Capitolo 4

Un modello Cam-clay in deformazioni finite

4.1 Introduzione

Grazie al contributo di numerosi autori, un chiaro e completo inquadramento matematico della *plasticità classica in deformazioni infinitesime* si può considerare ormai raggiunto (cfr. [45]), intendendo, come "classica", la teoria dell'elasto-plasticità presentata nei famosi lavori di Hill [37] e Koiter [41].

Lo stesso non si può certamente affermare per la *plasticità classica in deformazioni finite*; tale teoria, infatti, costituisce ancora oggi un argomento controverso. Sicuramente uno dei principali temi di discussione è la scelta di un'adeguata formula di decomposizione elasto-plastica. Come è noto, la teoria linearizzata si basa sulla decomposizione additiva del tensore di deformazione infinitesima; questa ipotesi viene a volte estesa alla teoria non lineare. Ad esempio, Green e Naghdi[1] [31] propongono la *decomposizione additiva* del tensore di deformazione di Green-Lagrange (2.15); si dimostra che la conseguente teoria costitutiva risulta accettabile da un punto di vista termodinamico [54].

Correlato a quello della decomposizione elasto-plastica della deformazione, vi è un altro tema estremamente controverso: la scelta della misura obiettiva di variazione temporale dello sforzo, da utilizzare nella relazione costitutiva in forma incrementale. A tal fine, viene proposto un numero ragguardevole di derivate obiettive. Nell'ambito di alcune formulazioni (cfr. ad es. [46]), la scelta della derivata corotazionale del tensore di Kirchhoff (2.67) è dimostrata essere una necessità; in altri lavori (cfr. ad es. [79]), si preferisce l'impiego della derivata di Lie (2.68).

Soprattutto in ambito computazionale, vengono proposte numerose *estensioni ipoelastiche* dei classici modelli della teoria infinitesimale (cfr., ad es., [55]). Nella maggior parte dei casi, questi modelli si basano sulla decomposizione additiva, nelle sue parti elastica e plastica, della velocità del gradiente di deformazione (2.51). Il comportamento costitutivo elastico è definito in forma incrementale; si tratta, quindi, di una

[1] I lavori di Green e Naghdi, insieme a quelli di Owen [60, 61], si pongono fra i primi significativi contributi alla formulazione di una teoria matematica dell'elasto-plasticità in deformazioni finite.

relazione fra la velocità di deformazione elastica ed una derivata temporale obiettiva della misura di sforzo. Il criterio di snervamento, in termini di tensioni, è definito nella configurazione corrente; la legge di flusso, quasi sempre associata, è formalmente identica a quella della teoria in deformazioni infinitesime.

La scelta di questa classe di legami è criticabile per vari motivi; ad esempio, a causa dell'ipoelasticità, non è a priori escluso che venga dissipata energia per effetto di un comportamento isteretico in campo elastico. Nella maggior parte dei casi, infatti, si assume costante il tensore di elasticità spaziale (2.83); tale ipotesi è incompatibile con la definizione di iperelasticità [80].

Un importante progresso è costituito dall'introduzione della nozione di *configurazione intermedia,* dovuta a Lee [44]. Si definisce intermedia la configurazione a cui si perviene annullando lo stato tensionale corrente; relativamente ad essa si caratterizza la risposta iperelastica del materiale. Sul concetto di questa configurazione "scarica" si basano numerosi lavori. Alcuni di questi sono finalizzati alla formulazione di una teoria generale dell'elasto-plasticità (cfr. ad es. [46, 47, 48, 50]), altri hanno come obiettivo principale lo sviluppo di adeguati algoritmi di integrazione numerica. In particolare, in questi ultimi contributi, si sfrutta la *decomposizione elasto-plastica moltiplicativa* del gradiente di deformazione. Tale decomposizione, conseguente al concetto di configurazione intermedia, è inizialmente proposta nell'ambito della descrizione micromeccanica del comportamento plastico dei singoli cristalli di metallo (cfr., ad es., [6]). Il suo uso viene poi esteso alla modellazione dei continui elasto-plastici da numerosi autori (cfr., ad es., [3, 72, 73, 74, 79]); talvolta, contemporaneamente all'ipotesi di decomposizione moltiplicativa, il potenziale elastico è assegnato in forma logaritmica (cfr., ad es., [63, 75]).

Attualmente, la teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa sembra incontrare i favori della maggior parte dei ricercatori, soprattutto in ambito computazionale. Fra l'altro, è stata applicata anche alla caratterizzazione ed alla simulazione numerica della localizzazione delle deformazioni [4, 5, 77].

In meccanica delle terre, a partire dalla fine degli anni '60, si lavora all'estensione al campo delle deformazioni finite della teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi (il comportamento costitutivo dello scheletro solido è supposto elastico); relativi a questo studio sono, ad esempio, i contributi di Gibson e dei suoi collaboratori [30].

Più recentemente, la consolidazione tridimensionale in deformazioni finite è stata trattata come estensione ipoelastica della teoria infinitesimale (cfr., ad es., [18]). E' invece basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, lo studio della consolidazione elasto-plastica in deformazioni finite riportato in [9].

Sempre nell'ambito della modellazione costitutiva dei geomateriali in deformazioni finite, risultano interessanti alcuni contributi sviluppati al di fuori della teoria della plasticità classica. In particolare, nell'ambito della cosiddetta "ipoplasticità", le relazioni costitutive vengono assegnate in forma incrementalmente non lineare (cfr., ad es., [42]).

Lo sviluppo di un efficace modello elasto-plastico in deformazioni finite per le argille, non solo è giustificato dall'osservazione della risposta meccanica di questi materiali (cfr par. 3.6), ma è anche indispensabile ad una corretta analisi di vari problemi geotecnici, come quelli riguardanti i pendii soggetti a grandi deformazioni oppure la stabilità di strutture a torre[2].

Un Cam-clay Modificato in deformazioni finite, basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, è presentato in [78]; il comportamento in compressione isotropa è modellato utilizzando le tradizionali relazioni lineari $v - \ln p$ (cfr. par. 3.3), la rigidezza elastica a taglio è supposta costante (cfr. par. 4.6.1). Lo sviluppo di un'altra estensione del Cam-clay Modificato alle deformazioni finite è attualmente in corso [85].

Il modello Cam-clay descritto nel seguito è formulato nell'ambito della teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa [14, 15, 16, 17]. In particolare, il modello si inquadra nella classe di legami elasto-plastici moltiplicativi caratterizzati da una funzione di snervamento convessa formulata in termini di tensioni e di variabili interne *vere*, cioè definite nella configurazione corrente [75]. In questo capitolo, la presentazione del modello Cam-clay in deformazioni finite è anticipata dalla formulazione generale di questa classe di legami. Infatti, dopo aver discusso la decomposizione moltiplicativa (par. 4.2), sono valutate le restrizioni imposte dall'assioma di obiettività sulla forma del criterio di snervamento (par. 4.3.1). In seguito, per la classe considerata, viene caratterizzata l'evoluzione della funzione di dissipazione plastica (par. 4.3.2), e quindi, utilizzando il Principio di Massima Dissipazione Plastica, è ricavata la forma generale delle equazioni evolutive (par. 4.3.3). La formulazione viene quindi ridotta allo spazio delle direzioni principali (par. 4.3.4).

La formulazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite è presentata e discussa nel par. 4.4. Il legame elastico è definito assegnando un potenziale che implica la dipendenza di entrambe le rigidezze, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media sia dal deviatore dello sforzo (par. 4.4.1). Il criterio di snervamento del Cam-clay Modificato, viene esteso al campo delle deformazioni finite, utilizzando, come misura di sforzo, il tensore di Kirchhoff (par. 4.4.2). Si particolarizzano le equazioni di flusso associato ricavate, in forma generale, nei paragrafi precedenti (par. 4.4.3). La legge di incrudimento viene definita assegnando l'espressione del contributo energetico della corrispondente variabile interna: la deformazione volumetrica plastica (par. 4.4.4).

Le principali implicazioni del modello vengono discusse e confrontate con quelle derivanti da altre ipotesi costitutive (par. 4.5). Particolare attenzione viene rivolta all'analisi della descrizione, da parte del modello, del comportamento in compressione isotropa (par. 4.5.1). Vengono inoltre evidenziati alcuni limiti di applicabilità (par. 4.5.2). Il significato fisico dei parametri del modello è chiarito nel par. 4.5.3. Infine,

[2]Al crescere dell'inclinazione dell'asse di una struttura a torre corrisponde un incremento dell'eccentricità del carico verticale. Un modello in deformazioni infinitesime, in cui si fa coincidere la geometria della configurazione corrente con quella della configurazione di riferimento, non può tenere conto di questo importantissimo effetto. Per tale motivo, nelle analisi di strutture a torre svolte nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, si applica, oltre al carico verticale, un momento ribaltante; tale momento viene progressivamente aggiornato nel corso dello svolgimento dell'analisi, sulla base della rotazione calcolata (cfr., ad es., [12]).

sono riportate alcune osservazioni su due legami elastici alternativi (par. 4.6).

4.2 La decomposizione moltiplicativa e le sue implicazioni cinematiche

La teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa si basa sulla seguente legge di decomposizione del tensore gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X})\,\mathbf{F}^p(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \tag{4.1}$$

dove $\mathbf{F}^e(\mathbf{X})$ e $\mathbf{F}^p(\mathbf{X})$ sono detti, rispettivamente, gradienti di deformazione elastica e plastica (Fig. 4.1). In particolare, il tensore $\mathbf{F}^{e^{-1}}$ è definito come l'operatore che scarica le tensioni in $\mathbf{x} \in \varphi(\mathcal{B})$. Quindi, se si indica come *intermedia* la configurazione a cui si perviene annullando lo stato tensionale corrente, l'applicazione di $\mathbf{F}^{e^{-1}}$ su $\varphi(\mathcal{B})$ fornisce tale configurazione. Il gradiente di deformazione plastica $\mathbf{F}^p$, invece, fornisce la configurazione intermedia a partire da quella di riferimento $\mathcal{B}$.

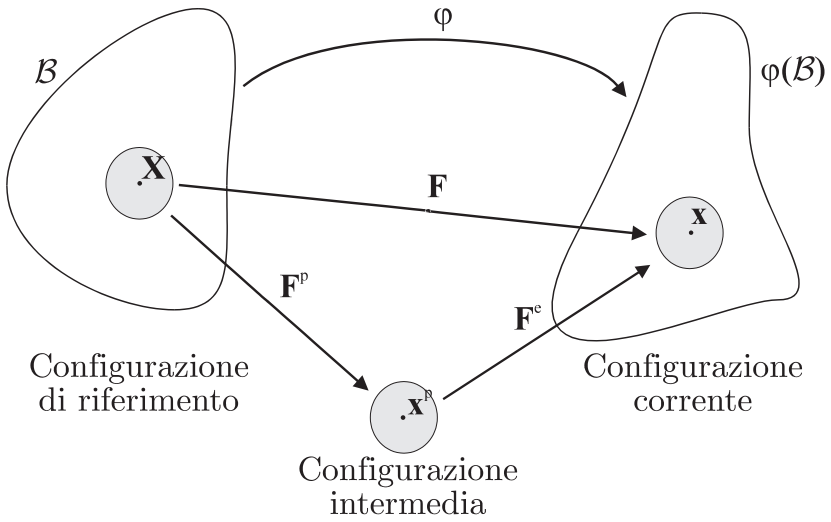


Figura 4.1: Decomposizione elasto-plastica moltiplicativa del gradiente di deformazione

Si considerano, adesso, alcune delle relazioni cinematiche associate alla decomposizione (4.1). A tal fine, si riportano le definizioni del tensore di Cauchy-Green destro di deformazione totale e di quello di deformazione plastica:

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T\mathbf{F} \qquad \mathbf{C}^p := \mathbf{F}^{p^T}\mathbf{F}^p \tag{4.2}$$

Mentre le componenti totale ed elastica del tensore di Cauchy-Green sinistro sono rispettivamente:

$$\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T \qquad \mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e\mathbf{F}^{e^T} \tag{4.3}$$

Dalla definizione di $\mathbf{b}^e$ e dalla decomposizione moltiplicativa (4.1), si ricava:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{F}^{p^{-1}}\mathbf{F}^{p^{-T}}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}^{p^T}\mathbf{F}^p\right)^{-1}\mathbf{F}^T$$

che, considerando la (4.2), fornisce la relazione[3]:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{C}^{p^{-1}}\mathbf{F}^T \tag{4.4}$$

Analogamente a quanto fatto per il tensore degli sforzi di Kirchhoff (2.68), si definisce la derivata di Lie del tensore sinistro di Cauchy-Green elastico:

$$L_v\mathbf{b}^e := \mathbf{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}^e\mathbf{F}^{-T}\right]\right\}\mathbf{F}^T \tag{4.5}$$

se si sostituisce la (4.4), si ottiene:

$$L_v\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{C}^{p^{-1}}\right)\mathbf{F}^T \tag{4.6}$$

Infine, derivando la (4.4) rispetto al tempo, si ha:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T + L_v\mathbf{b}^e \tag{4.7}$$

dove $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ è la velocità spaziale di deformazione.

Come si vedrà nei seguenti paragrafi, questa relazione cinematica incrementale è di fondamentale importanza nella formulazione di un modello elasto-plastico moltiplicativo.

4.3 Una classe di legami elasto-plastici moltiplicativi

Il modello Cam-clay discusso nel presente capitolo si inquadra nella classe di legami elasto-plastici moltiplicativi caratterizzati da una funzione di snervamento *convessa* formulata in termini di tensioni e di variabili interne *vere*. Nel seguito si richiama la formulazione generale di questa classe di legami [75].

Si consideri, quindi, un *dominio di elasticità* individuato da un criterio di snervamento definito sulla configurazione corrente:

$$E_d := \left\{(\boldsymbol{\tau}, i) \in \varphi(\mathcal{B}) \times R \quad \middle| \quad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0\right\} \tag{4.8}$$

dove $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)$ è la funzione che fissa il criterio di snervamento ed i è la variabile interna (una misura di tensione) che caratterizza l'incrudimento del materiale. Si ipotizzi che tale dominio sia convesso.

[3]Secondo una terminologia frequentemente impiegata (cfr., ad es., [51]) questo tipo di operazioni sono dette di *push-forward*; questa, infatti, è un operazione di push-forward su $\mathbf{C}^p$, definito nella configurazione intermedia, che fornisce $\mathbf{b}^e$, definito nella configurazione corrente.

4.3.1 Forma del criterio di snervamento e del potenziale elastico

L'assioma di obiettività (cfr. par. 2.4) limita la scelta di $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)$ nell'ambito delle funzioni *isotrope*. Si considerino, infatti, due moti, $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ e $\mathbf{x}^+ = \phi_t^+(\mathbf{X})$, che differiscono solo per un cambiamento di osservatore; cioè:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{q} + \mathbf{Q}[\mathbf{x} - \mathbf{o}] \tag{4.9}$$

dove $\mathbf{o}$ e $\mathbf{q}$ appartengono a $\mathcal{V}$ e $\mathbf{Q} \in Orth$. Il tensore di Kirchhoff si trasforma secondo la: $\boldsymbol{\tau}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T$. Quindi l'assioma di obiettività richiede:

$$\check{f}\left(\mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T, i\right) = \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \qquad \forall \mathbf{Q} \in Orth \tag{4.10}$$

cioè l'isotropia della funzione di snervamento[4].

Per coerenza, anche la funzione che esprime l'energia di deformazione elastica si assume isotropa. Si ricorda (cfr. par. 2.6.2) che nel caso di risposta isotropa, e soltanto in questo caso, l'energia di deformazione dipende dal moto attraverso il tensore di Cauchy-Green sinistro; cioè esiste una funzione $\check{W}(\mathbf{b}^e) : Sym^+ \to R$ tale che $\bar{W}(\mathbf{C}^e) = \check{W}(\mathbf{b}^e)$.

4.3.2 Dissipazione plastica

In questo paragrafo, con riferimento alla classe di modelli in esame, sono valutate le condizioni imposte dalla legge di Clausius-Plank sulla dissipazione plastica.

Nel seguito si definisce l'*energia libera di Helmholtz* come:

$$\psi(\mathbf{b}^e, \xi) = \check{W}(\mathbf{b}^e) + H(\xi) \tag{4.11}$$

dove $\check{W}(\mathbf{b}^e)$ è l'energia di deformazione elastica (cfr. par. 2.5) e H è il contributo energetico della variabile interna di incrudimento (una misura di deformazione) ξ.

In ambito puramente meccanico, la densità di *dissipazione di energia* è data localmente dalla differenza tra la potenza degli sforzi e la variazione temporale di energia libera:

$$D := \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} - \frac{d\psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{dt} \tag{4.12}$$

dove, secondo la convenzione sui segni qui adottata, la velocità spaziale di deformazione è $\mathbf{d} := -\mathrm{syml}$.

Nel caso considerato, D coincide necessariamente con la densità di *dissipazione plastica*. Il secondo Principio della Termodinamica, così come viene espresso nella legge di Clausius-Plank, afferma che in ogni processo la dissipazione di energia è non-negativa. Tale principio costituisce pertanto un assioma di evoluzione:

$$D = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} - \dot{\psi}(\mathbf{b}^e, \xi) \geq 0 \tag{4.13}$$

[4]Si osservi che questa forte restrizione è ininfluente nell'ambito del presente lavoro; il criterio di snervamento che ci si propone di estendere al campo delle deformazioni finite, il Cam-clay Modificato (3.28), è infatti definito da una funzione isotropa.

Si osservi che il caso di dissipazione nulla è relativo ad un processo puramente elastico (cfr. par. 2.5).

Se si deriva rispetto al tempo la funzione energia libera, tenendo conto della relazione (4.7), si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}\left(\mathbf{b}^e,\xi\right) &= \frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\cdot\left(\mathbf{l}\mathbf{b}^e+\mathbf{b}^e\mathbf{l}^T+L_v\mathbf{b}^e\right)+\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\xi}\dot{\xi}= \\ &= 2\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e\cdot\left[\mathbf{l}+\frac{1}{2}\left(L_v\mathbf{b}^e\right)\mathbf{b}^{e^{-1}}\right]+\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\xi}\dot{\xi} \qquad (4.14)\end{aligned}$$

Per effetto dell'ipotesi di isotropia, $\mathbf{b}^e$ commuta con $\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)/\partial\mathbf{b}^e$, sicchè la parte antisimmetrica di $\mathbf{l}$, cioè la velocità spaziale di rotazione $\mathbf{w}$, scompare dalla (4.14). Si sostituisce quindi quest'ultima nella (4.13) e si ottiene la seguente disequazione:

$$D=\left(\boldsymbol{\tau}+2\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e\right)\cdot\mathbf{d}+2\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(L_v\mathbf{b}^e\right)\mathbf{b}^{e^{-1}}\right]-\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\xi}\dot{\xi}\geq 0$$

Poichè la precedente è valida per ogni processo ammissibile, si ha (cfr. [21]):

$$\boldsymbol{\tau}=-2\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e \qquad D=\boldsymbol{\tau}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(L_v\mathbf{b}^e\right)\mathbf{b}^{e^{-1}}\right]-i\dot{\xi}\geq 0 \qquad (4.15)$$

dove i è la variabile di incrudimento (una misura di tensione), coniugata di ξ; cioè:

$$i:=\frac{\partial\psi\left(\mathbf{b}^e,\xi\right)}{\partial\xi} \qquad (4.16)$$

La (4.15_1) rappresenta la relazione costitutiva iperelastica fra il tensore di Kirchhoff ed il tensore di Cauchy-Green sinistro. Questa equazione e la (4.16), per effetto della definizione di ψ (4.11), possono essere scritte, rispettivamente, come:

$$\boldsymbol{\tau} = -2\frac{\partial\check{W}\left(\mathbf{b}^e\right)}{\partial\mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e \qquad (4.17)$$

$$i = \frac{\partial H\left(\xi\right)}{\partial\xi} \qquad (4.18)$$

La (4.15_2) è una forma ridotta dell'assioma di evoluzione (4.13) e sarà impiegata, nel seguente paragrafo, per ricavare la forma generale delle equazioni evolutive.

4.3.3 Forma delle equazioni evolutive

Secondo il *Principio di Massima Dissipazione Plastica* [37], in una data configurazione deformata del corpo, con configurazione intermedia e coppia $\left\{L_v\mathbf{b}^e,\dot{\xi}\right\}$ assegnate, l'effettivo stato $(\boldsymbol{\tau},i)\in E_d$ fornisce un massimo della funzione di dissipazione D. Pertanto la disuguaglianza, ottenuta a partire dalla (4.15_2):

$$\left[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\left(L_v\mathbf{b}^e\right)\mathbf{b}^{e^{-1}}\right]+\left[i-i^*\right]\left[-\dot{\xi}\right]\geq 0 \qquad (4.19)$$

vale per ogni coppia ammissibile $(\boldsymbol{\tau}^*, i^*) \in E_d$.

Si prova che la precedente disuguaglianza è verificata se e soltanto se i coefficienti $\left\{\frac{1}{2}\left(L_v\mathbf{b}^e\right)\mathbf{b}^{e^{-1}}, -\dot{\xi}\right\}$ giacciono in un cono normale alla frontiera di E_d nel punto $(\boldsymbol{\tau}, i)$. In particolare, se la frontiera ∂E_d è definita da una funzione di snervamento regolare, si ottengono le *equazioni evolutive*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L_v\mathbf{b}^e &= \dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}\left(\boldsymbol{\tau}, i\right)}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]\mathbf{b}^e \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}\left(\boldsymbol{\tau}, i\right)}{\partial i}\right] \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \qquad \check{f}\left(\boldsymbol{\tau}, i\right) \leq 0 \qquad \dot{\gamma}\check{f}\left(\boldsymbol{\tau}, i\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

I vincoli (4.20_3) sono le condizioni di carico/scarico plastico espresse nella classica forma di *Kuhn-Tucker* [41, 49].

4.3.4 Riduzione allo spazio delle direzioni principali

La trattazione della classe di legami elasto-plastici moltiplicativi qui considerata, può subire una importante semplificazione. La formulazione può essere infatti ridotta allo spazio generato dalla base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ in $\mathbf{x} = \varphi\left(\mathbf{X}\right) \in \mathcal{S}$.

L'isotropia del legame elastico fa coincidere le direzioni principali del tensore di Cauchy-Green sinistro elastico con quelle del tensore degli sforzi di Kirchhoff (cfr. par. 2.6.2). Si richiamano le decomposizioni spettrali di $\mathbf{b}^e$ e di $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^{3} \left(\lambda_A^e\right)^2 \ \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \qquad\qquad \boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^{3} \beta_A \ \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \tag{4.21}$$

Si introduce il *vettore delle tensioni principali di Kirchhoff*:

$$\boldsymbol{\beta} := \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

e vengono definite le *deformazioni logaritmiche principali elastiche* come:

$$\rho_A^e := -\ln \lambda_A^e \qquad A = 1, 2, 3 \tag{4.23}$$

queste sono ordinate nel vettore:

$$\boldsymbol{\rho}^e := \begin{bmatrix} \rho_1^e \\ \rho_2^e \\ \rho_3^e \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

L'ipotesi di isotropia del legame elastico implica che l'energia di deformazione può essere espressa in funzione degli allungamenti principali elastici e quindi dei loro logaritmi (cfr. par. 2.6.2). In altre parole, esiste una funzione $\hat{W} : \mathcal{V} \to R$ tale che

$\check{W}(\mathbf{b}^e) = \hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$. Utilizzando l'equazione (4.17) e le definizioni di $\boldsymbol{\rho}^e$ (4.24) e di $\boldsymbol{\beta}$ (4.22), si perviene facilmente alla seguente relazione costitutiva iperelastica:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \tag{4.25}$$

L'ipotesi di isotropia della funzione di snervamento implica l'esistenza di una funzione $\hat{f} : \mathcal{V} \times R \to R$ tale che $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)$. Dopo facili passaggi si perviene alla seguente decomposizione spettrale:

$$\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \sum_{A=1}^{3} \left[\frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \tag{4.26}$$

relazione che si rivelerà utile per la formulazione del criterio di flusso del modello.

4.4 Cam-clay Modificato in deformazioni finite

La formulazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite, sviluppato nell'ambito della classe di modelli elasto-plastici moltiplicativi finora discussa, è esposta nei seguenti paragrafi.

Preliminari cinematici.

Il vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche $\boldsymbol{\rho}^e$ può essere decomposto, coerentemente con quanto richiamato nel par. 2.2.1, nella seguente maniera:

$$\boldsymbol{\rho}^e = \frac{1}{3}\breve{\theta}^e \, \mathbf{1} + \mathbf{e}^e \qquad \text{con} \qquad \mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

dove:

$$\breve{\theta}^e := -\ln J^e = -\ln(\lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e) \tag{4.28}$$

è la *deformazione volumetrica logaritmica elastica,* mentre*:*

$$\mathbf{e}^e := \begin{bmatrix} e_1^e \\ e_2^e \\ e_3^e \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad e_A^e := -\ln\left(J^{e^{-\frac{1}{3}}} \lambda_A^e\right) \tag{4.29}$$

sarà indicato come *vettore delle distorsioni logaritmiche principali*; si osservi, infatti, che le quantità $\bar{\lambda}_A^{e^2} := \left(J^{e^{-1/3}} \lambda_A^e\right)^2$ sono gli autovalori delle parti isocore dei tensori di deformazione di Cauchy-Green sinistro $\bar{\mathbf{b}}^e := J^{e^{-2/3}} \mathbf{b}^e$ e destro $\bar{\mathbf{C}}^e = J^{e^{-2/3}} \mathbf{C}^e$ (cfr. par. 2.2.1).

La formula di decomposizione moltiplicativa (4.1) implica $J = J^e J^p$, dove $J^p := \det[\mathbf{F}^p]$. Quindi, definendo la deformazione volumetrica logaritmica totale come[5]:

$$\theta := -\ln J \tag{4.30}$$

si ottiene:

$$\theta = \breve{\theta}^e + \breve{\theta}^p \tag{4.31}$$

dove:

$$\breve{\theta}^p := -\ln J^p \tag{4.32}$$

è la parte plastica della deformazione volumetrica logaritmica.

4.4.1 Legame elastico

Si assume che la densità di energia di deformazione elastica sia fornita dalla seguente funzione isotropa:

$$\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e) := p_0 \breve{k} \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) + \alpha p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) \|\mathbf{e}^e\|^2 \tag{4.33}$$

dove α e $\breve{k}$ sono due costanti adimensionali positive (discusse nel par. 4.5.3) e la quantità p_0, come si vedrà più avanti, viene determinata specificando le condizioni iniziali. La funzione (4.33) costituisce un'estensione al campo delle deformazioni finite del potenziale elastico proposto da Houlsby in [38]. Secondo la (4.25), il vettore delle tensioni principali di Kirchhoff si ottiene differenziando la (4.33):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &:= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \breve{\theta}^e}\frac{\partial \breve{\theta}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e}\right)^T \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} = \\ &= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \breve{\theta}^e}\mathbf{1} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)\frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} \end{aligned} \tag{4.34}$$

In particolare si ha:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \breve{\theta}^e} = p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) + \frac{\alpha}{\breve{k}} p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) \|\mathbf{e}^e\|^2 \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) \mathbf{e}^e \tag{4.36}$$

Sostituendo le (4.35-4.36) nella (4.34), si ottiene:

$$\boldsymbol{\beta} = p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\breve{k}}\|\mathbf{e}^e\|^2\right)\mathbf{1} + 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\mathbf{e}^e \tag{4.37}$$

[5]Come verrà mostrato nel par. 4.5.1, questa definizione di θ coincide con quella espressa dalla (3.22).

Questo vettore può essere espresso nella forma:

$$\boldsymbol{\beta} = \breve{p}\,\mathbf{1} + \mathbf{t} \tag{4.38}$$

dove:

$$\breve{p} = p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\breve{k}}\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2\right) \tag{4.39}$$

$$\mathbf{t} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\mathbf{e}^e \tag{4.40}$$

Utilizzando la definizione di $\boldsymbol{\beta}$ e la sua decomposizione (4.38), è facile verificare che:

$$\breve{p} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \tag{4.41}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_3 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

dove i $\bar{\beta}_A$ sono gli autovalori di $\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\tau}\right)$. E' quindi $\breve{p}$ la *tensione media di Kirchhoff*; mentre $\mathbf{t}$ sarà indicato come il *vettore delle tensioni deviatoriche principali di Kirchhoff.* Si osserva che:

$$\left\|\mathbf{t}\right\| = \left\|\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\right\| \tag{4.43}$$

inoltre, dalla definizione dello sforzo di Kirchhoff (2.59), si ricavano le seguenti relazioni fra gli invarianti di $\boldsymbol{\tau}$ e quelli di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\breve{p} = Jp \tag{4.44}$$

$$\left\|\mathbf{t}\right\| = J\left\|\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\right\| \tag{4.45}$$

Ponendo adesso, nell'equazione costitutiva (4.39), $\breve{\theta}^e = 0$ ed $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$, si ottiene $\breve{p} = p_0$; quindi, p_0 è il valore *iniziale* della tensione media. Ovviamente, essendo $J = 1$ nella configurazione di riferimento, la (4.44) implica che i due valori iniziali di tensione media, di Kirchhoff e di Cauchy, coincidono.

Le relazioni costitutive (4.39-4.40) implicano l'esistenza di accoppiamento volumetrico - deviatorico in campo elastico. Al fine di valutare gli effetti di questo accoppiamento sulla rigidezza elastica, sia a taglio sia volumetrica, dalla relazione costitutiva (4.39) si ricavi la quantità:

$$p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) = \frac{\breve{k}}{\breve{k} + \alpha\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2}\breve{p} \tag{4.46}$$

e la si sostituisca nella relazione costitutiva (4.40); si ottiene:

$$\left\|\mathbf{t}\right\| = \frac{2\alpha\breve{k}\left\|\mathbf{e}^e\right\|}{\breve{k} + \alpha\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2}\breve{p} \tag{4.47}$$

Si espliciti, inoltre, la quantità $\|\mathbf{e}^e\|$ nella (4.40):

$$\|\mathbf{e}^e\| = \frac{\|\mathbf{t}\|}{2\alpha p_0} \exp\left(-\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) \tag{4.48}$$

e la si sostituisca nella (4.39); si ha:

$$\breve{p} = p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\left[1 + \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{4\alpha\breve{k}p_0^2}\exp\left(-2\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right)\right] \tag{4.49}$$

In Fig. 4.2a, sono riportati, in un diagramma $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$, i grafici della (4.47) corrispondenti a percorsi tensionali in cui la tensione media di Kirchhoff viene mantenuta costante ($\breve{p} = 50$, $\breve{p} = 100$ e $\breve{p} = 150$ kPa). E' evidente come la rigidezza elastica a taglio cresca con $\breve{p}$. Questo risultato viene quindi ottenuto, diversamente dal caso di altre formulazioni (cfr. par. 3.5), nell'ambito di un legame iperelastico.

I grafici della (4.49), tracciati sul diagramma $\breve{p} - \breve{\theta}^e$ di Fig. 4.2b, sono invece corrispondenti a percorsi in cui è la misura di tensione deviatorica $\|\mathbf{t}\|$ ad essere mantenuta costante ($\|\mathbf{t}\| = 0$, $\|\mathbf{t}\| = 100$ e $\|\mathbf{t}\| = 150$ kPa). Questi ultimi grafici mostrano che l'influenza di $\|\mathbf{t}\|$ sulla rigidezza volumetrica è modesta; al crescere della deformazione $\breve{\theta}^e$, infatti, il secondo addendo della (4.49) decresce, e le curve tendono a coincidere. Nei diagrammi di Fig. 4.2 si è posto $\breve{k} = 0.05$, $\alpha = 100$ e $p_0 = 100$ kPa.

Infine, si osservi che l'energia di deformazione $\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$ espressa dalla (4.33) soddisfa la condizione:

$$\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\rho}^e \in \mathcal{V}$$

se e solo se sono positive la tensione media iniziale p_0 e le costanti del materiale α e $\breve{k}$.

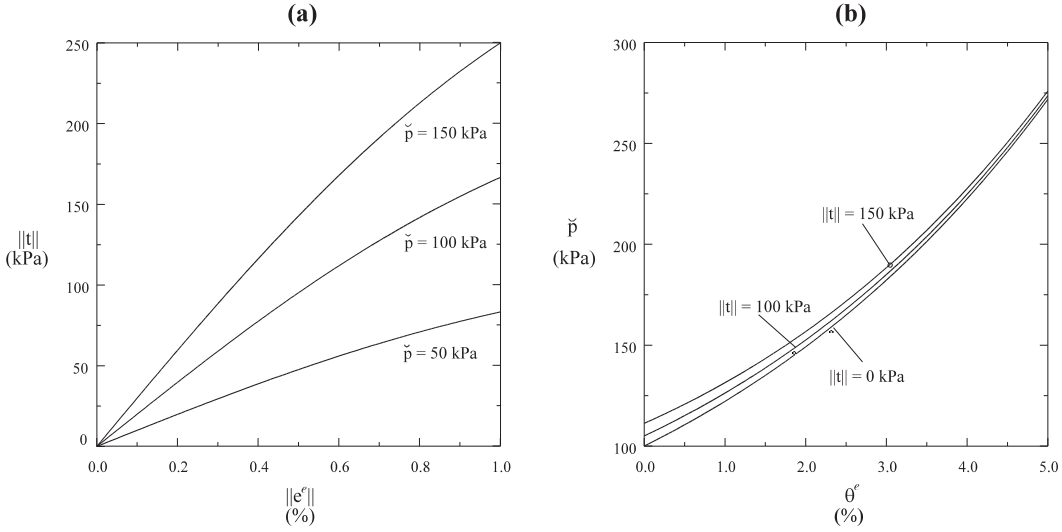


Figura 4.2: Legame elastico. Influenza della tensione media $\breve{p}$ sulla rigidezza a taglio (a) e della tensione deviatorica $\|\mathbf{t}\|$ sulla rigidezza volumetrica (b)

4.4.2 Criterio di snervamento

Il dominio di elasticità è individuato dalla seguente funzione convessa ed isotropa definita sulla configurazione corrente:

$$\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right) = \frac{\breve{q}^2}{M^2} + \breve{p}\left(\breve{p} - \breve{p}_c\right) = 0 \tag{4.50}$$

Si tratta di un'estensione al campo delle deformazioni finite del criterio di snervamento del Cam-clay Modificato, ottenuta sostituendo nella (3.28) gli invarianti dello sforzo di Cauchy con quelli del tensore di Kirchhoff; in particolare è:

$$\breve{q} := \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \mathbf{t} \right\| \tag{4.51}$$

e quindi:

$$\breve{q} = Jq \tag{4.52}$$

la pressione di preconsolidazione $\breve{p}_c$ è la variabile tensionale di incrudimento ($i = \breve{p}_c$). Si noti che la pendenza M della retta di stato critico nel piano $q - p$, coincide con quella che caratterizza la stessa retta nel piano $\breve{q} - \breve{p}$; infatti le (4.44, 4.52) implicano:

$$\frac{q}{p} = \frac{\breve{q}}{\breve{p}} \tag{4.53}$$

4.4.3 Legge di flusso

La legge di flusso del modello considerato si ricava a partire dall'equazione evolutiva (4.20_1). In questa si sostituisce la (4.26), in modo da ottenere:

$$\frac{1}{2} L_v \mathbf{b}^e = \dot{\gamma} \left[\sum_{A=1}^{3} \left(\frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \right] \mathbf{b}^e \tag{4.54}$$

Considerando l'espressione (4.38), la derivata della funzione di snervamento rispetto al vettore delle tensioni principali può essere calcolata come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}} \frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)^T \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}} \mathbf{1} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \end{aligned} \tag{4.55}$$

in particolare, dato che:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}} = 2\breve{p} - \breve{p}_c \qquad\qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \tag{4.56}$$

attraverso la (4.55), si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[\frac{1}{3} \left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right) \mathbf{1} + \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \right] \tag{4.57}$$

la cui sostituzione nella (4.54) fornisce la legge di flusso cercata:

$$\frac{1}{2}L_v\mathbf{b}^e = \dot{\gamma}\left[\sum_{A=1}^{3}\left(\frac{1}{3}\left(2\breve{p}-\breve{p}_c\right)+\frac{3}{M^2}t_A\right)\mathbf{n}_A\otimes\mathbf{n}_A\right]\mathbf{b}^e \tag{4.58}$$

4.4.4 Legge di incrudimento

La componente volumetrica della deformazione logaritmica plastica è la variabile di incrudimento ($\xi = \breve{\theta}^p$). Si assume che il suo contributo energetico nella (4.11) sia dato dalla funzione:

$$H\left(\breve{\theta}^p\right) = \breve{p}_{c0}\left(\breve{\lambda}-\breve{k}\right)\exp\left(\frac{1}{\breve{\lambda}-\breve{k}}\breve{\theta}^p\right) \tag{4.59}$$

Richiamando la (4.18), si ha*:*

$$\breve{p}_c = \frac{\partial H\left(\breve{\theta}^p\right)}{\partial\breve{\theta}^p} \tag{4.60}$$

e, quindi, la seguente legge di incrudimento:

$$\breve{p}_c = \breve{p}_{c0}\exp\left(\frac{1}{\breve{\lambda}-\breve{k}}\breve{\theta}^p\right) \tag{4.61}$$

Osservazione 4.4.1

Si può verificare che l'evoluzione di $\breve{\theta}^p$ prescritta dalla legge di flusso associata (4.58) è diversa da quella implicata dall'equazione (4.20_2), cioè:

$$\dot{\breve{\theta}}^p \neq -\dot{\gamma}\left[\frac{\partial\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta},p_c\right)}{\partial p_c}\right] \tag{4.62}$$

La legge di incrudimento è quindi "non-associata".

4.5 Studio del modello

Nel seguito si procede allo studio del legame elasto-plastico proposto. Le sue principali implicazioni vengono discusse e confrontate con quelle relative alle formulazioni richiamate nel Cap. 3.

4.5.1 Relazioni $\breve{p}-v$ in compressione isotropa

Come si è richiamato nel par. 2.2.1, $J := \det\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right]$ fornisce la misura del volume corrente per unità di volume nella configurazione di riferimento; se si considera la definizione di volume specifico data nel par. 3.2, si può scrivere:

$$J = \frac{vV_s}{v_0V_{s0}} \tag{4.63}$$

dove V_s è il volume della fase solida misurato nella configurazione corrente, V_{s0} è il volume della stessa fase nella configurazione di riferimento e v_0 è il volume specifico iniziale. Se si ipotizza che la comprimibilità della fase solida sia trascurabile[6] (cfr. par. 3.2), si ha $V_s = V_{s0}$ e quindi:

$$J = \frac{v}{v_0} \tag{4.64}$$

Pertanto, dalla (4.30) e dalla (4.64), si ha:

$$\theta = -\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \tag{4.65}$$

quest'ultima, per effetto della decomposizione (4.31), implica:

$$\breve{\theta}^e = -\ln\left(\frac{v}{\breve{v}_p}\right) \qquad\qquad \breve{\theta}^p = -\ln\left(\frac{\breve{v}_p}{v_0}\right) \tag{4.66}$$

Come si mostrerà tra poco, il significato del termine $\breve{v}_p$ che compare nelle due precedenti relazioni cinematiche, è analogo a quello enunciato a proposito di v_p (cfr. par. 3.3).

La relazione costitutiva per compressione isotropa in *campo elastico*, si ricava ponendo $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$ nella (4.39):

$$\breve{p} = p_0 \exp\left(\frac{\breve{\theta}^e}{\breve{k}}\right) \tag{4.67}$$

se si sostituisce in questa la (4.66_1), si ottiene la seguente relazione pressione-volume per argille *sovraconsolidate*:

$$\ln\left(\frac{v}{\breve{v}_p}\right) = -\breve{k}\ln\left(\frac{\breve{p}}{p_0}\right) \tag{4.68}$$

Si osserva che $\breve{v}_p$ è il volume a cui si perviene scaricando, a partire dalla configurazione corrente, fino al valore di pressione iniziale. Pertanto, $\breve{v}_p$ è la misura del volume specifico nella configurazione intermedia.

La relazione costitutiva per compressione isotropa in *campo elasto-plastico* è fornita dalla legge di incrudimento (4.61); se si sostituisce in questa la (4.66_2), si ottiene:

$$\ln\left(\frac{\breve{v}_p}{v_0}\right) + \left(\breve{\lambda} - \breve{k}\right)\ln\left(\frac{\breve{p}_c}{\breve{p}_{c0}}\right) = 0 \tag{4.69}$$

Inoltre, indicando con v_c e v_{c0} i valori di volume specifico rispettivamente corrispondenti a $\breve{p}_c$ ed a $\breve{p}_{c0}$, è facile verificare la validità della seguente equazione (Fig. 4.3):

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = \ln\left(\frac{\breve{v}_p}{v_0}\right) - \breve{k}\ln\left(\frac{\breve{p}_c}{\breve{p}_{c0}}\right) \tag{4.70}$$

[6]Si osservi che questa ipotesi non è assolutamente necessaria nella formulazione del modello. Comunque, nella maggior parte dei casi, si osserva sperimentalmente che le deformazioni volumetriche delle argille sono dovute solo in minima parte al contributo della fase solida. Per questo motivo v è la misura volumetrica più impiegata, soprattutto in ambito sperimentale. A causa di queste considerazioni, nel presente lavoro si è scelto di fare riferimento al volume specifico.

dalla sostituzione di questa nella (4.69) si ricava la seguente relazione pressione-volume per argille *normal-consolidate*:

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\breve{\lambda}\ln\left(\frac{\breve{p}_c}{\breve{p}_{c0}}\right) \tag{4.71}$$

Pertanto il legame elasto-plastico considerato implica, in compressione isotropa, relazioni lineari di tipo $\ln v - \ln p$. Queste relazioni bi-logaritmiche non conducono agli inconvenienti causati dall'impiego di relazioni lineari $v - \ln p$ (cfr. par. 3.3 e par. 3.5). Ad esempio, secondo le (4.68-4.71), la deformabilità dell'argilla è indipendente dal volume specifico, sia in campo elastico sia in campo elasto-plastico.

Inoltre, queste relazioni sono qui utilizzate nell'ambito di una formulazione in deformazioni finite; questa scelta è l'unica coerente con le motivazioni, basate a loro volta su dati sperimentali [13], che ne giustificano l'impiego al posto delle classiche relazioni $v - \ln p$ (cfr. par. 3.6).

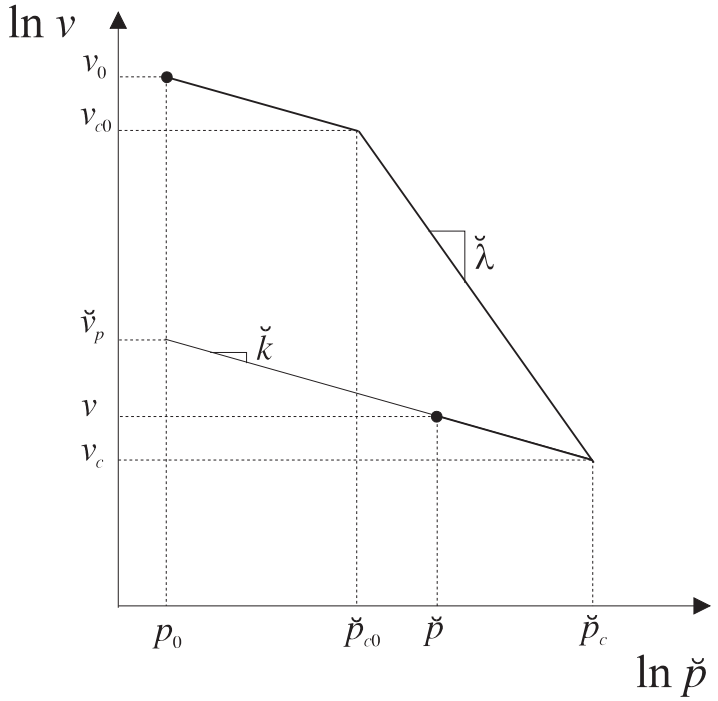


Figura 4.3: Relazione bilogaritmica fra pressione di Kirchhoff e volume specifico

Soluzione del problema di classificazione

Con riferimento al legame elastico del modello, si affronta, adesso, la soluzione del problema di classificazione relativo al comportamento in compressione isotropa. Operazione, questa, che si rivelerà utile nel prosieguo del capitolo.

La relazione bi-logaritmica (3.33) fra pressione di Cauchy e volume specifico:

$$\ln\left(\frac{v}{v_p}\right) = -k^*\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{4.72}$$

può essere scritta nella forma:

$$pv^{1/k^*} = p_0 v_p^{1/k^*} \tag{4.73}$$

che, come è noto, caratterizza le trasformazioni adiabatiche nei gas. Si mostrerà adesso che questa circostanza non è soltanto un'analogia formale [13], ma la soluzione di un problema di classificazione (cfr. par. 2.6.1).

Si richiami la decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione elastico nelle sue parti volumetrica e distorsionale (cfr. par. 2.2.1):

$$\mathbf{F}^e = J^{e\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}^e \qquad \text{dove:} \quad \det\left[\bar{\mathbf{F}}^e\right] = 1 \tag{4.74}$$

se si pone:

$$\hat{w}_v\left(J^e, \bar{\mathbf{F}}^e\right) := W\left(J^e \bar{\mathbf{F}}^e\right) \tag{4.75}$$

si può definire la *sottoenergia volumetrica* come:

$$w_v\left(J^e\right) := \inf\left[\hat{w}_v\left(J^e, \bar{\mathbf{F}}^e\right)\right]_{\det\left[\bar{\mathbf{F}}^e\right]=1} \tag{4.76}$$

Si ricorda che un materiale con una densità di energia di deformazione del tipo $W\left(\mathbf{F}^e\right) = h\left(J^e\right)$ è classificato come un *fluido*; all'interno dei fluidi, la distinzione tra *liquidi* e *gas* può essere fatta analizzando il comportamento del fluido sotto *deformazioni estreme* [65].

Si consideri allora l'espressione (4.33) della densità di energia di deformazione elastica. E' facile verificare che la sottoenergia volumetrica si ottiene ponendo $\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{I}$, cioè $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$ in $\hat{W}\left(\boldsymbol{\rho}^e\right)$; in termini di J^e si ha:

$$w_v\left(J^e\right) = p_0 \breve{k}\, J^{e^{-1/\breve{k}}} \tag{4.77}$$

Nel caso di deformazioni estreme si osserva:

$$\begin{array}{lllll} J^e & \to & 0 \quad (\theta^e \to \infty) & \Rightarrow & w_v\left(J^e\right) \to \infty \\ J^e & \to & \infty \quad (\theta^e \to -\infty) & \Rightarrow & w_v\left(J^e\right) \to 0 \end{array} \tag{4.78}$$

quest'ultimo risultato, cioè che l'energia si annulla se si espande indefinitamente il materiale, è la condizione per classificare come *gas* un fluido. Si ha quindi che il comportamento costitutivo elastico *in compressione isotropa* descritto dalla (4.33), e quindi, in generale, da relazioni lineari $\ln v - \ln p$, è quello caratteristico di un gas.

Questo aspetto della relazione impiegata per descrivere la risposta isotropa delle argille ha un'altra interessante conseguenza; si ha infatti:

$$w_v\left(1\right) = p_0 \breve{k} > 0 \tag{4.79}$$

cioè per deformazioni volumetriche nulle ($J^e = 1, \theta^e = 0$), il corrispondente contributo energetico è diverso da zero.

Confronto con le relazioni bi-logaritmiche in termini di pressioni di Cauchy

Si richiamino le equazioni bi-logaritmiche in termini di pressioni di Cauchy (3.33-3.34):

$$\ln\left(\frac{v}{v_p}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elastico} \tag{4.80}$$

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \tag{4.81}$$

E' di particolare importanza il confronto fra queste relazioni e le analoghe (4.68, 4.71) espresse in termini di pressioni di Kirchhoff ed utilizzate nel modello in deformazioni finite qui proposto:

$$\ln\left(\frac{v}{\breve{v}_p}\right) = -\breve{k} \ln\left(\frac{\breve{p}}{p_0}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elastico} \tag{4.82}$$

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\breve{\lambda} \ln\left(\frac{\breve{p}_c}{\breve{p}_{c0}}\right) \qquad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \tag{4.83}$$

Si consideri, ad esempio, un campione inizialmente normal-consolidato ($p_0 = p_{c0}$) e lo si comprima isotropicamente (Fig. 4.4). La sua risposta, secondo la relazione (4.81), è:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{4.84}$$

mentre in termini di pressioni di Kirchhoff, la (4.83) fornisce:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\breve{\lambda} \ln\left(\frac{\breve{p}}{p_0}\right) \tag{4.85}$$

Si sostituisca $\breve{p} = Jp$ in quest'ultima relazione; si ottiene:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) &= -\breve{\lambda} \ln\left(\frac{Jp}{p_0}\right) = \\ &= -\breve{\lambda} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - \breve{\lambda} \ln J \end{aligned} \tag{4.86}$$

e quindi, essendo $J = v/v_0$ (cfr. par. 4.5.1), si ha:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\breve{\lambda}}{1+\breve{\lambda}} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{4.87}$$

Dal confronto fra questa relazione e la (4.84), si ricava:

$$\lambda^* = \frac{\breve{\lambda}}{1+\breve{\lambda}} \tag{4.88}$$

Procedendo in modo analogo, con riferimento alla compressione isotropa di un campione inizialmente sovraconsolidato ($p_0 < p_{c0}$), si prova che:

$$k^* = \frac{\breve{k}}{1+\breve{k}} \tag{4.89}$$

Quindi, i parametri del modello $\breve{k}$ e $\breve{\lambda}$ possono essere ricavati da k^* e λ^* per mezzo delle relazioni:

$$\breve{k} = \frac{k^*}{1-k^*} \qquad\qquad \breve{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1-\lambda^*} \tag{4.90}$$

Si osservi che per i valori di k^* e λ^* fisicamente possibili ($k^*, \lambda^* \in]0;1[$), si ha $\breve{k} > k^*$ e $\breve{\lambda} > \lambda^*$ (Fig. 4.4).

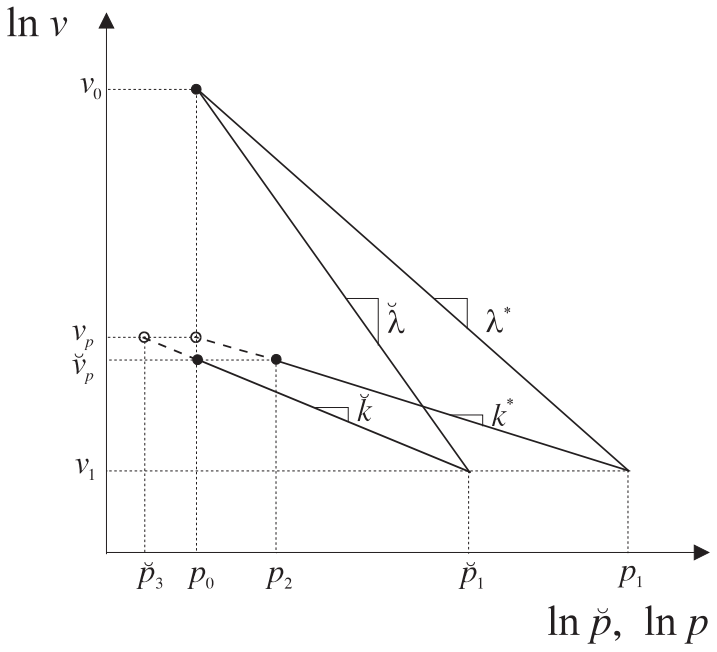


Figura 4.4: Relazioni pressione-volume in termini di sforzi di Kirchhoff e di Cauchy

Si supponga, adesso, di comprimere un campione, inizialmente normal-consolidato ($p_0 = \breve{p}_{c0}$), fino ad un valore di pressione di Kirchhoff $\breve{p}_1$; quindi lo si scarichi fino al valore di pressione iniziale $\breve{p}_2 = p_0$. In Fig. 4.4, il grafico $\ln \breve{p} - \ln v$ relativo a questo percorso di carico è riportato insieme a quello corrispondente in termini di pressioni di Cauchy. Si osserva che quando la pressione di Kirchhoff viene scaricata fino al valore iniziale p_0, lo stesso non si verifica per la pressione di Cauchy; infatti risulta:

$$p_2 = J^{p^{-1}} \breve{p}_2 = J^{p^{-1}} p_0 = \frac{\breve{v}_p}{v_0} p_0 \tag{4.91}$$

Affinchè la pressione di Cauchy recuperi il valore iniziale p_0, è necessario scaricare ulteriormente. In termini di pressione di Kirchhoff, come si ricava dalla (4.82), si perviene al valore:

$$\breve{p}_3 = p_0 \left(\frac{\breve{v}_p}{v_p} \right)^{1/\breve{k}} \tag{4.92}$$

Si noti che il risultato più importante di queste considerazioni è:

$$\breve{v}_p \neq v_p \tag{4.93}$$

tale differenza cresce al crescere della deformazione plastica.

Quindi, relativamente alle sole misure di volume, la configurazione intermedia "secondo Kirchhoff" non coincide con quella "secondo Cauchy". Tale circostanza è conseguente all'aver assunto una pressione iniziale p_0 non nulla. Questa ipotesi è necessaria non solo nel modello qui proposto, ma in ogni legame che fornisca la soluzione "gas-like" (4.78_2) del problema di classificazione discusso nel precedente paragrafo. Inoltre, la possibilità di attribuire alla configurazione iniziale uno stato tensionale non nullo è in generale lecita.

Inoltre, se si richiamano rispettivamente le (3.36) e le (4.66):

$$\theta^e = -\ln\frac{v}{v_p} \qquad \theta^p = -\ln\frac{v_p}{v_0} \tag{4.94}$$

$$\breve{\theta}^e = -\ln\frac{v}{\breve{v}_p} \qquad \breve{\theta}^p = -\ln\frac{\breve{v}_p}{v_0} \tag{4.95}$$

si osserva che la (4.93) implica:

$$\theta^e \neq \breve{\theta}^e \qquad \theta^p \neq \breve{\theta}^p$$

Si ha quindi, con riferimento alle deformazioni volumetriche, che la decomposizione elasto-plastica utilizzata dalle equazioni costitutive in termini di pressioni di Kirchhoff (4.82, 4.83) non coincide, in generale, con quella introdotta con le relazioni espresse in funzione dello sforzo di Cauchy (4.80, 4.81). Le deformazioni volumetriche *totali* coincidono ($\theta = \breve{\theta}$), è la loro decomposizione ad essere diversa.

Si osservi che considerazioni del tutto simili a quelle fatte in questo paragrafo possono essere, in generale, estese a qualsiasi modello elasto-plastico moltiplicativo le cui equazioni siano espresse in termini di tensore di Kirchhoff. Infatti, in modelli di questo tipo, circostanze analoghe a quelle prima discusse si verificano se si considera un processo deformativo a partire da una configurazione il cui stato tensionale non è nullo.

Al fine di valutare la relazione esistente fra le due misure di volume specifico $\breve{v}_p$ e v_p, si sostituisca $\breve{p}_3 = J_3 p_0$ nella (4.92); poichè risulta (Fig. 4.4):

$$J_3 = \frac{v_p}{v_0} \tag{4.96}$$

si ottiene:

$$\breve{v}_p = \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^{\breve{k}} v_p \tag{4.97}$$

Da questa è facile ricavare, utilizzando la (4.94_2) e la (4.95_2), la relazione esistente fra le due componenti di deformazione volumetrica plastica:

$$\theta^p = \frac{1}{1+\breve{k}}\breve{\theta}^p \tag{4.98}$$

La sua analoga fra le componenti di deformazione elastica, può essere ottenuta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}\theta^e &= \theta - \theta^p = \breve{\theta}^e + \breve{\theta}^p - \theta^p = \\ &= \breve{\theta}^e + \breve{\theta}^p - \frac{1}{1+\breve{k}}\breve{\theta}^p\end{aligned} \tag{4.99}$$

Si ha quindi:

$$\theta^e = \breve{\theta}^e + \frac{\breve{k}}{1+\breve{k}}\breve{\theta}^p \tag{4.100}$$

Si può infine, relativamente ai materiali qui considerati, dare una stima approssimata dello scostamento fra le due decomposizioni. Se si considera che il parametro $\breve{k}$ è normalmente compreso fra 0.01 e 0.1, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\theta^p}{\breve{\theta}^p} &= 0.9090 \div 0.9901 \\ \frac{\theta^e}{\breve{\theta}^e} &= 1 + 0.0099\,\breve{\theta}^p \div 1 + 0.0909\,\breve{\theta}^p \end{aligned}$$

se, ad esempio, la deformazione volumetrica plastica è pari al 30% si ha:

$$\frac{\theta^e}{\breve{\theta}^e} = 1.0030 \div 1.0273$$

Nel seguito del presente lavoro si farà sempre riferimento alla decomposizione (4.31):

$$\theta = \breve{\theta}^e + \breve{\theta}^p \tag{4.101}$$

pertanto, per semplificare la notazione, il simbolo " $\breve{}$ " in $\breve{\theta}^e$ ed in $\breve{\theta}^p$ sarà sottinteso.

4.5.2 Relazione costitutiva incrementale elastica

Si consideri il tensore del secondo ordine che lega gli incrementi $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ del vettore delle tensioni principali agli incrementi $\dot{\boldsymbol{\rho}}^e$ del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche:

$$\mathbf{a}^e := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \tag{4.102}$$

le derivate che compaiono al secondo membro della precedente equazione possono essere calcolate come:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^e}\frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e}\right)^T \frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^e} \tag{4.103}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^e} \otimes \frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^e}\frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \tag{4.104}$$

inoltre si ha:

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{1} \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{4.105}$$

E' quindi necessario derivare entrambe le relazioni che esprimono il legame iperelastico (4.39-4.40) sia rispetto alla componente volumetrica di deformazione θ^e che rispetto al

vettore delle distorsioni $\mathbf{e}^e$:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^e} = \frac{\breve{p}}{\breve{k}} \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^e} = \frac{\mathbf{t}}{\breve{k}} \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^e} = \frac{\mathbf{t}}{\breve{k}} \tag{4.108}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^e} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right)\mathbf{I} \tag{4.109}$$

Si pone:

$$g = p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right)$$

e si sostituiscono le quattro equazioni (4.106-4.109) nelle (4.103-4.104); si ottiene:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{1}{\breve{k}}\left(\breve{p}\mathbf{1} + \mathbf{t}\right) \tag{4.110}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{1}{\breve{k}}\,\mathbf{t}\otimes\mathbf{1} + 2\alpha g\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right) \tag{4.111}$$

queste equazioni vengono a loro volta sostituite nella (4.102), unitamente alle (4.105); si ricava l'espressione del tensore elastico tangente :

$$\mathbf{a}^e = \frac{\breve{p}}{\breve{k}}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\alpha g\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right) + \frac{1}{\breve{k}}\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t} + \mathbf{t}\otimes\mathbf{1}\right) \tag{4.112}$$

in componenti:

$$a^e_{AB} = \frac{\breve{p}}{\breve{k}} - \frac{2\alpha g}{3} + 2\alpha g\,\delta_{AB} + \frac{1}{\breve{k}}\left(t_A + t_B\right) \tag{4.113}$$

dove δ_{AB} è il simbolo di Kronecker.

Si noti che, a causa dell'accoppiamento volumetrico-deviatorico, la forma della (4.112) differisce da quella di un tensore di elasticità del tipo di Lamè per la presenza del terzo addendo.

Si osserva che il tensore elastico tangente $\mathbf{a}^e$ espresso dalla (4.112) non risulta definito positivo; cioè:

$$\exists\, \boldsymbol{\rho}^e \in \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{a}^e\dot{\boldsymbol{\rho}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \leq 0 \tag{4.114}$$

In particolare, è facile verificare che la disequazione:

$$\det\left[\mathbf{a}^e\right] \leq 0 \tag{4.115}$$

risulta soddisfatta per:

$$\breve{k} - \alpha\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2 \leq 0 \tag{4.116}$$

e quindi:

$$\|\mathbf{e}^e\| \geq \left(\frac{\breve{k}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.117}$$

quest'ultima rappresenta la condizione su $\boldsymbol{\rho}^e$ per la verifica della (4.114).

Gli effetti della (4.114) sono mostrati in Fig. 4.5, dove è riportato, in un diagramma $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$, il grafico della (4.47):

$$\|\mathbf{t}\| = \frac{2\alpha\breve{k}\,\|\mathbf{e}^e\|}{\breve{k} + \alpha\,\|\mathbf{e}^e\|^2}\breve{p} \tag{4.118}$$

Questa curva corrisponde ad un percorso a pressione costante ($\breve{p} = 100$ kPa); in particolare si è posto $\breve{k} = 0.05$, $\alpha = 100$. Si osserva che quando la componente di deformazione a taglio raggiunge il valore:

$$\|\mathbf{e}^e\| = \left(\frac{\breve{k}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 0.022$$

la tangente alla curva sforzo-deformazione $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$ cambia di segno.

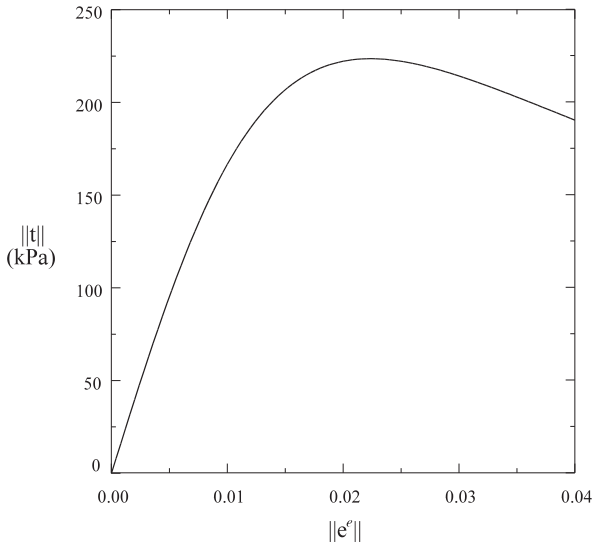


Figura 4.5: Legame elastico. Inversione di segno del modulo tangente

Poichè un comportamento del genere non è realistico in campo elastico, è importante valutare, in termini di tensioni, la condizione equivalente alla (4.117); questa relazione permetterà di individuare in modo più chiaro i limiti di applicabilità del modello. Si sostituisca, quindi, la (4.117) nella (4.118); se ne ricava:

$$\|\mathbf{t}\| = \left(\alpha\breve{k}\right)^{\frac{1}{2}}\breve{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^e\dot{\boldsymbol{\rho}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \leq 0 \tag{4.119}$$

Se risulta $\|\mathbf{t}\| = \left(\alpha\breve{k}\right)^{\frac{1}{2}} \breve{p}$, ad ogni incremento di deformazione elastica $\dot{\boldsymbol{\rho}}^e > 0$ corrisponde un incremento di tensione $\dot{\boldsymbol{\beta}} < 0$; si ha quindi che $\|\mathbf{t}\| = \left(\alpha\breve{k}\right)^{\frac{1}{2}} \breve{p}$ è il *massimo* valore di tensione deviatorica raggiungibile, come è osservato da Houlsby in [38]. In termini di $\breve{q}$ si ha:

$$\breve{q} = \left(\frac{3\alpha\breve{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \breve{p} \tag{4.120}$$

Se si considerano i valori dei parametri che normalmente caratterizzano le argille tenere, la retta fornita dalla precedente relazione si trova al di sopra della linea di stato critico; questa zona è di reale interesse solo nell'ambito della modellazione delle argille consistenti. Inoltre, in questa parte del piano $p - \breve{q}$ anche il criterio di snervamento del Cam-clay Modificato prevede una risposta poco realistica (cfr. par. 3.5).

In Fig. 4.6, la retta fornita dalla (4.120) è tracciata su un piano $p - \breve{q}$, insieme alla linea di stato critico ed alla curva di snervamento (4.50); nel rappresentare questi grafici si è assunto $\alpha = 100$, $\breve{k} = 0.05$ ed $M = 0.9$.

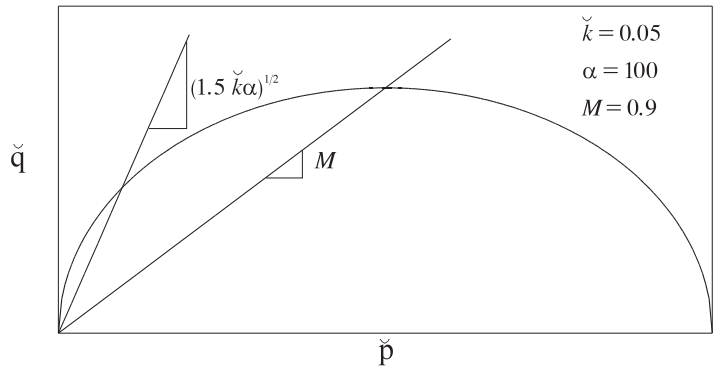


Figura 4.6: Legame elastico. Retta di massima tensione deviatorica

4.5.3 I parametri del modello

L'impiego del modello Cam-clay in deformazioni finite richiede la determinazione di quattro parametri adimensionali:

1. la costante elastica α;
2. l'indice di rigonfiamento $\breve{k}$;
3. l'indice di compressione vergine $\breve{\lambda}$;
4. la pendenza della linea di stato critico M.

Dal confronto con le formulazioni del Cam-clay e del Cam-clay Modificato (cfr. par. 3.4), si osserva che nonostante l'introduzione di α, necessaria alla modellazione della

rigidezza elastica a taglio, il numero dei parametri non è aumentato. Infatti, a causa dell'impiego di relazioni lineari $\ln v - \ln p$ al posto di quelle $v - \ln p$, il volume specifico iniziale v_0 non è più una costante del modello.

I quattro parametri utilizzati nel modello sono brevemente discussi nel seguito.

Costante elastica α

Normalmente, la comprimibilità dell'acqua presente nei pori dell'argilla può essere trascurata, come quella della fase solida. Con queste ipotesi, se l'argilla è satura, le deformazioni volumetriche in condizioni non drenate (cfr. par. 3.2) sono nulle ($\theta = 0$) e le equazioni costitutive elastiche (4.39-4.40) possono essere riscritte come:

$$\breve{p} = p_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\breve{k}} \left\|\mathbf{e}^e\right\|^2\right) \qquad \|\mathbf{t}\| = 2\alpha p_0 \left\|\mathbf{e}^e\right\| \tag{4.121}$$

secondo il legame elastico considerato, quindi, la rigidezza a taglio in condizioni non drenate di un'argilla inizialmente consolidata fino ad una pressione p_0 è:

$$\mu_u := \frac{1}{2}\frac{\partial \|\mathbf{t}\|}{\partial \left\|\mathbf{e}^e\right\|} = \alpha p_0$$

da questa si ricava:

$$\alpha = \frac{\mu_u}{p_0} \tag{4.122}$$

Si osservi che essendo $J = 1$ in condizioni non drenate, si ha $q = \breve{q} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{t}\|$; se si introduce, inoltre, la misura di deformazione coniugata di $\breve{q}$:

$$\breve{\varepsilon}^e_q = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\mathbf{e}^e\right\| \tag{4.123}$$

si ha:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \breve{\varepsilon}^e_q} = \frac{1}{2}\frac{\partial \|\mathbf{t}\|}{\partial \left\|\mathbf{e}^e\right\|} := \mu_u \tag{4.124}$$

La determinazione del parametro elastico α può essere effettuata, quindi, per mezzo di una prova triassiale standard non drenata. Questa prova, se viene effettuata su un campione inizialmente normal-consolidato, deve comprendere un percorso di scarico. Dai risultati, in termini di tensioni e di deformazioni deviatoriche, relativi a quest'ultima fase della prova, si può ricavare μ_u e quindi, utilizzando la (4.122), il parametro α (Fig. 4.7). Valutazioni di μ_u sono inoltre reperibili in letteratura (cfr., ad es., [24]).

Indice di rigonfiamento $\breve{k}$ e di compressione vergine $\breve{\lambda}$

Per la determinazione dei parametri $\breve{k}$ e $\breve{\lambda}$ è teoricamente necessaria una sola prova di compressione isotropa (comprendente anche un percorso di scarico, se il campione è inizialmente normal-consolidato). A tal fine, è utile richiamare le relazioni esistenti fra ($\breve{k}$, $\breve{\lambda}$) ed i parametri (k^*, λ^*) che compaiono nelle relazioni bilogaritmiche espresse in termini di pressione di Cauchy (4.80-4.81):

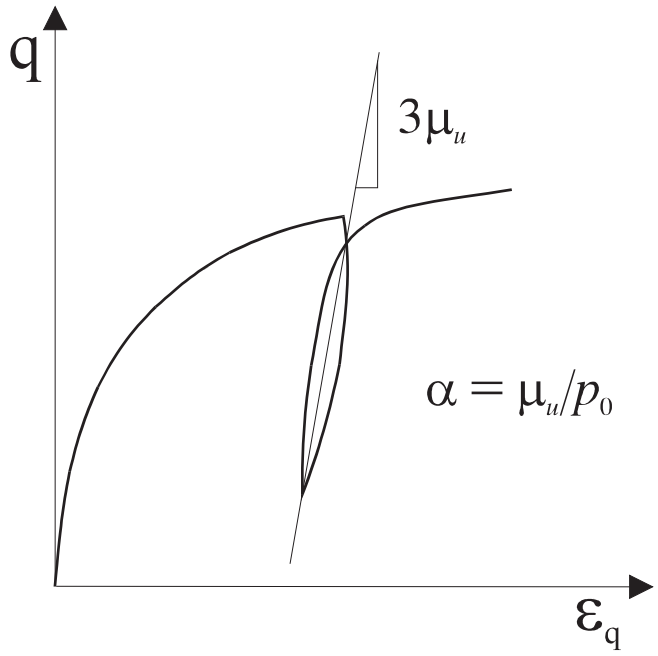


Figura 4.7: Calcolo del parametro elastico α utilizzando i risultati di una prova triassiale non drenata

$$\breve{k} = \frac{k^*}{1-k^*} \qquad \breve{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1-\lambda^*} \tag{4.125}$$

Valutazioni di k^* e λ^* sono riportate, ad esempio, in [13] per argille e limi di diversa provenienza, ed in [1] per il caolino speswhite.

Pendenza della linea di stato critico M

Il parametro M coincide con quello a cui si fa riferimento nelle formulazioni classiche del Cam-clay in deformazioni infinitesime (cfr. par. 4.4.2). Per la sua determinazione è teoricamente necessaria una sola prova triassiale standard in condizione drenata. Valutazioni di M, per svariati tipi di argille, sono ampiamente riportate in letteratura (cfr., ad es., [69]).

4.5.4 Condizioni iniziali

Il modello richiede che vengano assegnati i valori iniziali della pressione (p_0) e della pressione di preconsolidazione ($\breve{p}_{c0}$). Nel caso in cui il materiale sia sovraconsolidato ($p_0 < \breve{p}_{c0}$) è necessario, noto il valore iniziale della pressione di preconsolidazione di Cauchy (p_{c0}), ricavare il corrispondente valore in termini di sforzo di Kirchhoff ($\breve{p}_{c0}$). A tal fine, si utilizza la relazione:

$$\breve{p}_{c0} = J_{c0} p_{c0} \tag{4.126}$$

dove la quantità:

$$J_{c0} = \frac{v_{c0}}{v_0} \tag{4.127}$$

può essere ricavata, come mostrato in Fig. 4.8, utilizzando la (4.80):

$$\ln\left(\frac{v_{c0}}{v_0}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right) \tag{4.128}$$

da cui si ricava:

$$\frac{v_{c0}}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p_{c0}}\right)^{k^*} \tag{4.129}$$

Si ha, infine:

$$\breve{p}_{c0} = \left(\frac{p_0}{p_{c0}}\right)^{k^*} p_{c0} \tag{4.130}$$

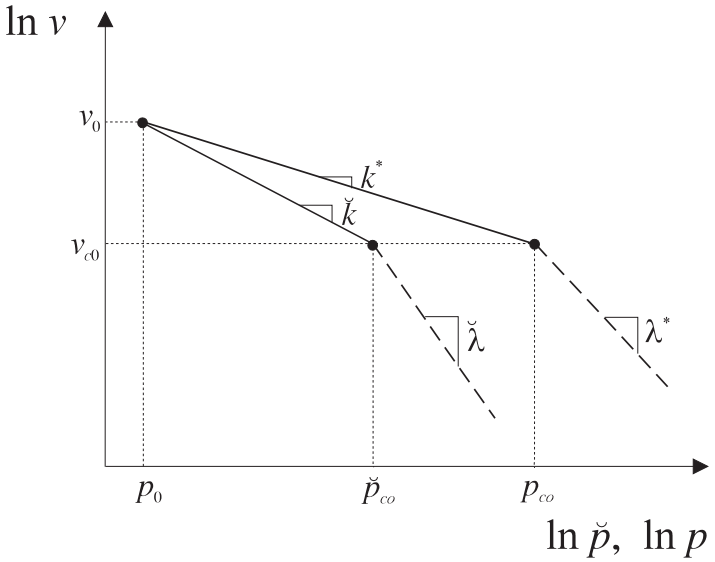


Figura 4.8: Valore iniziale della pressione di preconsolidazione in termini di sforzi di Cauchy p_{c0} e di Kirchhoff $\breve{p}_{c0}$

Sebbene non sia un parametro del modello, l'assegnazione di v_0 è necessaria se si vuole rappresentare la risposta prevista dalle equazioni costitutive in termini di pressione-volume. Poichè spesso, durante una prova di compressione isotropa, viene valutato il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino ad un valore di pressione unitaria (v_{c1}), è utile ricavare la relazione che permette di ricavare v_0 a partire da v_{c1}. A tal fine, noti p_0 e p_{c0} (Fig. 4.9), si utilizzano le (4.80, 4.81)[7]:

$$\ln\left(\frac{v_{c0}}{v_0}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right) \tag{4.131}$$

$$\ln\left(\frac{v_{c1}}{v_{c0}}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p_{c1}}{p_{c0}}\right) \tag{4.132}$$

[7]E' necessario che la scelta ricada su queste relazioni costitutive e non su quelle espresse in termini di pressioni di Kirchhoff; infatti, la pressione (unitaria) a cui viene misurato v_{c1} è di Cauchy.

dove $p_{c1} = 1$ (ad es. kPa). Dalla seconda relazione si ricava $\ln v_{c0}$ e lo si sostituisce nella prima; si ottiene infine:

$$v_0 = \left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1} \tag{4.133}$$

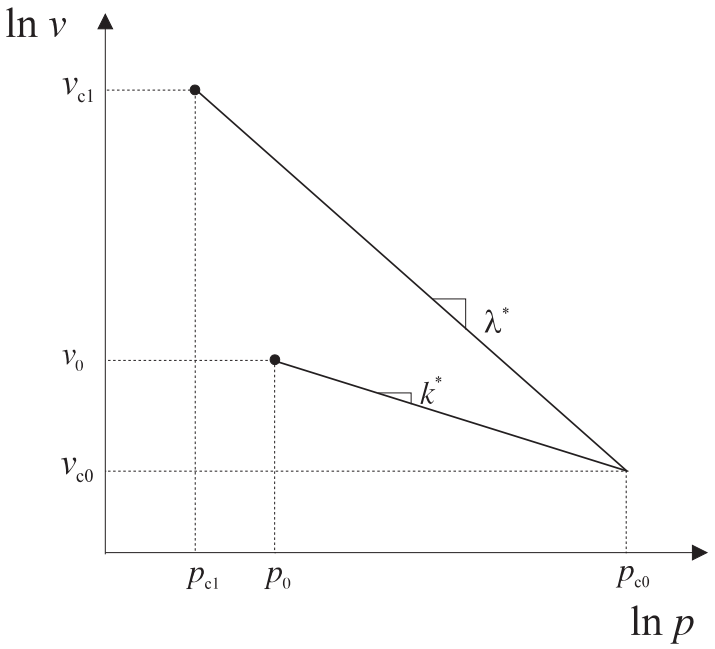


Figura 4.9: Relazione fra il volume specifico iniziale v_0 ed il volume specifico v_{c1} di un campione normalmente consolidato fino ad un valore unitario di pressione p_{c1}

4.6 Osservazioni su due legami elastici alternativi

4.6.1 Legame elastico con rigidezza a taglio costante

Nel modello qui presentato non è stata considerata la possibilità di assumere un legame elastico caratterizzato da un modulo di taglio μ costante. E' un'evidenza sperimentale, infatti, che la rigidezza delle argille è, in generale, influenzata in modo non trascurabile dalla tensione media (cfr., ad es., [24, 92]).

Nell'ambito dell'ipotesi di deformazioni infinitesime, è noto [29, 96] che questa ipotesi, associata a quella di K variabile con la tensione media (3.26), implica, per piccoli valori di tensione media, un coefficiente di Poisson negativo. Anche in una formulazione del modello elastico in deformazioni finite, la scelta di μ costante ha un'implicazione del tutto equivalente a questa, come di seguito mostrato.

Si consideri, infatti, il legame elastico espresso dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \breve{p} &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right) \\ \mathbf{t} &= 2\mu\mathbf{e}^e \end{aligned} \tag{4.134}$$

Da queste relazioni si ricava il tensore che lega gli incrementi $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ del vettore delle tensioni principali agli incrementi $\dot{\boldsymbol{\rho}}^e$ del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche:

$$\mathbf{a}^e := \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\rho}^e} = \breve{K}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+2\mu\left(\mathbf{I}-\frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right) \tag{4.135}$$

dove il modulo di rigidezza volumetrica è espresso come:

$$\breve{K} = \frac{\breve{p}}{\breve{k}} \tag{4.136}$$

Indicate con $\mathbf{n}_a$ ed $\mathbf{n}_r$ due direzioni mutuamente ortogonali, si consideri l'applicazione di un'incremento di tensione monoassiale nella direzione $\mathbf{n}_a$:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

a questo corrisponderà un incremento di deformazione logaritmica:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^e = \begin{bmatrix} \dot{\rho}^e_a \\ \dot{\rho}^e_r \\ \dot{\rho}^e_r \end{bmatrix} \tag{4.138}$$

dove l'incremento di deformazione assiale può essere calcolato come:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^e_a &= \left(\mathbf{a}^{e^{-1}}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\cdot\mathbf{n}_a = \left(\frac{\dot{\breve{p}}}{3\breve{K}}\mathbf{1}+\frac{1}{2\mu}\dot{\mathbf{t}}\right)\cdot\mathbf{n}_a = \\ &= \frac{1}{3\breve{K}}\dot{\breve{p}}+\frac{1}{2\mu}\dot{t}_a \end{aligned} \tag{4.139}$$

dalla (4.137) e dalla (4.38) si ricava:

$$\dot{\breve{p}} = \frac{1}{3}\dot{\beta}_a \qquad\qquad \dot{t}_a = \frac{2}{3}\dot{\beta}_a \tag{4.140}$$

si ottiene quindi:

$$\dot{\rho}^e_a = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\breve{K}}+\frac{1}{\mu}\right)\dot{\beta}_a \tag{4.141}$$

Procedendo in modo analogo, si calcola la deformazione logaritmica radiale:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^e_r &= \left(\mathbf{a}^{e^{-1}}\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\cdot\mathbf{n}_r = \frac{1}{3\breve{K}}\dot{\breve{p}}+\frac{1}{2\mu}\dot{t}_r = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\breve{K}}-\frac{1}{2\mu}\right)\dot{\beta}_a \end{aligned} \tag{4.142}$$

Se si introduce la seguente definizione di coefficiente di Poisson "logaritmico":

$$\breve{\nu} := -\frac{\partial \rho_r^e}{\partial \rho_a^e} \tag{4.143}$$

dalle (4.139-4.142) si ottiene:

$$\breve{\nu} = \frac{1}{2}\frac{3\breve{K} - 2\mu}{3\breve{K} + \mu} \tag{4.144}$$

che, sostituendo la (4.136), diventa:

$$\breve{\nu} = \frac{1}{2}\frac{3\breve{p} - 2\mu\breve{k}}{3\breve{p} + \mu\breve{k}} \tag{4.145}$$

Si ha quindi che il coefficiente $\breve{\nu}$ risulta negativo per:

$$\breve{p} < \frac{2}{3}\mu\breve{k} \tag{4.146}$$

Se, ad esempio, si assume $\breve{k} = 0.05$ e $\mu = 10000$ kPa, la precedente fornisce $\breve{p} < 330$ kPa. Si osservi, inoltre, che la (4.146), nel caso di compressione monoassiale, è equivalente alla seguente condizione:

$$\beta_a < 2\mu\breve{k} \tag{4.147}$$

Al fine di illustrare, in termini di risposta del materiale, le implicazioni della condizione $\breve{\nu} < 0$, si consideri una prova di compressione monoassiale; dalle (4.134) si ricava la seguente espressione della tensione di Kirchhoff applicata nella direzione $\mathbf{n}_a$:

$$\beta_a = \breve{p} + 2\mu e_a^e = \frac{1}{3}\beta_a + 2\mu e_a^e \tag{4.148}$$

dove la componente e_a^e del vettore delle distorsioni logaritmiche principali elastiche $\mathbf{e}^e$ può essere espressa come:

$$e_a^e = \rho_a^e - \frac{1}{3}\theta^e \tag{4.149}$$

in questa relazione si può sostituire l'espressione di θ^e ottenuta dalla (4.134):

$$\theta^e = \breve{k}\ln\left(\frac{\breve{p}}{p_0}\right) = \breve{k}\ln\left(\frac{\beta_a}{\beta_{a0}}\right) \tag{4.150}$$

dove β_{a0} è il valore iniziale della tensione assiale; si ha, quindi, la seguente equazione:

$$\beta_a = 3\mu\left[\rho_a^e - \frac{1}{3}\breve{k}\ln\left(\frac{\beta_a}{\beta_{a0}}\right)\right] \tag{4.151}$$

che, esplicitata rispetto a ρ_a^e, diventa:

$$\rho_a^e = \frac{1}{3\mu}\left[\beta_a + \mu\breve{k}\ln\left(\frac{\beta_a}{\beta_{a0}}\right)\right] \tag{4.152}$$

da questa relazione, può essere calcolata anche la deformazione radiale in funzione della tensione applicata assialmente:

$$\begin{aligned}\rho_r^e &= \frac{\theta^e - \rho_a^e}{2} = \frac{1}{2}\left[\breve{k}\ln\left(\frac{\beta_a}{\beta_{a0}}\right) - \rho_a^e\right] = \\ &= -\frac{1}{6\mu}\left[\beta_a - 2\mu\breve{k}\ln\left(\frac{\beta_a}{\beta_{a0}}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.153}$$

In Fig. 4.10 sono riportati gli andamenti della deformazione logaritmica assiale (4.152) e radiale (4.153) causati dall'applicazione di una compressione monoassiale crescente; per tracciare queste curve si è assunto: $\breve{k} = 0.05$, $\mu = 1000$ kPa e $\beta_{a0} = 1$ kPa. Si osserva che fino al valore del carico applicato: $\beta_a = 2\mu\breve{k} = 100$ kPa, gli incrementi di deformazione radiale $\dot{\rho}_r^e$ sono positivi. Quindi, le (4.134) prevedono un comportamento non osservato nei terreni; cioè che nella fase iniziale di una prova di compressione non confinata, il provino si contragga lateralmente, manifestando un brusco incremento di rigidezza assiale.

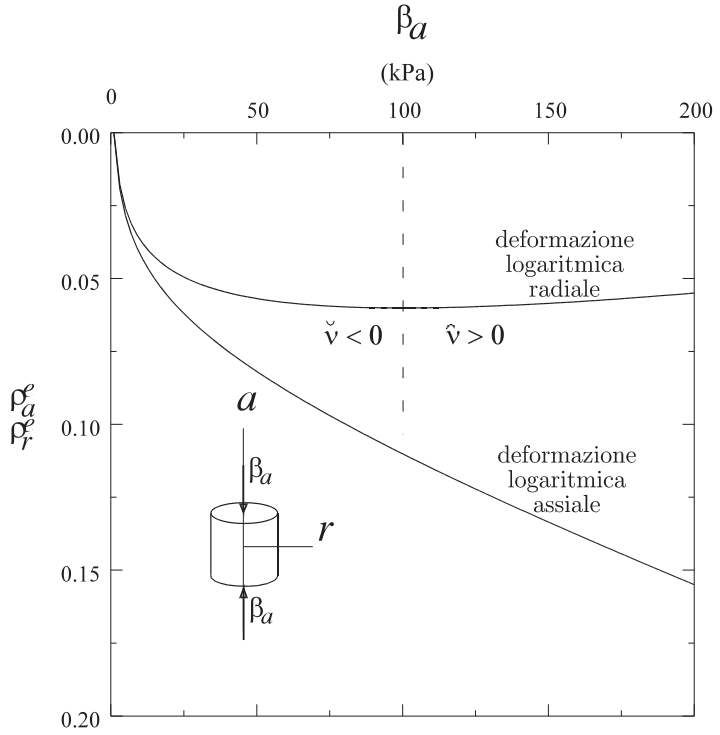


Figura 4.10: Legame elastico con rigidezza a taglio costante. Previsione della risposta di un campione sottoposto a prova di compressione monoassiale

4.6.2 Legame elastico definito da tre parametri

Si consideri il legame elastico rappresentato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \breve{p} &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\breve{k}}\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2\right) \\ \mathbf{t} &= 2\left[\alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right)+\bar{\mu}\right]\mathbf{e}^e \end{aligned} \tag{4.154}$$

è facile verificare che la scelta di queste equazioni è equivalente, in termini di potenziale elastico, ad aggiungere il termine $\bar{\mu}\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2$ alla $\hat{W}\left(\boldsymbol{\rho}^e\right)$ espressa dalla (4.33). Una espressione di questo tipo, per l'energia di deformazione elastica, è impiegata in [85]. Utilizzare la (4.154_2) significa supporre che un'aliquota della rigidezza a taglio sia indipendente dalla tensione media.

Anche in questo caso, il tensore elastico tangente $\mathbf{a}^e := \partial\boldsymbol{\beta}/\partial\boldsymbol{\rho}^e$ non è definito positivo:

$$\exists\, \boldsymbol{\rho}^e \in \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{a}^e\dot{\boldsymbol{\rho}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \leq 0 \tag{4.155}$$

In particolare, se nell'espressione del determinante di $\mathbf{a}^e$ si sostituisce la seguente relazione:

$$p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\breve{k}}\right) = \frac{\breve{k}}{\breve{k}+\alpha\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2}\breve{p} \tag{4.156}$$

ottenuta dalla (4.154_1), si ricava che:

$$\det\left[\mathbf{a}^e\right] \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{\mu}\alpha^2\left\|\mathbf{e}^e\right\|^4 + \alpha\breve{k}\left(2\bar{\mu}-\alpha\breve{p}\right)\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2 + \breve{k}^2\left(\alpha\breve{p}+\bar{\mu}\right) \leq 0 \tag{4.157}$$

questa disequazione, di quarto grado nell'incognita $\left\|\mathbf{e}^e\right\| \geq 0$, risulta soddisfatta per:

$$\min\left(\left|e_{sol1}\right|, \left|e_{sol2}\right|\right) \leq \left\|\mathbf{e}^e\right\| \leq \max\left(\left|e_{sol1}\right|, \left|e_{sol2}\right|\right) \tag{4.158}$$

dove:

$$e_{sol1} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{2}{\bar{\mu}}\left(\alpha^2\breve{p}\breve{k} - 2\alpha\breve{k}\bar{\mu} - A\right)} \qquad e_{sol2} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{2}{\bar{\mu}}\left(\alpha^2\breve{p}\breve{k} - 2\alpha\breve{k}\bar{\mu} + A\right)} \tag{4.159}$$

con $A = \alpha\breve{k}\sqrt{\alpha^2\breve{p}^2 - 8\alpha\bar{\mu}\breve{p}}$

Si sostituisca la (4.156) nella (4.154_2); si ottiene:

$$\left\|\mathbf{t}\right\| = 2\left[\frac{\alpha\breve{k}}{\breve{k}+\alpha\left\|\mathbf{e}^e\right\|^2}\breve{p}+\bar{\mu}\right]\left\|\mathbf{e}^e\right\| \tag{4.160}$$

In termini di sole tensioni, la condizione (4.158), si può quindi esprimere sostituendo le (4.159) nella precedente relazione; si ha quindi:

$$\min\left(t_{sol1}, t_{sol2}\right) \leq \left\|\mathbf{t}\right\| \leq \max\left(t_{sol1}, t_{sol2}\right) \tag{4.161}$$

dove:

$$t_{sol1} = 2\left[\frac{\alpha\breve{k}}{\breve{k}+\alpha\, e_{sol1}^2}\breve{p}+\bar{\mu}\right]|e_{sol1}| \qquad t_{sol2} = 2\left[\frac{\alpha\breve{k}}{\breve{k}+\alpha\, e_{sol2}^2}\breve{p}+\bar{\mu}\right]|e_{sol2}| \tag{4.162}$$

Nel diagramma $\breve{p} - \|\mathbf{t}\|$ di Fig. 4.11a, sono tracciati i grafici delle (4.162) per $\breve{k} = 0.05$, $\alpha = 100$ e $\bar{\mu} = 100$ kPa; nella regione del piano tensionale compresa fra queste due curve, risulta $\det[\mathbf{a}^e] \leq 0$. Nel diagramma $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$ di Fig. 4.11b è riportato il grafico della (4.160) corrispondente al percorso tensionale ABC a tensione media di Kirchhoff costante ($\breve{p} = 100$ kPa). Si osserva che la tangente alla curva sforzo-deformazione cambia di segno in B e ritorna ad assumere valori positivi solo dopo che si è superato il punto C.

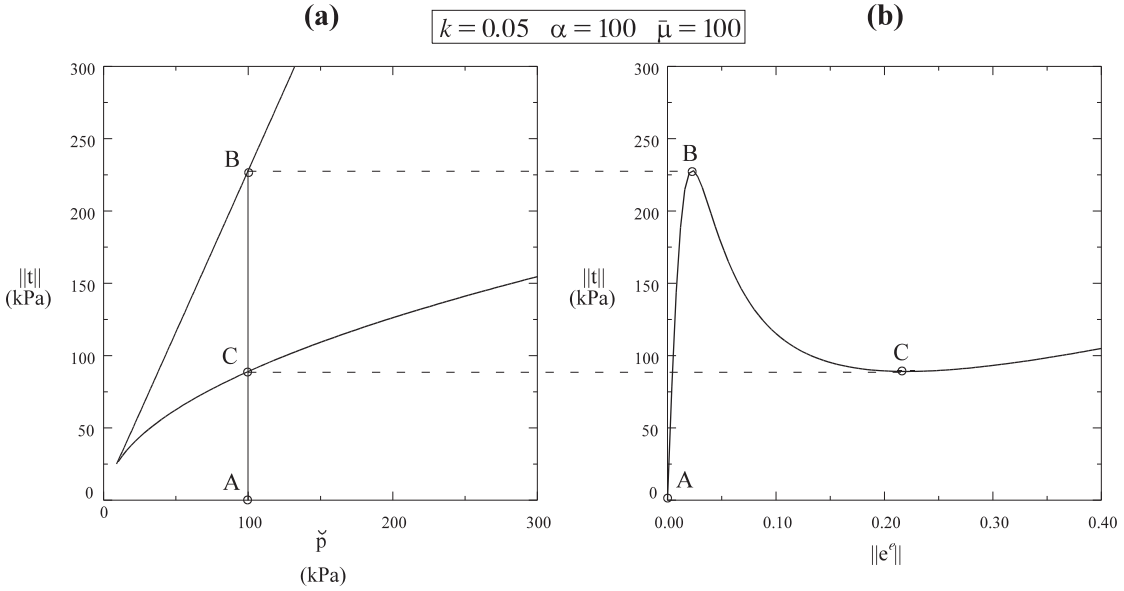


Figura 4.11: Legame elastico definito da tre parametri. Condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente (a) e suoi effetti sulla risposta meccanica prevista (b)

La regione del piano $\breve{p} - \|\mathbf{t}\|$ in cui risulta verificata la (4.155) si rimpicciolisce al crescere del rapporto $\bar{\mu}/\alpha$. Comunque, gli effetti della (4.155) diventano trascurabili per valori di $\bar{\mu}/\alpha$ talmente grandi, da rendere praticamente nulla l'influenza della tensione media nella (4.160). In questa circostanza, le previsioni del modello sono sostanzialmente equivalenti a quelle ottenute da un legame elastico con modulo di taglio costante.

Le (4.162), espresse in termini di $\breve{q}$:

$$\breve{q}_{sol1} = \sqrt{\frac{3}{2}}t_{sol1} \qquad \breve{q}_{sol2} = \sqrt{\frac{3}{2}}t_{sol2} \tag{4.163}$$

sono rappresentate nel piano $\breve{p} - \breve{q}$ di Fig. 4.12. Nello stesso diagramma sono riportate la linea di stato critico, la curva di snervamento (4.50) e, tratteggiata, la retta di

pendenza $\left(3\alpha\breve{k}/2\right)^{1/2}$, che fissa, secondo il legame elastico (4.33), il massimo valore di tensione deviatorica raggiungibile (cfr. par. 4.5.2). Si osserva che quest'ultima retta è praticamente coincidente con la "superiore" delle curve (4.163); può essere verificato, infatti, che l'inclinazione di tale curva è sostanzialmente indipendente dal valore di $\bar{\mu}$; da questo parametro, invece, è influenzato l'andamento della curva "inferiore". In particolare, al crescere di $\bar{\mu}$, con α fissato, la curva inferiore tende a confondersi con quella superiore.

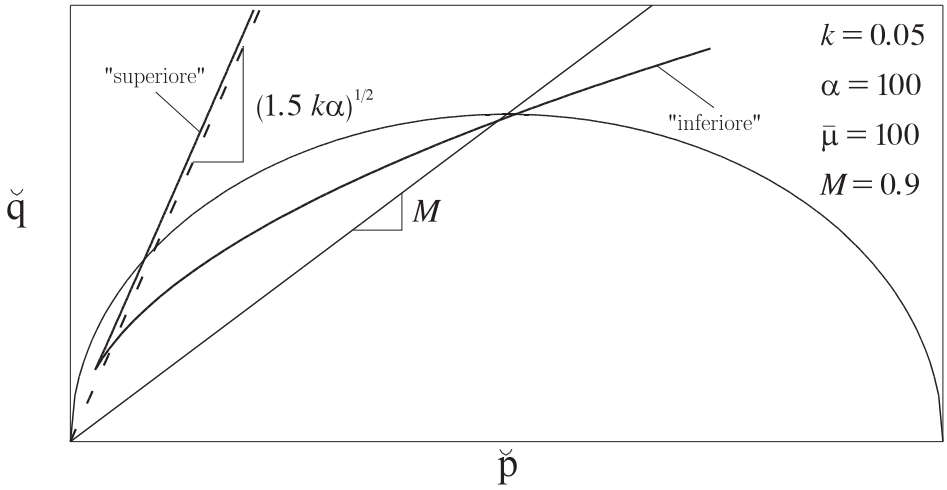


Figura 4.12: Legame elastico definito da tre parametri. Grafico delle condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente sul piano $\breve{p} - \breve{q}$