze:

$$L - l = L + l = \hat{l}_2 - \hat{l}_1 - 1.$$

Possiamo quindi scegliere un $d \in \mathbb{N}$ tale che $2d + \hat{l}_2 - \hat{l}_1 - 1 = L - l \geq 0$ e sappiamo che $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ non è vuoto. Si noti che

$$\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2) \subset (l \times L, \hat{n})^{fp}.$$

Proviamo adesso che qualche carso raggiunto dal cammino di riferimento interseca $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$.

Innanzitutto, se $d > 0$ abbiamo $\mathcal{B}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2) \neq \emptyset$ e, come mostrato dalla Figura 7.3, c’è una U -equivalenza tra le configurazioni in $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ e qualche configurazione $\mathcal{B}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$.

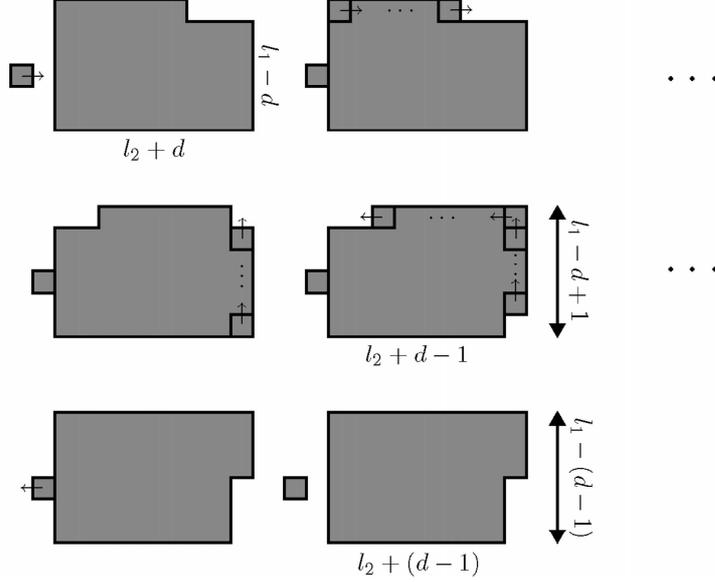


Figura 7.3: U -equivalenza fra le configurazioni di $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{B}_{k,d-1}^{fp}(l_1, l_2)$. Si noti che ci sono sempre più particelle nella colonna di destra di quante servono per completare la riga superiore, altrimenti avremmo $(l_1 - d + 1)(l_2 + d - 1) \geq l_1 l_2 + k$ e una contraddizione con un conto fatto come in (7.1) sostituendo $d - 1$ a d .

Secondo, se $\mathcal{B}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ è non-vuoto allora lo è anche $\mathcal{A}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ e la Figura 7.4 mostra che c'è una U -equivalenza fra le configurazioni in $\mathcal{B}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ e qualche configurazione in $\mathcal{A}_{k,d-1}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$. Iterando gli argomenti precedenti otteniamo una U -equivalenza tra le configurazioni in $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ e qualche configurazione in $\mathcal{A}_{k,0}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$.

Ora, se $(\hat{l}_1, \hat{l}_2) \geq (l_c - 1, l_c)$, la realizzazione che abbiamo data di questa U -equivalenza mostra che qualunque configurazione in $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ appartiene a un carso $\mathcal{K}(\eta^0)$ in $\mathcal{M}_{k+1}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ per qualche η^0 in $\mathcal{A}_{k,0}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$. $\mathcal{K}(\eta^0)$ è raggiunto dal cammino di riferimento e abbiamo il risultato.

Se $(\hat{l}_1, \hat{l}_2) < (l_c - 1, l_c)$, possiamo concludere esattamente nello stesso modo se $\hat{k} = 1$. Per il caso $\hat{k} > 1$, basta osservare che la U -equivalenza che abbiamo dato mostra che il ciclo principale $\mathcal{D}_2^g(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ interseca $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$. E questo ciclo è chiaramente contenuto in un carso raggiunto dal cammino di riferimento.

Proviamo adesso la stima più debole per un coppia (l, L) che verifica la condizione (c) per qualche terna (l_1, l_2, k) . Iniziamo con il caso $l < L$. In questo caso abbiamo:

$$\begin{cases} 2((L - 1) + l) = p; \\ 0 \leq (L - 1) - l \leq \lfloor \sqrt{p - 4(k - 1)} \rfloor. \end{cases}$$

Abbiamo visto sopra che esisteva un carso \mathcal{K} raggiunto dal cammino di riferimento e che incontrava $(l \times (L - 1), n - 1)^{fp}$. Esiste quindi una configurazione η nell'intersezione $(l \times (L - 1), n - 1)^{fp} \cap \mathcal{K}$. È facile vedere che la configurazione η' ottenuta attaccando la particella di η a una larghezza del cluster di η da un lato appartiene a una hg -dolina di $\mathcal{U}_k(l_1, l_2)$ e quindi appartiene anche a \mathcal{K} , e dall'altro ha un $l \times L$ cluster di volume n . Come prima il risultato è quindi una conseguenza della Proposizione 7.2.1.

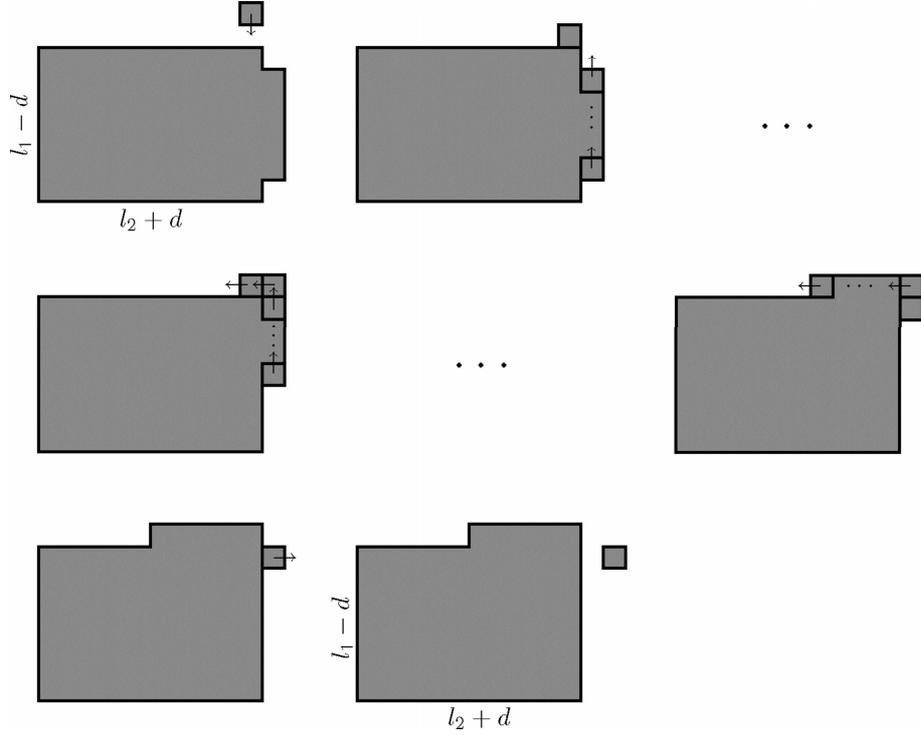


Figura 7.4: U -equivalenza fra configurazioni in $\mathcal{B}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$ e $\mathcal{A}_{k,d}^{fp}(l_1, l_2)$.

Lo stesso argomento funziona nel caso $l = L$ invertendo i ruoli di l e $(L - 1)$. Infatti, in questo caso

$$0 \leq l - (L - 1) = 1 \leq \left\lfloor \sqrt{p - 4(k - 1)} \right\rfloor$$

perché $k - 1 \leq l_2 - 1 \leq l_1$, e tutto il resto dell'argomento funziona esattamente come prima.

Rimane soltanto da provare la stima più forte quando (b') o (c') sono verificate. Supponiamo prima che valga (b') . Basta vedere che, in modo tipico, il sistema visita $(l \times L, n)^{fp}$ nel corso della transizione. Abbiamo visto che nel caso (l_1, l_2) minore di $(l_c - 1, l_c)$, $k \geq 2$ implica che $(l \times L, n)^{fp}$ interseca un ciclo principale. Nel caso $(l_1, l_2) \geq (l_c - 1, l_c)$ abbiamo visto che $(l \times L, n)^{fp}$ interseca $\mathcal{M}_{k+1}(l_1, l_2)$. Siccome $k \geq l_2 - l_c + 2$, ciò implica (v. Proposizione 4.2.3) che in entrambi i casi $(l \times L, n)^{fp}$ interseca un ciclo principale. Per costruzione, i cammini del tubo \mathbf{TT}^δ visitano tutte le configurazioni di ogni ciclo principale, e il Teorema 2 dà il risultato.

Infine se (c') è verificata, consideriamo la configurazione η' costruita come prima partendo da η in $(l \times (L - 1), n - 1)^{fp}$ o $((L - 1) \times l, n - 1)^{fp}$ se $l = L - 1$ e attaccando la particella libera all'interno del rettangolo circoscritto al cluster. Dal paragrafo precedente deduciamo che η può essere scelta all'interno di un ciclo principale, il che implica che η' appartiene allo stesso ciclo. Esiste quindi un $l \times L$ cluster di volume n all'interno di un ciclo principale, e possiamo concludere come abbiamo concluso nel paragrafo precedente. \square

7.3 Massicci connessi e non-connessi

Come spiegato per la parte supercritica del tubo alla fine del capitolo 4, ogni cammino φ in \mathbf{TT}^δ (per qualunque $\delta > 0$) è la concatenazione di cammini fatti all'interno di \mathcal{E} , poi in una successione ordinata di carsi ($\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$) tale che ogni carso $\mathcal{K}(l_1, l_2, k)$ sia una componente connessa di $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ e dove (l_1, l_2, k) percorre l'insieme

$$\tilde{\mathbf{I}} := \{(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}_{\text{tot}} : k = 2\} \cup \mathbf{I}_c \cup \{(l_1, l_2, k) \in \mathbf{I}_{\text{sup}} : k \leq l_2 - l_c + 2\}.$$

Tale successione di carsi non dipenderebbe da φ se ogni massiccio $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ con $(l_1, l_2, k) \in \tilde{\mathbf{I}}$ fosse connesso – i.e. ridotto ad un unico carso – o se i massicci non-connessi $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ con $(l_1, l_2, k) \in \tilde{\mathbf{I}}$ contenessero un unico carso attraversato dai cammini in \mathbf{TT}^δ .

Come abbiamo affermato sopra, ogni massiccio sottocritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è connesso. Infatti, abbiamo provato che ogni carso di un massiccio *supercritico* poteva essere lasciato da una discesa di tipo g (Proposizione 4.1.2), e un'argomentazione simile ci permette di provare che ogni carso di $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ contiene una g -dolina di $\mathcal{U}_2(l_1, l_2)$. Dato che c'è soltanto una simile g -dolina (il ciclo principale di fondo $\mathcal{R}(l_2, l_1 + 1)$, connesso per definizione) non ci può essere più di un carso in $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$. Di conseguenza la successione di carsi seguita da i cammini di transizione di \mathbf{TT}^δ nella loro parte supercritica è completamente determinata.

In modo analogo possiamo provare che un massiccio supercritico $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$ è connesso se $k = 2$. Per quanto riguarda il caso critico, non possiamo utilizzare lo stesso tipo di argomento, ma un'analisi lunga e dettagliata delle proprietà geometriche delle configurazioni del massiccio critico mostrerebbe che è connesso anch'esso. Quindi ogni massiccio sottocritico, critico o supercritico $\mathcal{M}_2(l_1, l_2)$ è ridotto ad un unico carso, che sarà un passaggio obbligato di ogni traiettoria di transizione tipica, e che potrà essere vistato completamente o soltanto parzialmente.

Chiuderemo questo capitolo dando un esempio di massiccio supercritico non-connesso $\mathcal{M}_k(l_1, l_2)$, con

$$2 < k \leq l_2 - l_c + 2 \tag{7.2}$$

e che contiene due carsi \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 tali che i due sottoinsiemi disgiunti di \mathbf{TT}^δ

$$\mathbf{TT}_1^\delta := \{\varphi \in \mathbf{TT}^\delta : \exists \eta \in \mathcal{K}_1, \eta \in \varphi\}$$

e

$$\mathbf{TT}_2^\delta := \{\varphi \in \mathbf{TT}^\delta : \exists \eta \in \mathcal{K}_2, \eta \in \varphi\}$$

siano non-vuoti.

Prenderemo $(l_1, l_2, k) = (16, 17, 10)$, basta quindi assumere $l_c \leq 9$ per avere (7.2). Consideriamo adesso un rappresentante del cammino di riferimento e chiamiamo \mathcal{K}_1 il carso di $\mathcal{M}_{10}(16, 17)$ che questo cammino attraversa. È facile vedere che \mathbf{TT}_1^δ non è vuoto.

Per costruire \mathcal{K}_2 costruiremo un cammino φ che segue

$$\mathcal{M}_2(16, 17) \rightarrow \mathcal{M}_3(16, 17) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_{17}(16, 17) \rightarrow \mathcal{M}_2(17, 17)$$

e raggiunge $\mathcal{M}_{10}(16, 17)$ in una configurazione $\eta^2 \in \mathcal{J}_9^{fp}(16, 17) \subset \mathcal{U}_{10}(16, 17)$ tale che $\mathcal{K}(\eta^2)$ non contenga nessuna configurazione del cammino di riferimento. Siccome $\mathcal{M}_2(16, 17)$ e $\mathcal{M}_2(17, 17)$ sono entrambi connessi (ridotti a un singolo carso) sarà possibile, utilizzando il cammino di riferimento, completare φ in un cammino $\varphi : \underline{0} \rightsquigarrow \underline{1}_0$ che segue la successione ordinata embrio, massicci sottocritici, critici e supercritici. Con $\mathcal{K}_2 := \mathcal{K}(\eta^2)$ è facile vedere che \mathbf{TT}_2^δ è non-vuoto.

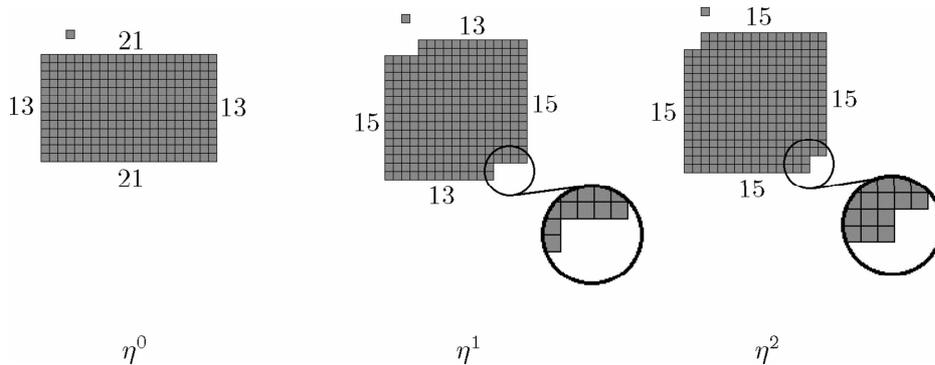


Figura 7.5: $\eta^0, \eta^1 \in \mathcal{J}_{1,0}^{fp}(16, 17)$, $\eta^2 \in \mathcal{J}_{9,0}^{fp}(16, 17) \subset \mathcal{M}_{10}(16, 17)$.

Basta quindi costruire il cammino φ per concludere. A tale scopo consideriamo tre configurazioni η^0, η^1, η^2 come alla Figura 7.5.

La prova del Teorema 4 mostra che η^0 appartiene a $\mathcal{M}_2(16, 17)$ (η^0 appartiene a $\mathcal{A}_{1,4}^{fp}(16, 17)$) e la Figura 7.6 schematizza un cammino $\tilde{\varphi} : \eta^0 \rightsquigarrow \eta^1$ contenuto in $\mathcal{M}_2(16, 17)$.

È facile vedere che il carso $\mathcal{K}(\eta^2)$ contiene soltanto

- configurazioni in $\mathcal{U}_{10}(16, 17)$ ottenute da η^2 spostando la particella libera;
- una *hs*-dolina che contiene le configurazioni ottenute da η^2 rimuovendo la particella libera;
- configurazioni in *hg*-doline o in $\mathcal{U}_{10}(16, 17)$ circonscritte da un contorno come nella Figura 7.7.

Di conseguenza $\mathcal{K}_2 := \mathcal{K}(\eta^2)$ non contiene nessuna configurazione del cammino di riferimento.

Possiamo ora costruire φ per prolungamento di $\tilde{\varphi}$. Attacciamo la particella libera di η^1 in un angolo esterno del cluster, creiamo una nuova particella libera, e iteriamo il processo in tale modo che il cammino costruito raggiunga infine η^2 prima di arrivare in $\mathcal{R}(17, 17) \subset \mathcal{M}_2(17, 17)$.

Possiamo allora fare un ultimo paragone tra i cammini di transizione tipici sotto la dinamica di Glauber e sotto la dinamica locale di Kawasaki. Al contrario del caso non-conservativo, i cammini di transizione tipici sono costretti a visitare completamente grandi insiemi di configurazioni date (ad esempio tutti i cicli principali). Tuttavia, come sotto la dinamica di Glauber, la successione dei carsi (insiemi di permanenza) che visitano non è determinata in modo unico. Qualche aleatorietà rimane nel caso (localmente) conservativo.

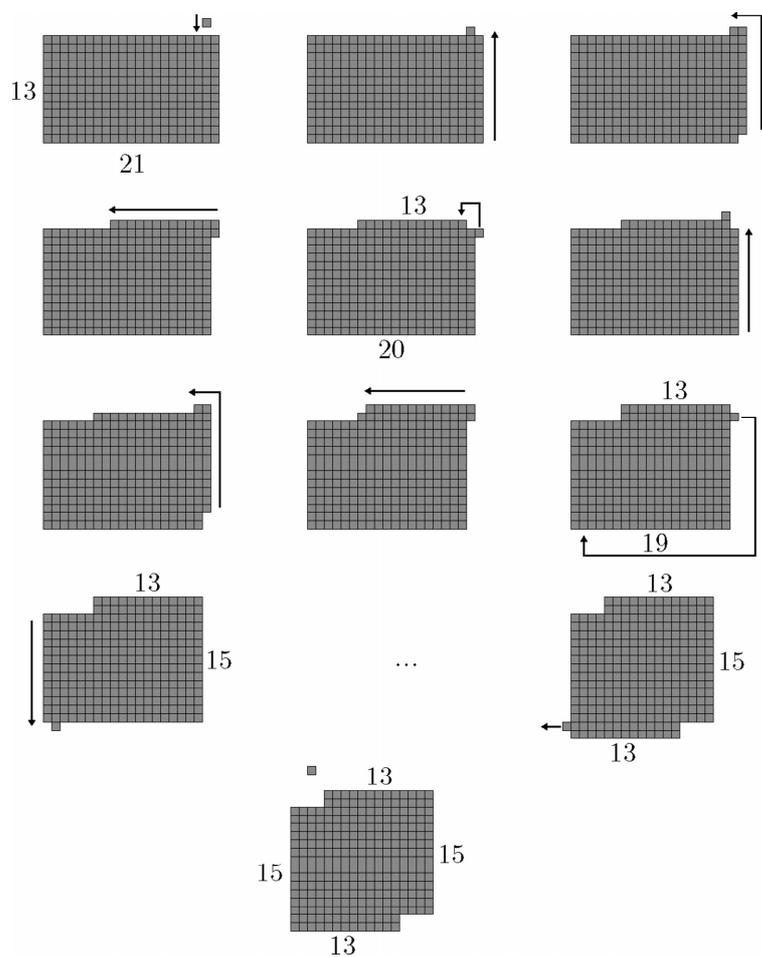


Figura 7.6: $\tilde{\varphi} : \eta^0 \rightsquigarrow \eta^1$. Lungo i puntini due righe di particelle girano successivamente attorno al cluster e nel senso antiorario, come nella prima parte del cammino.

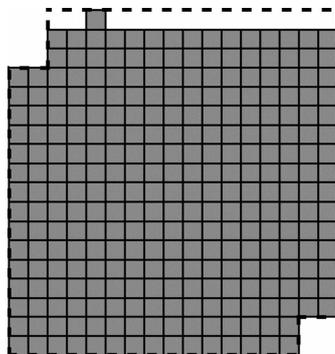


Figura 7.7: il contorno che circonda una configurazione di una hg -dolina in $\mathcal{K}(\eta^2)$.

Parte II

**Verso il modello originale:
probabilità di collisione per
traiettorie aleatorie nel piano**

Capitolo 8

Risultati e strategia

8.1 Probabilità di non-collisione e Quasi Random Walks

Consideriamo n particelle che si evolvono sotto la legge di passeggiate aleatorie in tempo continuo su \mathbb{Z}^2 . A ogni particella associamo un orologio che, indipendentemente dagli altri orologi, suona seguendo un processo di Poisson di intensità 1. E ogni volta che squilla il suo orologio una particella salta in uno dei suoi primi vicini con legge uniforme. Assumiamo inoltre che queste particelle si evolvono nel mezzo di un numero finito di ostacoli fissi, *rettangoli su \mathbb{Z}^2* , cioè della forma

$$([a, b] \times [c, d]) \cap \mathbb{Z}^2 \text{ con } a, b, c, d \text{ in } \mathbb{R},$$

e diciamo che una *collisione* avviene quando qualche particella diventa prima vicina di uno degli ostacoli rettangolari o una delle altre particelle. Daremo in questa seconda parte del lavoro, sotto qualche ipotesi sulla configurazione iniziale, una minorazione della *probabilità di non collisione* entro un tempo T lungo, uniforme nella configurazione iniziale. Con, per ogni $p \geq 1$, d_p la distanza associata alla norma p

$$\|\cdot\|_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p} & \text{se } p < +\infty; \\ \sup(|x|, |y|) & \text{se } p = +\infty; \end{cases}$$

con $|E|$ la cardinalità di un qualunque insieme finito E , con $a \wedge b$ il minimo dei due numeri reali a e b , e con, per ogni $A^\natural \subset \mathbb{Z}^2$ (nel seguito l'apice $^\natural$ identificherà gli oggetti legati al reticolo \mathbb{Z}^2), $\partial^\natural A^\natural$ il suo bordo esterno

$$\partial^\natural A^\natural := \{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus A^\natural : \exists z' \in A^\natural, d_1(z, z') = 1\},$$

il nostro risultato si enuncia

Teorema 5 *Esiste una costante $c_0 \in]0, +\infty[$ tale che, per ogni $n \geq 2$ e $p \geq 2$, vale ciò che segue.*

Se S^\natural è un insieme finito di rettangoli $R_1^\natural, R_2^\natural, \dots, R_{|S^\natural|}^\natural$ su \mathbb{Z}^2 tali che

$$\begin{cases} |\partial^\natural R_1^\natural| + |\partial^\natural R_2^\natural| + \dots + |\partial^\natural R_{|S^\natural|}^\natural| \leq p; \\ \inf_{i \neq j} d_\infty(R_i^\natural, R_j^\natural) > 3; \end{cases}$$

e se $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{Z}^2)^n$ è tale che

$$\begin{cases} \inf_{i \neq j} d_1(z_i, z_j) > 1; \\ \inf_{i, j} d_\infty(z_i, R_j^\natural) > 3; \end{cases}$$

allora, con $P_{\underline{z}}^{\natural}$ la legge di n passeggiate aleatorie indipendenti in tempo continuo $Z_1^{\natural}, Z_2^{\natural}, \dots, Z_n^{\natural}$ che partono da z_1, z_2, \dots, z_n e con

$$\mathcal{T}_c^{\natural} := \inf \left\{ t \geq 0 : \inf_{i \neq j} d_1(Z_i^{\natural}(t), Z_j^{\natural}(t)) \wedge \inf_{i,j} d_1(Z_i^{\natural}(t), R_j^{\natural}) = 1 \right\},$$

abbiamo

$$\forall T \geq T_0, \quad P_{\underline{z}}^{\natural}(\mathcal{T}_c^{\natural} > T) \geq \frac{1}{(\ln T)^{\nu}},$$

dove

$$\begin{cases} \nu = c_0 n^4 p^2 \ln p; \\ T_0 = \exp\{\nu^2\}. \end{cases}$$

Osservazione: Siccome il perimetro di un rettangolo su \mathbb{Z}^2 è maggiore o uguale a 4, il caso $p = 2$ corrisponde a un insieme S vuoto. In questo caso il ruolo dei R_i^{\natural} diventa del tutto irrilevante, ma il risultato rimane valido.

Per provare il Teorema 5, lo dimostreremo prima nella sua versione continua. Consideriamo n particelle sferiche di diametro 1, centrate su n moti browniani piani indipendenti che evolvono nel mezzo di “rettangoli sul piano”, i.e. insiemi della forma

$$[a, b] \times [c, d] \text{ con } a, b, c, d \text{ in } \mathbb{R},$$

e diciamo che una collisione avviene quando una delle particelle è tangente a un rettangolo o a un'altra particella. Con, per ogni R rettangolo sul piano, $|\partial R|$ il suo perimetro, e con, per z un punto in \mathbb{R}^2 , \hat{z} la parte del piano occupata da una particella centrata in z , cioè la palla chiusa centrata in z e di diametro 1 per la distanza d_2 , il Teorema 5 nella sua versione continua si enuncia

Teorema 6 *Esiste una costante $c_0 \in]0, +\infty[$ tale che, per ogni $n \geq 2$ e $p \geq 2$, vale ciò che segue.*

Se S è un insieme finito di rettangoli $R_1, R_2, \dots, R_{|S|}$ sul piano tali che

$$\begin{cases} |S| \leq p/4; \\ |\partial R_1| + |\partial R_2| + \dots + |\partial R_{|S|}| \leq p; \\ \inf_{i \neq j} d_{\infty}(R_i, R_j) \geq 3; \end{cases}$$

se $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ è tale che

$$\begin{cases} \inf_{i \neq j} d_2(\hat{z}_i, \hat{z}_j) \geq 1; \\ \inf_{i,j} d_{\infty}(\hat{z}_i, R_j) \geq 3; \end{cases}$$

allora, con $P_{\underline{z}}$ la legge di n moti browniani piani indipendenti Z_1, Z_2, \dots, Z_n che partono da z_1, z_2, \dots, z_n , e con

$$\mathcal{T}_c := \inf \left\{ t \geq 0 : \inf_{i \neq j} d_2(Z_i(t), Z_j(t)) \wedge 2 \inf_{i,j} d_2(Z_i(t), R_j) = 1 \right\},$$

abbiamo

$$\forall T \geq T_0, \quad P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c > T) \geq \frac{1}{(\ln T)^{\nu}},$$

con

$$\begin{cases} \nu = c_0 n^4 p^2 \ln p; \\ T_0 = \nu^2. \end{cases}$$

Osservazione: Rimandiamo a [29] per una discussione sull'accuratezza dell'esponente del logaritmo di T nelle minorazioni dei Teoremi 5 e 6 e sulla generalizzazione dei risultati alle dimensioni più alte (per quanto riguarda il caso di dimensione 1, la probabilità di non collisione è un oggetto ben noto da [1]).

Quasi Random Walks

Come detto nell'introduzione la minorazione del Teorema 5 – uniforme nella configurazione iniziale data da S e z , e valida per ogni T più grande di un T_0 esplicito (a meno della costante c_0) – basta per descrivere in termini di “Quasi Random Walks” un gas molto diluito di densità $\rho = e^{-\Delta\beta}$ sotto la dinamica di Kawasaki in volume esponenzialmente grande $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$. Diamo qui l'euristica dell'argomento e rimandiamo a [30] per i risultati formali.

Sotto la dinamica di Kawasaki le particelle evolvono come passeggiate aleatorie indipendenti finché sono libere. Diciamo che il gas del sistema è l'insieme di tutte le particelle libere e dei clusters più piccoli di un certo volume finito, indipendente da β . Detto grossolanamente una particella individuata del gas segue la legge di una passeggiata aleatoria finché non abbia colliso con un cluster o un'altra particella libera per formare un nuovo cluster, dopo ogni urto sarà riemessa a una distanza limitata dal cluster, e riprenderà poi un'evoluzione di semplice passeggiata aleatoria fino al prossimo urto. Le traiettorie delle particelle sono quindi delle traiettorie di passeggiate aleatorie perturbate da questo processo di collisione/riemissione. Se la frequenza delle collisioni è bassa, allora le particelle eseguiranno delle “Quasi Random Walks” come introdotte in un contesto più semplice in [21].

Assumiamo adesso che il sistema parte da una misura, *che può non essere la misura di equilibrio*, tale che si possa *a priori* escludere per tempi lunghi (diciamo esponenzialmente grandi in β) qualunque concentrazione anomala del gas in ogni scatola di volume $e^{\Delta\beta}$. Ciò significa che con probabilità molto grande (diciamo super-esponenzialmente vicina a 1 in β) non ci sarà più di $\lambda(\beta)$ particelle del gas in ognuna di queste scatole, con λ una funzione che cresce lentamente verso $+\infty$ (ad esempio $\lambda(\beta) = \ln \ln \beta$.) Allora, su scale di tempo $T = e^{\Delta\beta}$, le nuvole di particelle potenzialmente interagenti, cioè a distanza di ordine $T^{1/2} = e^{\Delta\beta/2}$ tra loro, sono “virtualmente finite”, i.e. contengono al massimo un numero n di particelle di ordine $\lambda(\beta)$. Assumendo, come prima approssimazione, che i cluster sono degli ostacoli fissi (tale ipotesi può essere aggirata tramite la Proposizione 2.2.1), il Teorema 5 e la proprietà di Markov forte danno che il numero di collisioni all'interno di ogni nuvola è più grande di $\ln^{2\nu} T$ con una probabilità più piccola di

$$\left(1 - \frac{1}{\ln^\nu T}\right)^{\ln^{2\nu} T},$$

cioè super-esponenzialmente piccola in β . Sicché, con probabilità super-esponenzialmente vicina a 1, il numero di collisioni all'interno di una nuvola di particelle potenzialmente interagenti è non-esponenzialmente grande (ν è legato a n virtualmente finito), ciò assicura che le particelle non abbiano un comportamento super-diffusivo su scale di tempo di ordine T (con probabilità super-esponenzialmente vicina a 1) e che le diverse nuvole non interagiscono tra loro. Possiamo così concludere che la frequenza delle collisioni è molto bassa e che le particelle eseguono delle “Quasi Random Walks”.

8.2 Strategia e notazione

La probabilità di non-collisione è una quantità ben nota *nel caso unidimensionale*. Nel 1959 Karlin e McGregor diedero in [1] una formula con determinante per calcolarla senza ostacoli fissi (la versione unidimensionale del nostro caso $p = 2$). Il conto poneva su un argomento di riflessione che fu dopo esteso a numerose situazioni (si veda ad esempio [6], [7], [15], [20], [22].) In [20] Grabiner diede, per i moti browniani unidimensionali e senza ostacoli fissi, l'asintotica della probabilità di non-collisione

entro T per T grande:

$$c(\underline{\eta}) \left(1/\sqrt{T}\right)^{n(n-1)/2} \quad (8.1)$$

dove $c(\underline{\eta})$ è una funzione esplicita della configurazione iniziale $\underline{\eta}$. Diede anche alcuni risultati analoghi per la probabilità di non-collisione con un ostacolo fisso (la versione unidimensionale del nostro caso $p = 4$).

Per analogia si può pensare che nel nostro caso bidimensionale la probabilità di non collisione va, per T grande e almeno nel caso $p = 2$, come $(1/\ln T)^{n(n-1)/2}$ poiché $1/\ln T$ – invece di $1/\sqrt{T}$ – è l'ordine della probabilità di non ritorno all'origine entro T . La nostra minorazione è abbastanza lontana da una tale asintotica e molto lontana della precisione dell'asintotica unidimensionale data in (8.1). Ma l'argomento di simmetria utilizzato in dimensione 1 non si applica al caso bidimensionale – almeno non nello stesso modo diretto – e abbiamo dovuto sviluppare un approccio diverso per ottenere questo risultato più debole. Per quanto io sappia, è il primo risultato sulla probabilità di non collisione in dimensione 2.

Strategia

Volendo ottenere dei minoranti che decrescono lentamente in T , e visto che la probabilità che una passeggiata aleatoria o un moto browniano viaggi a una distanza di ordine $T^{\epsilon+1/2}$ in un tempo più piccolo di T decresce esponenzialmente velocemente, stimeremo la probabilità di viaggiare a tali distanze senza collisione per stimare la probabilità di non collisione. In pratica faremo così con $\epsilon = 1/2$: altre scelte avrebbero soltanto modificato il valore della costante c_0 che compare nei Teoremi 5 e 6.

Quindi, nel Capitolo 9 stimeremo tale probabilità di viaggiare a distanza T senza collisione per la versione continua del sistema nel caso più semplice di un unico ostacolo fisso particolare, ovvero di una singola particella fissa nell'origine. È il fulcro della prova dei nostri risultati e utilizza la teoria basica del potenziale su \mathbb{R}^{2n} .

Nel Capitolo 10 proveremo i Teoremi 5 e 6 in quattro passi. Primo, daremo delle stime rozze della probabilità che le particelle aggirino gli ostacoli e facciano crescere linearmente la distanza tra loro senza collisione. Le stime sono semplici seppur tecniche, vengono più naturalmente nel caso discreto e sono facilmente adattate al caso continuo.

Secondo, con l'uso di queste stime e di qualche proprietà di invarianza di scala logaritmica, rafforzeremo i risultati del Capitolo 9: stimeremo, nel caso più semplice di n particelle browniane e una particella fissa, la probabilità di far crescere fino a T la distanza tra loro, senza collisione e evitando che qualunque particella viaggi a una distanza αT , con α una costante positiva che dipende soltanto da n .

Terzo, riportando il problema su una scala “mesoscopica” σ_0 , legata alla distanza tra gli ostacoli fissi e che sta tra la scala “microscopica” 1 e la scala “macroscopica” T , otterremo il Teorema 6 per induzione sul numero degli ostacoli.

Quarto, proveremo il Teorema 5 utilizzando l'accoppiamento forte tra passeggiate aleatorie e moti browniani costruito da Komlós, Major e Tusnády in [2] e [3]. L'uso di tale approssimazione per studiare il caso discreto è all'origine dell'espressione differente per T_0 nei Teoremi 5 e 6.

Notazione

In questa seconda parte del lavoro utilizzeremo le seguenti notazioni.

In qualunque dimensione d e per ogni $p \geq 1$, denoteremo con d_p la distanza associata alla norma p su \mathbb{R}^d e con $B_p(\underline{z}, r)$ – dove $\underline{z} \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$ – la palla aperta di centro \underline{z} e raggio r per la distanza d_p . Il bordo e la chiusura (per la topologia

associata a queste distanze) di un qualunque sottoinsieme A di \mathbb{R}^d saranno denotati con ∂A e \bar{A} .

Per ogni $A \subset \mathbb{R}^2$ e ogni $r > 0$ definiamo

$$A^\natural := A \cap \mathbb{Z}^2$$

e

$$[A]_r := \bigcup_{z \in A} \overline{B_\infty(z, r)}.$$

Se A è ridotto a un singolo punto $z \in \mathbb{R}^2$ scriveremo $[z]_r$ invece di $[\{z\}]_r$.

Per $A \subset \mathbb{R}^2$ definiamo anche la sua *ombra orizzontale* $\text{h-sh}A$ e la sua *ombra verticale* $\text{v-sh}A$ come

$$\begin{aligned} \text{h-sh}A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x', y') \in A, x = x'\}; \\ \text{v-sh}A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x', y') \in A, y = y'\}. \end{aligned}$$

Il *rettangolo circoscritto* di A , denotato con $\text{RC}(A)$, è l'intersezione di tutti i rettangoli $[a, b] \times [c, d]$ che contengono A . Se A è un "rettangolo sul piano", i.e. se $A = \text{RC}(A)$, allora denoteremo con $|\partial A|$ il suo perimetro. Per ogni S insieme finito di rettangoli sul piano definiamo

$$\underline{S} := \bigcup_{R \in S} R.$$

Per ogni z in \mathbb{R}^2 definiamo

$$\hat{z} := \overline{B_2(z, 1/2)}$$

che è la regione occupata da una particella sferica con diametro unitario centrata in z . Per il caso discreto definiamo l'analogo seguente:

$$[z] := [z]_{\frac{1}{2}}.$$

Per ogni $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ in $(\mathbb{R}^2)^n$ e ogni S insieme finito di rettangoli $R_1, R_2, \dots, R_{|S|}$ sul piano, definiamo due misure $w_S(\underline{z})$ e $w_S^\natural(\underline{z})$ della distanza tra le particelle centrate in z_1, z_2, \dots, z_n e i rettangoli, una per il caso continuo, l'altra per il caso discreto:

$$w_S(\underline{z}) := \inf_{i \neq j} d_\infty(\hat{z}_i, \hat{z}_j) \wedge \inf_{i,j} d_\infty(\hat{z}_i, R_j)$$

e

$$w_S^\natural(\underline{z}) := \inf_{i \neq j} d_\infty([z_i], [z_j]) \wedge \inf_{i,j} d_\infty([z_i], R_j).$$

Quando non ci sarà nessuna ambiguità sull'insieme S a cui saranno riferite queste quantità, ometteremo l'indice S . Definiamo anche, con O l'origine del piano,

$$\delta(\underline{z}) := \inf_{i \neq j} d_2(z_i, z_j) \wedge \inf_i d_2(z_i, O).$$

Si noti che nell'ultima definizione prendiamo in conto le distanze tra i *centri* delle particelle e non tra le particelle stesse.

Per Z_1, Z_2, \dots, Z_n n moti browniani piani indipendenti, denoteremo con \underline{Z} il moto browniano $2n$ -dimensionale

$$\underline{Z} := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$$

e per ogni $t \geq 0$ definiamo una “massima elongazione individuale” entro t :

$$\rho(t) := \sup_i \sup_{s \leq t} d_2(Z_i(s), Z_i(0)).$$

Nello stesso modo, se $Z_1^{\natural}, Z_2^{\natural}, \dots, Z_n^{\natural}$ sono n passeggiate aleatorie in tempo continuo indipendenti, denoteremo con \underline{Z}^{\natural} il processo

$$\underline{Z}^{\natural} := (Z_1^{\natural}, Z_2^{\natural}, \dots, Z_n^{\natural}).$$

Il *primo tempo di collisione* \mathcal{T}_c (rispettivamente \mathcal{T}_c^{\natural} nel caso discreto) è definito per un insieme dato S (rispettivamente S^{\natural}) di rettangoli come nel Teorema 6 (rispettivamente Teorema 5.) Quando vorremo sottolineare la dipendenza da S (o S^{\natural}), scriveremo $\mathcal{T}_{c,S}$ (rispettivamente $\mathcal{T}_{c,S^{\natural}}$.) Per ogni $A \subset (\mathbb{R}^2)^n$ e $b \geq 0$ definiamo i tempi d’arresto

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[A] &:= \inf \{t \geq 0 : \underline{Z}(t) \in A\}, \\ \mathcal{T}[\rho \geq b] &:= \inf \{t \geq 0 : \rho(t) \geq b\}, \end{aligned}$$

nello stesso modo definiamo $\mathcal{T}[\delta \geq b]$, $\mathcal{T}[w \geq b]$ e $\mathcal{T}[w^{\natural} \geq b]$, definiamo anche, con O l’origine del piano,

$$\mathcal{T}_{c,\hat{O}} := \left\{ t \geq 0 : \inf_{i \neq j} d_2(Z_i(t), Z_j(t)) \wedge \inf_{i,j} d_2(Z_i(t), O) = 1 \right\}.$$

Quest’ultimo tempo d’arresto è l’estensione del primo tempo di collisione a una situazione nella quale l’insieme degli ostacoli fissi è ridotto a una singola particella fissata \hat{O} , centrata nell’origine O .

Denoteremo con $P_{\underline{z}}$ (rispettivamente $P_{\underline{z}}^{\natural}$) la legge di n moti browniani piani indipendenti (rispettivamente n passeggiate aleatorie piane in tempo continuo indipendenti) che partono da \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$.

Utilizzeremo la notazione

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

la convenzione

$$\inf \emptyset := +\infty,$$

e in tutti i nostri conti “cst” denoterà una costante positiva, indipendente da ogni parametro e il cui valore può cambiare di riga in riga.

Capitolo 9

Moti browniani con un unico ostacolo

9.1 Il lemma chiave

In questo capitolo studiamo il caso più semplice di n particelle browniane con un unico ostacolo fisso \hat{O} . Il seguente lemma è la chiave della prova dei Teoremi 5 e 6.

Lemma 9.1.1 *Per ogni $n \geq 2$, ogni $a \geq 2$ e ogni $T > 0$, se $\underline{z} \in (\mathbb{R}^2)^n$ è tale che $\delta(\underline{z}) \geq a$, allora*

$$\begin{aligned} & P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c; \hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z}, T)] \right) \\ & \geq \left[\left(\frac{\ln a}{\ln(a+T)} \right)^n \left(\frac{\ln a}{\ln(a+\sqrt{2}T)} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{\frac{1}{1-\cos \frac{\pi}{2n}}} . \end{aligned} \quad (9.1)$$

In particolare, per ogni $\epsilon > 0$ e $b \geq a^{1+\epsilon}$,

$$P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c; \hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z}, b)] \right) \geq \left(\frac{\ln a}{\ln b} \right)^{c_\epsilon n^4}, \quad (9.2)$$

dove c_ϵ è una costante che dipende soltanto da ϵ .

Prova: Denoteremo con E lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^2)^n$ vestito dal prodotto scalare usuale, e introduciamo i sottospazi di codimensione due F_k , che corrispondono alla sovrapposizione di due particelle: gli F_k sono tutti i sottospazi di prima specie

$$F_k := \{ \underline{z} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in E : x_i = x_j, y_i = y_j \}$$

per qualche $1 \leq i < j \leq n$, o di seconda specie

$$F_k := \{ \underline{z} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in E : x_i = 0, y_i = 0 \}$$

per qualche $1 \leq i \leq n$ (quest'ultimo caso corrisponde alla sovrapposizione della i -esima particella con quella fissa.) Così, k è un indice intero che va da 1 a m con

$$m := \frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Si noti che per ogni $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ in E abbiamo, con r_k la distanza euclidea (in E) a F_k ,

$$r_k(\underline{z}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \times d_2(z_i, z_j) & \text{se } F_k \text{ è associato agli indici } i \text{ e } j \text{ (prima specie);} \\ 1 \times d_2(z_i, O) & \text{se } F_k \text{ è associato all'indice } i \text{ (seconda specie).} \end{cases}$$

Chiamiamo α_k l'inverso del coefficiente corrispondente (sicché $\alpha_k \in \{\sqrt{2}; 1\}$) e definiamo i sottoinsiemi di E

$$\begin{aligned} A_k &:= \{z \in E : \alpha_k r_k(z) \leq 1\}; \\ A &:= \bigcup_{1 \leq k \leq m} A_k. \end{aligned}$$

Abbiamo $\mathcal{T}_{z; \hat{O}} = \mathcal{T}[A]$ se il processo parte da qualche $z \notin A$. Così, con

$$B^0 := B_2(z^0, T)$$

per un z^0 dato e tale che $\delta(z^0) \geq a$, dobbiamo stimare $P_{z^0}(\mathcal{T}[A] > \mathcal{T}[\partial B^0])$ dal basso.

La funzione del punto di partenza

$$h(\cdot) := P(\mathcal{T}[A] > \mathcal{T}[\partial B^0])$$

è armonica su $B^0 \setminus A$ e verifica

$$h|_{\partial B^0 \setminus A} \equiv 1 \quad \text{e} \quad h|_{\partial A} \equiv 0.$$

Assumiamo ora che g sia una funzione subarmonica e a valori in \mathbb{R}_+ su $E \setminus A$ che possa essere estesa per continuità per ottenere

$$g|_{\partial A} \equiv 0.$$

Otteniamo allora

$$h \geq \frac{g}{\sup g(B^0)}$$

e ciò dà in z^0

$$P_{z^0}(\mathcal{T}[A] > \mathcal{T}[\partial B^0]) \geq \frac{g(z^0)}{\sup g(B^0)}. \quad (9.3)$$

(Possiamo ottenere lo stesso risultato applicando il Teorema di Doob a una famiglia di processi arrestati ottenuti dalla sottomartingala locale $g(\underline{Z})$.)

Cerchiamo una tale funzione g per ottenere (9.1) come conseguenza di (9.3). Proviamo con

$$g = \prod_{1 \leq k \leq m} f_k$$

dove ogni f_k è una funzione C^2 crescente di r_k tale che

$$f_k|_{\partial A_k} \equiv 0.$$

Si noti che in tali condizioni abbiamo

$$\nabla f_k = \|\nabla f_k\| \nabla r_k$$

sicché, su $E \setminus A$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g}{g} &= \sum_k \frac{\Delta f_k}{f_k} + \sum_{k \neq l} \frac{\nabla f_k}{f_k} \cdot \frac{\nabla f_l}{f_l} \\ &= \sum_k \frac{\Delta f_k}{f_k} + \sum_{k, l} \left\| \frac{\nabla f_k}{f_k} \right\| \left\| \frac{\nabla f_l}{f_l} \right\| \nabla r_k \cdot \nabla r_l - \sum_k \left\| \frac{\nabla f_k}{f_k} \right\|^2. \end{aligned}$$

Denoteremo, per ogni z in $E \setminus A$, con $W(z)$ il vettore *a coordinate positive o nulle*

$$W(z) := \left(\left\| \frac{\nabla f_k}{f_k}(z) \right\| \right)_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{R}_+^m,$$

e con $Q(\underline{z})$ la matrice simmetrica reale di dimensione m

$$Q(\underline{z}) := (\nabla r_k(\underline{z}) \cdot \nabla r_l(\underline{z}))_{1 \leq k, l \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

Otteniamo, su $E \setminus A$,

$$\frac{\Delta g}{g} = \sum_k \frac{\Delta f_k}{f_k} + \|W\|_2^2 \left(\frac{{}^t W}{\|W\|_2} Q \frac{W}{\|W\|_2} - 1 \right), \quad (9.4)$$

con ${}^t W$ la matrice linea ottenuta dal vettore W per trasposizione.

Chiamiamo *correlazione di collisione* l'ultimo fattore in (9.4) (se l'indice k avesse descritto un sottoinsieme di $\{1; \dots; m\}$ tale che gli F_k associati fossero stati legati a delle collisioni indipendenti, come ad esempio tra la prima e la seconda particella e tra la terza e la quarta particella, questo fattore sarebbe stato nullo). La correlazione di collisione è minorata da $\gamma - 1$ con

$$\gamma := \inf_{\underline{z} \in E \setminus A} \inf_{\substack{V \in \mathbb{R}_+^m \\ \|V\|_2=1}} {}^t V Q(\underline{z}) V.$$

Affermiamo

Lemma 9.1.2 *Per ogni $n \geq 2$*

$$\gamma \geq 1 - \cos \frac{\pi}{2n} \quad .$$

Rimandiamo la prova del lemma alla sezione successiva e osserviamo che, poiché (9.4) implica

$$\frac{\Delta g}{g} \geq \sum_k \frac{\Delta f_k}{f_k} + (\gamma - 1) \left\| \frac{\nabla f_k}{f_k} \right\|^2,$$

una condizione sufficiente per la subarmonicità di g è di avere ogni f_k soluzione della disuguaglianza differenziale su $E \setminus A$:

$$\frac{\Delta f}{f} + (\gamma - 1) \left\| \frac{\nabla f}{f} \right\|^2 \geq 0. \quad (9.5)$$

Poiché il Lemma 9.1.2 afferma in particolare che $\gamma > 0$, è immediato verificare che una funzione f positiva è soluzione di (9.5) se e solo se f^γ è subarmonica. Ciò mostra (ricordiamo che i r_k misurano la distanza a dei sottospazi di codimensione 2) che possiamo scegliere per ogni k

$$f_k = (\ln \alpha_k r_k)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Da (9.3) otteniamo allora

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}^0}(\mathcal{T}[A] > \mathcal{T}[\partial B^0]) &\geq \frac{1}{\sup g(B^0)} \prod_k (\ln \alpha_k r_k(\underline{z}^0))^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq \prod_k \left(\frac{\ln \alpha_k r_k(\underline{z}^0)}{\ln(\alpha_k r_k(\underline{z}^0) + \alpha_k T)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

e, siccome per ogni k

$$x \in [2, +\infty[\mapsto \frac{\ln x}{\ln(x + \alpha_k T)}$$

è una funzione crescente, cioè, assieme alla stima di γ data dal Lemma 9.1.2, chiude la prova. \square

9.2 Stime della correlazione di collisione

Proviamo ora il Lemma 9.1.2 e conserviamo le stesse notazioni della sezione precedente. Ogni $\nabla r_k(\underline{z})$ appartiene all'ortogonale di F_k , il quale è di dimensione 2, e la direzione dei ∇r_k dipende dal punto \underline{z} dove sono calcolati. Di conseguenza $Q(\underline{z})$ dipende fortemente da \underline{z} . Appare però che γ può essere stimato da quantità simili *calcolate per sottoinsiemi di codimensione 1*.

Per mostrare questa proprietà introduciamo qualche notazione supplementare. Denotiamo con

$$(e_1^x, e_1^y, e_2^x, e_2^y, \dots, e_n^x, e_n^y)$$

la base canonica di $E = (\mathbb{R}^2)^n$. Per $*$ una qualunque delle due lettere x e y definiamo

$$F_k^* := \{ \underline{z} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in E : *i = *j \}$$

se F_k corrisponde alla sovrapposizione delle i -esima e j -esima particelle e

$$F_k^* := \{ \underline{z} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in E : *i = 0 \}$$

se F_k corrisponde alla sovrapposizione della i -esima particella con quella fissa. Con p_k^* la proiezione ortogonale su F_k^* definiamo

$$u_k^*(\underline{z}) := \begin{cases} \frac{\underline{z} - p_k^* \underline{z}}{\|\underline{z} - p_k^* \underline{z}\|} & \text{se } \underline{z} \in E \setminus F_k^*; \\ 0 & \text{se } \underline{z} \in F_k^*. \end{cases}$$

Si noti che $\|u_k^*(\underline{z})\| \in \{0; 1\}$ e che $u_k^*(\underline{z})$ è parallelo a qualche

$$f_{i,j}^* := \frac{e_j^* - e_i^*}{\sqrt{2}} \quad (9.6)$$

se F_k è di prima specie o parallelo a qualche e_i^* se F_k è di seconda specie. È anche immediato verificare che

$$\forall k, l \in \{1; \dots; m\}, u_k^x \cdot u_l^y \equiv 0. \quad (9.7)$$

e

$$\forall k \in \{1; \dots; m\}, \forall \underline{z} \in E \setminus A, \exists! (\lambda_k^x, \lambda_k^y) \in [0, \|u_k^x(\underline{z})\|] \times [0, \|u_k^y(\underline{z})\|], \quad (9.8)$$

$$(\lambda_k^x)^2 + (\lambda_k^y)^2 = 1 \quad e \quad \nabla r_k(\underline{z}) = \lambda_k^x u_k^x(\underline{z}) + \lambda_k^y u_k^y(\underline{z}).$$

Definiamo infine, per ogni $\underline{z} \in E$,

$$\gamma^*(\underline{z}) := \inf \left\{ {}^t V^* Q^*(\underline{z}) V^* \in \mathbb{R} : V^* \in \prod_k [0, \|u_k^*(\underline{z})\|] \subset \mathbb{R}_+^m, \|V^*\|_2 = 1 \right\},$$

con

$$Q^*(\underline{z}) := (u_k^*(\underline{z}) \cdot u_l^*(\underline{z}))_{1 \leq k, l \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

Ora se \underline{z} appartiene $E \setminus A$ e

$$V = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}_+^m$$

è tale che $\|V\|_2 = 1$, scriviamo

$$V^*(\underline{z}) := (\mu_1 \lambda_1^*, \dots, \mu_m \lambda_m^*) \in \prod_k [0, \|u_k^*(\underline{z})\|],$$

con i λ_k^* definiti da (9.8), e abbiamo, utilizzando (9.7),

$$\begin{aligned}
{}^tVQV &= \|\mu_1 \nabla r_1 + \cdots + \mu_m \nabla r_m\|^2 \\
&= \left\| \sum_k \mu_k \lambda_k^x u_k^x + \sum_k \mu_k \lambda_k^y u_k^y \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_k \mu_k \lambda_k^x u_k^x \right\|^2 + \left\| \sum_k \mu_k \lambda_k^y u_k^y \right\|^2 \\
&= {}^tV^x Q^x V^x + {}^tV^y Q^y V^y \\
&\geq \|V^x\|_2^2 \gamma^x + \|V^y\|_2^2 \gamma^y.
\end{aligned}$$

Per simmetria delle definizioni abbiamo

$$\gamma_1 := \inf_{\underline{z} \in E} \gamma^x(\underline{z}) = \inf_{\underline{z} \in E} \gamma^y(\underline{z}).$$

Le equazioni in (9.8) danno anche

$$\|V^x\|_2^2 + \|V^y\|_2^2 \equiv \|V\|_2^2 = 1$$

e possiamo concludere ${}^tVQV \geq \gamma_1$, sicché $\gamma \geq \gamma_1$ e basta fare una minorazione di γ_1 , i.e. una minorazione uniforme di γ^x o γ^y , diciamo γ^x .

Ogni $u_k^x(\underline{z})$ che compare nella definizione di $\gamma^x(\underline{z})$ dipende soltanto dal “lato dell’iperpiano F_k^x dove \underline{z} sta.” Di conseguenza la funzione γ^x è costante su ognuna delle componenti connesse di $E \setminus \bigcup_k F_k^x$. È facile vedere che per ogni $\underline{z}' \in \bigcup_k F_k^x$ l’infimum che definisce $\gamma^x(\underline{z}')$ è calcolato su un insieme contenuto in quello usato per calcolare $\gamma^x(\underline{z})$ per qualche \underline{z} in $E \setminus \bigcup_k F_k^x$. Quindi, per minorare $\gamma^x(\underline{z})$ uniformemente in \underline{z} possiamo assumere che

$$\underline{z} = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in E \setminus \bigcup_k F_k^x,$$

il che significa che 0 e le coordinate x_1, \dots, x_n sono $n + 1$ numeri distinti. Senza perdita di generalità possiamo quindi assumere

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \tag{9.9}$$

e basta mostrare

$$\gamma^x(\underline{z}) = \inf_{\substack{(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}_+^m \\ \mu_1^2 + \cdots + \mu_m^2 = 1}} \|\mu_1 u_1^x(\underline{z}) + \cdots + \mu_m u_m^x(\underline{z})\|^2 \geq 1 - \cos \frac{\pi}{2n}.$$

Proveremo tale minorazione in due passi. Primo mostreremo che possiamo estrarre dalla famiglia degli m vettori $u_k^x(\underline{z})$ una famiglia di n vettori v_1, \dots, v_n tale che

$$\gamma^x(\underline{z}) = \inf_{\substack{(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n \\ \mu_1^2 + \cdots + \mu_n^2 = 1}} \|\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n\|^2. \tag{9.10}$$

Secondo mostreremo che tale infimum è maggiore o uguale a

$$\inf \text{Sp}(Q_n) = 1 - \cos \frac{\pi}{2n},$$

il più piccolo degli autovalori di Q_n , definito da

$$Q_n := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad (9.11)$$

Con

$$q := (n+1) \wedge \inf \{i \in \mathbb{N} : x_i > 0\}$$

abbiamo (ricordiamo (9.9) e (9.6))

$$\begin{aligned} & \{u_k^x(\underline{z}) : 1 \leq k \leq m\} \\ & = \{f_{i,j}^x : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{-e_i^x : 1 \leq i < q\} \cup \{e_i^x : q \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Definiamo per $1 \leq i \leq n$

$$v_i := \begin{cases} f_{i,i+1}^x & \text{se } 1 \leq i \leq q-2 \\ -e_i^x & \text{se } i = q-1 \\ e_i^x & \text{se } i = q \\ f_{i-1,i}^x & \text{se } q+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

È facile vedere che, per ogni v_i e v_j con $i \leq j$,

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \geq i+2 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } j = i+1 < q-1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } j = i+1 = q-1 \\ 0 & \text{se } j = i+1 = q \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } j = i+1 = q+1 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } j = i+1 > q+1 \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases} \quad (9.12)$$

e che ogni $u_k^x(\underline{z})$ è una combinazione lineare *positiva* dei v_i :

$$u_k^x(\underline{z}) = \sum_i \lambda_{k,i} v_i \quad \text{con } (\lambda_{k,i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^n.$$

Si noti che tale equazione dà assieme a (9.12)

$$\sum_i \lambda_{k,i}^2 = 1 - \sum_{i \neq j} \lambda_{k,i} \lambda_{k,j} (v_i \cdot v_j) \geq 1. \quad (9.13)$$

Ora per ogni

$$(\mu_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{R}_+^m$$

tale che

$$\sum_k \mu_k^2 = 1$$

abbiamo

$$\left\| \sum_k \mu_k u_k^x(\underline{z}) \right\|^2 = \left\| \sum_k \mu_k \sum_i \lambda_{k,i} v_i \right\|^2 = \left\| \sum_i \left(\sum_k \lambda_{k,i} \mu_k \right) v_i \right\|^2.$$

Con

$$s^2 := \sum_i \left(\sum_k \lambda_{k,i} \mu_k \right)^2$$

e

$$(\mu'_i)_{1 \leq i \leq n} := \left(\frac{1}{s} \sum_k \lambda_{k,i} \mu_k \right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^n,$$

otteniamo

$$\sum_i \mu_i'^2 = 1$$

e

$$\left\| \sum_k \mu_k u_k^x(\underline{z}) \right\|^2 = s^2 \left\| \sum_i \mu'_i v_i \right\|^2.$$

Quindi, purché $s^2 \geq 1$, otteniamo (9.10). Ma, utilizzando il fatto che i $\lambda_{k,i}$ e i μ_k sono positivi o nulli e utilizzando (9.13), abbiamo

$$s^2 \geq \sum_i \sum_k \lambda_{k,i}^2 \mu_k^2 = \sum_k \mu_k^2 \sum_i \lambda_{k,i}^2 \geq \sum_k \mu_k^2 = 1$$

e ciò chiude il nostro primo passo.

Ora è facile vedere che le relazioni (9.12) danno che $\gamma^x(\underline{z})$ è maggiore o uguale a (uguale nel caso $q = 1$)

$$\epsilon_n := \inf_{X \in K} {}^t X Q_n X$$

dove K è la chiusura di

$$\mathcal{O} := \{X = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in]0, +\infty[^n : \|X\|_2^2 = 1\}$$

e Q_n è definita in (9.11). Siccome K è un insieme compatto, l'infimum è raggiunto in K . Se è raggiunto in $X \in \mathcal{O}$ allora il Teorema di Lagrange dà che X è un autovettore di Q_n e che ϵ_n è l'autovalore associato. Se è raggiunto in $K \setminus \mathcal{O}$ allora, per induzione, ϵ_n è maggiore o uguale a qualche autovalore di $Q_{n'}$ per qualche $n' < n$. Basta quindi studiare $\text{Sp}(Q_n)$, lo spettro di Q_n , per un n generico. Affermiamo:

$$\text{Sp}(Q_n) = \left\{ 1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} : k \in \{0; 1; \dots; n-1\} \right\}.$$

Infatti, con $(-\Delta_n)$ l'opposto del laplaciano discreto su un segmento di n siti con condizioni al bordo nulle, i.e. l'operatore ottenuto da Q_n cambiando i due coefficienti $-1/\sqrt{2}$ in $-1/2$, e con χ_n il polinomio caratteristico di $(-\Delta_n)$, abbiamo per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e con I la matrice identità,

$$\det(Q_n - \lambda I) = (1 - \lambda)\chi_{n-1}(\lambda) - \frac{1}{2}\chi_{n-2}(\lambda)$$

(definiamo $\chi_0 := 1$), mentre, per ogni $k \geq 2$,

$$\chi_k(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{k-1}(\lambda) - \frac{1}{4}\chi_{k-2}(\lambda),$$

sicché, per $0 < \lambda < 2$,

$$\chi_k(\lambda) = \alpha \zeta^k + \bar{\alpha} \bar{\zeta}^k$$

con

$$\begin{cases} \zeta := \frac{1}{2} \left(1 - \lambda + i\sqrt{1 - (1 - \lambda)^2} \right), \\ \alpha := \zeta (\zeta - \bar{\zeta})^{-1}, \end{cases}$$

e ciò dà, sempre nel caso $0 < \lambda < 2$, e con θ in $]0, \pi[$, definito da $e^{i\theta} = 2\zeta$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{Sp}(Q_n) &\Leftrightarrow (1 - \lambda)\chi_{n-1}(\lambda) - \frac{1}{2}\chi_{n-2}(\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \chi_n(\lambda) = \frac{1}{4}\chi_{n-2}(\lambda) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}(e^{2i\theta}\alpha\zeta^{n-2} + e^{-2i\theta}\bar{\alpha}\bar{\zeta}^{n-2}) = \frac{1}{4}(\alpha\zeta^{n-2} + \bar{\alpha}\bar{\zeta}^{n-2}) \\
&\Leftrightarrow e^{i\theta}(e^{i\theta}\alpha\zeta^{n-2} - e^{-i\theta}\bar{\alpha}\bar{\zeta}^{n-2}) = e^{-i\theta}(e^{i\theta}\alpha\zeta^{n-2} - e^{-i\theta}\bar{\alpha}\bar{\zeta}^{n-2}) \\
&\Leftrightarrow e^{i\theta}\alpha\zeta^{n-2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow e^{in\theta} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \text{per qualche } k \text{ in } \{0; 1; \dots; n-1\}.
\end{aligned}$$

Otteniamo così tutti gli autovalori di Q_n contenuti in $]0, 2[$, ma, siccome il loro numero è n , otteniamo lo spettro completo di Q_n . Di conseguenza

$$\epsilon_n \geq 1 - \cos \frac{\pi}{2n}$$

(in realtà è facile mostrare l'uguaglianza) e ciò chiude la prova del Lemma 9.1.2. \square

Capitolo 10

Da uno a tanti ostacoli

10.1 Raggruppamenti

Alla fine del capitolo proveremo i Teoremi 5 e 6 per induzione sul numero degli ostacoli. A tale scopo e prima di seguire nelle prossime quattro sezioni la strategia in quattro passi descritta nella Sezione 8.2, introduciamo in questa prima sezione qualche strumento per raggruppare in un unico ostacolo un insieme di ostacoli “vicini su una scala data σ ”. Chiamiamo \mathcal{R} l’insieme delle collezioni finite di rettangoli sul piano e definiamo una famiglia $(g_\sigma)_{\sigma \geq 0}$ di trasformazioni di \mathcal{R} , che in qualche modo raggruppa in singoli rettangoli i rettangoli di un $S \in \mathcal{R}$ che sono a distanza più piccola di σ uno dall’altro. In realtà le funzioni g_σ sono appena più di una notazione addizionale, ma saranno onnipresenti da qui alla fine del lavoro.

Associamo ad ogni $\sigma \geq 0$ e

$$S = \{R_1; R_2; \dots; R_{|S|}\} \in \mathcal{R}$$

un grafo $G = (V, E)$ con

$$V := \{1; 2; \dots; |S|\}$$

come insieme di vertici e

$$E := \{\{i, j\} \subset V : i \neq j \text{ e } d_\infty(R_i, R_j) < \sigma\}$$

come insiemi di spigoli. Chiamiamo C l’insieme delle componenti connesse di G e definiamo (ricordiamo la notazione della Sezione 8.2)

$$\bar{g}_\sigma : S \in \mathcal{R} \mapsto \left\{ \text{RC} \left(\bigcup_{i \in c} R_i \right) \right\}_{c \in C} \in \mathcal{R}.$$

Siccome, per ogni S ,

$$|\bar{g}_\sigma(S)| \leq |S|$$

con ugualianza soltanto se $\bar{g}_\sigma(S) = S$, è chiaro che la successione delle iterate

$$\left(\bar{g}_\sigma^{(k)}(S) \right)_{k \geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$$

è una successione stazionaria, e chiamiamo $g_\sigma(S)$ il suo limite (per la topologia discreta):

$$g_\sigma(S) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{g}_\sigma^{(k)}(S).$$

Affermiamo (ricordiamo la notazione della Sezione 8.2)

Proposizione 10.1.1 Per ogni S in \mathcal{R} e ogni $\sigma' \geq \sigma \geq 0$, abbiamo:

- i)
$$\sum_{R \in g_\sigma(S)} |\partial R| \leq \sum_{R \in S} |\partial R| + 4\sigma (|S| - |g_\sigma(S)|);$$
- ii)
$$h\text{-sh} \left[\underline{g_\sigma(S)} \right]_{\sigma'} = h\text{-sh} [\underline{S}]_{\sigma'}$$

$$e \quad v\text{-sh} \left[\underline{g_\sigma(S)} \right]_{\sigma'} = v\text{-sh} [\underline{S}]_{\sigma'};$$
- iii)
$$g_{\sigma'}(g_\sigma(S)) = g_{\sigma'}(S).$$

Prova: Osserviamo che, se $\{i; j\}$ è uno spigolo del grafo G associato a S , allora possiamo costruire un rettangolo sul piano R , di lunghezza più piccola di σ e tale che

$$\begin{cases} R_i \cup R \cup R_j \text{ sia un insieme connesso (in quanto sottoinsieme di } \mathbb{R}^2), \\ \text{RC}(R_i \cup R \cup R_j) = \text{RC}(R_i \cup R_j). \end{cases}$$

Da ciò è facile dedurre *i*) e *ii*) per \bar{g}_σ , quindi per g_σ .

Per provare *iii*) osserviamo che

$$\underline{S} \subset \underline{g_\sigma(S)} \quad \Rightarrow \quad \underline{g_{\sigma'}(S)} \subset \underline{g_{\sigma'}(g_\sigma(S))},$$

e

$$\underline{g_\sigma(S)} \subset \underline{g_{\sigma'}(S)} \quad \Rightarrow \quad \underline{g_{\sigma'}(g_\sigma(S))} \subset \underline{g_{\sigma'}(g_{\sigma'}(S))} = \underline{g_{\sigma'}(S)}.$$

Quindi,

$$\underline{g_{\sigma'}(g_\sigma(S))} = \underline{g_{\sigma'}(S)}$$

e ciò dà, per $\sigma' > 0$,

$$g_{\sigma'}(g_\sigma(S)) = g_{\sigma'}(S).$$

Siccome l'uguaglianza è ovvia nel caso $\sigma' = 0$, ciò conclude la prova. \square

10.2 Corridoi e stime rozze

Per un insieme finito di rettangoli su \mathbb{Z}^2 dato

$$S^\natural := \left\{ R_1^\natural; R_2^\natural; \dots; R_{|S^\natural|}^\natural \right\}$$

possiamo definire o ridefinire i R_i , senza cambiare S^\natural , con

$$R_i := \left[R_i^\natural \right]_{\frac{1}{2}}.$$

Quindi, con

$$S := \{R_1; R_2; \dots; R_s\},$$

l'ipotesi del Teorema 5

$$\inf_{i \neq j} d_\infty(R_i^\natural, R_j^\natural) > 3$$

può essere riscritta

$$g_3(S) = S.$$

Ciò garantisce che ogni R_i^\natural può essere aggirato dalle particelle senza collisione utilizzando il corridoio

$$[R_i]_2 \setminus [R_i]_1.$$

Questa è la chiave della prova del seguente risultato (ricordiamo le definizioni dei vari tempi d'arresto in Sezione 8.2):

Lemma 10.2.1 *Siano S un insieme finito di rettangoli sul piano tale che*

$$[S^\natural]_{\frac{1}{2}} = S,$$

n e p due interi maggiori o uguali a 2 e $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ in $(\mathbb{Z}^2)^n$.

i) Se \underline{z} e S verificano le ipotesi del Teorema 5, allora, per ogni $\theta \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}^\natural \left(\mathcal{T}_c^\natural > \mathcal{T} \left[w_S^\natural \geq \theta \right] \right) &\geq P_{\underline{z}}^\natural \left(\mathcal{T}_c^\natural > \mathcal{T} \left[w_{g_\theta(S)}^\natural \geq \theta \right] \right) \\ &\geq \exp \left\{ -\text{cst} (np + n^2) \ln n \ln \theta \right\}. \end{aligned}$$

ii) Se, per qualche $\sigma \geq 3$, abbiamo

$$\begin{cases} g_\sigma(S) = S; \\ \sum_{R \in S} |\partial R| \leq p\sigma; \\ |S| \leq p/4; \\ w_S^\natural(\underline{z}) \geq \sigma; \end{cases}$$

allora, per ogni $\theta \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}^\natural \left(\mathcal{T}_c^\natural > \mathcal{T} \left[w_S^\natural \geq \theta\sigma \right] \right) &\geq P_{\underline{z}}^\natural \left(\mathcal{T}_c^\natural > \mathcal{T} \left[w_{g_{\theta\sigma}(S)}^\natural \geq \theta\sigma \right] \right) \\ &\geq \exp \left\{ -\text{cst} (np + n^2) \ln n \ln \theta \right\}. \end{aligned}$$

Prova: La prova si sviluppa come segue. Proviamo prima *i)* nel caso $\theta = 3$, poi adattiamo la prova per ottenere *ii)* nel caso $\theta = 3$, otteniamo quindi *ii)* per induzione su $\lceil \log_3 \theta \rceil$, e deduciamo infine *i)* da *ii)* nel caso generale.

Assumiamo quindi $\theta = 3$ e che le ipotesi del Teorema 5 sono soddisfatte. In questo caso la prima disuguaglianza in *i)* è un'uguaglianza, basta quindi provare la seconda disuguaglianza. Senza perdita di generalità possiamo assumere che le particelle sono inizialmente ordinate nell'ordine lessicografico (sicché z_1 è la più meridionale delle particelle più occidentali.) Stimeremo la probabilità p_0 del seguente evento che implica

$$\left\{ \mathcal{T}_c^\natural > \mathcal{T} \left[w_{g_\theta(S)}^\natural \geq \theta \right] \right\}.$$

- Mentre le altre particelle non si muovono, la prima particella si muove verso ovest e utilizza i corridoi in

$$[S]_2 \setminus [S]_1$$

per aggirare i rettangoli di S . Appena uscita dall'ombra orizzontale di $[g_3(S)]_3$, si ferma in qualche $z'_1 \in \mathbb{Z}^2$ e definiamo (ricordiamo la notazione della Sezione 8.2)

$$S'_1 := S \cup \{z'_1\}.$$

(Si noti che $g_3(S'_1) = S'_1$.)

- Mentre le altre particelle non si muovono, la seconda particella si muove verso ovest e utilizza i corridoi in

$$[S'_1]_2 \setminus [S'_1]_1$$

per aggirare i rettangoli in S'_1 . Appena uscita dall'ombra orizzontale di $[g_3(S'_1)]_3$ si ferma in qualche $z'_2 \in \mathbb{Z}^2$ e definiamo

$$S'_2 := S \cup \{z'_2\}.$$

- Andiamo così fino all'uscita dell'ultima particella dall'ombra orizzontale di $[g_3(S'_{n-1})]_3$.

Per ogni $k \geq 1$ il numero dei siti a ovest di z_k (alla stessa latitudine) contenuti nell'ombra orizzontale di

$$[g_3(S'_{k-1})]_3 = [S'_{k-1}]_3$$

(definiamo $S'_0 := S$) è più piccolo della larghezza totale dell'ombra, maggiorata da

$$\frac{1}{2} \sum_{R \in S'_{k-1}} |\partial R| + |S'_{k-1}| \times 6 \leq \frac{p + 4(k-1)}{2} + 6 \left(\frac{p}{4} + k - 1 \right) = 2p + 8(k-1).$$

Pertanto, lungo tale processo, la k -esima particella compie al massimo $\text{cst}(p+k)$ passi prima di fermarsi. Di conseguenza

$$p_0 \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{4n} \right)^{\text{cst}(p+k)} \geq \exp \{ -\text{cst}(np + n^2) \ln n \}.$$

Proviamo ora *ii*) nel caso $\theta = 3$. Innanzitutto osserviamo che la prima disuguaglianza in *ii*) è banale, è sufficiente provare la seconda. Se $\sigma < 4$ i argomenti precedenti danno direttamente il risultato, l'unica differenza è che dobbiamo utilizzare la Proposizione 10.1.1 per stimare il numero dei siti a ovest di un punto dato e nell'ombra di qualche $[g_{3\sigma}(S'_{k-1})]_{3\sigma}$. Infatti, dato che

$$\text{h-sh} [g_{3\sigma}(S'_{k-1})]_{3\sigma} = \text{h-sh} [S'_{k-1}]_{3\sigma},$$

questo numero è minore o uguale a

$$\frac{1}{2} \sum_{R \in S'_{k-1}} |\partial R| + |S'_{k-1}| \times 6\sigma \leq \frac{p\sigma + 4(k-1)}{2} + \left(\frac{p}{4} + k - 1 \right) 6\sigma \leq \text{cst}(p+k).$$

Se $\sigma \geq 4$ generalizziamo gli argomenti precedenti descrivendo il sistema “su scala σ ”. Definiamo

$$\bar{\sigma} := \left\lfloor \frac{\sigma}{4} \right\rfloor \geq 1,$$

denotiamo con $Z_1^{\natural}, Z_2^{\natural}, \dots, Z_n^{\natural}$ il processo seguito dalle varie particelle, e definiamo ricorsivamente e per ogni k in $\{1; \dots; n\}$ i tempi d'arresto:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k,0} &:= 0, \\ \mathcal{T}_{k,i+1} &:= \inf \left\{ t \geq \mathcal{T}_{k,i} : [Z_k^{\natural}(t)] \not\subset [Z_k^{\natural}(\mathcal{T}_{k,i})]_{\bar{\sigma}/2} \right\}. \end{aligned}$$

Diremo che la k -esima particella compie un σ -passo a ovest, est, ... ad ogni tempo $\mathcal{T}_{k,i}$ tale che l'ultimo passo compiuto dalla particella era verso ovest, est, ... Definiamo ora

$$S'_0 := S \cup \{ [z_2]_{\bar{\sigma}/2} \} \cup \dots \cup \{ [z_n]_{\bar{\sigma}/2} \}.$$

Si noti che $g_{3\bar{\sigma}}(S'_0) = S'_0$. Possiamo costruire un corridoio \mathcal{C} “globalmente verso ovest” di larghezza $\bar{\sigma}$, centrato in z_1 al punto di partenza, che porta fuori da $\text{h-sh} [g_{3\sigma}(S'_0)]_{4\sigma}$ e aggira i rettangoli in S'_0 utilizzando i corridoi in

$$[S'_0]_{2\bar{\sigma}} \setminus [S'_0]_{\bar{\sigma}}.$$

Possiamo anche specificare l'orientazione del corridoio \mathcal{C} in ognuno dei suoi punti descrivendo \mathcal{C} come successione di corridoi rettangolari orientati verso ovest, nord

e sud, con ognuno di loro che porta al successivo. Osserviamo che se $z := Z_1^{\natural}(\mathcal{T}_{1,i})$ appartiene a \mathcal{C} per qualche i , allora la probabilità che la i -esima particella esegua il prossimo σ -passo nella direzione associata a z e che raggiunga un altro punto in \mathcal{C} oppure la fine del corridoio è, per simmetria, minorata da $1/8$. Se la prima particella si comporta in questo modo ad ogni σ -passo, utilizzando ancora una volta la Proposizione 10.1.1 che implica che la “lunghezza” del corridoio \mathcal{C} è maggiorata da $\text{cst}(p+n)\sigma$, otteniamo che segue tutto il corridoio in meno di $\text{cst}(p+n)$ σ -passi e rimanendo confinata all'interno di

$$[\mathcal{C}]_{\bar{\sigma}/2} = \bigcup_{z \in \mathcal{C}} [z]_{\bar{\sigma}/2}.$$

Se richiediamo inoltre che ogni σ -passo della prima particella sia fatto in un tempo più piccolo di $\bar{\sigma}^2$ (e, siccome $\bar{\sigma}^2$ è l'ordine di grandezza tipico del tempo che serve per compiere un σ -passo, ciò accade ogni volta con una probabilità minorata da una costante $q > 0$), allora il tempo totale trascorso per percorrere l'intero corridoio, è minore o uguale a $\text{cst}(p+n)\bar{\sigma}^2$. Per approssimazione browniana e utilizzando il principio di riflessione, è facile vedere che la probabilità, per ogni $k \geq 2$ dato, che la k -esima particella non abbia compiuto nessun σ -passo entro questo tempo, i.e., sia rimasta confinata all'interno di S'_0 , è minorata da $\text{cst}/\sqrt{p+n}$. Visto che

$$g_{3\bar{\sigma}}(S'_0) = S'_0$$

implica

$$[\mathcal{C}]_{\frac{\bar{\sigma}}{2}} \cap S'_0 = \emptyset,$$

l'evento globale implica che la prima particella raggiunge qualche sito z'_1 all'esterno dell'ombra orizzontale di $[g_{3\sigma}(S'_0)]_{4\sigma}$ senza collisione. L'evento globale accade con una probabilità minorata da

$$\left(\frac{q}{8}\right)^{\text{cst}(p+n)} \left(\frac{\text{cst}}{\sqrt{p+n}}\right)^{n-1} \geq \exp\{-\text{cst}(p+n) \ln n\}.$$

Con

$$S'_1 := S \cup \left\{ [z'_1]_{\bar{\sigma}/2} \right\} \cup \left\{ [z_3]_{\bar{\sigma}/2} \right\} \cup \dots \cup \left\{ [z_n]_{\bar{\sigma}/2} \right\}.$$

e costruendo ricorsivamente, come prima, una successione di eventi simili, otteniamo infine

$$P_{\underline{z}}^{\natural} \left(\mathcal{T}_c^{\natural} > \mathcal{T} \left[w_{g_{3\sigma}(S)}^{\natural} \geq 3\sigma \right] \right) \geq \exp \left\{ -c_1(np + n^2) \ln n \right\} \quad (10.1)$$

per qualche costante c_1 indipendente da \underline{z} , S , σ , p e qualunque altro parametro.

Definiamo adesso, per ogni $\theta \geq 2$

$$m := \lceil \log_3 \theta \rceil$$

e

$$S_m := g_{3^m \sigma}(S).$$

Proveremo per induzione su m che

$$P_{\underline{z}}^{\natural} \left(\mathcal{T}_c^{\natural} > \mathcal{T} \left[w_{S_m}^{\natural} \geq 3^m \sigma \right] \right) \geq \exp \left\{ -2c_1(np + n^2)m \ln n \right\}. \quad (10.2)$$

Abbiamo già provato il risultato più forte (10.1) nel caso $m = 1$, assumiamo quindi che (10.2) sia verificata per qualche $m \geq 1$. Osserviamo che la Proposizione 10.1.1 implica

$$w_{S_{m+1}}^{\natural} = w_{g_{3 \cdot 3^m \sigma}(S)}^{\natural} = w_{g_{3 \cdot 3^m \sigma}(S_m)}^{\natural}$$

e

$$\begin{cases} g_{3^m \sigma}(S_m) = S_m; \\ \sum_{R \in S_m} |\partial R| \leq 2p3^m \sigma; \\ |S_m| \leq p/4; \end{cases}$$

cosicché, per ogni \underline{z}' tale che

$$w_{S_m}^{\natural}(\underline{z}') \geq 3^m \sigma,$$

abbiamo da (10.1), applicata a \underline{z}' , S_m , $3^m \sigma$ e $2p$ invece di \underline{z} , S , σ e p :

$$P_{\underline{z}'}^{\natural} \left(\mathcal{T}_{c;S}^{\natural} > \mathcal{T} \left[w_{S_{m+1}}^{\natural} \geq 3 \cdot 3^m \sigma \right] \right) \geq \exp \{ -c_1(2np + n^2) \ln n \}.$$

Ciò implica, assieme alla proprietà di Markov forte al tempo $\mathcal{T} \left[w_{S_m}^{\natural} \geq 3^m \sigma \right]$ e assieme all'ipotesi induttiva, che

$$P_{\underline{z}}^{\natural} \left(\mathcal{T}_c^{\natural} > \mathcal{T} \left[w_{S_{m+1}}^{\natural} \geq 3^{m+1} \sigma \right] \right) \geq \exp \{ -2c_1(np + n^2)(m+1) \ln n \}$$

e chiude la prova di *ii*).

Possiamo ottenere *i*) nel caso generale come conseguenza di *i*) nel caso $\theta = 3$ e *ii*) nel caso $\sigma = 3$ applicando la proprietà di Markov forte al tempo $\mathcal{T} \left[w_S^{\natural} \geq 3 \right]$. \square

Essendo immediato generalizzare la nozione di σ -passo utilizzata nella prova precedente al caso continuo delle particelle browniane, è facile adattare la prova per ottenere la versione continua dello stesso risultato:

Lemma 10.2.2 *Siano S un insieme finito di rettangoli sul piano, n e p due interi maggiori o uguali a 2 e $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ in $(\mathbb{R}^2)^n$.*

i) Se \underline{z} e S verificano le ipotesi del Teorema 6 allora, per ogni $\theta \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_S \geq \theta]) &\geq P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_{g_{\theta}(S)} \geq \theta]) \\ &\geq \exp \{ -\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln \theta \}. \end{aligned}$$

ii) Se, per qualche $\sigma \geq 3$, abbiamo

$$\begin{cases} g_{\sigma}(S) = S; \\ \sum_{R \in S} |\partial R| \leq p\sigma; \\ |S| \leq p/4; \\ w_S(\underline{z}) \geq \sigma; \end{cases}$$

allora, per ogni $\theta \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_S \geq \theta\sigma]) &\geq P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_{g_{\theta\sigma}(S)} \geq \theta\sigma]) \\ &\geq \exp \{ -\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln \theta \}. \end{aligned}$$

Nel caso di n particelle browniane con unico ostacolo fisso \widehat{O} , è sempre possibile far crescere le distanze tra le particelle portandole via una dopo l'altra, iniziando da quelle più lontane dall'origine e terminando con quelle più vicine. Ciò ci permette di rilassare parzialmente le ipotesi per ottenere un risultato simile.

Lemma 10.2.3 *Per ogni $n \geq 2$, ogni $\sigma \geq 2$ e ogni \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$ tale che $\delta(\underline{z}) \geq \sigma$ abbiamo, per ogni $\theta \geq 2$,*

$$P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c;\widehat{O}} > \mathcal{T}[\delta \geq \theta\sigma] \right) \geq \exp \{ -\text{cst} n^2 \ln n \ln \theta \}.$$

La prova si sviluppa essenzialmente come quella dei Lemmi 10.2.1 e 10.2.2 e la omettiamo.

Osservazione: Le minorazioni di questa sezione sono state provate per costruzione di eventi opportuni. Siccome, per tali eventi, il controllo sui movimenti delle particelle è molto stretto (e ciò spiega perché abbiamo soltanto delle stime rozze) possiamo ottenere come corollari delle prove alcuni risultati leggermente più forti. Ad esempio possiamo richiedere non solo

$$\{\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_{g_\theta(S)} \geq \theta]\}$$

come nel Lemma 10.2.2-i) ma anche, per qualche $\alpha = \text{cst}(n+p)$,

$$\{\mathcal{T}[\rho \geq \alpha\theta] > \mathcal{T}[w_{g_\theta(S)} \geq \theta]\},$$

senza cambiare le minorazioni ottenute. Infatti gli eventi che abbiamo costruito danno anche un controllo della massima elongazione individuale, pertanto, sotto le ipotesi del Lemma 10.2.2-i), abbiamo, per qualche $\alpha = \text{cst}(n+p)$,

$$P_{\underline{z}}(\mathcal{T}_c \wedge \mathcal{T}[\rho \geq \alpha\theta] > \mathcal{T}[w_{g_\theta(S)} \geq \theta]) \geq \exp\{-\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln \theta\}. \quad (10.3)$$

10.3 Un'invarianza di scala logaritmica

In questa sezione torniamo allo studio del caso continuo. Osserviamo che la conclusione (9.2) del lemma chiave (Lemma 9.1.1) mostra un'invarianza di scala logaritmica. Sfrutteremo questa proprietà assieme ai risultati della sezione precedente per rinforzare il lemma chiave dando una minorazione della probabilità di far crescere la δ da a a b (invece di viaggiare a distanza b in $(\mathbb{R}^2)^n$) senza collisione e senza raggiungere una massima elongazione individuale αb , con il coefficiente α che dipende soltanto da n . Più accuratamente (ricordiamo la notazione della Sezione 8.2):

Lemma 10.3.1 *Esiste una costante positiva $c_0 < +\infty$ tale che per ogni $n \geq 2$, $a \geq 2$, $\epsilon > 0$ e ogni \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$ tale che $\delta(\underline{z}) \geq a$, se $b \geq a^{1+\epsilon}$ allora*

$$P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}} > \mathcal{T}[\delta \geq b] \text{ e } \mathcal{T}[\rho \geq \alpha b] > \mathcal{T}[\delta \geq b]\right) \geq \left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)^{c_\epsilon n^4},$$

dove

$$\alpha = c_0 n^8$$

e c_ϵ è una costante che dipende soltanto da ϵ .

Prova: Proviamo il lemma in due passi. Proviamo prima che nel caso $b \leq a^2$

$$P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}} \wedge \mathcal{T}[\rho \geq \alpha b] > \mathcal{T}[\delta \geq b]\right) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{cst } n^4}, \quad (10.4)$$

poi applichiamo $\lceil \log_2 \log_a b \rceil$ volte la proprietà di Markov forte per concludere.

Sia quindi $b \leq a^2$. Per ogni $k > 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}} > \frac{b^2}{k}\right) &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z}, b)] \geq \frac{b^2}{k}\right) \\ &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z}, b)]\right) - P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z}, b)] < \frac{b^2}{k}\right). \end{aligned}$$

Il primo termine della differenza può essere stimato dal basso con

$$P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\mathcal{T}[\partial B_2(\underline{z},a^2)]\right)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{c_1n^4}$$

per qualche costante c_1 data dal Lemma 9.1.1 con $\epsilon = 1$, mentre, per il principio di riflessione e la disuguaglianza esponenziale per il moto browniano, il secondo membro può essere stimato dall'alto con

$$2n\cdot 2\exp\left\{-\frac{k}{2\cdot 2n}\right\}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_1n^4}$$

purché

$$k\geq\text{cst }n^5. \quad (10.5)$$

Ora,

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\mathcal{T}\left[\delta\geq\frac{1}{k}\frac{b}{\sqrt{k}}\right]\right) &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\frac{b^2}{k}\geq\mathcal{T}\left[\delta\geq\frac{1}{k}\frac{b}{\sqrt{k}}\right]\right) \\ &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\frac{b^2}{k}\right)-P_{\underline{z}}\left(\frac{b^2}{k}<\mathcal{T}\left[\delta\geq\frac{1}{k}\frac{b}{\sqrt{k}}\right]\right). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Se (10.5) è verificata, allora il primo termine della differenza (10.6) può essere stimato dal basso con

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_1n^4}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{c_2n^4}$$

per qualche costante c_2 , mentre, dividendo il tempo b^2/k in k intervalli di lunghezza

$$T':=\frac{b^2}{k^2},$$

osservando che, per invarianza di scala, per ogni \underline{z}'

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}'}\left(\delta(\underline{Z}(T'))<\frac{1}{k}\frac{b}{\sqrt{k}}\right) &= P_{\underline{z}'}\left(\delta(\underline{Z}(T'))<\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{T'}\right) \\ &\leq\left(n+\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^2\leq\frac{n^2}{k}, \end{aligned}$$

e utilizzando la proprietà di Markov, il secondo termine della differenza (10.6) può essere stimato dall'alto con

$$\left(\frac{n^2}{k}\right)^k\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_2n^4}$$

purché

$$k\geq\text{cst }n^4. \quad (10.7)$$

Scegliamo $k = \text{cst } n^5$ per avere (10.5) e (10.7) verificate. Se

$$\sigma:=\frac{b}{k\sqrt{k}}\geq 2$$

allora, applicando la proprietà di Markov forte al tempo $\mathcal{T}[\delta\geq\sigma]$ e il Lemma 10.2.3 con $\theta := k^{3/2}$, otteniamo

$$P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}\geq\mathcal{T}[\delta\geq b]\right)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_2n^4}\exp\left\{-\text{cst }n^2\ln n\ln k^{3/2}\right\}$$

cosicché

$$P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}\geq\mathcal{T}[\delta\geq b]\right)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{c_3n^4}\quad(10.8)$$

per qualche costante c_3 . Se invece

$$b<2k^{3/2}$$

allora (10.8) è una conseguenza diretta del Lemma 10.2.3 applicato a

$$\sigma:=a\geq 2$$

e

$$\theta:=\frac{b}{a}\leq k^{3/2}.$$

Infine, per ogni $\alpha>1$,

$$\begin{aligned} &P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\mathcal{T}[\delta\geq b],\mathcal{T}[\rho\geq\alpha b]>\mathcal{T}[\delta\geq b]\right) \\ &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\mathcal{T}[\delta\geq b],\alpha b^2>\mathcal{T}[\delta\geq b],\mathcal{T}[\rho\geq\alpha b]>\alpha b^2\right) \\ &\geq P_{\underline{z}}\left(\mathcal{T}_{c;\hat{\mathcal{O}}}>\mathcal{T}[\delta\geq b]\right)-P_{\underline{z}}(\alpha b^2\leq\mathcal{T}[\delta\geq b])-P_{\underline{z}}(\mathcal{T}[\rho\geq\alpha b]\leq\alpha b^2) \end{aligned}$$

e, come prima, il secondo termine dell'ultimo membro della disuguaglianza può essere stimato dall'alto con

$$\left(\frac{n^2}{\sqrt{\alpha}}\right)^{\sqrt{\alpha}}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_3n^4}$$

purché

$$\alpha\geq\text{cst }n^8,\quad(10.9)$$

l'ultimo termine può essere stimato dall'alto (per il principio di riflessione e la disuguaglianza esponenziale) con

$$2ne^{-\alpha/4}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_3n^4}$$

purché

$$\alpha\geq\text{cst }n^4,\quad(10.10)$$

e ciò, assieme a (10.8), dà (10.4), purché $\alpha=\text{cst }n^8$ sia tale da verificare (10.9) e (10.10).

Per provare il risultato nel caso generale applichiamo la proprietà di Markov forte ai tempi

$$\mathcal{T}_0:=0,\mathcal{T}_1:=\mathcal{T}[\delta\geq a^2],\mathcal{T}_2:=\mathcal{T}[\delta\geq a^4],\dots,\mathcal{T}_{m-1}:=\mathcal{T}[\delta\geq a^{2^{m-1}}]$$

e (10.4) con (a,b) sostituito da

$$(a,a^2),(a^2,a^4),\dots,(a^{2^{m-1}},b),$$

dove

$$m:=\lceil\log_2\log_a b\rceil.$$

In ogni intervallo $[\mathcal{T}_i,\mathcal{T}_{i+1}]$ (definiamo $\mathcal{T}_m:=\mathcal{T}[\delta\geq b]$) la massima elongazione individuale è più piccola di $\alpha(a^{2^{i+1}}\wedge b)$ quindi, sull'intero intervallo $[0,\mathcal{T}[\delta\geq b]]$ la massima elongazione individuale è maggiorata da

$$\alpha a^2+\alpha a^4+\dots+\alpha a^{2^{m-1}}+ab\leq 2\alpha a^{2^{m-1}}+ab\leq 3ab.$$

Otteniamo così

$$P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c; \hat{O}} > \mathcal{T}[\delta \geq b] \text{ e } \mathcal{T}[\rho \geq 3ab] > \mathcal{T}[\delta \geq b] \right) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{\text{cst } n^4 m}.$$

Sotto l'ipotesi $b \geq a^{1+\epsilon}$, il secondo membro può essere minorato da

$$\left(\frac{\ln a}{\ln b} \right)^{c_\epsilon n^4}$$

con c_ϵ una costante che dipende soltanto da ϵ , e ciò chiude la prova. \square

10.4 Prova del Teorema 6

Proviamo adesso il Teorema 6. Prendiamo quindi S in \mathcal{R} e \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$ che verificano le ipotesi del Teorema, e, come primo passo, proviamo per induzione su

$$s := |S|$$

che per qualche costante c_1 che sceglieremo più tardi

$$\forall T \geq 4, \quad P_{\underline{z}^0}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w \geq T - 1]) \geq \left(\frac{1}{\ln T} \right)^{c_1(s+1)(p \ln p)n^4}. \quad (10.11)$$

Chiaramente basta trattare il caso $s = 1$ per provare (10.11) nei due casi $s = 0$ e $s = 1$. Assumiamo quindi che S sia un singolo rettangolo sul piano con perimetro

$$|\partial S| \leq p.$$

Con il Lemma 10.2.2 e l'osservazione alla fine della Sezione 10.2 abbiamo (si veda (10.3)):

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}^0}(\mathcal{T}_c \wedge \mathcal{T}[\rho \geq \text{cst}(n+p)p] > \mathcal{T}[w_S \geq p]) \\ \geq \exp\{-\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln p\}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Fissiamo ora O , l'origine del piano, al centro del rettangolo, definiamo

$$B := \overline{B_2(O, p/4)},$$

e osserviamo che $S \subset B$ e che per ogni \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$

$$w_S(\underline{z}) \geq p \Rightarrow \delta(\underline{z}) \geq p.$$

Consideriamo ora il primo tempo di collisione $\mathcal{T}_{c;B}^{p/2}$ per una particelle fissa B e n particelle browniane con lo stesso diametro

$$\text{diam } B = \frac{p}{2}$$

che partono da una configurazione \underline{z} in $(\mathbb{R}^2)^n$ tale che

$$\delta(\underline{z}) \geq 2\frac{p}{2}.$$

Avremo certamente $\mathcal{T}_c \geq \mathcal{T}_{c;B}^{p/2}$ e un'omotetia di coefficiente $2/p$ ci permette di utilizzare il Lemma 10.3.1 con $a = 2$ e $b = T \geq a^2$ per ottenere

$$P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c;S} > \mathcal{T} \left[\delta \geq \frac{p}{2} T \right] \text{ e } \mathcal{T} \left[\rho \geq \alpha \frac{p}{2} T \right] > \mathcal{T} \left[\delta \geq \frac{p}{2} T \right] \right) \geq \left(\frac{1}{\ln T} \right)^{\text{cst } n^4}.$$

Osserviamo che per ogni \underline{z}

$$\delta(\underline{z}) \geq \frac{p}{2}T \Rightarrow w_S(\underline{z}) \geq T - 1,$$

e utilizziamo la proprietà di Markov forte per combinare quest'ultimo risultato con (10.12). Possiamo concludere:

Lemma 10.4.1 *Esiste un $\alpha = \text{cst}(p + n^8) > 1$ e una costante $c_2 < +\infty$, tale che per ogni singolo rettangolo sul piano S e ogni \underline{z} che verifica le ipotesi del Teorema 6, abbiamo, per ogni $T \geq 4$,*

$$P_{\underline{z}} \left(\mathcal{T}_{c;S} \wedge \mathcal{T} \left[\rho \geq \alpha \frac{p}{2}T \right] > \mathcal{T}[w_S \geq T - 1] \right) \geq \left(\frac{1}{\ln T} \right)^{c_2(p \ln p)n^4}.$$

Tale risultato implica (10.11) per $s = 0$ e $s = 1$, purché

$$c_1 \geq c_2/2. \quad (10.13)$$

Ciò costituisce la prima condizione per la scelta di c_1 e assumeremo nel seguito che è soddisfatta.

Per $s \geq 2$, proviamo ora (10.11) assumendo il risultato per ogni s più piccolo. A tale scopo, dato $T \geq 4$, distinguiamo due casi.

Caso 1: Nessuna delle k componenti connesse di

$$D := \bigcup_{i=1}^n B_2(z_i^0, \alpha p T),$$

dove α è come nel lemma precedente, interseca più di un rettangolo di S . In questo caso, applicando il Lemma 10.4.1 ai k sistemi costituiti dalle n_j particelle contenute nella j -esima componente connessa di D (con $1 \leq j \leq k$) otteniamo

$$P_{\underline{z}^0}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w \geq T - 1]) \geq \prod_{j=1}^k \exp \{ -c_2(p \ln p)n_j^4 \ln \ln T \}$$

e, poiché

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

ciò dà il risultato.

Caso 2: Una delle componenti connesse di D interseca più di un rettangolo di S . In questo caso introduciamo una “scala mesoscopica”

$$\sigma_0 := \inf \{ \sigma \geq 3 : |g_\sigma(S)| < |S| \}$$

che sta tra la “scala microscopica” 1 (diametro delle particelle) e la “scala macroscopica” $2pn\alpha T$ (di ordine T per T grande) in quanto conseguenza della nostra ipotesi del caso 2. Assumiamo che

$$T' := \frac{1}{2pn\alpha} \sigma_0$$

è maggiore o uguale a 4 (spiegheremo tra poco perché tale ipotesi non è restrittiva), così, come nel caso 1, il Lemma 10.4.1 applicato a T' invece di T dà

$$P_{\underline{z}^0}(\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_S \geq T' - 1]) \geq \exp \{ -c_2(p \ln p)n^4 \ln \ln T \}.$$

Ora se \underline{z}^1 in $(\mathbb{R}^2)^n$ è tale che $w_S(\underline{z}^1) \geq T' - 1$, allora il Lemma 10.2.2-ii) applicato a $T' - 1$ invece di σ (Si noti che per costruzione $g_{T'-1}(S) = S$) e $\theta := 4pn\alpha$ dà

$$P_{\underline{z}^1} \left(\mathcal{T}_c > \mathcal{T} \left[w_{g_{\sigma_0}(S)} \geq \sigma_0 \right] \right) \geq \exp \{ -\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln(pn) \}.$$

Combinando queste ultime due ipotesi con la proprietà di Markov forte otteniamo che esiste una costante c_3 indipendente da ogni parametro, tale che

$$P_{\underline{z}^0} \left(\mathcal{T}_c > \mathcal{T} \left[w_{g_{\sigma_0}(S)} \geq \sigma_0 \right] \right) \geq \exp \{ -c_3 (p \ln p) n^4 \ln \ln T \}.$$

E la costante c_3 può essere scelta in modo tale da coprire anche il caso $T' < 4$: ciò segue dal Lemma 10.2.2-i).

Definiamo adesso, per ogni $k \geq 0$,

$$S_k := g_{4^k \sigma_0}(S),$$

definiamo

$$k_0 := \inf \{ k \geq 0 : S_k = S_{k+1} \},$$

e definiamo

$$\sigma_1 := 4^{k_0} \sigma_0.$$

È facile verificare

$$|g_{\sigma_1}(S)| \leq s - 1 - k_0$$

e, utilizzando di nuovo il Lemma 10.2.2 (con $\sigma = \sigma_0$ e $\theta = 4^{k_0+1}$) e la stima precedente, otteniamo

$$P_{\underline{z}^0} \left(\mathcal{T}_c > \mathcal{T} \left[w_{g_{\sigma_1}(S)} \geq 4\sigma_1 \right] \right) \geq \exp \{ -c_4 (k_0 + 1) (p \ln p) n^4 \ln \ln T \}$$

per qualche costante c_4 indipendente da ogni parametro. Considerando, come prima, il primo tempo di collisione per delle particelle più grandi di diametro σ_1 , inizialmente centrate in qualche \underline{z} tale che $w_{g_{\sigma_1}(S)} \geq 4\sigma_1$, prendendo $g_{\sigma_1}(S)$ come insieme di ostacoli fissi e utilizzando la proprietà di Markov forte, un'omotetia di coefficiente $1/\sigma_1$ e l'ipotesi induttiva, concludiamo

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}^0} (\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w_S \geq T - 1]) \\ \geq \exp \{ -c_4 (k_0 + 1) (p \ln p) n^4 \ln \ln T - c_1 (s - k_0) (p \ln p) n^4 \ln \ln T \}. \end{aligned}$$

Ciò implica (10.11) purché

$$c_1 \geq c_4$$

il che, dopo (10.13), è il nostro unico vincolo su c_1 , e ciò conclude il primo passo.

In conseguenza del risultato, siccome $|S| \leq p/4$ abbiamo

$$\forall T \geq 4, \quad P_{\underline{z}^0} (\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w \geq T - 1]) \geq \left(\frac{1}{\ln T} \right)^{\text{cst} (p^2 \ln p) n^4}.$$

Quindi, per concludere la prova del Teorema 6 basta osservare che se w è cresciuto senza collisioni fino a $T - 1$, allora non ci possono essere collisioni entro il tempo T a meno di qualche comportamento superdiffusivo delle particelle. Per la disuguaglianza esponenziale, per $T \geq 4$:

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}^0} (\mathcal{T}_c > T) &\geq P_{\underline{z}^0} (\mathcal{T}_c > \mathcal{T}[w \geq T - 1], \mathcal{T}_c > T) \\ &\geq \left(\frac{1}{\ln T} \right)^{\text{cst} (p^2 \ln p) n^4} - n^2 2 \exp \left\{ -\frac{((T - 1)/\sqrt{2})^2}{2(2T)} \right\}. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione può essere stimata dal basso con

$$\left(\frac{1}{\ln T} \right)^{\text{cst} (p^2 \ln p) n^4}$$

purché

$$T \geq (\text{cst} (p^2 \ln p) n^4)^2,$$

e ciò chiude la prova. \square

10.5 Prova del Teorema 5

Deduciamo il Teorema 5 dal Teorema 6 utilizzando l'accoppiamento forte stabilito da Komlós, Major e Tusnády:

Teorema 7 (Komlós - Major - Tusnády) *Esistono tre costanti λ' , C , e K in $]0, +\infty[$ ed esiste uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) su cui possiamo definire, per ogni $n \geq 1$, n moti browniani due-dimensionali indipendenti Z_1, Z_2, \dots, Z_n e n passeggiate aleatorie due-dimensionali in tempo continuo indipendenti $Z_1^{\natural}, Z_2^{\natural}, \dots, Z_n^{\natural}$ con $\underline{Z}(0) = \underline{Z}^{\natural}(0)$, tale che per ogni $x > 0$ e ogni $T \geq 0$*

$$P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} Z_k(t) - Z_k^{\natural}(t) \right\|_2 > C \ln T + x \right) < n K e^{-\lambda' x}.$$

In particolare esistono due costanti C e λ tali che

$$\forall T \geq 2, \quad P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} Z_k(t) - Z_k^{\natural}(t) \right\|_2 > (1 + C) \ln T \right) < n e^{-\lambda \ln T}.$$

La prova della versione unidimensionale, nel caso $n = 1$, del teorema è data in [2] e [3], e la generalizzazione al caso due-dimensionale con $n \geq 1$ è immediata. Il teorema implica che con grande probabilità le particelle che eseguono delle passeggiate aleatorie rimangono contenute fino al tempo $T \geq 4$ in palle di diametro

$$\sigma_0 := 3(1 + C) \ln T,$$

centrate su qualche moto browniano riscalato $Z_k/\sqrt{2}$.

Un modo per realizzare l'evento $\{\mathcal{T}_{c;S^{\natural}}^{\natural} > T\}$ è di raggiungere senza collisione una configurazione \underline{z}^1 tale che le particelle siano almeno a distanza almeno $5\sigma_0$ l'una dall'altra e da qualche $g_{5^k\sigma_0}(S)$ (di nuovo assumiamo $[S^{\natural}]_{1/2} = S$) tale che

$$g_{5^{k+1}\sigma_0}(S) = g_{5^k\sigma_0}(S), \quad (10.14)$$

quindi richiedere che non ci sia nessuna collisione entro il tempo T né tra le palle centrate sui moti browniani riscalati $\underline{Z}/\sqrt{2}$ accoppiati con \underline{Z}^{\natural} e inizialmente in \underline{z}^1 , né tra queste palle e $g_{5^k\sigma_0}(S)$. La probabilità dell'ultima parte di tale evento può essere stimata, dopo omotetia di coefficiente $1/\sigma_0$, con il Teorema 6, e, poiché la condizione (10.14) è chiaramente soddisfatta da qualche

$$k \leq |S| \leq \frac{p}{4},$$

la probabilità della prima parte, i.e. di raggiungere tale configurazione \underline{z}^1 senza collisione, può essere stimata dal basso con il Lemma 10.2.1. Pertanto, utilizzando l'accoppiamento forte, otteniamo, per $T \geq T_0 = \nu^2$ come nel Teorema 6:

$$\begin{aligned} P_{\underline{z}}^{\natural}(\mathcal{T}_c^{\natural} > T) &\geq \exp\{-\text{cst}(np + n^2) \ln n \ln(5^{p/4} 3(1 + C) \ln T)\} \\ &\times \exp\{-\text{cst}(p^2 \ln p)n^4 \ln \ln T\} \\ &- n \exp\{-\lambda \ln T\}. \end{aligned}$$

E quest'ultima espressione è minorata da

$$\exp\{-\text{cst}(p^2 \ln p)n^4 \ln \ln T\}$$

purché

$$T \geq \exp\left\{(\text{cst}(p^2 \ln p)n^4)^2\right\}.$$

□

Conclusioni

Al termine di questo lavoro conosciamo da un lato in modo molto dettagliato il comportamento della dinamica locale, e dall'altro siamo in grado di giustificare l'idea che fondava l'introduzione del modello locale: per la dinamica di Kawasaki a bassa densità l'interazione tra un cluster e il gas che lo circonda "somiglia" all'interazione tra tale cluster e un gas ideale. Un cluster della dinamica di Kawasaki in regime metastabile (come definito nell'introduzione di questo lavoro) dovrebbe quindi essenzialmente comportarsi come un cluster della dinamica locale con quest'importante differenza che, mentre la cornice senza interazione $\partial^- \Lambda$ del modello locale agisce come parete riflettente per il cluster e circoscrive i suoi movimenti, nella dinamica originale un cluster sarà libero di muoversi senza limiti spaziali.

Ciò significa in particolare che si può definire una nozione di "cluster sottocritico" per la dinamica di Kawasaki: un cluster sottocritico $\underline{\eta}$ è un cluster che nella dinamica locale evaporerebbe con probabilità che tende a 1 quando β va all'infinito, i.e. tale che

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_{\underline{\eta}}(\mathcal{T}_{\underline{0}} < \mathcal{T}_{\underline{1}_0}) = 1.$$

Qualunque configurazione connessa della parte sottocritica dei cammini di \mathbf{TT}^δ darà un esempio di cluster sottocritico. Definiamo allora l'insieme ristretto \mathcal{R} delle configurazioni $\eta \in \mathcal{X}_\beta$ i cui clusters sono tutti sottocritici, e consideriamo la misura ristretta $\mu_{\mathcal{R}}$, cioè la misura d'equilibrio del sistema μ condizionata all'insieme ristretto. È ragionevole pensare che un vapore sovrasaturo ottenuto via leggera compressione di un gas vicino alla transizione di fase sarà inizialmente ben descritto da questa misura $\mu_{\mathcal{R}}$, purché il volume totale $|\Lambda_\beta|$ non sia troppo grande. (In un volume grande l'entropia spaziale sarà tale da impedirci di poter *a priori* escludere la presenza di cluster supercritici all'istante iniziale. Esplicheremo più avanti cosa bisogna intendere con "volume non troppo grande".) Come evolverà il sistema verso l'equilibrio, come effettuerà la transizione da $\mu_{\mathcal{R}}$ a μ , ovvero, come formerà la goccia di Wulff? Non siamo in grado di dare una risposta completa a questa domanda, ma possiamo ormai predire come si svolgerà l'inizio del processo, come il sistema uscirà dall'insieme ristretto, in quanto tempo, e descrivere "la prima fase della sua evoluzione ulteriore".

Siccome all'istante iniziale tutti i clusters sono sottocritici, dovranno, in modo tipico, evaporare (essere dispersi), dopodiché il sistema dovrà fare un gran numero di tentativi per scappare dall'insieme ristretto. Fuggirà effettivamente da \mathcal{R} via nucleazione di una goccia critica, simile a quella del modello locale. Siccome ciò avviene nel modello locale in un tempo di ordine $\exp\{\Gamma\beta\}$, ciò dovrebbe accadere, sfruttando l'entropia spaziale della dinamica in volume $|\Lambda_\beta| = \exp\{\Theta\beta\}$, in un tempo che va come $e^{\Gamma\beta}/e^{\Theta\beta}$. Ciò, ovviamente, è significativo solo se Θ è minore di Γ : ecco cosa bisogna intendere con l'espressione "volume non troppo grande". Tale nucleazione avverrà nello stesso modo in cui avviene sotto la dinamica locale, con la differenza che il cluster che si svilupperà lo farà spostandosi in modo aleatorio senza rimanere confinato all'interno di una scatola di dimensioni finite. Il cluster assumerà la forma di quasi-quadrati sempre più grandi, manterrà una lunghezza e

una larghezza sempre dello stesso ordine, ma esse fluttueranno. Ad esempio, per l_c abbastanza grande, dopo aver assunto la forma di un quadrato 4×4 (16 particelle) e prima di aver assunto quella di un quadrato 5×5 (25 particelle) avrà tipicamente assunto la forma di un rettangolo 3×6 (18 particelle). All'uscita dell'insieme ristretto il cluster continuerà a crescere nello stesso modo (messo da parte il fatto che, per quanto riguarda le fluttuazioni delle sue dimensioni L (lunghezza) e l (larghezza), le piccole fluttuazioni, ad esempio del tipo $L - l \simeq 2\sqrt{l_c}$, continueranno a prodursi in modo tipico, mentre quelle più grandi, ad esempio di ordine $L - l \sim 2\sqrt{L}$, si produrranno con delle probabilità soltanto non esponenzialmente piccole). E, per qualunque volume finito dato *indipendente da* β , l'evoluzione proseguirà così finché il cluster non avrà raggiunto questo volume. Al di là nuovi cluster supercritici potranno forse formarsi e iniziare a crescere, dopo un certo tempo la materia clusterizzata sarà così importante da aver prodotto un impoverimento del gas e cambiato la pressione che esercita sulle gocce già formate, ... il sistema sarà entrato in un altro regime, al di là del quadro di questo lavoro.

Per stabilire in modo rigoroso i tratti della fuga dalla metastabilità descritta sopra, avremo essenzialmente due passi da compire. Dovremo prima descrivere accuratamente in quale misura un gas molto diluito di particelle che si evolvono sotto la dinamica di Kawasaki "somiglia" ad un gas ideale, e, come abbiamo spiegato sopra, il risultato sulle probabilità di collisione è da questo punto di vista decisivo. Dovremo poi sviluppare nell'ambito della dinamica originale (Kawasaki) gli argomenti che sono stati utilizzati [21] per estendere i risultati del modello locale al modello a interazione localizzata. Si tratta di un lavoro arduo e sono necessarie delle nuove idee. Ma appare che la conoscenza dettagliata del panorama energetico della dinamica locale, qui fornita assieme all'analisi delle traiettorie tipiche, permette appunto di contemplare il problema alla luce di un nuovo giorno. I lavori sono in corso ([30], [31]).

Conclusion

Au terme de ce travail nous connaissons d'une part de façon très détaillée le comportement de la dynamique locale, et nous sommes d'autre part en mesure de justifier l'idée qui fondait l'introduction du modèle local: pour la dynamique de Kawasaki à basse densité l'interaction entre un cluster et le gaz qui l'entoure "ressemble" à l'interaction entre ce cluster et un gaz idéal. Un cluster de la dynamique de Kawasaki en régime métastable (comme définie dans l'introduction de ce travail) devrait donc essentiellement se comporter comme un cluster de la dynamique locale à une différence importante près: la bordure sans interaction $\partial^- \Lambda$ du modèle local agit comme une paroi réfléchissante pour le cluster, et circonscrit ses mouvements, alors que pour la dynamique originale un cluster sera libre de se mouvoir sans limites spatiales.

Cela signifie en particulier que l'on peut définir une notion de "cluster sous-critique" pour la dynamique de Kawasaki: un cluster sous-critique η est un cluster qui dans la dynamique locale s'évaporerait avec probabilité qui tend vers 1 lorsque β tend vers l'infini, i.e. tel que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\eta(\mathcal{T}_0 < \mathcal{T}_{\underline{1}_0}) = 1.$$

N'importe quelle configuration connexe de la partie sous-critique des chemins de \mathbf{TT}^δ fournira un exemple de cluster sous-critique. Définissons alors l'ensemble restreint \mathcal{R} des configurations $\eta \in \mathcal{X}_\beta$ dont tous les clusters sont sous-critiques et considérons la mesure restreinte $\mu_{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire la mesure d'équilibre du système μ conditionnée à l'ensemble restreint. Il est raisonnable de penser qu'une vapeur sur-saturée obtenue par compression légère d'un gaz proche de la transition de phase sera initialement bien décrite par cette mesure $\mu_{\mathcal{R}}$, pourvu que le volume total $|\Lambda_\beta|$ ne soit pas trop grand. (Dans un grand volume l'entropie spatiale sera telle qu'on ne pourra exclure la présence de cluster sur-critiques dès l'instant initial. Nous précisons plus loin ce qu'il faut entendre par "volume pas trop grand".) Comment le système évoluera-t-il vers l'équilibre, comment effectuera-t-il la transition de $\mu_{\mathcal{R}}$ à μ , autrement dit, comment formera-t-il la goutte de Wulff? Nous ne sommes pas en mesure de fournir une réponse complète à cette question, mais nous pouvons désormais prédire comment se déroulera le début de ce processus, comment le système sortira de l'ensemble restreint, en combien de temps, et décrire "la première phase de son évolution ultérieure".

Puisqu'à l'instant initial tous les clusters sont sous-critiques, ils devront, de façon typique, tous s'évaporer (se disperser), après quoi le système devra faire un grand nombre de tentatives pour s'échapper de l'ensemble restreint. Il s'échappera effectivement de \mathcal{R} par nucléation d'une goutte critique, similaire à celle du modèle local. Puisque cela se produit dans le modèle local en un temps de l'ordre de $\exp\{\Gamma\beta\}$, cela devrait se produire, en utilisant l'entropie spatiale de la dynamique en volume $|\Lambda_\beta| = \exp\{\Theta\beta\}$, en un temps qui va comme $e^{\Gamma\beta}/e^{\Theta\beta}$. Ceci n'est bien sûr significatif seulement si Θ est plus petit que Γ : voilà ce qu'il faut entendre par l'expression "volume pas trop grand". Cette nucléation se produira de la même façon

que dans le modèle local, avec cette différence que le cluster qui se développera le fera en se déplaçant de façon aléatoire sans rester confiné à l'intérieur d'une boîte de dimensions finies. Ce cluster prendra la forme de presque-carrés toujours plus grands, sa longueur et sa largeur resteront toujours du même ordre de grandeur, mais, celles-ci fluctueront. Par exemple, pour l_c assez grand, après avoir pris la forme d'un carré 4×4 (16 particules) et avant d'avoir pris celle d'un carré 5×5 (25 particules) il aura typiquement pris la forme d'un rectangle 3×6 (18 particules). A la sortie de l'ensemble restreint ce cluster continuera à croître de la même façon (à cela prêt qu'en ce qui concerne les fluctuations de ses dimensions L (longueur) et l (largeur), les petites fluctuations, par exemple du type $L - l \simeq 2\sqrt{l_c}$, continueront à se produire de manière typique, alors que de plus grandes fluctuations, par exemple d'ordre $L - l \sim 2\sqrt{L}$, ne se produiront qu'avec des probabilités non exponentiellement petites). Et, pour n'importe quel volume fini donné *indépendant de β* , il en sera ainsi jusqu'à ce que le cluster atteigne ce volume. Au delà de nouveaux clusters surcritiques pourront peut-être se former et commencer à croître, au bout d'un certain temps la matière "clusterisée" sera suffisamment importante pour provoquer un appauvrissement du gaz et modifier la pression qu'il exerce sur les gouttes déjà formées, ... le système sera entré dans un autre régime, au-delà du cadre de ce travail.

Pour établir de façon rigoureuse les traits de la fuite de la métastabilité décrite ci-dessus, nous aurons essentiellement deux pas à franchir. Il nous faudra premièrement décrire précisément dans quelle mesure un gaz très dilué de particules évoluant sous la dynamique de Kawasaki "ressemble" à un gaz idéal, et, comme nous l'avons expliqué, le résultat sur les probabilités de collisions est de ce point de vue décisif. Il nous faudra ensuite développer dans le cadre de la dynamique originale (Kawasaki) les arguments qui ont été utilisés [21] pour étendre les résultats du modèle local au modèle à interaction localisée. Il s'agit d'un travail ardu et de nouvelles idées sont nécessaires. Mais il s'avère que la connaissance détaillée du paysage énergétique de la dynamique locale, fournie ici avec l'analyse des trajectoires typiques, permet justement d'envisager le problème sous un jour nouveau. Le travail est en cours ([30], [31]).

Bibliografia

- [1] S.P. KARLIN AND G. MCGREGOR (1959) Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.* **9**, 1141-1164.
- [2] J. KOMLÓS, P. MAJOR AND G. TUSNÁDY (1975) An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I., *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **32**, 111-131.
- [3] J. KOMLÓS, P. MAJOR AND G. TUSNÁDY (1976) An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. II., *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **34**, 33-58.
- [4] M.I. FREIDLIN AND A.D. WENTZELL (1984) *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag.
- [5] E.J. NEVES AND R.H. SCHONMANN (1991) Critical droplets and metastability for a Glauber dynamics at very low temperatures, *Comm. Math. Phys.* **137**, 209-230.
- [6] P. BIANE (1992) Minuscule weights and random walks on lattice, *Quant. Prob. Rel. Topics* **7**, 51-65.
- [7] I.M. GESSEL AND D. ZEILBERGER (1992) Random walk in a Weyl chamber, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115**, 27-31.
- [8] E.J. NEVES AND R.H. SCHONMANN (1992) Behaviour of droplets for a class of Glauber dynamics at very low temperature, *Prob. Theory Relat. Fields* **91**, 331-354.
- [9] R. SCHONMANN (1992) The pattern of escape from metastability of a stochastic Ising model, *Comm. Math. Phys.* **147**, 231-240.
- [10] R. KOTECKÝ AND E. OLIVIERI (1993) Droplet dynamics for asymmetric Ising model, *J. Statis. Phys.* **70**, 1121-1148.
- [11] R. SCHONMANN (1994) Slow droplet-driven relaxation of stochastic Ising models in the vicinity of the phase coexistence region. *Comm. Math. Phys.* **161**, 1-49.
- [12] E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (1995) Markov chain with exponentially small transitions probabilities: First exit problem of a general domain. I. The reversible case, *J. Statis. Phys.* **79**, 613-647.
- [13] L. ALONSO AND R. CERF (1996) The free dimensional polyominoes of minimal area, *Electronic Journal of Combinatorics* **3** #R27.
- [14] G. BEN AROUS AND R. CERF (1996) Metastability of the three-dimensional Ising model on a torus at very low temperature, *Electron. J. Probab.* **1** **Research Paper 10**.

- [15] D. HOBSON AND W. WERNER (1996) Non-colliding Brownian motion on the circle, *Bull. London Math. Soc.* **28**, 643-650.
- [16] E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (1996) Markov chain with exponentially small transitions probabilities: First exit problem of a general domain. II. The general case, *J. Statis. Phys.* **84**, 987-1041.
- [17] O. CATONI AND R. CERF (1995-1997) The exit path of a Markov chain with rare transitions, *ESAIM Probab. Stat.* **1**, 95-144.
- [18] P. DEHGHANPOUR AND R. SCHONMANN (1997) Metropolis dynamics relaxation via nucleation and growth, *Comm. Math. Phys.* **188**, 89-119.
- [19] R. SCHONMANN AND S. SHLOSMAN (1998) Wulff droplets and the metastable relaxation of kinetic Ising models, *Comm. Math. Phys.* **194**, 389-462.
- [20] D.J. GRABINER (1999) Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **35**, 177-204.
- [21] F. DEN HOLLANDER, E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (2000) Metastability and nucleation for conservative dynamics, *J. Math. Phys.* **41**, 1424-1498.
- [22] W. KÖNIG, N. O'CONNELL AND S. ROCH (2002) Non-colliding random walks, tandem queues, and discrete orthogonal polynomial ensembles, *Elec. Jour. Probab.* **7**, 1-24.
- [23] F. DEN HOLLANDER, F.R. NARDI, E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (2003) Droplet growth for the three-dimensional Kawasaki dynamics, *Probab. Theory and Relat. Fields* **125**, 153-194.
- [24] F. MANZO, F.R. NARDI, E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (2004) On the essential features of metastability: tunnelling time and critical configurations, *J. Statis. Phys.* **115**, 591-642.
- [25] A. GAUDILLIÈRE, E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (2005) Nucleation pattern at low temperature for local Kawasaki dynamics in two dimensions, *Markov Processes Relat. Fields* **11**, 553-628.
- [26] F.R. NARDI, E. OLIVIERI AND E. SCOPPOLA (2005) Anisotropy effects in nucleation for conservative dynamics, *J. Stat. Phys.* **119**(3-4), 539-595.
- [27] E. OLIVIERI AND M.E. VARES (2005) *Large deviations and metastability*, Cambridge University Press.
- [28] A. BOVIER, F. DEN HOLLANDER AND F.R. NARDI (2006) Sharp asymptotics for Kawasaki dynamics on finite box with open boundary, *Probab. Theory and Relat. Fields* **135**, 265-310.
- [29] A. GAUDILLIÈRE, Collision Probability for Random Trajectories in Two Dimensions, in preparation.
- [30] F. DEN HOLLANDER, A. GAUDILLIÈRE, F. NARDI, E. OLIVIERI, E. SCOPPOLA, Random walk approximation for diluted gas under Kawasaki dynamics, in preparation.
- [31] F. DEN HOLLANDER, A. GAUDILLIÈRE, F. NARDI, E. OLIVIERI, E. SCOPPOLA, Homogeneous nucleation for two dimensional Kawasaki dynamics, in preparation.