2

Formulazione Variazionale del Problema di Contatto

Dopo avere esposto il problema del contatto unilatero con attrito come un particolare problema differenziale con valori assegnati sulla frontiera, ci accingiamo adesso a riformulare il problema in forma debole, in modo da studiarne la struttura matematica in un contesto variazionale in vista delle possibili applicazioni attraverso il metodo degli elementi finiti.

Per evitare ripetizioni, l'attenzione sarà concentrata sul problema di due corpi elastici in contatto, in quanto è possibile studiare il problema di SIGNORINI come un caso particolare.

2.1 Formulazione agli spostamenti

Si definiscono in primo luogo per ciascuno dei due corpi, individuati con il rispettivo apice, lo spazio dei vettori spostamento soluzioni $\mathcal{U}$ ed uno spazio di variazioni $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{U}^{(i)} = \boldsymbol{u}^{(i)} \,:\, \bar{\Omega}^{(i)} \to \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega^{(i)}),\ \boldsymbol{u}^{(i)} = \bar{\boldsymbol{u}}^{(i)} \text{ in } \Gamma_u^{(i)} \tag{2.1}$$

e

$$\mathcal{V}^{(i)} = \boldsymbol{w}^{(i)} \,:\, \bar{\Omega}^{(i)} \to \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{w} \in H^1(\Omega^{(i)}),\ \boldsymbol{w}^{(i)} = \boldsymbol{0} \text{ in } \Gamma_u^{(i)} \tag{2.2}$$

con $H^1(\Omega^{(i)})$ lo spazio delle funzioni con derivata distribuzionale di quadrato integrabile su $\Omega^{(i)}$. Con le definizioni (2.1) e (2.2), prendendo in considerazione i due corpi uno alla volta la forma debole dell'equilibrio si scrive

$$G^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{w}^{(i)}) := \int_{\Omega^{(i)}} \hat{\nabla} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{T}^{(i)}\, d\Omega^{(i)} - \int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{f}^{(i)}\, d\Omega^{(i)}$$
$$- \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \bar{\boldsymbol{t}}^{(i)}\, d\Gamma^{(i)} - \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{t}^{(i)}\, d\Gamma^{(i)} = 0,\ \forall \boldsymbol{w}^{(i)} \in \mathcal{V}^{(i)}. \quad (2.3)$$

Si noti che nella (2.3) gli ultimi due termini corrispondono al lavoro virtuale delle forze di superficie, che sono note su $\Gamma_\sigma^{(i)}$ mentre sono soggette alle condizioni dettate dal vincolo di contatto su $\Gamma_c^{(i)}$. In particolare l'ultimo termine rappresenta il lavoro virtuale dovuto alle forze di contatto per il corpo i.

L'espressione appropriata del problema variazionale per i due corpi può essere ottenuta sommando le espressioni in forma debole (2.3) relative all'i-mo corpo. Per semplicità di notazione indicheremo d'ora in avanti con $\boldsymbol{u}$ e con $\boldsymbol{w}$ l'insieme dei rispettivi campi vettoriali $\boldsymbol{u}^{(i)}$ e $\boldsymbol{w}^{(i)}$, cioè

$$\boldsymbol{u} \,:\, \bar{\Omega}^{(1)} \cup \bar{\Omega}^{(2)} \to \mathbb{R}^2$$
$$\boldsymbol{w} \,:\, \bar{\Omega}^{(1)} \cup \bar{\Omega}^{(2)} \to \mathbb{R}^2,$$

mentre la restrizione di $\boldsymbol{u}$ al corpo i è identicamente rappresentata da $\boldsymbol{u}^{(i)}$. Allo stesso modo, con analoga notazione, individuiamo gli spazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ come unione degli spazi $\mathcal{U}^{(i)}$ e $\mathcal{V}^{(i)}$.

E' allora possibile scrivere per l'intero sistema il seguente principio variazionale

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) &:= \sum_{i=1}^{2} G^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{w}^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega^{(i)}} \hat{\nabla} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{T}^{(i)} d\Omega^{(i)} - \int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{f}^{(i)} d\Omega^{(i)} - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \bar{\boldsymbol{t}}^{(i)} d\Gamma^{(i)} \right\} \\ &- \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Gamma_c^{(i)}} \boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \boldsymbol{t}^{(i)}\, d\Gamma^{(i)} \right\} \\ &= G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0\ \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

avendo indicato con $G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ la somma del lavoro virtuale dovuto alle tensioni nei corpi e del lavoro virtuale dovuto ai carichi applicati, mentre la scrittura $G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ rappresenta il lavoro virtuale dovuto alle azioni di contatto.

Concentriamo adesso la nostra attenzione sul termine G^c e utilizziamo la (1.22) per riscriverlo come un unico integrale sulla porzione di frontiera $\Gamma_c^{(1)}$:

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})) \right) \cdot \boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x})\, d\Gamma. \quad (2.5)$$

Osserviamo quindi che, per il problema di contatto in assenza di attrito, per la (1.12), si ha $\boldsymbol{t}^{(1)} = t_N \boldsymbol{n}^{(1)}$ così che

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = -\int_{\Gamma_c^{(1)}} t_N(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}^{(1)}(\boldsymbol{x}) \cdot \left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))\right) \, d\Gamma. \tag{2.6}$$

Infine, invochiamo il concetto di derivata direzionale $\delta(\bullet)$ con la notazione

$$\delta(\bullet(u)) := \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} [\bullet(\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{w})]. \tag{2.7}$$

Utilizzando la definizione della funzione g che descrive il distacco tra i due corpi (1.13), si può verificare facilmente che

$$\begin{aligned} \delta g(\boldsymbol{x}) &= \left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))\right) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \\ &= -\left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))\right) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sostituendo questo risultato nella (2.6) si ottiene

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} t_N(\boldsymbol{x}) \delta g(\boldsymbol{x}) \, d\Gamma, \tag{2.9}$$

fornendo un'espressione molto compatta del lavoro virtuale dovuto alle azioni di contatto.

NOTA 2.1. *I risultati ottenuti, riassunti dalla (2.4) e dalla (2.9) trovano immediata applicazione al problema di* SIGNORINI*, dopo una opportuna ridenominazione di alcune variabili. Ad esempio, $G^{int,ext}$ rappresenta in tal caso il lavoro virtuale associato al corpo deformabile. Inoltre la variazione della funzione g che misura il distacco tra il corpo e l'ostacolo rigido si semplifica nella seguente*

$$\delta g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}). \tag{2.10}$$

□

2.1.1 Scrittura come disequazione variazionale

Il problema del contatto unilatero così formulato può essere scritto in termini di *disequazione variazionale*. Per ricavare questa formulazione si introducono restrizioni sullo spazio soluzione, corrispondenti alle limitazioni cinematiche del vincolo di contatto. Scegliamo un sottospazio (vincolato) dello spazio delle soluzioni $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ definito come

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \big\{ & \boldsymbol{v} : \bar{\Omega}^{(1)} \cup \bar{\Omega}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^3 \big| \, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}, \\ & g_0(\boldsymbol{x}) + \big(\boldsymbol{v}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{x})\big) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ su } \Gamma_c^{(1)} \big\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

In altri termini, definiamo questo nuovo spazio in modo da soddisfare il vincolo $g \geq 0$ su $\Gamma_c^{(1)}$ oltre a richiedere che siano soddisfate le condizioni al contorno imposte. Osserviamo immediatamente che la funzione $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ entrambe appartenenti a $\mathcal{K}$ appartiene a $\mathcal{V}$, essendo $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sulla frontiera vincolata $\Gamma_u^{(i)}$. Basta allora sostituire la $\boldsymbol{w}$ nella (2.4) per ottenere

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) := G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2.12}$$

Esaminando in particolare il termine G^c, in cui compaiono le azioni di contatto, si ha

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} t_N(\boldsymbol{x})(\delta_v g(\boldsymbol{x}) - \delta_u g(\boldsymbol{x})) \tag{2.13}$$

con la notazione $\delta_v g(\boldsymbol{x})$ ad indicare una variazione di g nella direzione di $\boldsymbol{v}$. Studiando ancora la funzione integranda di questa equazione si ottiene

$$\begin{aligned} & t_N(\boldsymbol{x})(\delta_v g(\boldsymbol{x}) - \delta_u g(\boldsymbol{x})) \\ & \quad = \quad t_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot \big[(\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))) - (\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})))\big] \\ & \quad = \quad t_N(\boldsymbol{x}) \big[g_0 + \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))) \\ & \qquad\quad -g_0 - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})))\big] \\ & \quad = \quad t_N(\boldsymbol{x})[g_v(\boldsymbol{x}) - g_u(\boldsymbol{x})] \\ & \quad = \quad t_N(\boldsymbol{x}) g_v(\boldsymbol{x}) \\ & \quad \leq \quad 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

avendo indicato con la notazione g_v la funzione che misura il distacco g sostituendo $\boldsymbol{v}$ al posto di $\boldsymbol{u}$. La (2.14$_4$) è valida per la condizione di complementarietà espressa dalla (1.15$_3$), mentre il verso della disequazione è dato dalla definizione fatta di $\mathcal{K}$ e dalla (1.15$_1$). Sostituendo la (2.14) nella (2.13) e riscrivendo la (2.12) si ottiene la formulazione debole del problema di contatto espressa da una disequazione variazionale:

Proposizione 2.1. *Assegnate le condizioni al contorno su Γ_σ e su Γ_u, trovare $\boldsymbol{u} \in \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tale che*

$$G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \geq 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}. \tag{2.15}$$

2.1.2 Formulazione variazionale in presenza di attrito

Una formulazione variazionale del contatto con attrito può essere ricavata dalla scrittura in termini variazionali del problema di contatto tra superfici lisce. Nel caso di superfici scabre la tensione di contatto $\boldsymbol{t}^{(1)}(\boldsymbol{x})$ nell'equazione (2.6) è fornita da

$$\boldsymbol{t}^{(1)} = -t_N \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{t}_T = t_N \boldsymbol{n} + t_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha \tag{2.16}$$

Sostituendo la (2.16) nella (2.5) otteniamo

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = -\int_{\Gamma_c^{(1)}} [t_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{x})] \cdot \left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))\right) d\Gamma. \tag{2.17}$$

I termini nella (2.17) associati alla tensione normale di contatto sono trattati allo stesso modo del caso di contatto in assenza di attrito. Per i termini attritivi si può usare il concetto di variazione linearizzata $\delta(\bullet)$ come visto nella (2.7) e calcolare

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{u}_T(\boldsymbol{x}) &:= \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} [\boldsymbol{u}_T(\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{w})] \\ &= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}] \left(\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}))\right) \\ &= \delta u_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha, \end{aligned} \tag{2.18}$$

con δu_T^α le componenti di $\delta \boldsymbol{u}_T$. Sostituendo il risultato della (2.18) nella (2.17) e sfruttando nuovamente l'espressione di δg fornita dalla (2.8), otteniamo per il lavoro virtuale dovuto alle azioni di contatto la seguente espressione:

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} [t_N \delta g + \boldsymbol{t}_t \cdot \delta \boldsymbol{u}_T] d\Gamma. \tag{2.19}$$

Fatti questi sviluppi, la forma debole del problema di contatto in presenza di attrito può essere riassunta

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) := G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0, \tag{2.20}$$

con il termine G^c fornito dalla (2.19).

2.1.3 Disequazione variazionale per il problema in presenza di attrito

Anche il problema variazionale dell'attrito alla COULOMB può essere espresso in termini di una disequazione variazionale. Consideriamo nuovamente le funzioni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ assunte appartenenti ad uno spazio soluzione $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ vincolato. Ragionando come già visto per il problema in assenza di attrito, dalla (2.20) si ottiene la (2.12), e con G^c definito per la (2.19) si ha

$$G^c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} [t_N(\boldsymbol{x})(\delta_v g(\boldsymbol{x}) - \delta_u g(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{t}_T \cdot (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{u}_T)] d\Gamma \tag{2.21}$$

Come già visto il primo termine della funzione integranda, associato alle azioni normali alla superficie di contatto dà luogo ad un contributo negativo. Per utilizzare la parte attritiva dell'operatore occorre provare anzitutto l'identità

$$-\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{u}_T) - \mu t_N(\boldsymbol{u})(\|\boldsymbol{v}_T\| - \|\boldsymbol{u}_T\|) \geq 0 \tag{2.22}$$

in cui assumiamo che la legge di attrito di COULOMB sia definita dalle equazioni (1.33) e (1.34). Consideriamo adesso i casi di adesione e di slittamento separatamente al fine di verificare la (2.22). Nel caso di adesione si ha $\|\boldsymbol{t}_T\| < -\mu t_N$ e $\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{0}$, che porta a scrivere

$$\begin{aligned} & -\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{u}_T) - \mu t_N(\boldsymbol{u})(\|\boldsymbol{v}_T\| - \|\boldsymbol{u}_T\|) \\ & = \; -\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}_T - \mu t_N(\boldsymbol{u}) \|\boldsymbol{v}_T\| \\ & \geq \; -\|\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u})\| \|\boldsymbol{v}_T\| - \mu t_N(\boldsymbol{u}) \|\boldsymbol{v}_T\| \geq 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se d'altra parte avviene lo slittamento, allora

$$\|\boldsymbol{t}_T\| = -\mu t_N \quad \text{e} \quad \|\boldsymbol{u}_T\| = \lambda \|\boldsymbol{t}_T\|, \; \lambda \geq 0$$

forniscono

$$\begin{aligned} & -\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{u}_T) - \mu t_N(\boldsymbol{u})(\|\boldsymbol{v}_T\| - \|\boldsymbol{u}_T\|) \\ & = \; -\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}_T - \lambda \|\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u})\|^2 - \mu t_N(\boldsymbol{u}) \|\boldsymbol{v}_T\| + \mu t_N(\boldsymbol{u}) \lambda \|\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u})\| \\ & = \; -\boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}_T - \mu t_N(\boldsymbol{u}) \|\boldsymbol{v}_T\| \geq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Detto questo la (2.22) risulta valida per entrambe le condizioni di adesione e di slittamento. Sfruttando le (2.22), (2.19) e (2.21) scriviamo

$$\begin{aligned} & G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{t}_T(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{u}_T) d\Gamma \\ & \geq \; G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mu t_N(\boldsymbol{u})(\|\boldsymbol{v}_T\| - \|\boldsymbol{u}_T\|) d\Gamma \\ & \geq \; 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

con l'ultima disequazione nella (2.25) valida perché valgono le (2.14) che descrivono la risposta normale alla superficie di interfaccia. Se si definisce un funzionale j_c associato alla superficie di interfaccia:

$$j_c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mu t_N(\boldsymbol{u}) \|\boldsymbol{v}_T\| d\Gamma, \tag{2.26}$$

dalla (2.25) il problema di attrito alla COULOMB può essere scritto attraverso la seguente disequazione variazionale

Proposizione 2.2. *Assegnate le condizioni sulla frontiera ed i carichi agenti sui corpi $\Omega^{(1)}$ e $\Omega^{(2)}$, trovare $\boldsymbol{u} \in \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tale che*

$$G^{int,ext}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j_c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j_c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0 \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}. \tag{2.27}$$

2.1.4 Soluzione del problema di contatto in formulazione primale

Si è potuto vedere che le ipotesi di materiale linearmente elastico e di applicazione dei carichi quasi statica riconducono il problema del contatto con attrito ad un problema di minimizzazione del funzionale dell'energia potenziale totale sotto il vincolo di SIGNORINI espresso dalle (1.15) ed il vincolo di attrito alla COULOMB:

$$\Pi^{lag}(\boldsymbol{u}, \lambda_N) := \sum_{i=1}^{2} \Pi^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}) + \Pi^c(\boldsymbol{u}, \lambda_N) d\Gamma \tag{2.28}$$

con i termini $\Pi^{(i)}(\boldsymbol{u})$ che rappresentano l'energia potenziale totale associata al corpo $\Omega^{(i)}$ forniti da

$$\Pi^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}) := \int_{\Omega^{(i)}} \frac{1}{2} \boldsymbol{D}^{(i)} : \mathbb{C}^{(i)} : \boldsymbol{D}^{(i)} d\Omega - \int_{\Omega^{(i)}} \boldsymbol{f}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \bar{\boldsymbol{t}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} d\Gamma, \tag{2.29}$$

mentre l'espressione di Π^c, contributo dovuto alle azioni sulla superficie di contatto $\Gamma_c^{(1)}$ dipende dalla strategia di minimizzazione.

Quanto alle tecniche di minimizzazione si può fare riferimento alla letteratura (si veda ad esempio [29] e [23]). In particolare vengono ricordati il metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, il metodo della penalizzazione ed il metodo del Lagrangiano aumentato.

2.2 Formulazione duale condensata

Prima di affrontare in dettaglio la formulazione duale condensata, accenniamo adesso a due differenti approcci [23] per il problema di contatto di SIGNORINI nell'ambito delle ipotesi di elasticità lineare e di carichi applicati in maniera quasi-statica. In particolare sono stati proposti un principio variazionale in formulazione duale, per il quale è utilizzata una formulazione in termini di energia complementare e un principio che ricorre al funzionale misto di REISSNER in termini cioè di tensioni e spostamenti.

La formulazione duale condensata differisce profondamente da quelle trattate fino ad ora. Compaiono infatti solamente integrali sulla porzione di superficie sulla quale si ipotizza che si verifichi il contatto Γ_c ed all'interno della quale è contenuta l'effettiva superficie di contatto.

Nel problema di SIGNORINI la restrizione sui possibili cinematismi è fornita da

$$u_N - g_o \leq 0 \quad \text{su } \Gamma_c \tag{2.30}$$

La condizione che le tensioni all'interfaccia devono rispettare sono date da

$$\begin{aligned} t_N &= 0 \quad \text{se } u_N - g_o < 0 \\ t_N &\leq 0 \quad \text{se } u_N - g_o = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Combinando le condizioni sugli spostamenti e sulle tensioni di contatto si ha

$$\begin{aligned} t_N(u_N - g_o) &= 0 \\ u_N - g_o &\leq 0 \\ t_N &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nella formulazione variazionale agli spostamenti abbiamo sottolineato la struttura della condizione di contatto dal punto di vista degli spostamenti, cioè

$$t_N(v_N - u_N) \geq 0 \quad \forall v_N : \; v_N - g_o \leq 0 \tag{2.33}$$

sulla parte di frontiera Γ_c, con t_N e u_N definiti punto per punto sulla frontiera Γ_c. Concentriamo adesso l'attenzione sulla struttura duale della condizione di contatto, cioè

$$(s_N - t_N)(u_N - g_o) \geq 0 \quad \forall s_N : \; s_N \leq 0 \tag{2.34}$$

Per il problema di attrito, ricordando la convenzione sul segno per l'azione di contatto che si esplica in direzione normale, le condizioni di complementarietà diventano

$$\begin{aligned} u_T &= 0 \quad \text{se } (\|\boldsymbol{t}_T\| + \mu t_N) \leq 0 \\ u_T &= \lambda t_T \quad \text{se } (\|\boldsymbol{t}_T\| + \mu t_N) = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

e quindi

$$(t_T + \mu t_N)u_T = 0 \tag{2.36}$$

con $t_T = \|\boldsymbol{t}_T\|$. Ricordando che $\boldsymbol{u}_T = -\lambda \boldsymbol{t}_T$, relazione che descrive il parallelismo tra il vettore tensione tangenziale ed il vettore spostamento in ogni punto della superficie di contatto per cui si abbia slittamento, il problema duale di attrito si scrive:

$$(\boldsymbol{s}_T - \boldsymbol{t}_T) \cdot \boldsymbol{u}_T \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{s}_T : \; s_T + \mu t_N \leq 0 \tag{2.37}$$

Combinando la (2.34) e la (2.37) la scrittura variazionale in formulazione duale del problema di contatto con attrito alla COULOMB diventa

$$(s_N - t_N)u_N + (s_T - t_T)u_T \geq 0, \quad \forall s_N : \; s_N \leq 0, \forall s_T : \; s_T \leq \mu t_N \tag{2.38}$$

Svilupperemo adesso una formulazione variazionale che sfrutta il concetto di operatore inverso $\mathcal{G} : \; \boldsymbol{u} = \mathcal{G}(\boldsymbol{F})$ che trasforma le azioni sulla superficie di contatto in spostamenti: lo spostamento in direzione normale è determinato dalle tensioni di interfaccia t_N e $\boldsymbol{t}_T$, cioè

$$(u_N, \boldsymbol{u}_T) = \mathcal{G}(t_N, \boldsymbol{t}_T). \tag{2.39}$$

Con $\boldsymbol{p}$ indichiamo il vettore ordinato che raccoglie le azioni di contatto $(t_N, \boldsymbol{t}_T)$ in ogni punto di Γ_c. Dal momento che l'operatore $\mathcal{G}$ è lineare su $\mathcal{V}'$, detto $\boldsymbol{u}$ lo spostamento che ne deriva per effetto della forza generalizzata $\boldsymbol{F}$ può essere decomposto come segue:

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\mathcal{G}}(\boldsymbol{p}) \tag{2.40}$$

con la ovvia notazione

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \mathcal{G}(\boldsymbol{f}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{t}), \quad \hat{\mathcal{G}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{G}(t_N, \boldsymbol{t}_T). \tag{2.41}$$

La disequazione (2.38) punto per punto diventa

$$\int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot (\hat{\mathcal{G}}(\boldsymbol{p}) - \hat{\boldsymbol{g}}) \, d\Gamma \geq 0 \; \forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{K} \tag{2.42}$$

con $\hat{\boldsymbol{g}} = g_o - \hat{\boldsymbol{u}}$ e

$$\mathcal{K} = \boldsymbol{q} = (q_1, \boldsymbol{q}_2) : \; q_1 \leq 0, \; \|\boldsymbol{q}_2\| \leq \mu t_N. \tag{2.43}$$

La (2.42) rappresenta una disequazione quasi-variazionale, nel senso che il convesso in cui si ricerca la soluzione è definito dalla soluzione stessa.

Il vantaggio principale di questa formulazione è rappresentato dal fatto che il problema si presenta in forma condensata e in esso compaiono esclusivamente funzioni definite solo sulla superficie di contatto Γ_c. Il numero di funzioni incognite, passando al discreto, risulta considerevolmente più basso rispetto alla formulazione primale precedentemente analizzata. Inoltre, in piccoli spostamenti, l'operatore inverso $\mathcal{G}$ non dipende dalle forze applicate $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{p}$ e dal distacco g tra i due corpi in esame o tra il corpo elastico e l'ostacolo rigido nel caso del problema di SIGNORINI.

2.2.1 Strategia di soluzione

La difficoltà principale che presenta la soluzione della disequazione quasi-variazionale (2.42) è rappresentata dal fatto che il il convesso $\mathcal{K}$ nel quale si cerca la soluzione è dipendente dalla soluzione stessa e non è dato conoscere a priori quale dei vincoli che regolano il problema unilatero con attrito sia attivo.

Si è pertanto scelto di procedere attraverso una decomposizione del problema in due sotto-problemi da studiare in maniera indipendente in modo iterativo. Partendo da una soluzione ammissibile, con $t_N \leq 0$ ed inoltre rispettosa dell'equilibrio si comincia col ricavare le reazioni tangenziali di contatto con un assegnato valore delle reazioni normali: si tratta di risolvere la

$$(s_T - t_T)u_T \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{s}_T \in \mathbb{R}^2 : \; \|\boldsymbol{s}_T\| \leq -\mu t_N. \tag{2.44}$$

Il risultato rappresenta un dato di ingresso per il successivo problema, ricavare le azioni normali di contatto in presenza di assegnate reazioni tangenziali dovute all'attrito:

$$(s_N - t_N)(u_n - g_o) \geq 0 \quad \forall s_N \in \mathbb{R}_- \tag{2.45}$$

Il procedimento è di tipo iterativo e rappresenta il duale dell'algoritmo proposto da P. D. PANAGIOTOPOULOS in [31], basato invece su una formulazione del problema agli spostamenti e pertanto è stato nominato *D-PANA* in [5]. Una difficoltà che si pone nella formulazione duale condensata è rappresentata dal fatto che la superficie che in seguito alla deformazione elastica dei solidi entra in contatto non è nota a priori, ma rappresenta un'incognita del problema. E' pertanto necessario ipotizzare una superficie di contatto sulla quale individuare le funzioni incognite reazioni di interfaccia t_N e $\boldsymbol{t}_T$. L'effettiva estensione dell'area a contatto rappresenta un risultato dell'algoritmo iterativo ed è indipendente dall'estensione della superficie Γ_c inizialmente ipotizzata, purché sufficientemente grande da includere tutti i vincoli attivi.