Capitolo 2

Richiami di meccanica dei continui

2.1 Introduzione

In questo capitolo vengono richiamati alcuni elementi di meccanica dei mezzi continui deformabili che verranno utilizzati in seguito. Per una esauriente trattazione dell'argomento si rimanda ai noti testi di Truesdell e Toupin [89], Truesdell e Noll [88], Gurtin [32], Marsden e Hughes [51].

Per quanto riguarda la notazione (cfr. pag. 135), i campi vettoriali e tensoriali sono indicati con lettere in grassetto; in particolare, si utilizzano lettere maiuscole per i campi materiali e minuscole per quelli spaziali[1].

Il capitolo è organizzato nella seguente maniera. Le principali misure di deformazione sono introdotte nel par. 2.2.1; si richiamano brevemente alcuni aspetti di fondamentale importanza per lo sviluppo della tesi. In particolare si evidenziano le ipotesi su cui si basa il passaggio dalla teoria non lineare a quella linearizzata; si commenta la decomposizione volumetrico-distorsionale delle misure di deformazione e, infine, si introduce la decomposizione spettrale dei tensori di deformazione.

Le definizioni di velocità e di accelerazione, sia materiali sia spaziali, sono riportate nel par. 2.2.2; si introduce il gradiente di velocità spaziale nonché la sua decomposizione nelle velocità spaziali di deformazione e di rotazione.

Nel par. 2.3, vengono richiamate le equazioni di bilancio in forma locale, sia nella descrizione materiale sia in quella spaziale, e sono introdotte le principali misure di tensione. Si riporta, inoltre, la decomposizione spettrale del tensore di Kirchhoff.

Il concetto di obiettività è brevemente illustrato nel par. 2.4. In particolare, si considerano due derivate obiettive dei tensori degli sforzi: la derivata corotazionale e la derivata di Lie.

La definizione di materiale iperelastico è richiamata nel par. 2.5; sono inoltre considerate, con riferimento a materiali comprimibili, due possibili espressioni della densità di energia di deformazione elastica.

[1] Questo tipo di notazione, adottata da numerosi autori, permette di indicare rispettivamente con $\boldsymbol{\varepsilon}$ e con $\boldsymbol{\sigma}$ il tensore di deformazione infinitesima ed il tensore di sforzo di Cauchy; si segue, quindi, la prassi ingegneristica.

Le equazioni costitutive iperelastiche in forma incrementale ed i tensori di elasticità materiale e spaziale, sono introdotti nel par. 2.5.1.

Nel par. 2.6.1, si richiama brevemente la nozione di gruppo di simmetria materiale; quindi si accenna, limitatamente a quanto di interesse nel presente lavoro, al problema di classificazione ed alle conseguenze del teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope (par. 2.6.2).

2.2 Cinematica

2.2.1 Deformazioni

Si identifichi la *configurazione di riferimento* di un corpo continuo con la chiusura di un insieme aperto $\mathcal{B} \subset R^3$ e si indichi con $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ la posizione del suo generico *punto materiale*. Una *deformazione* è un'applicazione $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow R^3$ continua, iniettiva e regolare. Tale applicazione fornisce la *posizione* $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ del punto materiale nella *configurazione corrente* del corpo $\mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B})$.

Il *gradiente della deformazione* è il tensore:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \tag{2.1}$$

La condizione di invertibilità locale della deformazione assicura che durante il moto non avvengano compenetrazioni di materia; essa implica la non singolarità del determinante jacobiano J di φ [32]:

$$J := \det\left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right] = \det\left[\mathbf{F}(\mathbf{X})\right] \neq 0 \tag{2.2}$$

Nella configurazione di riferimento è $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, quindi $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$; ciò, unitamente alla (2.2) ed alla continuità della deformazione, implica:

$$J = \det\left[\mathbf{F}(\mathbf{X})\right] > 0 \tag{2.3}$$

da cui si ricava che $\mathbf{F} \in Lin^+$.

Il teorema di decomposizione polare consente di rappresentare il gradiente della deformazione come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{ZR} \qquad \forall\, \mathbf{X} \in \mathcal{B} \tag{2.4}$$

dove:

$$\mathbf{U} := \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right)^{\frac{1}{2}} \in Sym^+ \qquad \text{tensore } \textit{destro} \text{ di allungamento} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{Z} := \left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\right)^{\frac{1}{2}} \in Sym^+ \qquad \text{tensore } \textit{sinistro} \text{ di allungamento} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{R} \in Orth^+ \qquad \text{tensore } \textit{rotazione} \tag{2.7}$$

Si definiscono i tensori della deformazione di *Cauchy-Green destro* $\mathbf{C} \in Sym^+$ e *sinistro* $\mathbf{b} \in Sym^+$:

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{Z}^2 \tag{2.9}$$

Lo *spostamento* associato alla deformazione φ è l'applicazione $\mathbf{u} : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ definita come:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) := \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \tag{2.10}$$

il suo gradiente è pertanto:

$$D\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \tag{2.11}$$

Dalla precedente espressione, impiegando le (2.8-2.9), si ricava:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + D\mathbf{u}^T D\mathbf{u} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + D\mathbf{u} D\mathbf{u}^T \tag{2.13}$$

dove compare il *tensore di deformazione infinitesima* $\boldsymbol{\varepsilon} \in Sym$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \mathrm{sym}(D\mathbf{u}) \tag{2.14}$$

Il *tensore di deformazione di Green-Lagrange* è definito come:

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{2.15}$$

dalla (2.12) si ha:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} D\mathbf{u}^T D\mathbf{u} \tag{2.16}$$

Le formule (2.12, 2.13, 2.16) mostrano che il tensore di deformazione infinitesima non può rappresentare una misura esatta di deformazione. In particolari condizioni, tuttavia, $\boldsymbol{\varepsilon}$ costituisce una efficace misura di deformazione. Per caratterizzare tali condizioni, si introduca il parametro:

$$\omega := \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| = \|D\mathbf{u}\| \tag{2.17}$$

e si consideri, ad esempio, la (2.16); questa può essere scritta come:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{O}\left(\omega^2\right) \tag{2.18}$$

dove con $\mathbf{O}(\omega^2)$ si è indicato un infinitesimo di ordine superiore ad ω. Pertanto $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta l'*approssimazione lineare* della misura esatta di deformazione $\mathbf{G}$. Supporre che tale approssimazione sia sufficiente:

$$\mathbf{G} \cong \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.19}$$

equivale a considerare trascurabile la quantità $\mathbf{O}(\omega^2)$, cioè a giudicare "piccolo" [32] il gradiente degli spostamenti. Quando tale approssimazione viene considerata accettabile, la corrispondente deformazione φ viene spesso indicata come *infinitesima.*

Deformazione volumetrica

Si prova che $J = \det[\mathbf{F}(\mathbf{X})]$ rappresenta la *misura del volume corrente* per unità di volume nella configurazione di riferimento [32]. Si ha quindi che la *deformazione volumetrica*, definita come la variazione di volume per unità di volume nella configurazione di riferimento è data dalla:

$$E_v := \frac{V - V_0}{V_0} = J - 1 \tag{2.20}$$

dove V e V_0 sono, rispettivamente, il volume corrente ed il volume misurato nella configurazione di riferimento. Nell'ipotesi di deformazioni infinitesime si prova che la deformazione volumetrica può essere valutata come:

$$E_v := \frac{V - V_0}{V_0} \cong \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \varepsilon_v \tag{2.21}$$

Decomposizione "volumetrico-distorsionale"

Si indichi con $\bar{\mathbf{F}}$ la parte *isocora* del gradiente di deformazione, cioè la parte che lascia inalterato il volume di $\mathcal{B}$. Poiché deve essere $\det\left[\bar{\mathbf{F}}\right] = 1$, questo tensore può essere definito come:

$$\bar{\mathbf{F}} := J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F} \tag{2.22}$$

Si può allora considerare la seguente decomposizione "volumetrico-distorsionale" del gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}}\bar{\mathbf{F}} \qquad \text{con} \quad \det\left[\bar{\mathbf{F}}\right] = 1 \tag{2.23}$$

Dalla posizione (2.22) si ha:

$$\bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \det\left[\bar{\mathbf{C}}\right] = 1 \tag{2.24}$$

$$\bar{\mathbf{b}} := \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}}^T = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \det\left[\bar{\mathbf{b}}\right] = 1 \tag{2.25}$$

Come è noto, nell'ambito della teoria linearizzata, cioè della teoria formulata nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, il tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$ è decomposto nelle sue parti *volumetrica* e *deviatorica* secondo la seguente formula additiva:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{I} + \mathrm{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.26}$$

Decomposizione spettrale dei tensori di deformazione

Poiché il tensore di Cauchy-Green destro $\mathbf{C}$ è simmetrico e definito positivo, per il teorema di decomposizione spettrale si ha:

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^{3} \lambda_A^2\ \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \tag{2.27}$$

$$\|\mathbf{N}_A\| = 1 \qquad \lambda_A \in R^+$$

dove $(\lambda_A^2, \mathbf{N}_A)$ sono le autocoppie di $\mathbf{C}$; si ha quindi:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}_A = \lambda_A^2 \, \mathbf{N}_A \qquad (A = 1, 2, 3) \tag{2.28}$$

La base $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ in $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ viene di solito indicata come *lagrangiana*.

Analogamente per il tensore di Cauchy-Green sinistro $\mathbf{b}$ si ha:

$$\mathbf{b} = \sum_{A=1}^{3} \lambda_A^2 \, \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \qquad \|\mathbf{n}_A\| = 1 \tag{2.29}$$

$$\mathbf{b}\mathbf{n}_A = \lambda_A^2 \, \mathbf{n}_A \qquad (A = 1, 2, 3) \tag{2.30}$$

Si suole indicare la base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ in $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in \mathcal{S}$ come *euleriana*.

Si ha inoltre:

$$\mathbf{F}\mathbf{N}_A = \lambda_A \, \mathbf{n}_A \qquad A = 1, 2, 3 \tag{2.31}$$

e quindi:

$$\mathbf{F} = \sum_{A=1}^{3} \lambda_A \, \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{N}_A \tag{2.32}$$

La terna $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ è detta degli *allungamenti principali*. Infatti, come è espresso dalla (2.31), una fibra materiale di lunghezza unitaria, distesa lungo la direzione principale $\mathbf{N}_A$ nella configurazione di riferimento, assume lunghezza λ_A e giacitura $\mathbf{n}_A$ nella configurazione deformata secondo φ:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{N}_A) \mapsto (\varphi(\mathbf{X}), \lambda_A \mathbf{n}_A) \tag{2.33}$$

Si osservi, infine, che le decomposizioni spettrali delle parti isocore dei tensori di Cauchy-Green sinistro $\bar{\mathbf{b}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{b}$ e destro $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{C}$ assumono, rispettivamente, le seguenti forme:

$$\bar{\mathbf{b}} = \sum_{A=1}^{3} \bar{\lambda}_A^2 \, \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \tag{2.34}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{A=1}^{3} \bar{\lambda}_A^2 \, \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \tag{2.35}$$

dove:

$$\bar{\lambda}_A := J^{-\frac{1}{3}} \lambda_A \qquad A = 1, 2, 3 \tag{2.36}$$

2.2.2 Moti: descrizione materiale e spaziale

Si definisce *moto* di $\mathcal{B}$ l'applicazione continua iniettiva e regolare $\phi_t : \mathcal{B} \times R \longrightarrow R^3$ che associa ad ogni valore del parametro scalare tempo una configurazione deformata $\mathcal{S}_t$. La posizione occupata dal punto materiale $\mathbf{X}$ all'istante t è quindi:

$$\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}) \tag{2.37}$$

Fissato $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{B}$, l'applicazione:

$$[0,T] \ni t \mapsto \phi_t\left(\hat{\mathbf{X}}\right) \tag{2.38}$$

è detta *traiettoria* del punto materiale $\hat{\mathbf{X}}$ nell'intervallo di tempo $[0,T]$.

Ad ogni istante t, dato un generico punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_t$ è possibile risalire alla posizione del corrispondente punto materiale $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ invertendo la (2.37):

$$\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x}) \tag{2.39}$$

Campi scalari, vettoriali e tensoriali possono essere definiti rispetto alla configurazione di riferimento o alla generica configurazione corrente. Nel primo caso i campi vengono detti *materiali*, nel secondo *spaziali.* E' sempre possibile passare da una descrizione materiale ad una spaziale, mediante la (2.37), o viceversa, per mezzo della (2.39). La *velocità materiale* e l'*accelerazione materiale* sono definite, rispettivamente, come:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) := \frac{\partial \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t} \tag{2.40}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) := \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t^2} \tag{2.41}$$

La descrizione spaziale può essere ottenuta da quella materiale cambiando la variabile indipendente. In questo modo, ad ogni istante t la *velocità spaziale* e l'*accelerazione spaziale* sono definite, rispettivamente, come:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) := \mathbf{V}\left(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}),t\right) \tag{2.42}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) := \mathbf{A}\left(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}),t\right) \tag{2.43}$$

l'inversione di queste relazioni fornisce:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}),t) \tag{2.44}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \mathbf{a}(\phi_t(\mathbf{X}),t) \tag{2.45}$$

Si valuti adesso l'accelerazione spaziale in termini di velocità spaziale; dalla (2.41) e dalla (2.44) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{X},t) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}),t)\right] = \\
&= \frac{\partial \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}),t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}),t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\ \ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right]_{\mathbf{x}=\phi_t(\mathbf{X})}$$

Inoltre, dalla (2.45), si ha:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{X},t\right)=\left[\mathbf{a}\left(\mathbf{x},t\right)\right]_{\mathbf{x}=\phi_t(\mathbf{X})}$$

la relazione cercata è allora:

$$\mathbf{a}\left(\mathbf{x},t\right)=\frac{\partial\mathbf{v}\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}+\nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{x},t\right)\ \mathbf{v}\left(\mathbf{x},t\right) \tag{2.46}$$

Si osserva che l'accelerazione spaziale *non* coincide con la derivata temporale della velocità spaziale.

La derivata temporale del gradiente di deformazione coincide con il *gradiente di velocità materiale* $D\left[\mathbf{V}\left(\mathbf{X},t\right)\right]$; infatti:

$$\frac{\partial\mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[D\phi_t\left(\mathbf{X}\right)\right]=D\left[\frac{\partial\phi_t\left(\mathbf{X}\right)}{\partial t}\right]=D\left[\mathbf{V}\left(\mathbf{X},t\right)\right] \tag{2.47}$$

Si ha inoltre, dalla (2.44):

$$\begin{aligned} D\left[\mathbf{V}\left(\mathbf{X},t\right)\right] &= D\left[\mathbf{v}\left(\phi_t\left(\mathbf{X}\right),t\right)\right]=\nabla\left[\mathbf{v}\left(\phi_t\left(\mathbf{X}\right),t\right)\right]\ D\left[\phi_t\left(\mathbf{X}\right)\right]= \\ &= \nabla\left[\mathbf{v}\left(\phi_t\left(\mathbf{X}\right),t\right)\right]\ \mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Le (2.47 - 2.48) riscritte in forma compatta e combinate fra loro forniscono:

$$\dot{\mathbf{F}}=\nabla\mathbf{v}\ \mathbf{F}\qquad\qquad\text{per }\mathbf{x}=\phi_t\left(\mathbf{X}\right) \tag{2.49}$$

In questa equazione si può esplicitare il *gradiente di velocità spaziale*:

$$\mathbf{l}:=\nabla\mathbf{v}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{2.50}$$

la cui parte simmetrica è detta *velocità spaziale di deformazione*:

$$\mathbf{d}:=\mathrm{sym}\left(\nabla\mathbf{v}\right) \tag{2.51}$$

mentre quella antisimmetrica è chiamata *velocità spaziale di rotazione* ("spin tensor"):

$$\mathbf{w}:=\mathrm{skw}\left(\nabla\mathbf{v}\right) \tag{2.52}$$

Tenendo conto della (2.49), è possibile calcolare la derivata temporale del tensore di Cauchy-Green destro:

$$\dot{\mathbf{C}}=\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}+\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{F}^T\left[\left(\nabla\mathbf{v}\right)^T+\nabla\mathbf{v}\right]\mathbf{F}$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{F}^T\mathbf{d}\mathbf{F} \tag{2.53}$$

Il tensore $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}$ è spesso indicato come *velocità materiale di deformazione.*

2.3 Equazioni di bilancio e misure di sforzo

Le equazioni di bilancio in forma locale sono qui richiamate con riferimento alle due possibili descrizioni del moto.

Descrizione materiale

Si indichi con $\partial\mathcal{B}$ la frontiera di $\mathcal{B}$ e siano date $\partial_\varphi\mathcal{B}, \partial_\mathbf{t}\mathcal{B} \subset \partial\mathcal{B}$ tali che $\partial_\varphi\mathcal{B} \cap \partial_\mathbf{t}\mathcal{B} = \emptyset$ e che $\partial_\varphi\mathcal{B} \cup \partial_\mathbf{t}\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}$. Siano assegnate le deformazioni:

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{su } \partial_\varphi\mathcal{B} \tag{2.54}$$

e le *forze di superficie*:

$$\mathbf{t}^\mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}^\mathbf{N} \quad \text{su } \partial_\mathbf{t}\mathcal{B} \tag{2.55}$$

Le equazioni del moto sono espresse dalle:

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}\mathbf{P} + \varrho_0\mathbf{B} &= \varrho_0\mathbf{A} \qquad \text{in } \mathcal{B} \\ \mathbf{PN} &= \bar{\mathbf{t}}^\mathbf{N} \qquad \text{su } \partial_\mathbf{t}\mathcal{B} \end{aligned} \tag{2.56}$$

dove $\varrho_0 : \mathcal{B} \to R$ è la *densità nella configurazione di riferimento*, $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ la *forza di volume,* $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ la normale a $\partial_\mathbf{t}\mathcal{B}$ e $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ il *primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.*

Descrizione spaziale

Le equazioni di bilancio sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \varrho\mathbf{b}_t &= \varrho\mathbf{a} \qquad \text{in } \mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B}) \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}^\mathbf{n} \qquad \text{su } \partial_\mathbf{t}\mathcal{S} = \varphi(\partial_\mathbf{t}\mathcal{B}) \end{aligned} \tag{2.57}$$

dove: $\varrho = (J^{-1}\varrho_0) \circ \varphi^{-1}$ è la densità nella *configurazione corrente*; $\mathbf{b}_t = J^{-1}\mathbf{B}$ e $\bar{\mathbf{t}}^\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}^\mathbf{N} \circ \varphi^{-1}$ sono, rispettivamente, le forze di volume e di superficie riferite ad $\mathcal{S}$; $\mathbf{n}$ è la normale a $\partial_\mathbf{t}\mathcal{S}$; $\boldsymbol{\sigma} \in Sym$ è il *tensore degli sforzi di Cauchy.* Si prova che:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{2.58}$$

Il *tensore degli sforzi di Kirchhoff* ed il *secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff* sono definiti, rispettivamente, come:

$$\boldsymbol{\tau} := J\boldsymbol{\sigma} \tag{2.59}$$

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \tag{2.60}$$

dalla (2.58) si ha $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$ e quindi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \tag{2.61}$$

I tensori degli sforzi qui considerati sono coniugati ai corrispondenti tensori di velocità di deformazione attraverso le seguenti relazioni:

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} \tag{2.62}$$

Decomposizione spettrale del tensore di Kirchhoff

Il tensore di Kirchhoff è simmetrico. Nell'ambito del presente lavoro, si farà spesso ricorso alla sua decomposizione spettrale:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^{3} \beta_A \, \bar{\mathbf{n}}_A \otimes \bar{\mathbf{n}}_A \qquad \|\bar{\mathbf{n}}_A\| = 1 \tag{2.63}$$

2.4 Obiettività

Due moti ϕ_t ed ϕ_t^+ differiscono solo per un cambiamento di osservatore se:

$$\phi_t^+ (\mathbf{X}) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t) [\phi_t (\mathbf{X}) - \mathbf{o}] \tag{2.64}$$

dove $\mathbf{o}$ e $\mathbf{q}(t)$ appartengono a $\mathcal{V}$, e $\mathbf{Q}(t) \in Orth$. La (2.64) corrisponde ad una *trasformazione rigida*.

Un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si dice *obiettivo* se in un cambiamento di osservatore, ad ogni fissato istante, si ha $\mathbf{v}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{v}$; ne segue che un tensore $\mathbf{T} \in Lin$ è obiettivo se $\mathbf{T}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$.

Per effetto di un cambiamento di osservatore, alcune delle grandezze richiamate nei paragrafi precedenti si trasformano nella seguente maniera [32]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{F} \\ \mathbf{l}^+ &:= \nabla^+ \mathbf{v}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{d}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{w}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{w}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \tag{2.65}$$

Si nota che la velocità di deformazione è obiettiva, mentre non lo sono le altre grandezze.

Poiché è ragionevole supporre che le forze di contatto dipendano solo dalla posizione relativa dei punti del corpo, si assume che il vettore tensione sia obiettivo. Da tale assunto si ricava l'obiettività del tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, ma non si ricava l'obiettività della derivata temporale $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ dello stesso tensore.

In letteratura è stato proposto un grande numero di derivate obiettive dei tensori degli sforzi; qui ci si limita a richiamare la *derivata di Jaumann* o *derivata corotazionale:*

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} := \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} \tag{2.66}$$

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}} := \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{w} \tag{2.67}$$

e la *derivata di Lie* del tensore di Kirchhoff [51]:

$$\begin{aligned} L_v\boldsymbol{\tau} &:= \left\{ \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{F}^{-1} (\boldsymbol{\tau} \circ \varphi) \mathbf{F}^{-T} \right] \mathbf{F}^T \right\} \circ \varphi^{-1} \\ &= \left\{ \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T \right\} \circ \varphi^{-1} \end{aligned} \tag{2.68}$$

che, in termini di derivata temporale di $\boldsymbol{\tau}$ e di gradiente della velocità spaziale $\mathbf{l}$, diventa:

$$L_v\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^T \tag{2.69}$$

2.5 Leggi costitutive iperelastiche

Un materiale si dice *iperelastico* quando la relazione costitutiva fra il primo tensore di Piola-Kirchhoff ed il gradiente della deformazione è data come [32]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \tag{2.70}$$

dove la funzione scalare $W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) : \mathcal{B} \times Lin \rightarrow R$ è detta *densità di energia di deformazione elastica*.

Il secondo principio della termodinamica, formulato nell'ambito di una teoria puramente meccanica, impone che in ogni processo deformativo chiuso il lavoro sia non-negativo. Si dimostra che questa condizione è rispettata dalla classe dei materiali iperelastici [32]; in particolare, per un materiale iperelastico il lavoro è *nullo* in ogni processo deformativo chiuso.

Secondo l'*Assioma di Obiettività*, la risposta meccanica di un corpo alla deformazione è obiettiva. Anche questo principio esclude certe dipendenze costitutive e fornisce una parziale rappresentazione delle dipendenze lecite. Ad esempio si dimostra che la densità di energia di deformazione elastica non può dipendere direttamente dalla deformazione, ma solo dal suo gradiente.

Inoltre, per l'Assioma di Obiettività deve essere (cfr. 2.65_1):

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{QF}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in Orth \tag{2.71}$$

da questa condizione si ricava che esiste una funzione $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) : \mathcal{B} \times Sym^+ \rightarrow R$ tale che:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \tag{2.72}$$

Dalla (2.70) e dalla (2.72) si ottengono le seguenti *equazioni costitutive iperelastiche*:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \qquad \mathbf{S} = 2\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \qquad \boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{F}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T \tag{2.73}$$

Materiali iperelastici comprimibili

Nel seguito del presente lavoro sarà utile fare riferimento a due particolari espressioni della densità di energia elastica.

Si consideri la seguente espressione dell'energia di deformazione [51]:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = h(\mathbf{X}, \det[\mathbf{F}]) \tag{2.74}$$

dove è $h : \mathcal{B} \times R^+ \rightarrow R$. L'espressione del primo tensore di Piola-Kirchhoff si ricava applicando la (2.70):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial h(\mathbf{X}, J)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial h}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \\ &= \frac{\partial h}{\partial J} J \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \tag{2.75}$$

dalla (2.58) si ricava l'espressione del tensore di Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \frac{\partial h}{\partial J}\mathbf{I} \tag{2.76}$$

si ha quindi che la *tensione media* di Cauchy è data come:

$$p := \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial h}{\partial J} \tag{2.77}$$

Si consideri ora quest'altra espressione della densità di energia di deformazione [20]:

$$W\,(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = h\,(\mathbf{X}, J) + g\left(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{F}}\right) \tag{2.78}$$

dove $h : \mathcal{B} \times R^+ \to R$ è una funzione convessa tale che:

$$h\,(\mathbf{X}, 1) = \frac{\partial h}{\partial J}(\mathbf{X}, 1) = 0 \tag{2.79}$$

e dove $g : \mathcal{B} \times Lin \to R$ è una funzione di $\bar{\mathbf{F}} := J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}$ (cfr. par. 2.2.1) tale che:

$$g\,(\mathbf{X}, \mathbf{I}) = \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, \mathbf{I}) = 0 \tag{2.80}$$

Si ha quindi che $h\,(J)$ è la parte di energia determinata dalla variazione di volume, mentre $g\left(\bar{\mathbf{F}}\right)$ è il contributo energetico della componente distorsionale della deformazione[2].

2.5.1 Equazioni costitutive iperelastiche incrementali

Si derivi la (2.73_3) rispetto al tempo; si ottiene:

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathbb{C}\dot{\mathbf{C}} \tag{2.81}$$

Il *tensore di elasticità materiale* $\mathbb{C} \in \mathbb{L}in$ è quindi dato come:

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \tag{2.82}$$

Si indichi con $\{X_A\}_{A=1,2,3}$ un sistema di assi cartesiani nella configurazione di riferimento e con $\{x_a\}_{a=1,2,3}$ la terna corrispondente secondo φ, nella configurazione corrente. La relazione (2.68) fra $L_v\boldsymbol{\tau}$ e $\dot{\mathbf{S}}$, unitamente all'espressione di $\dot{\mathbf{C}}$ data nella (2.53) ed all'equazione incrementale (2.81), fornisce:

$$(L_v\boldsymbol{\tau})_{ab} = \left[F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\,(\mathbb{C})_{ABCD}\right] d_{cd}$$

dove si individua il *tensore di elasticità spaziale* $\mathbf{c} \in \mathbb{L}in$, di componenti:

$$c_{abcd} \circ \varphi = F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\,(\mathbb{C})_{ABCD} \tag{2.83}$$

Si ha pertanto la seguente *equazione costitutiva incrementale iperelastica*:

$$L_v\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}\mathbf{d} \tag{2.84}$$

Un legame costitutivo si dice *ipoelastico* se è definito per mezzo di equazioni incrementali non integrabili, cioè non ricavabili come derivate di un potenziale. Si dimostra che i materiali ipoelastici sono, in generale, non conservativi [88].

[2]Le condizioni di esistenza della soluzione del problema di equilibrio associato a questa espressione dell'energia di deformazione sono discusse in [20].

2.6 Isotropia

La risposta costitutiva di un materiale può mostrarsi invariante sotto alcuni moti rigidi della configurazione di riferimento; i principali aspetti della caratterizzazione matematica di questa proprietà sono richiamati nel seguente paragrafo.

2.6.1 Gruppo di simmetria materiale

Sia $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ un punto nella configurazione di riferimento di un corpo elastico. Si consideri un moto rigido di $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \ni \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^+ = \Psi(\mathbf{X}) := \mathbf{q} + \mathbf{Q}\mathbf{X} \qquad \mathbf{Q} \in Orth^+ \tag{2.85}$$

si ha che $\varphi^+ \circ \Psi = \varphi$, cioè:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi^+(\mathbf{q} + \mathbf{Q}\mathbf{X}) \tag{2.86}$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T \tag{2.87}$$

la trasformazione per il tensore di Cauchy-Green destro è quindi:

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T \tag{2.88}$$

In generale, i valori assunti dall'energia di deformazione elastica in $\mathbf{X}$ ed in $\mathbf{X}^+$ sono diversi. Si definisce *gruppo di simmetria materiale* in $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ l'insieme degli operatori ortogonali rispetto ai quali l'energia di deformazione è invariante:

$$G_{\mathbf{X}} := \left\{\mathbf{Q} \in Orth^+ \mid \bar{W}\left(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T\right) = \bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})\right\} \tag{2.89}$$

Il gruppo di simmetria materiale è definito *localmente* (in un punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$) a meno che il materiale non sia *omogeneo*, cioè sia $\bar{W}$ indipendente da $\mathbf{X}$.

Nella definizione (2.89) si è limitata ad $Orth^+$ la scelta degli elementi di $G_{\mathbf{X}}$; in effetti ha senso, come si vedrà più avanti, definire un gruppo *esteso* di simmetria materiale come:

$$G_{\mathbf{X}} := \{\mathbf{H} \in Uni \mid W(\mathbf{X}, \mathbf{F}\mathbf{H}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{F})\}$$

dove Uni è il *gruppo dei tensori unimodulari*:

$$Uni := \left\{\mathbf{H} \in Lin^+ \mid \det[\mathbf{H}] = 1\right\}$$

Problema di classificazione

Data una funzione densità di energia di deformazione, si *classifica* il materiale che la data funzione descrive in base alle caratteristiche del gruppo di simmetria materiale.

Si consideri una funzione energia di deformazione elastica del tipo (2.74):

$$W(\mathbf{F}) = h(J) \tag{2.90}$$

Si osserva che per un materiale caratterizzato da questa espressione dell'energia di deformazione, la risposta è invariante sotto qualsiasi trasformazione che non produca variazioni di volume; si ha quindi:

$$G_{\mathbf{X}} \equiv Uni \tag{2.91}$$

questo gruppo di simmetria materiale è proprio dei *fluidi*. Mentre per i *solidi* si ha:

$$G_{\mathbf{X}} \subset Orth^{+} \tag{2.92}$$

questi si distinguono a loro volta in solidi *isotropi,* per i quali è $G_{\mathbf{X}} \equiv Orth^{+}$, ed *anisotropi,* per i quali è $G_{\mathbf{X}} \subset\subset Orth^{+}$.

All'interno dei fluidi, la distinzione tra *liquidi* e *gas* non può essere fatta sulla base della nozione di gruppo di simmetria materiale. Per effettuare questa classificazione si può analizzare il comportamento del fluido sotto *deformazioni estreme* [65]. Ha infatti senso fisico supporre che se il volume si espande indefinitamente, l'energia di deformazione di un liquido cresce (si pensi al fenomeno della cavitazione), mentre quella di un gas tende a zero. Si ha quindi:

$$\begin{array}{lccc} \text{liquidi:} & J \to \infty & \Rightarrow & h(J) \to \infty \\ \text{gas:} & J \to \infty & \Rightarrow & h(J) \to 0 \end{array} \tag{2.93}$$

Tale classificazione si rivelerà utile nel presente lavoro (cfr. par. 4.5.1).

2.6.2 Funzioni isotrope

La condizione di risposta isotropa pone forti restrizioni sulla forma ammissibile per la funzione energia di deformazione elastica. Qui, come nel resto del capitolo, ci si limita a richiamare quegli elementi che saranno utilizzati in seguito.

Una funzione $\Sigma(\mathbf{K}) : Sym \to R$ si dice *isotropa* se e solo se:

$$\Sigma\left(\mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^{T}\right) = \Sigma(\mathbf{H}) \qquad \forall\, \mathbf{Q} \in Orth \tag{2.94}$$

Secondo il *teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope*, una funzione $\Sigma(\mathbf{K}) : Sym \to R$ è isotropa se e soltanto se $\Sigma(\mathbf{K})$ è funzione dei soli invarianti di $\mathbf{K} \in Sym$; cioè se e soltanto se esiste una funzione $\tilde{\Sigma} : R^3 \to R$ tale che:

$$\Sigma(\mathbf{K}) = \tilde{\Sigma}(I_{\mathbf{K}}, II_{\mathbf{K}}, III_{\mathbf{K}}) \qquad \forall\, \mathbf{K} \in Sym \tag{2.95}$$

dove $I_{\mathbf{K}} := \mathrm{tr}\mathbf{K}$, $II_{\mathbf{K}} := \frac{1}{2}\left(I_{\mathbf{K}}^2 - \mathrm{tr}\mathbf{K}^2\right)$, $III_{\mathbf{K}} := \det(\mathbf{K})$ sono gli invarianti principali di $\mathbf{K}$.

Pertanto un materiale iperelastico è isotropo se e soltanto se l'energia di deformazione elastica $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ è funzione dei soli invarianti di $\mathbf{C}$; cioè se esiste $\tilde{W} : \mathcal{B} \times R^3 \to R$ tale che:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \tilde{W}(\mathbf{X}, I_1, I_2, I_3) \tag{2.96}$$

dove $I_1 := \mathrm{tr}\mathbf{C}$, $I_2 := \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathrm{tr}\mathbf{C}^2\right)$, $I_3 := \det(\mathbf{C})$.

Si prova che se $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) : \mathcal{B} \times Lin \rightarrow R$ è isotropa, è allora possibile esprimere l'energia di deformazione elastica in funzione degli allungamenti principali λ_A; cioè esiste una funzione $\acute{W}(\mathbf{X},\lambda_1, \lambda_2,\lambda_3) : \mathcal{B} \times R^3 \rightarrow R$ tale che [57]:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \acute{W}(\mathbf{X},\lambda_1, \lambda_2,\lambda_3) \tag{2.97}$$

Ovviamente, $\acute{W}$ deve soddisfare il seguente requisito di simmetria:

$$\acute{W}(\mathbf{X},\lambda_1, \lambda_2,\lambda_3) = \acute{W}(\mathbf{X},\lambda_1, \lambda_3,\lambda_2) = \acute{W}(\mathbf{X},\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)$$

Nel caso di risposta isotropa, e soltanto in questo caso, l'energia di deformazione dipende dal moto attraverso il tensore di Cauchy-Green sinistro $\mathbf{b}$ [19]; cioè esiste una funzione $\check{W} : \mathcal{B} \times Sym^+ \rightarrow R$ tale che:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \check{W}(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \tag{2.98}$$

Infine, se il legame costitutivo è isotropo, si verifica che gli autovettori $\{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3\}$ del tensore degli sforzi di Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ (2.63) sono coincidenti con la base euleriana $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ in $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in \mathcal{S}$ (2.29).