Capitolo 3

Modelli Cam-clay e Cam-clay Modificato

3.1 Introduzione

L'esame delle principali caratteristiche della risposta meccanica dei geomateriali evidenzia come un'efficace descrizione costitutiva può essere basata sulla teoria dell'elasto-plasticità. Infatti, alla teoria della plasticità si fa spesso ricorso, non solo per l'elaborazione di sofisticati modelli costitutivi, ma anche per la soluzione dei più semplici e frequenti problemi di ingegneria geotecnica (carico limite di fondazioni, stabilità di strutture di sostegno, stabilità di pendii, ecc.).

Le prime applicazioni della teoria della plasticità allo studio dei problemi geomeccanici si fanno spesso risalire a più di un secolo fa, cioè ai lavori di Coulomb [22] e di Rankine [66]. Eppure, lo sviluppo di modelli elasto-plastici capaci di prevedere realisticamente il comportamento dei terreni è relativamente recente, ed è quindi posteriore al raggiungimento di una efficace modellazione costitutiva dei metalli. Questo ritardo è giustificato dalla notevole complessità del comportamento dei geomateriali nonchè dal fatto che soltanto a partire dai decenni '30-'40 sono state messe a punto tecniche di sperimentazione realmente affidabili.

Nell'ambito della modellazione elasto-plastica dei geomateriali, si può tenere conto dell'influenza della tensione media imponendo che le dimensioni della sezione deviatorica della superficie di snervamento aumentino percorrendo l'asse idrostatico nel verso della compressione. Superfici di questo tipo (indicate, a volte, come "superfici di tipo conico") sono quelle proposte da Drucker e Prager [28] (criterio di Drucker-Prager), da Drucker [26] (criterio di Tresca modificato) e da Shield [71] (criterio di Mohr-Coulomb).

Questi criteri di snervamento non consentono di modellare lo sviluppo di deformazione inelastica in compressione isotropa; inoltre, se formulati con legge di flusso associata, sovrastimano in misura non trascurabile il comportamento dilatante dei terreni.

Per ovviare alla prima di queste carenze, in [27] viene proposto un criterio di snervamento rappresentato da una superficie conica la cui apertura lungo l'asse idrostatico viene chiusa mediante un'altra superficie ("Cap-model").

Il modello costitutivo Cam-clay, sviluppato a Cambridge negli anni '60 [68], risolve anche il problema dell'incompatibilità fra l'ipotesi di normalità del flusso plastico ed il reale comportamento dei terreni. In questo modello, infatti, viene effettuata un'importante distinzione tra la superficie di snervamento e la superficie che caratterizza la condizione "ultima" del materiale; quest'ultima superficie, detta critica, è di tipo conico e rappresenta il luogo degli stati tensionali caratterizzati dallo sviluppo di deformazione plastica a componente volumetrica nulla.

Al fine di migliorarne ulteriormente l'accordo con i dati sperimentali e di estenderne il campo di applicabilità, sono state proposte numerose modifiche alla formulazione originale del Cam-clay. In particolare, il "Cam-clay Modificato" proposto da Roscoe e Burland [67] è preferibile al modello originale.

Il Cam-clay Modificato si è mostrato sufficientemente accurato nel descrivere il comportamento di argille normal-consolidate o debolmente sovraconsolidate in condizioni di carico quasi-statiche e monotone [93]. Tale modello è stato impiegato con profitto per l'analisi di svariati problemi geotecnici, come, ad esempio, quelli relativi a serbatoi o rilevati fondati su argille (una delle prime applicazioni di questo tipo è riportata in [90]). Inoltre il suo impiego richiede la determinazione di pochi parametri, ricavabili per mezzo di prove standard di laboratorio. Queste caratteristiche ne giustificano la sua frequente utilizzazione, sia in ambito di ricerca che nelle pratiche applicazioni.

Il legame elastico e la legge di incrudimento del Cam-clay e del Cam-clay Modificato sono ricavati sulla base di alcune fondamentali ipotesi riguardanti il comportamento delle argille isotropicamente compresse. Queste ipotesi sono riassunte nel par. 3.3, insieme ad alcune considerazioni sulle loro principali implicazioni. Vengono quindi discusse le formulazioni dei modelli costitutivi Cam-clay e Cam-clay Modificato (par. 3.4). Si accenna, inoltre, ad alcune modifiche proposte per tali formulazioni, con particolare attenzione verso quelle relative alla modellazione della rigidezza elastica a taglio e del comportamento in compressione isotropa (par. 3.5). Infine, nel par. 3.6, si evidenzia come l'ipotesi di deformazioni infinitesime non sia adeguata alla modellazione costitutiva delle argille tenere.

Il capitolo si apre con un essenziale richiamo di alcuni concetti elementari della meccanica delle terre.

3.2 Concetti base di meccanica delle terre

Si richiamano, in questo paragrafo, alcuni degli elementi di meccanica delle terre utilizzati in seguito; altri concetti verranno introdotti nel corso del lavoro. Per una esauriente trattazione dell'argomento, si rimanda ai noti testi di Terzaghi [87], Taylor [86], Lambe e Whitman [43], Atkinson e Bransby [7], Mróz et al. [25].

Come è noto, i terreni sono caratterizzati da scarsa resistenza a trazione; per comodità, quindi, da questo punto in poi, le tensioni e le deformazioni normali sono

assunte positive se di compressione. Si segue, pertanto, la convenzione sui segni normalmente adottata nella meccanica delle terre.

Nell'ambito del presente lavoro il terreno viene sempre considerato *saturo*; cioè si suppone che l'intero volume dei pori sia occupato dall'acqua. In queste ipotesi, il tensore di *sforzo efficace*, ad esempio di Cauchy, viene definito come:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{I}$$

dove p_w è la pressione della fase liquida. Il *principio degli sforzi efficaci* afferma che, nei terreni saturi, le deformazioni dipendono unicamente dallo stato tensionale efficace [87]; secondo tale principio, quindi, la pressione della fase liquida non ha alcuna influenza sullo stato deformativo del materiale. Per questo motivo p_w viene anche detta *pressione neutra*. Nel corso del presente lavoro si farà riferimento *esclusivamente* allo stato tensionale efficace; quindi, per semplificare la notazione, l'apice " $'$ ", tipicamente utilizzato in geotecnica per distinguere lo sforzo efficace da quello totale, sarà sottinteso.

Un banco di terreno, nella maggior parte dei casi, è il risultato di un lento processo di deposizione esteso su una vasta area. Da un punto di vista meccanico, in ogni elemento di suolo, si determina un graduale incremento dello stato tensionale dovuto al carico esercitato dal terreno che si deposita superiormente. Si schematizzi il banco come un semispazio omogeneo e si supponga che la deposizione dei sedimenti di terreno sia uniformemente distribuita sull'intero piano limite. Con tali simmetrie, durante il processo di formazione del banco non si verifica alcuna deformazione orizzontale. Questo particolare tipo di percorso deformativo è detto *edometrico*.

Può accadere che un dato elemento di terreno abbia subito, nel corso della sua storia, una tensione verticale $\sigma_{v,\max}$ superiore a quella σ_v attualmente agente[1]. Se ciò si verifica il terreno si dice *sovraconsolidato* ($\sigma_v < \sigma_{v,\max}$), diversamente si dice *normal-consolidato* ($\sigma_v = \sigma_{v,\max}$).

Il caricamento di un elemento di terreno, si può svolgere in condizioni *drenate* oppure *non drenate*. Nel primo caso, si consente la fuoruscita dell'acqua contenuta nei pori; di conseguenza, i carichi esterni, se applicati con una velocità sufficientemente piccola, vengono interamente equilibrati da un incremento delle tensioni efficaci. Nel secondo caso, invece, tale drenaggio viene impedito; quindi, i carichi sono, in generale, equilibrati in parte da un incremento dello stato tensionale efficace ed in parte da un incremento di pressione neutra (la cosiddetta "sovrappressione" neutra).

Infine, si introduce una grandezza a cui si suole fare spesso riferimento in meccanica

[1] Una circostanza del genere può essere dovuta all'erosione, che ha asportato gli strati superficiali del banco, oppure allo scioglimento del ghiaccio che durante le ere glaciali ricopriva il terreno.

delle terre e che sarà utilizzata nel presente lavoro. Si tratta del *volume specifico,* definito come il volume totale per unità di volume della fase solida:

$$v := \frac{V}{V_s} \tag{3.1}$$

dove V_s è il volume corrente della fase solida. Si ha, quindi, che il volume corrente del terreno può essere calcolato come:

$$V = vV_s$$

Se si introduce l'*indice di porosità,* cioè il rapporto tra il volume dei pori ed il volume della fase solida*:*

$$e := \frac{V_v}{V_s} \tag{3.2}$$

si ricava la nota relazione:

$$v = 1 + e \tag{3.3}$$

3.3 Relazioni costitutive in compressione isotropa

Sia nel Cam-clay originale che in quello "Modificato", la risposta in compressione isotropa è descritta mediante una relazione lineare fra il volume specifico v ed il logaritmo naturale della tensione media $p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})$. Questa relazione assume le seguenti forme (Fig. 3.1):

$$v = v_p - k \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elastico} \tag{3.4}$$

$$v_c = v_{c0} - \lambda \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \tag{3.5}$$

dove v_p è il volume specifico che si ottiene scaricando a partire dalla configurazione corrente (p, v), fino al valore di pressione iniziale p_0; k è l'inclinazione assunta dalle *curve di sovraconsolidazione* ("over consolidation lines" OCL) e λ quella della *curva di normal-consolidazione* (NCL) nel piano $v - \ln p$; (p_c, v_c) e (p_{c0}, v_{c0}) sono i valori di pressione e di volume specifico corrispondenti agli stati di snervamento corrente ed iniziale, rispettivamente. Relazioni del tipo (3.4-3.5) sono state proposte per interpretare i risultati di prove di compressione edometrica sin dai primi sviluppi della meccanica delle terre [87] e sono ancora oggi uno strumento molto utilizzato nell'ingegneria geotecnica.

Con l'aiuto della Fig. 3.1, è facile verificare la seguente espressione:

$$v_c - v_{c0} = v_p - v_0 - k \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.6}$$

dove v_0 è il volume specifico iniziale. La precedente relazione, sostituita nell'equazione (3.5) della curva di normal-consolidazione, fornisce:

$$v_p - v_0 - k \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) = -\lambda \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.7}$$

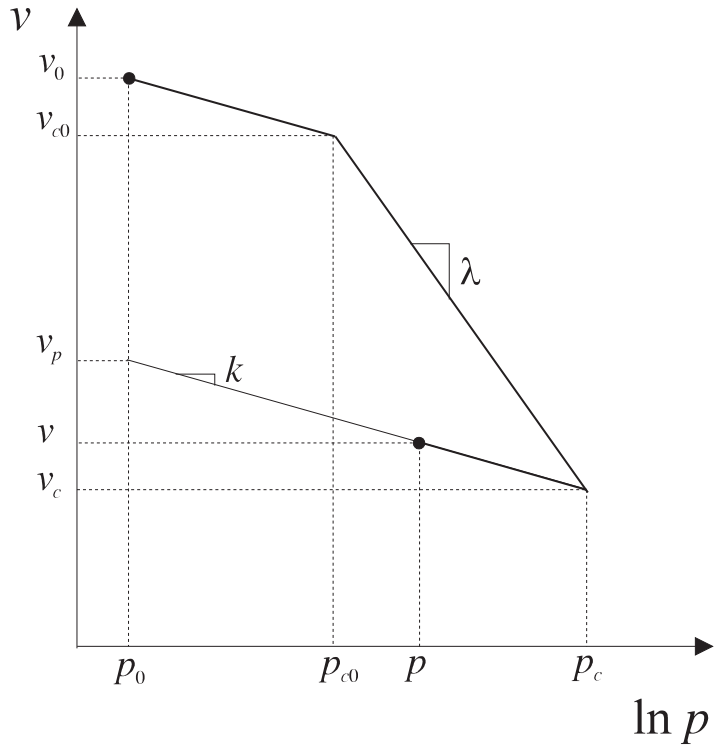


Figura 3.1: Relazioni logaritmiche fra pressione p e volume specifico v

La comprimibilità della fase solida è in generale trascurabile rispetto a quella dell'argilla nel suo complesso (lo "scheletro solido"); si può quindi supporre che il volume di tale fase rimanga costante ($V_s \cong V_{s0}$). Con questa ipotesi, volume iniziale e corrente si possono rispettivamente esprimere come (cfr. par. 3.2):

$$V_0 = v_0 V_{s0} \qquad V = v V_{s0} \tag{3.8}$$

La *deformazione volumetrica* può quindi essere calcolata come (cfr. par. 2.2.1):

$$E_v := -\frac{V - V_0}{V_0} = -\frac{v - v_0}{v_0} \tag{3.9}$$

questa deformazione si decompone additivamente nelle sue parti elastica e plastica: $E_v = E_v^e + E_v^p$, dove:

$$E_v^e = -\frac{v - v_p}{v_0} \qquad E_v^p = -\frac{v_p - v_0}{v_0} \tag{3.10}$$

Combinando le (3.10) rispettivamente con le equazioni (3.4-3.7), si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} E_v^e &= \frac{k}{v_0} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \\ E_v^p &= \frac{\lambda - k}{v_0} \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Queste si possono esprimere in forma incrementale come:

$$\begin{aligned} \dot{E}_v^e &= \frac{k}{v_0}\frac{\dot{p}}{p} \\ \dot{E}_v^p &= \frac{\lambda - k}{v_0}\frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, per la (2.21), si ha:

$$E_v = -\frac{v - v_0}{v_0} \cong \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) := \varepsilon_v \tag{3.13}$$

e quindi:

$$E_v^e = -\frac{v - v_p}{v_0} \cong \varepsilon_v^e \qquad E_v^p = -\frac{v_p - v_0}{v_0} \cong \varepsilon_v^p \tag{3.14}$$

Le equazioni costitutive (3.11) e le corrispondenti relazioni incrementali (3.12) si possono rispettivamente scrivere come:

$$\varepsilon_v^e = \frac{k}{v_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad \varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{v_0}\ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.15}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{k}{v_0}\frac{\dot{p}}{p} \qquad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\lambda - k}{v_0}\frac{\dot{p}_c}{p_c} \tag{3.16}$$

La risposta del materiale descritta dalle relazioni costitutive (3.4-3.5) contiene alcuni aspetti fisicamente inaccettabili [34]:

1. La pendenza delle curve di scarico-ricarico (3.4) è indipendente dal valore della corrispondente pressione di preconsolidazione p_c, cioè dal massimo valore di pressione determinatosi nel terreno. E' invece ragionevole supporre che al crescere del valore di p_c, la comprimibilità elastica si riduca.

2. Le relazioni (3.4-3.5) prevedono, per elevati valori di pressione, il raggiungimento di valori negativi del volume specifico [13]; in particolare risulta:

$$\begin{aligned} v < 0 \quad \text{per} \quad p > p_0 \exp\left(\frac{v_p}{k}\right) \\ v_c < 0 \quad \text{per} \quad p_c > p_{c0} \exp\left(\frac{v_{c0}}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

3. Secondo le equazioni (3.11), la comprimibilità del terreno, sia in campo elastico che in campo elasto-plastico, decresce al crescere del volume specifico iniziale v_0; ciò è fisicamente del tutto inaccettabile. E' invece ragionevole che, al decrescere dell'addensamento iniziale (v_0 crescente), la deformabilità cresca.

Si osservi al riguardo che le (3.11) sono ottenute a partire dalle (3.4-3.5) utilizzando la definizione di deformazione volumetrica E_v (3.9) e le conseguenti espressioni cinematiche (3.10). In effetti, nella letteratura geotecnica, per calcolare la deformazione volumetrica a partire dalle (3.4-3.5), raramente si utilizza la definizione (3.9). Si preferisce,

infatti, la seguente espressione di deformazione volumetrica in forma incrementale (cfr., ad es., [69, 7, 93]):

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{v}}{v} \tag{3.18}$$

Per ottenere la componente elastica di $\dot{\theta}$, si deriva la (3.4) e la si sostituisce nella precedente relazione; si ottiene la seguente equazione costitutiva in forma incrementale:

$$\dot{\theta}^e = \frac{k}{v}\frac{\dot{p}}{p} \tag{3.19}$$

Per calcolare la componente plastica, si considera l'applicazione di un incremento $\dot{p}_c$ a partire da un punto della NCL (Fig. 3.2); si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^p &= \dot{\theta} - \dot{\theta}^e = \\ &= -\frac{\dot{v}}{v} - \frac{k}{v}\frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nella precedente equazione si sostituisce a $\dot{v}$ l'espressione di $\dot{v}_c$, ottenuta derivando la (3.5); si ha infine la seguente equazione costitutiva in forma incrementale:

$$\dot{\theta}^p = \frac{\lambda - k}{v}\frac{\dot{p}_c}{p_c} \tag{3.21}$$

Integrando la (3.18), si ottiene:

$$\theta = -\ln\frac{v}{v_0} \tag{3.22}$$

nell'ipotesi di deformazioni infinitesime è consentita la seguente approssimazione (cfr. par. 3.6):

$$\theta := -\ln\frac{v}{v_0} \cong \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) := \varepsilon_v \tag{3.23}$$

Le relazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21) possono essere quindi riscritte come:

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{k}{v}\frac{\dot{p}}{p} \qquad\qquad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\lambda - k}{v}\frac{\dot{p}_c}{p_c} \tag{3.24}$$

Le relazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21), implicando una dipendenza della deformabilità dal volume specifico corrente e non da quello iniziale, descrivono il comportamento del terreno sicuramente meglio delle (3.12). Per questo motivo, come si vedrà nel paragrafo successivo, le (3.24), ottenute dalle (3.19, 3.21) nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, sono le equazioni impiegate nella formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato. Tuttavia, esse implicano che la deformabilità *decresca* al crescere di v; quindi il loro impiego non risolve del tutto l'inconveniente descritto al punto 3. Inoltre, la presenza di v nella (3.19) induce una dipendenza del comportamento elastico dalla deformazione volumetrica plastica; è da verificare se questo accoppiamento elasto-plastico non violi i fondamentali requisiti termodinamici.

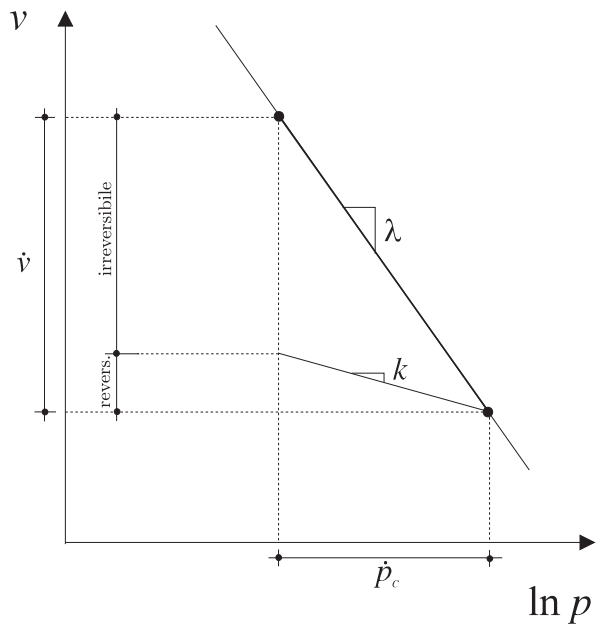


Figura 3.2: Applicazione di un incremento di pressione su argilla normal-consolidata

E' importante sottolineare che l'espressione di θ (3.22) non coincide con la definizione di deformazione volumetrica E_v (3.9). La circostanza che la scelta di θ sia preferibile a quella di E_v, quando si considerano le (3.4-3.5), evidenzia che l'ipotesi di deformazioni infinitesime non è appropriata. Si ricorda che il tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$ costituisce una efficace misura di deformazione soltanto nell'ipotesi di "piccoli" spostamenti (cfr. par. 2.2.1); quindi le equazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21) non dovrebbero essere impiegate considerando θ come la traccia di $\boldsymbol{\varepsilon}$, cioè supponendo valida la (3.23). Tale problematica sarà ripresa nel par. 3.6.

3.4 Formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato

I modelli elasto-plastici Cam-clay [68] e Cam-clay Modificato [67], sviluppati entrambi nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, differiscono esclusivamente per la geometria della superficie di snervamento. Nel Cam-clay, questa superficie è tale da sovrastimare gli incrementi di deformazione plastica deviatorica, soprattutto per piccoli valori del rapporto fra tensione ottaedrica e tensione media. La scelta di una curva di snervamento ellittica, fatta nel Cam-clay Modificato, corregge questa tendenza. Quindi, diversamente dal caso precedente, questo criterio di snervamento è definito mediante una funzione regolare; tale circostanza risulta vantaggiosa anche da un punto di vista computazionale.

Legame elastico

Per entrambi i modelli costitutivi, Cam-clay e Cam-clay Modificato, il legame costitutivo elastico è non lineare ed è espresso dalla seguente relazione incrementale:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[K\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\,\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)\right]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} \tag{3.25}$$

dove K è il modulo elastico di rigidezza volumetrica. La sua espressione è ricavata dalla (3.24_1) come:

$$K = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_v^e} = \frac{pv}{k} \tag{3.26}$$

Si assume che le deformazioni elastiche a taglio siano nulle, cioè che il modulo elastico di rigidezza a taglio μ sia infinito e che quindi il coefficiente di Poisson sia uguale a -1.

Si osservi che la presenza di v nella (3.25) implica la presenza di accoppiamento elasto-plastico; nel senso che il comportamento in campo elastico è influenzato dal precedente sviluppo di deformazioni plastiche. Infatti, in generale, la misura corrente del volume specifico dipende anche dalla deformazione volumetrica plastica.

Criterio di snervamento

Il dominio di elasticità è individuato attraverso le seguenti equazioni:

$$f\left(\boldsymbol{\sigma},p_c\right) = q + Mp\ln\left(\frac{p}{p_c}\right) = 0 \qquad \text{nel Cam-clay} \tag{3.27}$$

$$f\left(\boldsymbol{\sigma},p_c\right) = \frac{q^2}{M^2} + p\left(p - p_c\right) = 0 \qquad \text{nel Cam-clay Modificato} \tag{3.28}$$

dove q è definito come:

$$q := \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\| \tag{3.29}$$

mentre M è la pendenza, nel piano $p-q$, della *linea di stato critico* (CSL); si definisce *critico* lo stato tensionale caratterizzato da incrementi di deformazione plastica a componente volumetrica nulla. La pressione di preconsolidazione p_c è la variabile di incrudimento.

Le curve di snervamento, nel piano $p-q$, del Cam-clay e del Cam-clay Modificato sono riportate nelle Figg. 3.3a e 3.3b. Inoltre, nelle Figg. 3.4 e 3.5, la superficie di snervamento del Cam-clay Modificato è rappresentata, rispettivamente, nello spazio delle tensioni principali $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ e nello spazio $p-q-v$. In quest'ultimo spazio, la traccia della superficie di snervamento nel piano $p-v$ è ovviamente la curva di normal-consolidazione (NCL).

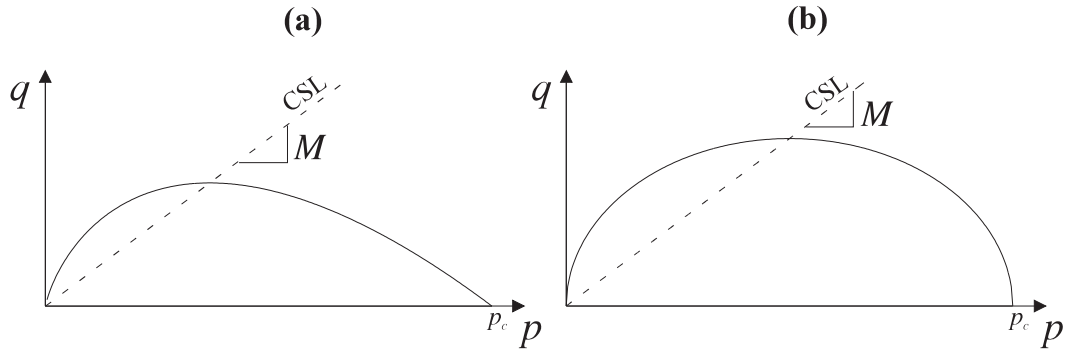


Figura 3.3: Cam clay (a) e Cam-clay Modificato (b). Curva di snervamento e linea di stato critico nel piano $p - q$

Legge di flusso

In entrambi i modelli costitutivi, il criterio di flusso è associato. Nel Cam-clay Modificato, ad esempio, l'incremento di deformazione plastica viene di conseguenza espresso come:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma}\,\frac{\partial f\left(\boldsymbol{\sigma},p_c\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \\ &= \dot{\gamma}\left[\frac{1}{3}\left(2p - p_c\right)\mathbf{I} + \frac{3}{M^2}\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Legge di incrudimento

La legge di incrudimento è di tipo volumetrico; essa è fornita dalla relazione in forma incrementale (3.24_2):

$$\dot{p}_c = p_c \frac{v}{\lambda - k}\,\dot{\varepsilon}_v^p \tag{3.31}$$

Quindi, l'impiego del Cam-clay e del Cam-clay Modificato richiede la determinazione di quattro parametri adimensionali:

1. l'indice di compressione vergine λ;
2. l'indice di rigonfiamento k;
3. la pendenza della linea di stato critico M;
4. il volume specifico iniziale v_0.

Come costante del materiale, al posto di v_0, si può considerare il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino ad un valore di pressione unitaria (v_{c1}). Assegnati p_0 e p_{c0}, è facile ricavare v_0 a partire da v_{c1}, utilizzando le (3.4-3.5).

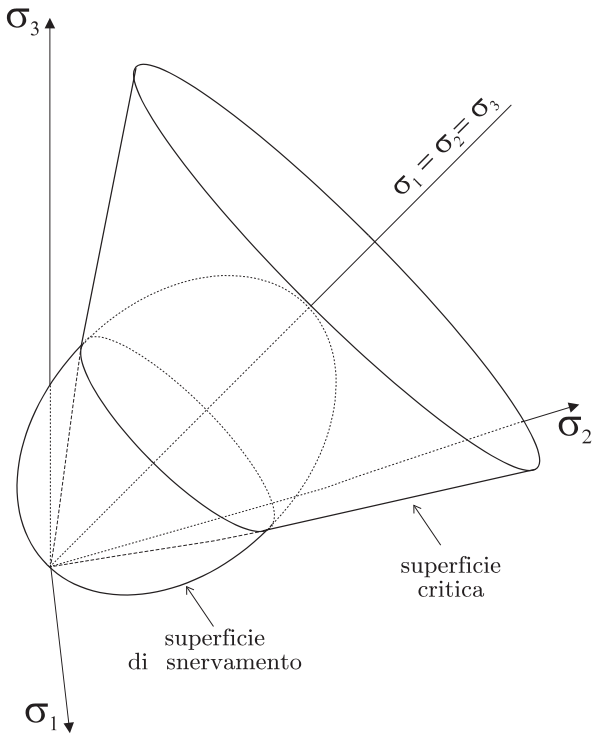


Figura 3.4: Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e superficie di stato critico nello spazio delle tensioni principali

Per la determinazione dei suddetti parametri, teoricamente sono necessarie soltanto due prove di laboratorio: la prima, di compressione isotropa (comprendente anche un percorso di scarico, se il campione è inizialmente normal-consolidato), consente di ricavare i parametri λ, k, v_{c1}; la seconda, una prova triassiale standard in condizione drenata, è finalizzata alla determinazione di M.

La distinzione operata fra la superficie di snervamento e la superficie critica permette al Cam-clay di superare uno dei principali limiti di applicabilità dei classici modelli elasto-plastici (Drucker-Prager, Tresca modificato, Mohr-Coulomb [28, 26, 71]). Nel Cam-clay e nel Cam-clay Modificato, infatti, le implicazioni dell'ipotesi di associatività del flusso plastico sono, da un punto di vista qualitativo, in ottimo accordo con il reale comportamento dei terreni.

A tal proposito, si faccia riferimento al diagramma di Fig. 3.6, sui quali assi sono riportati, oltre agli invarianti di tensione p e q, i corrispondenti incrementi di deformazione plastica $\dot{\varepsilon}_v^p$ e $\dot{\varepsilon}_q^p := \sqrt{2/3}\,\|\mathrm{dev}\,(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\|$. Si consideri il punto C di intersezione fra la curva di snervamento (3.28) del Cam-clay Modificato e la linea di stato critico $q = Mp$; per l'ipotesi di flusso associato (3.30), l'incremento di deformazione plastica nel punto C ha componente volumetrica $\dot{\varepsilon}_v^p$ nulla, coerentemente con la definizione di stato critico. Dalla legge di incrudimento (3.31), si ha quindi $\dot{p}_c = 0$, cioè la stazionarietà della curva di snervamento in C. La linea di stato critico rappresenta quindi la

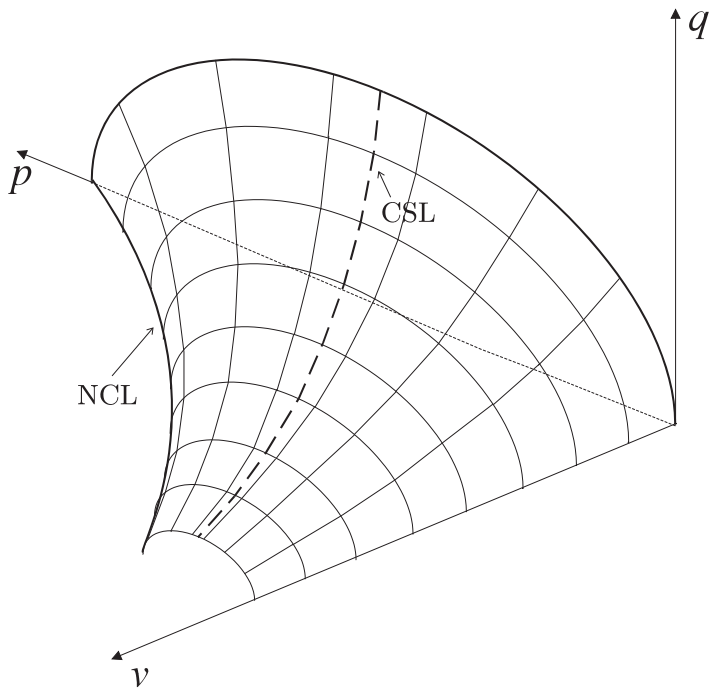


Figura 3.5: Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e linea di stato critico nello spazio $p - q - v$

condizione *ultima* del materiale.

In un qualsiasi punto D della curva di snervamento, posto al di sotto della CSL (zona "sub-critica"), la (3.30) implica $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$ (*contrattanza*) e quindi $\dot{p}_c > 0$; la curva di snervamento si espande ed il comportamento del materiale è *incrudente*. Inversamente, in un punto S posto al di sopra della CSL (zona "super-critica"), si ha $\dot{\varepsilon}_v^p < 0$ (*dilatanza*) e $\dot{p}_c < 0$; la curva di snervamento si restringe ed il comportamento del materiale è *rammollente*.

Infine, è utile considerare un esempio delle previsioni del Cam-clay Modificato; ad esempio quelle relative alla risposta di un campione di argilla debolmente sovraconsolidata ($p_0 < p_{c0}$) sottoposto ad una prova triassiale drenata standard (Fig. 3.7). Si osservano, nel percorso tensio-deformativo, un tratto elastico (0-1: $\dot{\varepsilon}_v \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_q = 0$) ed un successivo tratto elasto-plastico con incrudimento (1-2: $\dot{\varepsilon}_v \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_q \neq 0$), fino al raggiungimento dello stato critico (2: $\dot{\varepsilon}_v = 0$).

3.5 Alcune modifiche proposte per il modello

Sono state proposte numerose modifiche alla formulazione del Cam-clay riportata nel precedente paragrafo. Tali variazioni sono volte a migliorare le previsioni del modello e ad estenderne il campo di applicazione, ad esempio, alla condizione di carico ciclico oppure alle argille fortemente sovraconsolidate. Nel seguito sono brevemente richiamati i principali aspetti di alcune delle modifiche suggerite.

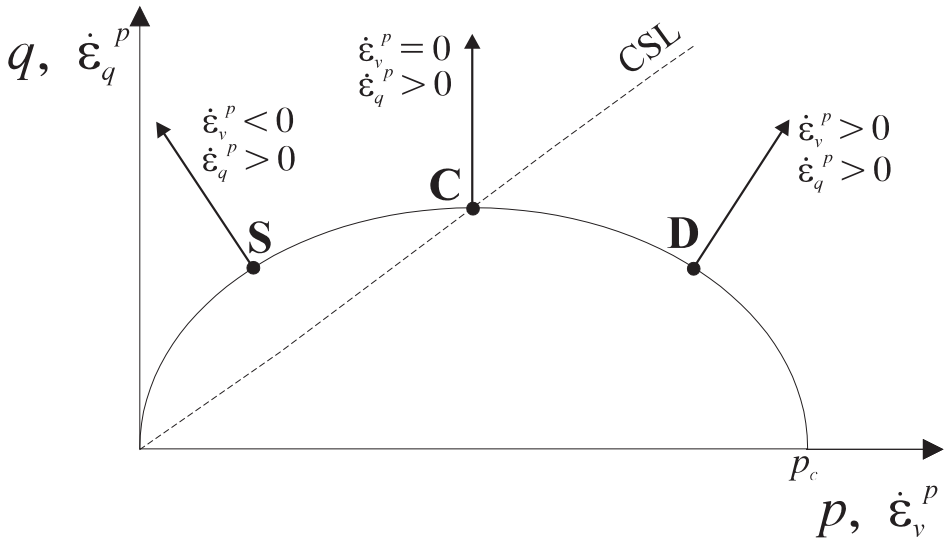


Figura 3.6: Cam-clay Modificato. Implicazioni dell'ipotesi di flusso plastico associato

Rigidezza elastica a taglio

Sia nella formulazione originale sia in quella "Modificata", si assume che le deformazioni elastiche a taglio siano nulle, cioè che il modulo di taglio sia infinito. Questa ipotesi, oltre ad essere poco realistica, rende difficile l'implementazione del modello in una formulazione agli spostamenti del metodo degli elementi finiti. Per superare queste difficoltà vengono spesso prese in esame due diverse posizioni relative alla descrizione, fornita dal modello, della risposta in campo elastico:

1. Si assume un valore finito e costante per il modulo di rigidezza a taglio μ; si osservi tuttavia che anche questa soluzione non risulta in buon accordo con il comportamento osservato in ambito sperimentale [24, 92]. Inoltre, per piccoli valori di tensione media, si perviene a valori negativi del coefficiente di Poisson e ciò non è fisicamente accettabile (cfr. par. 4.6.1).

2. Si pone costante il coefficiente di Poisson ν, in modo da ricavare il modulo di rigidezza a taglio in funzione del modulo di rigidezza volumetrica, e quindi, della tensione media [11, 84]:

$$\mu = \frac{3\,(1-2\nu)}{2\,(1+\nu)} K = \frac{3\,(1-2\nu)}{2\,(1+\nu)} \frac{pv}{k} \tag{3.32}$$

   Quest'ultimo approccio è sicuramente più realistico, ma conduce ad una relazione costitutiva non-conservativa [96].

Si osservi che entrambe le modifiche implicano la determinazione di un parametro, μ oppure ν, che si aggiunge ai quattro previsti nella formulazione originale.

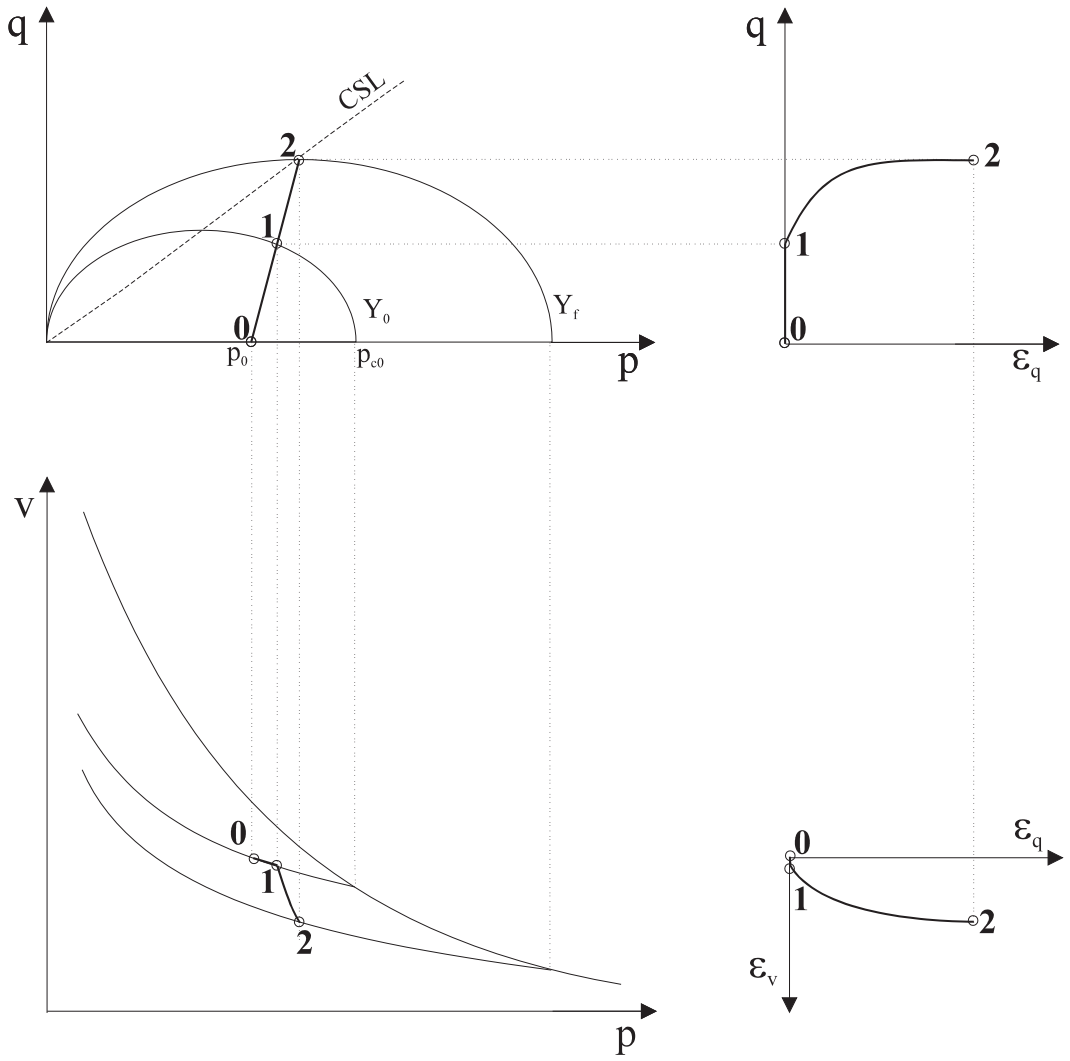


Figura 3.7: Cam Clay Modificato. Previsione della risposta di un campione di argilla debolmente sovraconsolidata durante una prova triassiale drenata standard

Comportamento in compressione isotropa

Per risolvere i problemi connessi alla modellazione del comportamento isotropo per mezzo di relazioni di tipo $v - \ln p$ (cfr. par. 3.3), Butterfield [13] e Hashiguchi [34, 36] propongono l'impiego di relazioni lineari $\ln v - \ln p$:

$$\ln\left(\frac{v}{v_p}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elastico} \tag{3.33}$$

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \tag{3.34}$$

Queste due equazioni conducono alla seguente relazione, analoga alla (3.7):

$$\ln\left(\frac{v_p}{v_0}\right) = -\left(\lambda^* - k^*\right) \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.35}$$

Si richiami la definizione (3.22) di deformazione volumetrica logaritmica, già utilizzata, partendo dalla sua forma incrementale (3.18), nella formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato:

$$\theta = -\ln\frac{v}{v_0} \qquad \theta^e = -\ln\frac{v}{v_p} \qquad \theta^p = -\ln\frac{v_p}{v_0} \tag{3.36}$$

Sostituendo le (3.33, 3.35), si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \theta^e &= k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \\ \theta^p &= (\lambda^* - k^*) \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

la cui forma incrementale è:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^e &= k^* \frac{\dot{p}}{p} \\ \dot{\theta}^p &= (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Si osserva che le relazioni costitutive bi-logaritmiche (3.33-3.34) e le (3.37, 3.38), da queste ricavate, non conducono agli inconvenienti evidenziati in precedenza. In particolare, la deformabilità, sia in campo elastico sia in campo elasto-plastico è indipendente da v. Si osservi, inoltre, che per effetto di quest'ultima circostanza, l'ipotesi di incomprimibilità della fase solida ($V_s \cong V_{s0}$) non è più necessaria; quindi le (3.33-3.34) possono essere direttamente espresse in termini di volume totale dell'argilla $V = V_s + V_v = vV_s$ (cfr. par. 3.2).

Modelli costitutivi in deformazioni infinitesime, di tipo Cam-clay, in cui sono implementate le relazioni (3.33-3.34) sono presentati, ad esempio, in [1, 39, 91].

Si osservi, tuttavia, che non è coerente preferire le relazioni bi-logaritmiche (3.33-3.34) alle tradizionali di tipo $v - \ln p$ (3.4-3.5) e contemporaneamente accettare l'ipotesi di deformazioni infinitesime. I motivi di tale affermazione saranno esposti nel par. 3.6.

Potenziali elastici di Houlsby

Houlsby [38] propone un'espressione dell'energia di deformazione elastica che implica la dipendenza di entrambe le rigidezze, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media che dal deviatore degli sforzi; questo legame conduce, nel caso di compressione isotropa, alla relazione bilogaritmica (3.33). In alternativa, tale autore considera la possibilità di porre il modulo di taglio proporzionale al valore corrente della pressione di preconsolidazione p_c; quest'ultima ipotesi di accoppiamento elasto-plastico, unitamente a considerazioni di carattere termodinamico, implica una leggera variazione della superficie di snervamento. Entrambi i legami costitutivi elastici proposti da Houlsby sono in soddisfacente accordo con le evidenze sperimentali [2, 38].

Comportamento isteretico interno alla superficie di snervamento

Se si considerano cicli di scarico-ricarico, il legame elastico non lineare si rivela inadeguato a prevedere la risposta del materiale. I terreni, infatti, per effetto di una successione di cicli di carico, anche interni alla superficie di snervamento, accumulano deformazioni irreversibili. La modellazione di questo comportamento isteretico è utile per l'analisi di problemi dinamici; a tale studio si sono dedicati molti autori (cfr., ad es., [23, 53, 56])

Parte "super-critica" della superficie di snervamento

Nella parte posta al di sopra della linea di stato critico, la forma della curva di snervamento fornita dalla (3.28) determina una sovrastima della resistenza di picco delle argille fortemente sovraconsolidate. Per ovviare a tale inconveniente, spesso si sostituisce il tratto in questione con una superficie simile a quella proposta da Hvorslev [40]. Questa soluzione, unitamente all'ipotesi di flusso associato, conduce alla previsione di un comportamento eccessivamente dilatante; per ovviare a questo inconveniente, si fa di solito ricorso ad equazioni evolutive non-associate (cfr., ad es., [39, 94]).

Anisotropia del comportamento elasto-plastico

Prove sperimentali su argille *indisturbate* rivelano un comportamento anisotropo del materiale in campo inelastico. Tale circostanza si manifesta attraverso la "curva di snervamento" dedotta dai risultati sperimentali, che non presenta, in generale, asse coincidente con $q = 0$ [92, 93]. Questo aspetto del comportamento non viene colto dal Cam-clay.

Nella maggior parte dei casi, nel corso della sua formazione, un banco di terreno consolida in condizioni sostanzialmente edometriche (cfr. par. 3.2); per effetto di questa particolare evoluzione delle deformazioni, la curva di snervamento determinata sperimentalmente ha asse di simmetria approssimativamente coincidente con la cosiddetta K_0-*linea*; cioè con la retta luogo degli stati tensionali corrispondenti ad un percorso di deformazione edometrica.

Per modellare questo aspetto del comportamento meccanico viene proposto di ruotare la curva di snervamento (cfr., ad es., [70]). Un approccio più rigoroso consiste nell'introdurre un'adeguata legge di incrudimento cinematico; cioè modellare l'evoluzione dell'orientamento della superficie al crescere della componente deviatorica di deformazione plastica (cfr., ad es., [35]). Ovviamente questi modelli sono ben più complessi della formulazione originale del Cam-clay e non sembra del tutto provato che a ciò corrisponda un sostanziale miglioramento delle previsioni della risposta meccanica del materiale.

3.6 Limiti dell'ipotesi di deformazioni infinitesime

Le relazioni pressione-volume discusse nel par. 3.3 e nel par. 3.5, sono qui richiamate allo scopo di mostrare come l'ipotesi di piccoli spostamenti non sia adeguata alla modellazione costitutiva delle argille tenere. Si considerino, quindi, i seguenti quadri riepilogativi.

Relazioni $v - \ln p$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{campo elastico} & \text{campo elasto-plastico} \\ v = v_p - k \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) & v_c = v_{c0} - \lambda \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \end{array}} \tag{3.39}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$E_v = -\frac{v - v_0}{v_0} \qquad \theta = -\ln \frac{v}{v_0} \tag{3.40}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_v^e = \frac{k}{v_0} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \\ E_v^p = \frac{\lambda - k}{v_0} \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \\ \\ \dot{E}_v^e = \frac{k}{v_0} \frac{\dot{p}}{p} \\ \dot{E}_v^p = \frac{\lambda - k}{v_0} \frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \dot{\theta}^e = \frac{k}{v} \frac{\dot{p}}{p} \\ \dot{\theta}^p = \frac{\lambda - k}{v} \frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{array}} \tag{3.41}$$

Relazioni $\ln v - \ln p$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{campo elastico} & \text{campo elasto-plastico} \\ \ln\left(\frac{v}{v_p}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) & \ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \end{array}} \tag{3.42}$$

$$\downarrow$$

$$\theta = -\ln \frac{v}{v_0} \tag{3.43}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \theta^e = k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) & \dot{\theta}^e = k^* \frac{\dot{p}}{p} \\ \theta^p = (\lambda^* - k^*) \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) & \dot{\theta}^p = (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{array}} \tag{3.44}$$

In generale, il tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$ non rappresenta una misura esatta di deformazione; tuttavia, costituisce una efficace misura di deformazione nell'ipotesi di "piccoli" spostamenti. Si ricorda, a tal proposito, che una funzione deformazione φ si dice *infinitesima* se è piccolo il suo gradiente degli spostamenti [32];

questo implica che nella descrizione di φ si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore a (cfr. par. 2.2.1):

$$\omega := \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| = \|D\mathbf{u}\| \tag{3.45}$$

Si introduca, coerentemente con la definizione (3.45), il seguente parametro:

$$\omega_v := \det[\mathbf{F}] - \det[\mathbf{I}] = J - 1 = \frac{V - V_0}{V_0} \tag{3.46}$$

se, come fino ad ora si è fatto, si considera incomprimibile la fase solida, si ha:

$$\omega_v = \frac{v - v_0}{v_0} \tag{3.47}$$

Si consideri il seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$\ln v = \ln v_0 + \frac{v - v_0}{v_0} + O\left(\omega_v^2\right) \tag{3.48}$$

dove $O(\omega_v^2)$ sono i termini di questo sviluppo che risultano infinitesimi di ordine superiore ad ω_v. L'ipotesi di deformazioni infinitesime equivale a trascurare $O(\omega_v^2)$, ricavando:

$$\ln \frac{v}{v_0} \cong \frac{v - v_0}{v_0} \tag{3.49}$$

e quindi:

$$\theta \cong E_v \tag{3.50}$$

Quindi, se l'ipotesi di deformazioni infinitesime fosse appropriata, le equazioni costitutive ($3.41_{box\,1}$) e ($3.41_{box\,2}$), derivanti rispettivamente dall'impiego di E_v e di θ, dovrebbero mostrare la stessa efficacia nel descrivere il comportamento delle argille tenere. Invece le previsioni ottenute utilizzando le ($3.41_{box\,2}$) sono decisamente in migliore accordo con le osservazioni sperimentali, come è dimostrato dal fatto che esse siano normalmente preferite alle ($3.41_{box\,1}$). Questa osservazione dimostra che l'approssimazione (3.50) non è in generale accettabile, nel senso che i termini $O(\omega_v^2)$ non sono trascurabili. Si ha quindi che nella modellazione costitutiva delle argille tenere l'ipotesi di deformazioni infinitesime non è in generale appropriata.

Si considerino adesso le relazioni lineari $\ln v - \ln p$ (3.42). Partendo dall'ipotesi di deformazioni infinitesime e quindi dalla (3.50), si ricava:

$$E_v^e \cong \theta^e \qquad\qquad E_v^p \cong \theta^p \tag{3.51}$$

se al primo membro delle precedenti relazioni si sostituiscono le espressioni di E_v^e e di E_v^p (3.10) ed al secondo quelle di θ^e e di θ^p (3.44), si ha:

$$-\frac{v - v_p}{v_0} \cong k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad -\frac{v_p - v_0}{v_0} \cong (\lambda^* - k^*) \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.52}$$

e quindi:

$$v \cong v_p - v_0 k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad v_p - v_0 \cong -v_0\,(\lambda^* - k^*) \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \tag{3.53}$$

Si nota come queste relazioni coincidano rispettivamente con la (3.4) e con la (3.7), una volta che si sono effettuate le seguenti sostituzioni:

$$k = v_0 k^* \qquad \lambda = v_0 \lambda^* \tag{3.54}$$

Si ha quindi che l'ipotesi di deformazioni infinitesime implica l'equivalenza delle relazioni $v - \ln p$ con quelle $\ln v - \ln p$, mentre è un'evidenza sperimentale che, in generale, queste ultime interpretano meglio il comportamento delle argille [13].

Per quanto fin qui evidenziato, risulta privo di coerenza constatare l'opportunità di introdurre la deformazione logaritmica θ e, contemporaneamente, continuare a supporre che il solo tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$ sia sufficiente come misura di deformazione. Questa e altre considerazioni riportate più avanti, giustificano la necessità della formulazione di un modello di tipo Cam-clay in deformazioni finite.

Osservazione 3.6.1

Si noti che le (3.54) spiegano perché in letteratura [39] si affermi che i parametri k^* e λ^* si possono approssimativamente ricavare da k e λ come:

$$k^* \cong \frac{k}{v} \qquad \lambda^* \cong \frac{\lambda}{v} \tag{3.55}$$

■