

4

Applicazioni e Simulazioni Numeriche

4.1 Implementazione dell'algoritmo

Al fine di implementare l'algoritmo proposto e di convalidarne i risultati numerici sono state condotte simulazioni del problema di contatto in presenza di attrito attraverso il metodo degli elementi finiti.

Nel problema tridimensionale il continuo è stato discretizzato mediante elementi a forma di tetraedro, ed il campo di spostamento è stato scelto lineare, per i problemi piani gli elementi sono invece di forma triangolare. La discretizzazione delle funzioni incognite rappresentate dalle tensioni normali e tangenziali sulla superficie di interfaccia è stata scelta di tipo costante a tratti. E' da notare che la scelta della discretizzazione del campo di spostamento e delle incognite tensioni normali e tangenziali sulla superficie di contatto non può essere arbitraria, ma, come messo in evidenza anche in [20] è necessario che sia verificata la condizione di LADYZHENSKAYA-BABUŠKA-BREZZI. Se la discretizzazione del campo di spostamenti comporta una cinematica povera, si hanno condizioni, da evitarsi, di distribuzioni di tensioni di contatto che non compiono lavoro per il corrispondente campo di spostamenti.

Per questo motivo le tensioni all'interfaccia sono state assunte nei problemi in tre dimensioni costanti sulle facce di 8 elementi adiacenti e nei problemi in due dimensioni costanti a tratti ogni due facce contigue.

Sono stati studiati problemi di due corpi in contatto unilatero con attrito alla COULOMB ed il caso particolare del problema di SIGNORINI in cui uno dei due corpi è rappresentato da un ostacolo rigido.

Come già visto nel Capitolo 1 l'analisi prevede che i carichi vengano ap-

plicati staticamente, in modo da escludere forze di inerzia e dipendenza dal tempo. Assumendo anche un percorso di carico proporzionale il problema quasi-statico può scriversi come un problema statico.

La simulazione è stata condotta avvalendosi della formulazione duale condensata (3.1), risolvendo in cascata i due problemi di attrito e di contatto, con funzioni incognite da interpolare costituite dalle azioni normali e tangenziali sulla superficie sulla quale inizialmente si ipotizza che si verifichi il contatto. Essendo necessario identificare le facce degli elementi su $\Gamma_c^{(1)}$ e su $\Gamma_c^{(2)}$ e le incognite azioni di contatto che si scambiano la discretizzazione delle due superfici deve essere la medesima.

I problemi di minimo (3.5) e (3.6) rappresentati rispettivamente da

$$T_k = \arg \min_T \left\{ \frac{1}{2} T^t A_{TT} T + T^t (D_T + A_{TN} N_{k-1}), T \in K_{-\mu N_{k-1}} \right\};$$

e da

$$N_k = \arg \min_N \left\{ \frac{1}{2} N^t A_{NN} N + N^t (D_N + A_{NT} T_k), N \in \mathbb{R}_-^n \right\}$$

hanno soluzione unica, dal momento che i blocchi della matrice di cedevolezza condensata dell'intero corpo A_{NN} e A_{TT} sono simmetrici e definiti positivi.

Detto l_c il numero di facce in cui è stata suddivisa Γ_c ed n il numero di nodi nel magliaggio del continuo del primo corpo, la matrice di cedevolezza relativa a ciascun corpo elastico, condensata sulle sole incognite definite su Γ_c (e quindi di dimensioni $3 \times l_c, 3 \times l_c$) è stata ottenuta partendo dalla scrittura dell'energia potenziale totale per il corpo i -mo;

$$\mathcal{E}^{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)t} \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i)t} \mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i)t} \mathbf{V}^{(i)} \mathbf{r}^{(i)} \quad (4.1)$$

con $\mathbf{u}^{(i)}$ il vettore che raccoglie gradi di libertà dei nodi degli elementi in cui è stata partizionata la struttura, $\mathbf{f}^{(i)}$ il vettore delle forze nodali applicate, $\mathbf{V}^{(i)}$ la matrice che trasforma il vettore delle $3 \times l_c$ incognite azioni di contatto $\mathbf{r}^{(i)}$ nelle corrispondenti azioni nodali. I vincoli possono essere imposti sulla base dell'operatore cinematico $\mathbf{W}^{(i)}$, che raccoglie le equazioni di tutti i vincoli scrivendo formalmente che

$$\mathbf{W}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} = \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(i)} \quad (4.2)$$

e individuando i gradi di libertà nodali indipendenti \mathbf{v} attraverso la relazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \mathbf{v} + \bar{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

avendo indicato con M la matrice avente per colonne i vettori del nucleo di W e con \bar{u} una soluzione particolare della (4.3). Sostituendo la (4.3) nella (4.1) il funzionale dell'energia risulta espresso in funzione degli spostamenti nodali congruenti e delle tensioni di contatto

$$\mathcal{E}^{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{(i)t} \mathbf{K}_r^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}^{(i)t} \mathbf{f}_r^{(i)} - \mathbf{v}^{(i)t} \mathbf{V}_r^{(i)} \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{d}^{(i)t} \mathbf{r}^{(i)} + c^{(i)}, \quad (4.4)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_r &= \mathbf{M}^t \mathbf{K} \mathbf{M} \\ \mathbf{f}_r &= \mathbf{M}^t (\mathbf{f} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{V}_r &= \mathbf{M}^t \mathbf{V} \\ \mathbf{d}_r &= \mathbf{V}^t \bar{\mathbf{u}} \\ c_r &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^t \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}^t \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Per eliminare la dipendenza del funzionale misto da v ed esprimere l'energia in funzione delle sole reazioni di contatto basta imporre l'equilibrio attraverso la stazionarietà rispetto agli spostamenti nodali congruenti

$$\mathbf{K}_r^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{f}_r^{(i)} - \mathbf{V}_r^{(i)} \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

In questo modo il funzionale diventa:

$$\mathcal{E}^{(i)} = - \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}^{(i)t} \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{r}^{(i)} + \mathbf{r}^{(i)t} \mathbf{s}_o^{(i)} + c_o^{(i)} \right), \quad (4.7)$$

con la matrice di cedevolezza A che ha l'espressione

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_r^t \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{V}_r \quad (4.8)$$

e avendo posto nella (4.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_o &= \mathbf{V}_r^t \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{f}_r + \mathbf{d}_r \\ c_o &= \frac{1}{2} \mathbf{f}_r^t \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{f}_r - c_r. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nel caso in cui il corpo i presenti labilità, per potere ottenere $A^{(i)}$ attraverso l'inversione e la condensazione di $K_r^{(i)}$ è necessario imporre dei vincoli aggiuntivi che blocchino i rimanenti moti rigidi liberi. Tuttavia sarà necessario ricordare che le reazioni di tali vincoli sono nulle e non compaiono

nell'equilibrio del corpo, sotto l'azione dei carichi esterni e delle tensioni di contatto.

La partizione della matrice di cedevolezza condensata $\mathbf{A}^{(i)}$ nei blocchi

$$A_{NN}^{(i)}, A_{TT}^{(i)}, A_{NT}^{(i)} = A_{TN}^{(i) t}$$

consente di esplicitare l'espressione dello spostamento di ogni faccia dovuto all'azione delle reazioni normali e tangenziali di contatto, mentre il vettore

$$\mathbf{s}_o = \begin{pmatrix} D_N^{(i)} \\ D_T^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_N^{(i)} - g_o \\ \hat{D}_T^{(i)} \end{pmatrix}$$

a meno della dimensione della faccia a contatto rappresenta gli spostamenti rispettivamente normali e tangenziali sulle facce di contatto provocati dall'applicazione dei carichi esterni e del distacco iniziale per ogni coppia di elementi su $\Gamma_c^{(1)}$ e $\Gamma_c^{(2)}$.

4.2 Problemi “receding”

Le prime simulazioni svolte hanno avuto per oggetto di valutare la capacità dell'algoritmo di calcolare correttamente l'estensione della superficie che effettivamente viene a trovarsi in contatto in seguito alla deformazione elastica.

L'attenzione è stata pertanto rivolta a problemi di tipo *receding*, per i quali cioè, partendo da una situazione di contatto, la deformazione elastica dovuta all'applicazione dei carichi provoca il completo distacco di parte della superficie Γ_c ed allo stesso tempo lo slittamento sulla porzione di Γ_c sulla quale viene raggiunto il limite di COULOMB $-\mu N$.

4.2.1 Modello piano

E' stato preso in esame il caso di un solido di forma rettangolare, con la base parallela all'asse x di dimensioni 80 mm e l'altezza, parallela all'asse y di 40 mm . Il solido viene caricato da forze di compressione uniformemente distribuite sulla faccia superiore e sulle facce laterali pari rispettivamente a 50 e a 100 MPa . La discretizzazione è stata operata suddividendo il solido in elementi triangolari e considerando uguale il valore delle azioni di contatto agenti ogni due facce adiacenti. Considerando la simmetria rispetto all'asse y passante per il punto medio della base, è stato possibile studiare solo metà del solido.

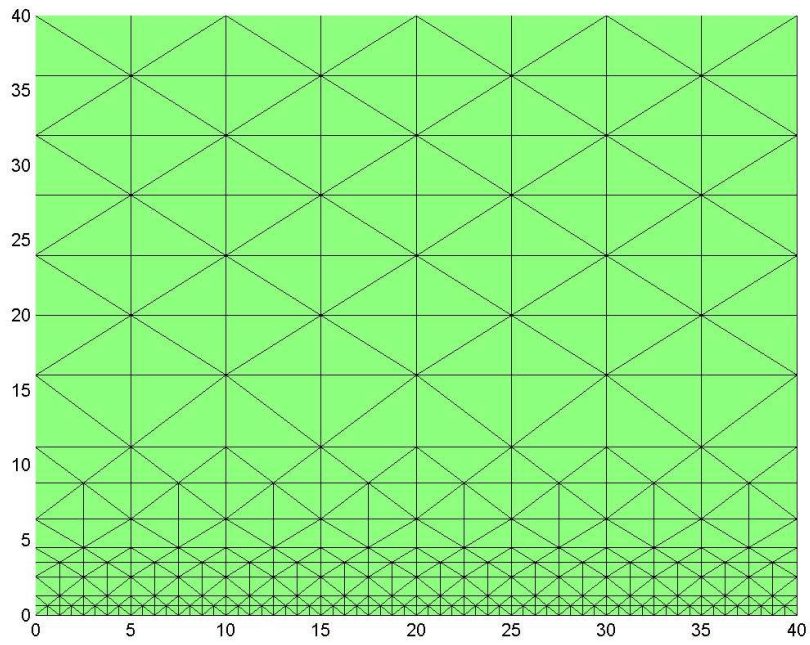
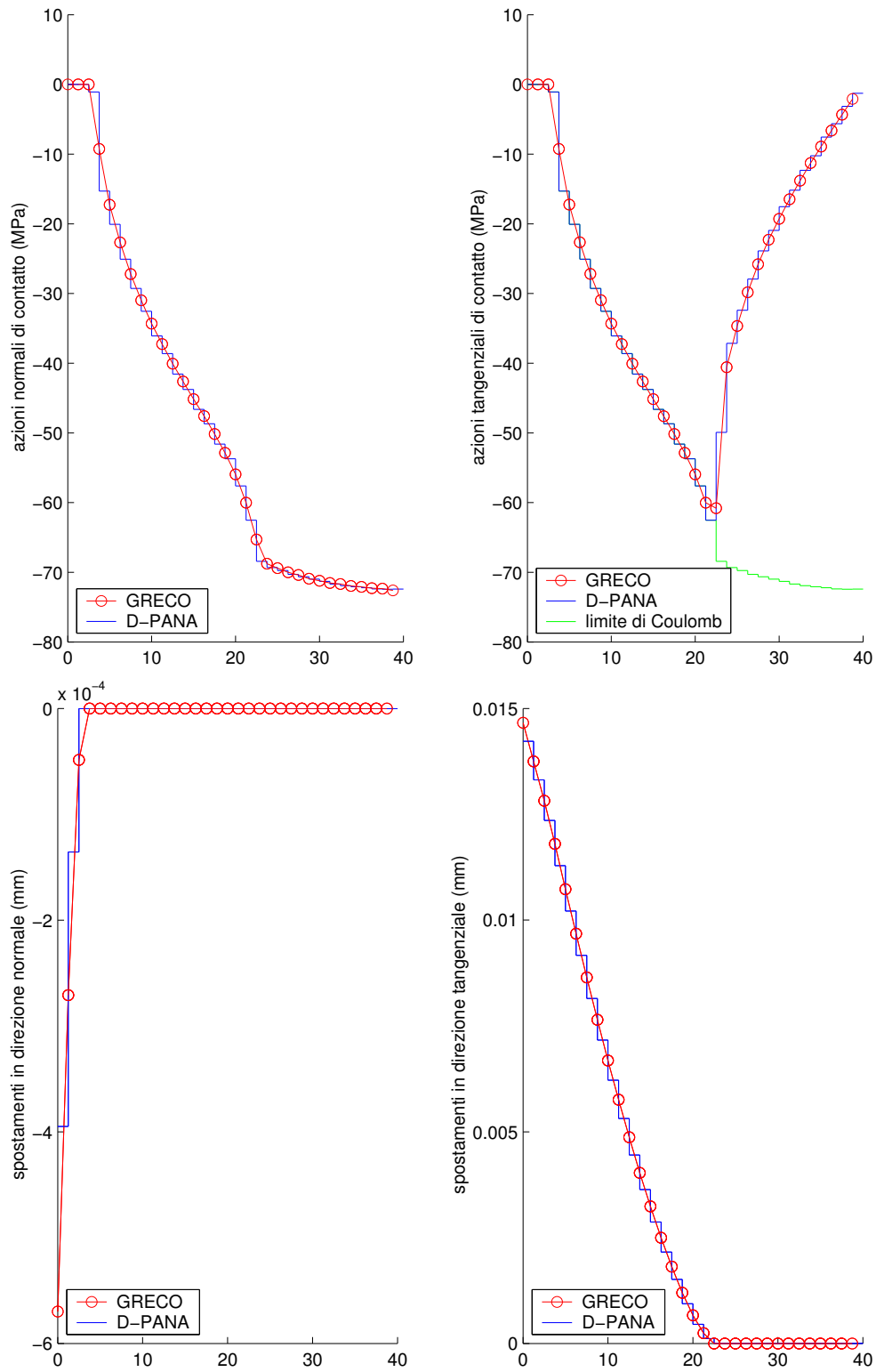


Figura 4.1: Discretizzazione del problema in due dimensioni

Il modulo di YOUNG è stato assunto pari a 130 GPa e il coefficiente di POISSON di 0.2.

I risultati in termini di azioni (Figura 4.2.1) e di componenti di spostamento (Figura 4.2.1) sulle facce degli elementi sulla superficie di contatto sono stati confrontati con quelli ottenuti per lo stesso esempio dal gruppo francese *GRECO* [33], rivelando una perfetta sovrapposizione delle curve per differenti livelli di infittimento della discretizzazione della superficie di contatto. Il risultato è ancora più rilevante se si pensa che si tratta di due formulazioni diametralmente opposte, essendo la soluzione in termini di forze nodali stata ottenuta attraverso un algoritmo avente come incognite gli spostamenti.

Figura 4.2: Confronto risultati con *benchmark*

4.2.2 Modello in tre dimensioni

Passando ad un problema in tre dimensioni la principale differenza risiede nella presenza di due componenti del vettore tensione tangenziale di contatto. Il problema di minimo (3.6), infatti, costituisce un problema di programmazione quadratica, per il quale sono disponibili nelle più diffuse librerie di calcolo codici efficienti e convalidati. Diverso è invece il caso del problema (3.5), descritto da disequazioni non più lineari come nel caso del problema in due dimensioni, pur rientrando nell'ambito dei problemi di programmazione convessa. Il convesso su cui minimizzare è infatti definito da

$$\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}} = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{A} : T_1^2 + T_2^2 \leq -\mu N_{k-1}^2\}, \quad (4.10)$$

intendendo, come già descritto, la disequazione verificata per ciascuna componente dei vettori T_1, T_2 ed N . Con l'intento di ricondursi ad un problema di programmazione quadratica si è preferito approssimare il convesso $\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}}$ con il poliedro convesso $\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}}^s$ definito come

$$\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}}^s = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{A} : T_1 \cos \alpha_i + T_2 \sin \alpha_i \leq \mu N_{k-1}, i = 1 \dots s\} \quad (4.11)$$

con

$$\alpha_i = 2(i-1)\frac{\pi}{s} \quad (4.12)$$

ed s numero naturale sufficientemente grande. Il significato di questa approssimazione appare chiaro guardando le sezioni dei convessi $\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}}$ e $\mathcal{K}_{-\mu N_{k-1}}^s$ con il piano cartesiano delle j -me componenti di T_1 e T_2 : in figura osserviamo che la sezione del primo convesso risulta essere il cerchio di raggio $-\mu N_{k-1}$, per il secondo il poligono regolare di s lati a questo circoscritto. Nelle applicazioni svolte si è scelto un valore di $s = 2^m, m \in \mathbb{N}$ aumentando il valore di m fino ad ottenere la precisione di calcolo desiderata, arrestandosi ad un valore di m pari a 4-5.

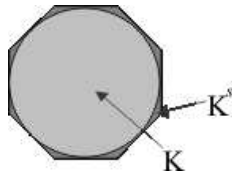


Figura 4.3: Approssimazione del convesso \mathcal{K} con \mathcal{K}^s

Il problema studiato riguarda un solido a forma di parallelepipedo di sezione di larghezza ed altezza fissate rispettivamente in 80 e 40, di lunghezza

scelta pari a 80, 160 e 320. La doppia simmetria rispetto ai piani xz e yz consentono di limitare lo studio alla quarta parte del solido, come rappresentato in Figura 4.4.

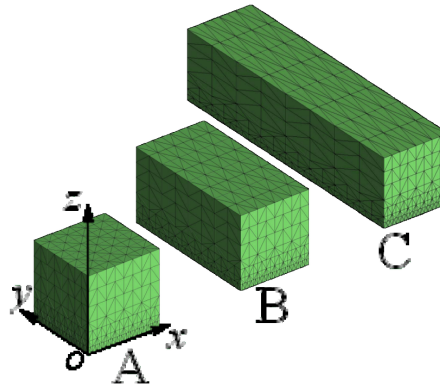


Figura 4.4: Problema tridimensionale: casi studiati

Le analisi svolte hanno avuto per obiettivo quello di convalidare i risultati ottenuti con l’algoritmo in tre dimensioni con quelli ottenuti in due dimensioni e pertanto è stato scelto un valore nullo per il coefficiente di POISSON e condizioni di carico uguali al caso precedente in due dimensioni.

Se si osservano le curve di Figura 4.5, si possono notare piccole differenze, da imputarsi unicamente al diverso rapporto di forma degli elementi tetraedrici utilizzati nella discretizzazione.

Sono presentate nel seguito le rappresentazioni grafiche delle componenti di tensione e delle componenti di spostamento sulla superficie di contatto relativamente al caso A di Figura 4.4.

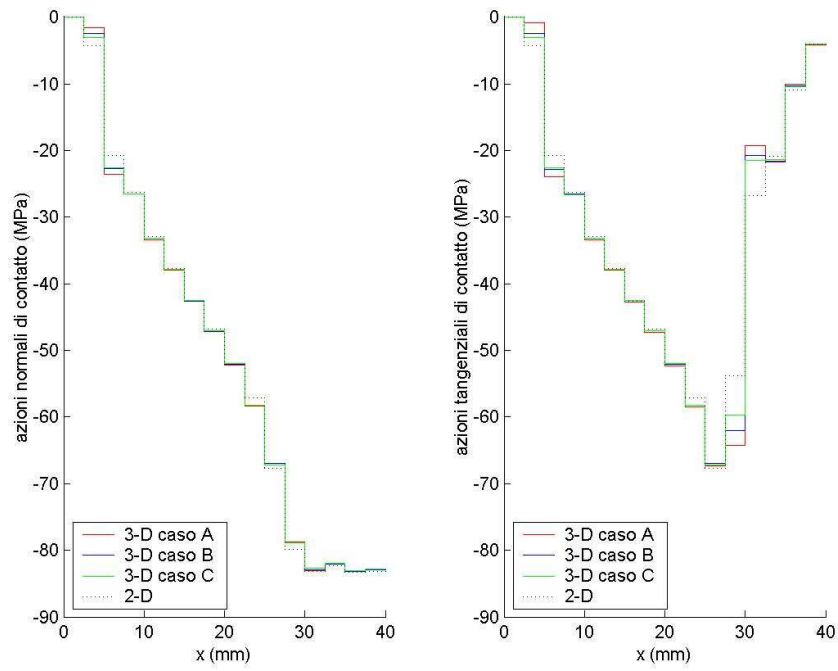


Figura 4.5: Confronto dei risultati per simulazioni 3-D e 2-D

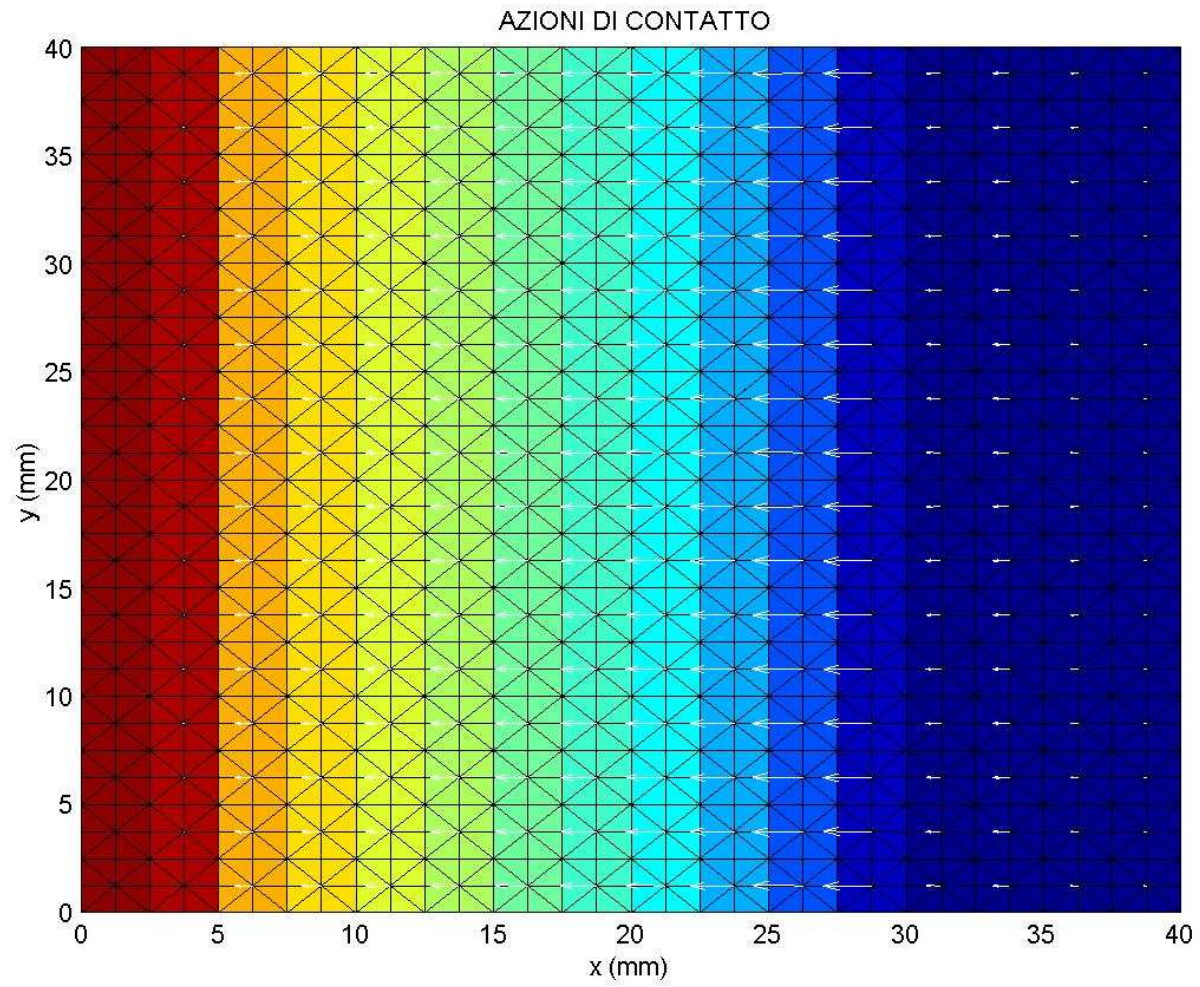


Figura 4.6: Azioni normali e tangenziali sulla superficie di contatto

In Figura 4.6 attraverso il codice dei colori è possibile riconoscere in blu le porzioni che risultano maggiormente caricate da azioni di normali di contatto, in rosso sono evidenti le zone in corrispondenza delle quali avviene il distacco e, per le condizioni di KUHN-TUCKER, risultano nulle le tensioni di contatto. Nella stessa figura sono rappresentate mediante vettori, di lunghezza proporzionale al modulo, le azioni tangenziali agenti sugli elementi. L'andamento parallelo all'asse x di tale campo vettoriale conferma che lo stato è piano.

Per quel che riguarda gli spostamenti normali e tangenziali relativi alle facce degli elementi sulla superficie di contatto, essi sono ottenuti come somma delle componenti dovute alle azioni di contatto normale e tangenziale e di quelle dovute ai carichi esterni

$$\begin{aligned} u_N &= A_{NN}N + A_{NT}T + D_N, \\ u_T &= A_{TN}N + A_{TT}T + D_T. \end{aligned} \quad (4.13)$$

I risultati ottenuti rappresentano le grandezze duali delle azioni distribuite di contatto sulla superficie di interfaccia; dividendo per l'area delle facce su cui agiscono si ottengono le componenti di spostamento, costanti a tratti per ogni faccia.

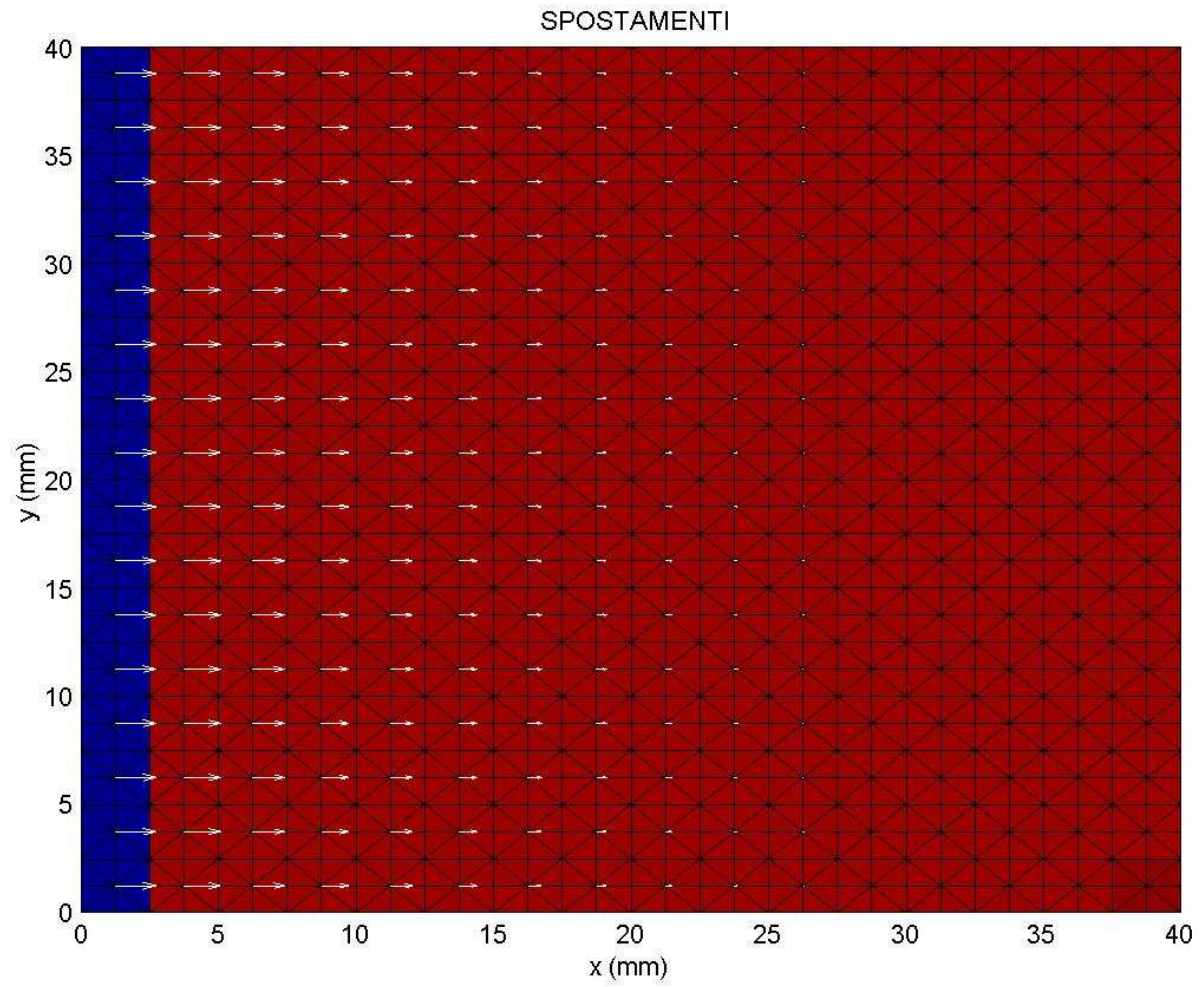


Figura 4.7: Spostamenti delle facce sulla superficie di contatto

In Figura 4.7 sono rappresentati con i colori i valori delle componenti di spostamento normale per ogni faccia e con vettori la direzione, il verso ed il valore dello spostamento tangenziale. Si nota immediatamente l'estensione della zona di perfetta aderenza, con assenza di spostamenti in direzione tangenziale, della zona di contatto con slittamento e della zona in cui avviene il distacco.

4.2.3 Problema con 2 corpi

E' stato studiato il problema in due dimensioni del contatto il un corpo di forma rettangolare descritto nel paragrafo 4.2.1 ed una fondazione questa volta deformabile elasticamente di dimensioni $160 \times 80mm$. Per la simmetria rispetto all'asse y viene modellata solo una metà dei due corpi.

Sono presenti in letteratura strategie di soluzione che prevedono di disaccoppiare la deformabilità dei due corpi, considerando alternativamente uno dei due corpi come un ostacolo rigido. Il problema affrontato in questa sede è invece di tipo accoppiato.

La scelta fatta di orientare verso l'esterno le normali \mathbf{n} e $\boldsymbol{\nu}$ alle superfici di contatto permette di studiare i problemi variazionali discretizzati (3.5) e (3.6) intendendo le condizioni di KUHN-TUCKER e di COULOMB in senso relativo, sommando i contributi allo spostamento in direzione normale e tangenziale relativi al primo ed al secondo corpo. Infatti risulta:

$$\Delta u_N = A_{NN}^{(1)}N + A_{NT}^{(1)}T + D_N^{(1)} + A_{NN}^{(2)}N + A_{NT}^{(2)}T + D_N^{(2)}, \quad (4.14)$$

e

$$\Delta u_T = A_{TN}^{(1)}N + A_{TT}^{(1)}T + D_T^{(1)} + A_{TN}^{(2)}N + A_{TT}^{(2)}T + D_T^{(2)}. \quad (4.15)$$

Con N e T sono stati indicati i vettori che raccolgono le coppie di azioni di contatto incognite che i due corpi si scambiano, avendo associato, nell'ambito del contatto *receding*, le facce di $\Gamma_c^{(1)}$ e di $\Gamma_c^{(2)}$ che sono a contatto inizialmente e che in seguito all'applicazione dei carichi possono distaccarsi.

Risulta quindi

$$\begin{aligned} A_{NN} &= A_{NN}^{(1)} + A_{NN}^{(2)} & A_{TT} &= A_{TT}^{(1)} + A_{TT}^{(2)} & A_{NT} &= A_{NT}^{(1)} + A_{NT}^{(2)} \\ \hat{D}_N &= \hat{D}_N^{(1)} + \hat{D}_N^{(2)} & \hat{D}_T &= \hat{D}_T^{(1)} + \hat{D}_T^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

con

$$D_N = \hat{D}_N - g_o \text{ e } D_T = \hat{D}_T.$$

Assegnando rispettivamente un rapporto tendente a zero e di circa 10^3 tra il modulo di YOUNG del corpo $\Omega^{(1)}$ e del corpo $\Omega^{(2)}$ si ricade nel caso del problema di SIGNORINI con fondazione rigida oppure nel caso di un punzonatore rigido a faccia piana. Sono stati studiati il caso di contatto tra superfici lisce ed il caso di contatto tra superfici scabre con coefficiente di attrito $\mu = 1$, valore per altro puramente accademico.

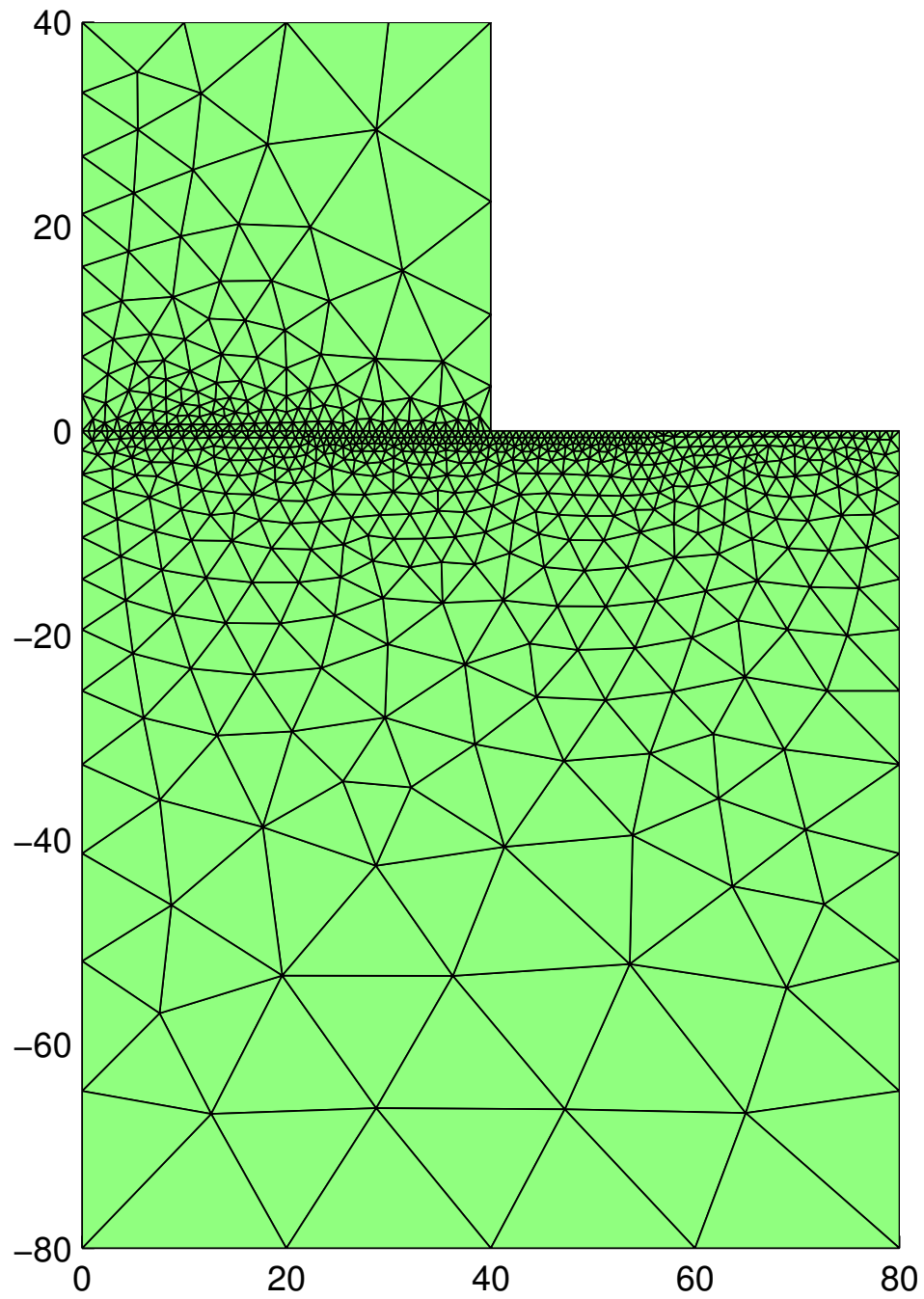


Figura 4.8: Discretizzazione del problema in due dimensioni

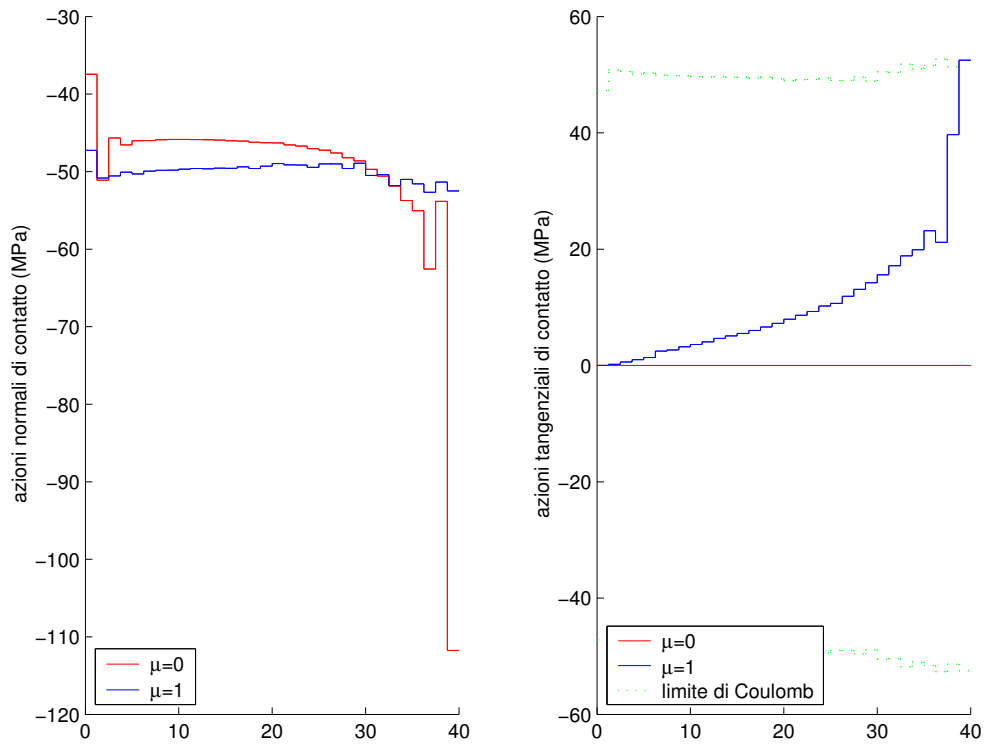


Figura 4.9: Discretizzazione del problema in due dimensioni

Una volta note l'estensione della zona di contatto, le tensioni all'interfaccia e gli spostamenti delle facce del corpo $\Omega^{(2)}$ assume valore noto lo spostamento imposto dal vincolo fittizio per bloccare i moti rigidi del corpo $\Omega^{(1)}$ e pertanto risultano noti anche gli spostamenti delle facce del corpo 1. Per le condizioni di carico descritte nel paragrafo 4.2.1 le due superfici rimangono a contatto senza slittamento alcuno.

4.3 Problemi “increasing”

Fino a questo momento sono stati affrontati problemi in cui, nota la parte di frontiera sulla quale può aversi il contatto Γ_c , in seguito alla deformazione dei corpi si ha il distacco di una porzione di superficie inizialmente in contatto prima dell'applicazione dei carichi. Solo in parte differente risulta la situazione in cui la superficie iniziale di contatto è limitata, fino a ridursi anche ad un solo punto, mentre l'applicazione dei carichi provoca una deformazione del corpo che porta ad un incremento dell'estensione della superficie su cui agiscono le tensioni di contatto. Dal momento che gli spostamenti dei punti dei corpi in seguito alla deformazione sono piccoli, è consentito considerare per essi le stesse proprietà di rigidità valutate nella configurazione indeformata. L'equilibrio, tuttavia, andrà scritto supponendo che parte della frontiera $\Gamma_c^{(1)}$ sia entrata in contatto con $\Gamma_c^{(2)}$ superando, in seguito alla deformazione, il distacco iniziale g_o .

La strategia di soluzione prevede di ipotizzare una superficie iniziale di contatto per i corpi deformati, rappresentata dal piano tangente nel punto di contatto geometrico dei corpi indeformati. Il versore n rappresenta la normale a tale piano e pertanto ad esso, ricordando le definizioni (1.9), (1.12) e (1.28) vanno riferiti il distacco tra i due corpi e le tensioni normali e tangenziali. Nell'ipotesi che la superficie inizialmente ipotizzata abbia estensione sufficiente a comprendere tutti i vincoli che risulteranno attivi a deformazione avvenuta, l'algoritmo previsto per il contatto *receding* può essere ugualmente impiegato, ricercando in questo caso la porzione di superficie ipotizzata a contatto per la quale si verifica il distacco.

Aspetto fondamentale dell'algoritmo è rappresentato dal fatto che la soluzione in termini di tensioni di contatto e quindi l'estensione della zona di contatto, come anche gli spostamenti delle facce, non dipendano dalla superficie di contatto Γ_c ipotizzata inizialmente, purché, è bene ricordarlo, questa sia sufficientemente grande da comprendere i vincoli che si attivano.

E' da osservare che, anche in questo caso, il problema di SIGNORINI rap-

presenta una particolarizzazione, prevedendo che il corpo $\Omega^{(2)}$ che fa da fondazione sia molto più rigido del corpo $\Omega^{(1)}$. Per questo tipo di problema le relazioni (4.13₁) e (4.13₂) rappresentano gli spostamenti assoluti delle facce degli elementi di $\Gamma_c^{(1)}$.

E' stato quindi studiato il problema hertziano piano del contatto tra due corpi di forma circolare. La prima applicazione, riguarda il caso in cui il raggio di curvatura della fondazione ha valore infinito e pertanto la superficie di contatto iniziale è rappresentata dal piano orizzontale, nei casi di fondazione rigida alla SIGNORINI e deformabile e pertanto da modellare (Fig. 4.10). Il materiale è elastico lineare, con modulo di YOUNG $E = 130\text{ GPa}$ e coefficiente di POISSON $\nu = 0.2$. Il corpo circolare è caricato lungo l'asse di simmetria y con una forza di compressione concentrata di 200 kN .

Nelle Tabelle 4.3 e 4.3 sono riportati il valore della massima tensione normale e dell'estensione della superficie di contatto rispettivamente per fondazione rigida e deformabile, confrontando i valori ottenuti in assenza ed in presenza di attrito con i risultati della teoria di HERTZ [37] che prevede in assenza di attrito il valore massimo della tensione normale N_{MAX} e la semiampiezza a definiti da

$$N_{MAX} = \frac{2P'}{\pi a} \quad (4.17)$$

e da

$$a = \sqrt{\frac{4P'(k^{(1)} + k^{(2)})R^{(1)}R^{(2)}}{R^{(1)} + R^{(2)}}} \quad (4.18)$$

con $R^{(i)}$ e $k^{(i)} = (1 - \nu^{(i)2})/(\pi E^{(i)})$ rispettivamente il raggio e la rigidezza del cilindro i -mo.

	$\mu = 1$	$\mu = 0$	HERTZ
$N_{MAX} \cdot 10^4 (MPa)$	1.0571	1.0576	1.0381
$a(mm)$	11.97	11.97	12.26

Tabella 4.1: Confronto con la soluzione di HERTZ - $E^{(1)}/E^{(2)} = 1$

E' inoltre riportato in Tabella 4.3 il risultato relativo al problema di medesima geometria, ma con il corpo circolare caratterizzato da modulo di YOUNG tale da caratterizzarlo come “infinitamente rigido” rispetto alla fondazione. Il problema corrisponde a quello di un punzonatore rigido.

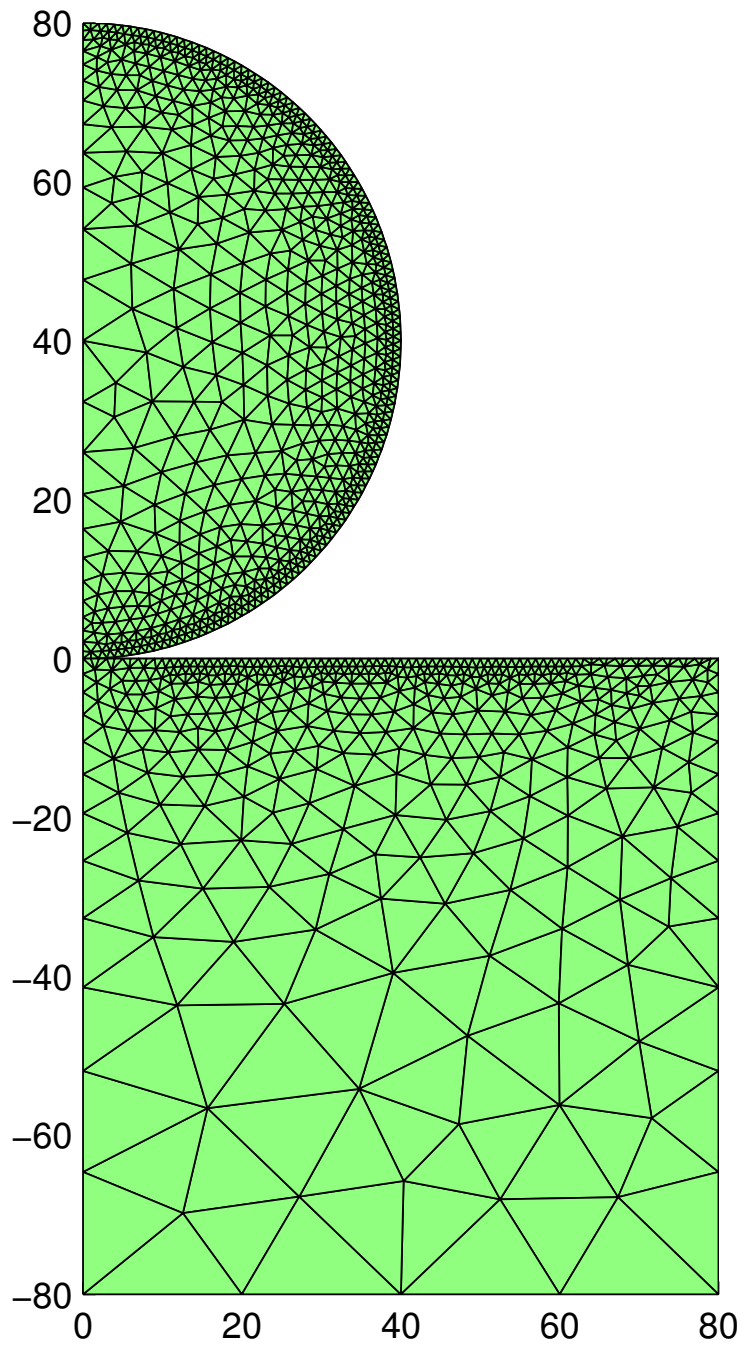


Figura 4.10: Discretizzazione del problema in due dimensioni

	$\mu = 1$	$\mu = 0$	HERTZ
$N_{MAX} \cdot 10^4 (MPa)$	1.6119	1.4892	1.4673
$a (MPa)$	7.98	7.98	8.68

Tabella 4.2: Confronto con la soluzione di HERTZ - fondazione rigida:
 $E^{(1)}/E^{(2)} = 10^{-3}$

	$\mu = 1$	$\mu = 0$	HERTZ
$N_{MAX} \cdot 10^4 (MPa)$	1.6329	1.4904	1.4673
$a (mm)$	7.98	7.98	8.68

Tabella 4.3: Confronto con la soluzione di HERTZ - punzonatore rigido:
 $E^{(1)}/E^{(2)} = 10^3$

Nelle pagine seguenti si ritrovano i diagrammi di tensione e di spostamento per le facce sulla superficie di contatto nei tre esempi sopra esposti e sono anche rappresentate le corrispondenti configurazioni a deformazione avvenuta. Per ciascun diagramma sono stati presi in considerazione il caso di contatto tra superfici lisce e di attrito alla COULOMB con coefficiente di attrito pari a 1.

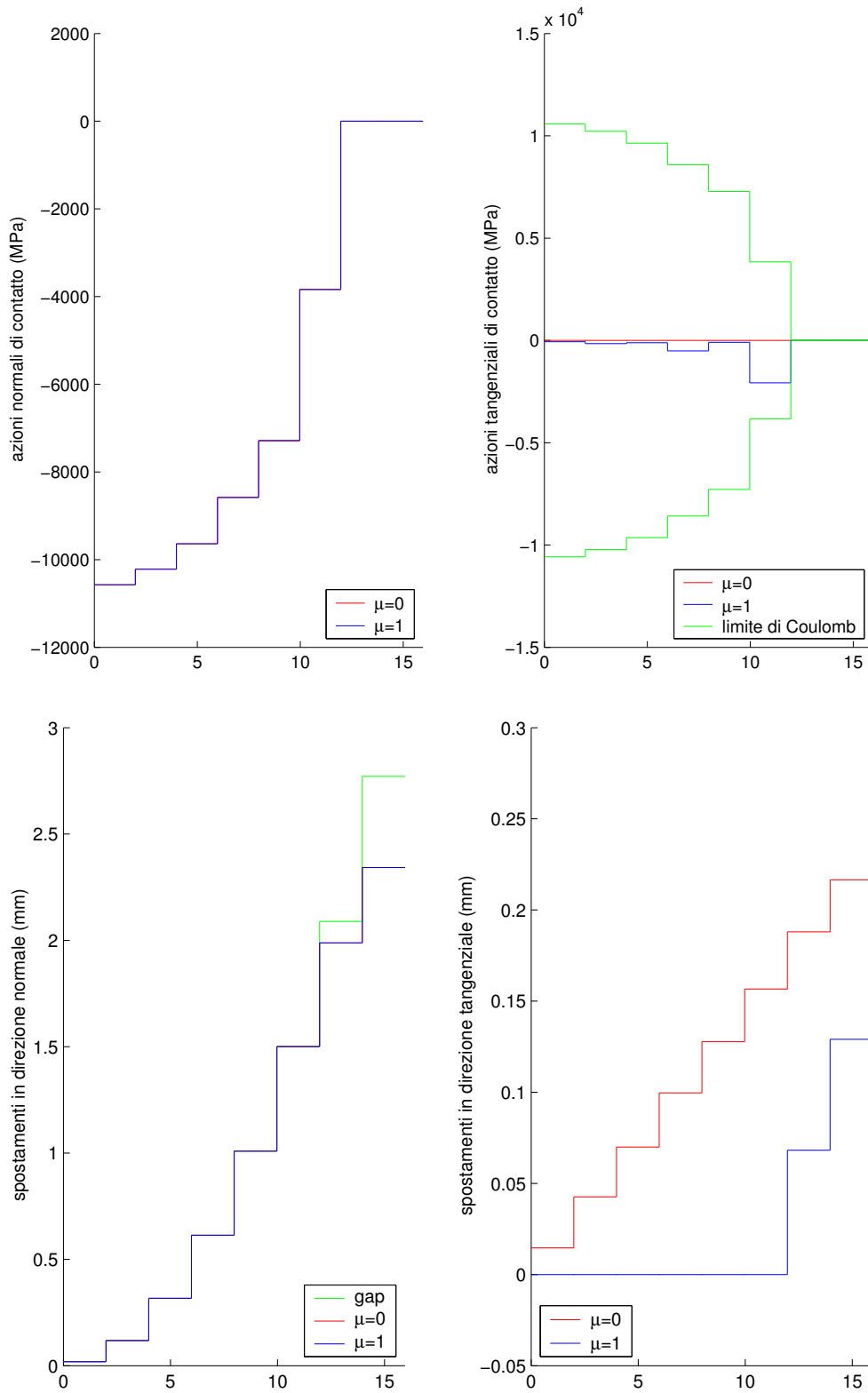


Figura 4.11: Risultati per $E^{(1)}/E^{(2)} = 1$

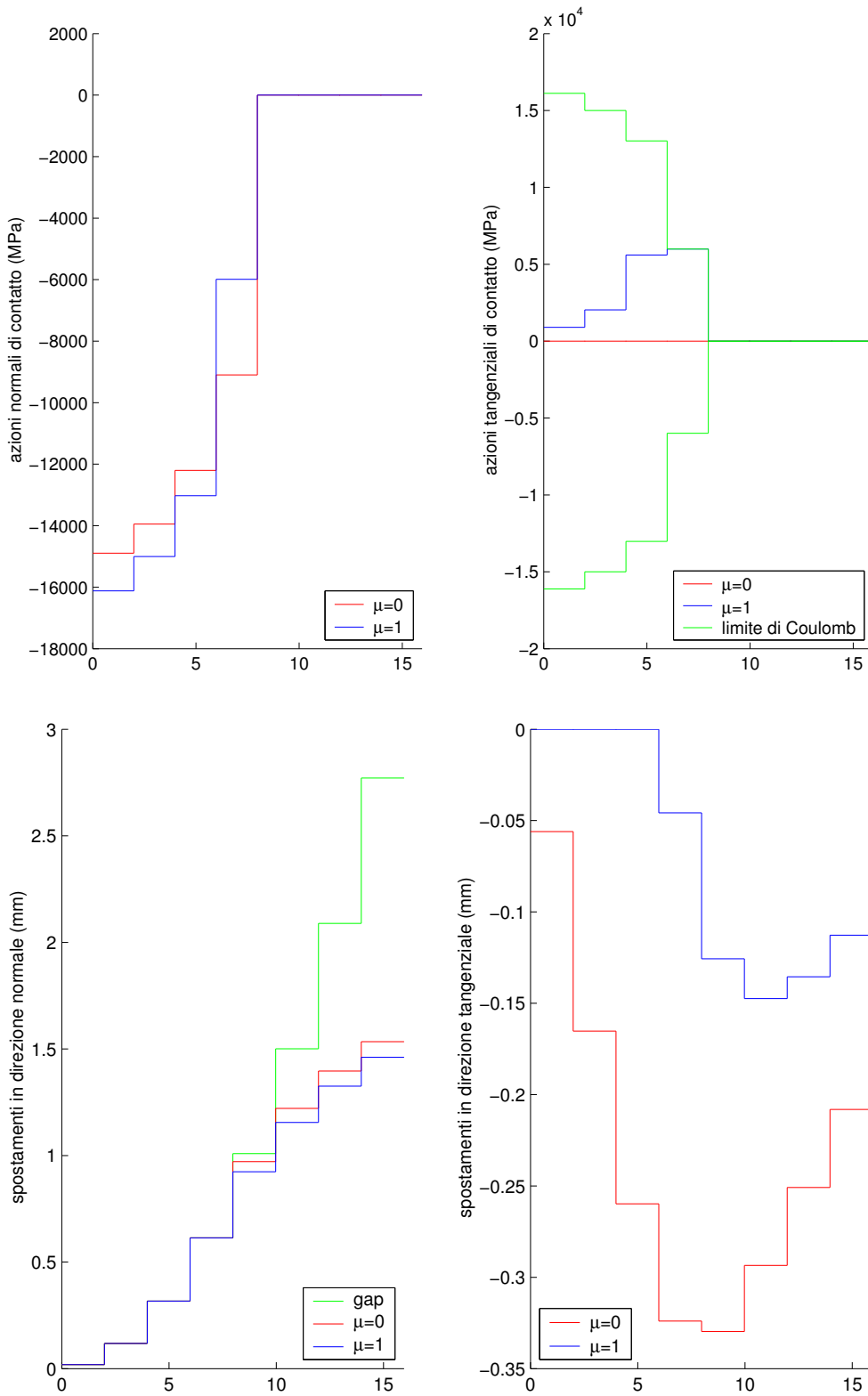


Figura 4.12: Risultati per $E^{(1)}/E^{(2)} = 10^{-3}$

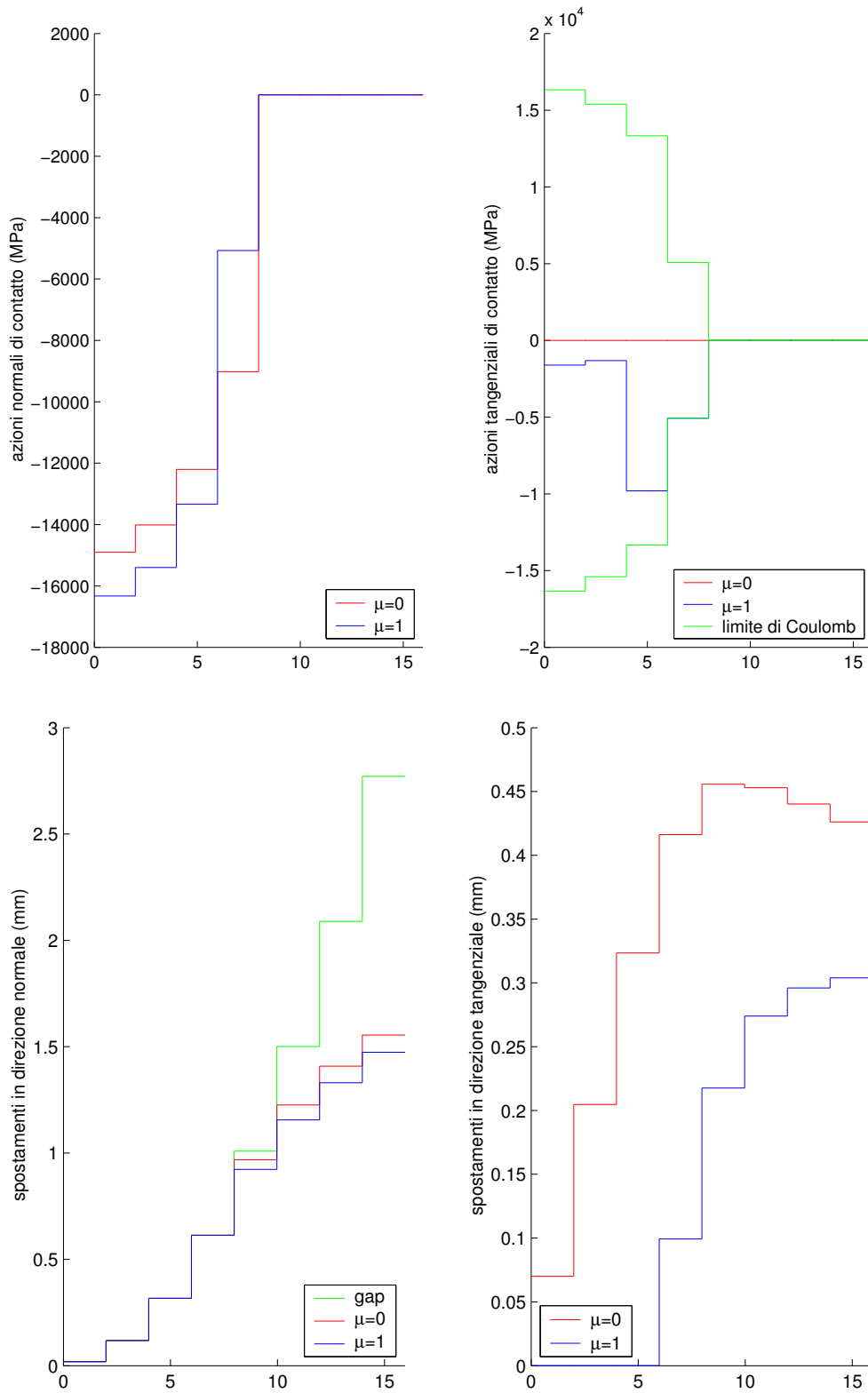
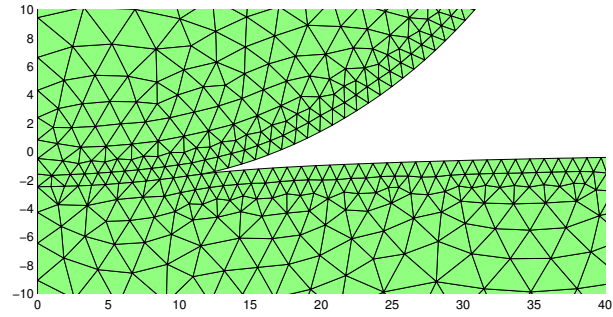
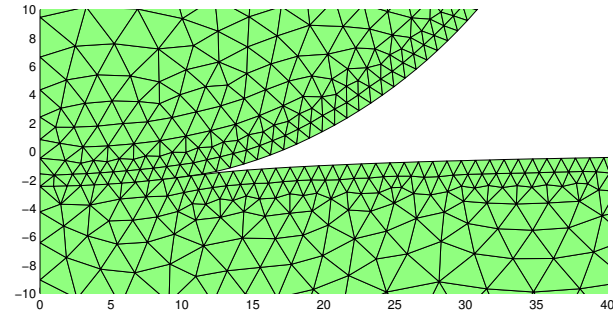


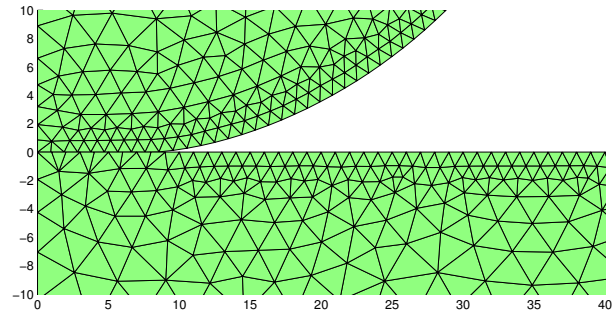
Figura 4.13: Risultati per $E^{(1)}/E^{(2)} = 10^3$



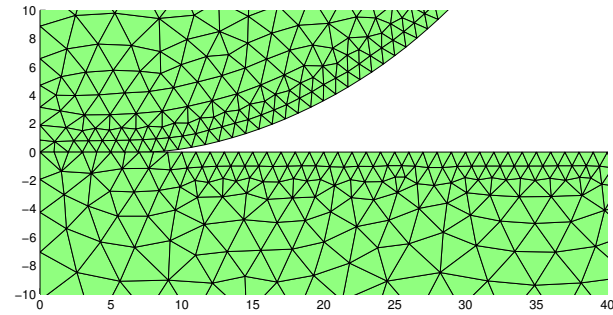
$$E^{(1)}/E^{(2)} = 1 \quad \mu = 0$$



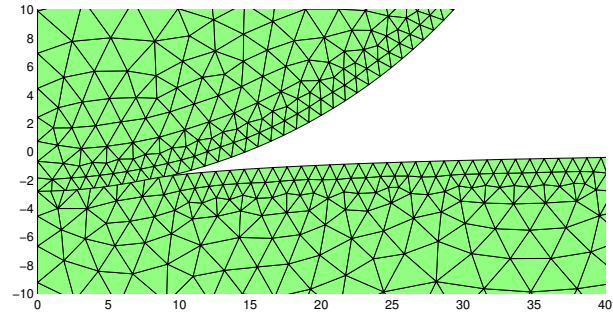
$$E^{(1)}/E^{(2)} = 1 \quad \mu = 1$$



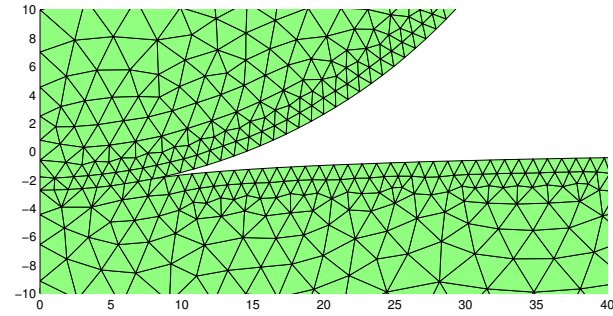
$$E^{(1)}/E^{(2)} = 10^{-3} \quad \mu = 0$$



$$E^{(1)}/E^{(2)} = 10^{-3} \quad \mu = 1$$



$$E^{(1)}/E^{(2)} = 10^3 \quad \mu = 0$$



$$E^{(1)}/E^{(2)} = 10^3 \quad \mu = 1$$

Figura 4.14: Configurazione deformata

Un ultimo esempio studiato, infine, è rappresentato dal contatto di un corpo deformabile circolare di raggio $R^{(1)} = 40mm$ con una cavità anch'essa circolare di raggio $R^{(2)} = 120mm$. Il modulo di rigidezza longitudinale in questi casi è stato scelto uguale per entrambi i corpi e pari a $130GPa$.

Il solido circolare è caricato lungo l'asse di simmetria da una forza concentrata di compressione $F = 200kN$. Per la simmetria del problema lo studio riguarda solamente metà del modello.

In Tabella 4.3 e nelle pagine seguenti sono riportati e raffigurati i valori delle tensioni di contatto, nonché degli spostamenti relativi tra le facce corrispondenti e la configurazione deformata per il problema in esame.

	$\mu = 1$	$\mu = 0$	HERTZ
$N_{MAX} \cdot 10^3 (MPa)$	9.1427	8.9146	8.4759
$a(mm)$	13.96	13.96	15.02

Tabella 4.4: Confronto con la soluzione di HERTZ $E^{(1)}/E^{(2)} = 1$

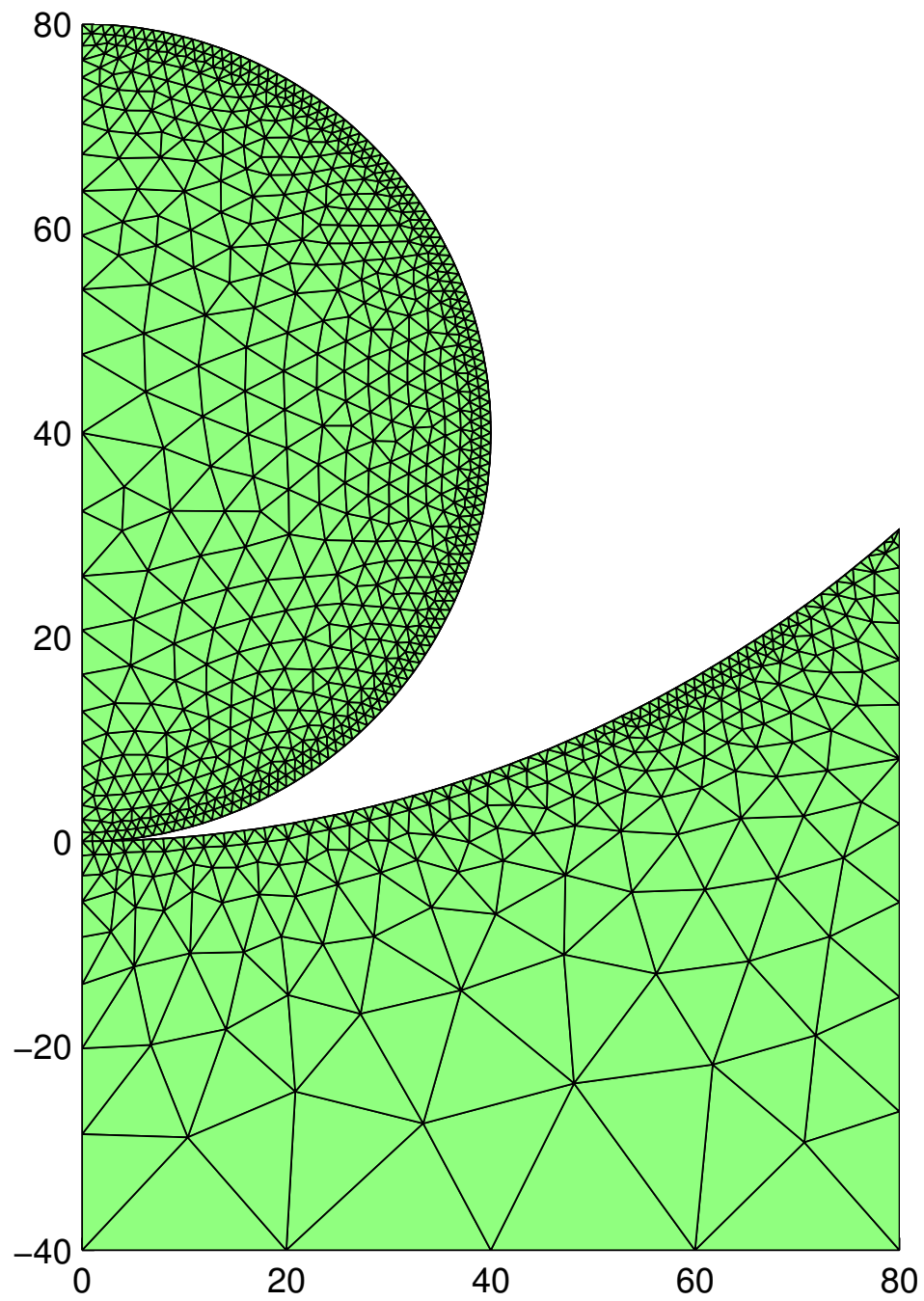


Figura 4.15: Discretizzazione del problema in due dimensioni

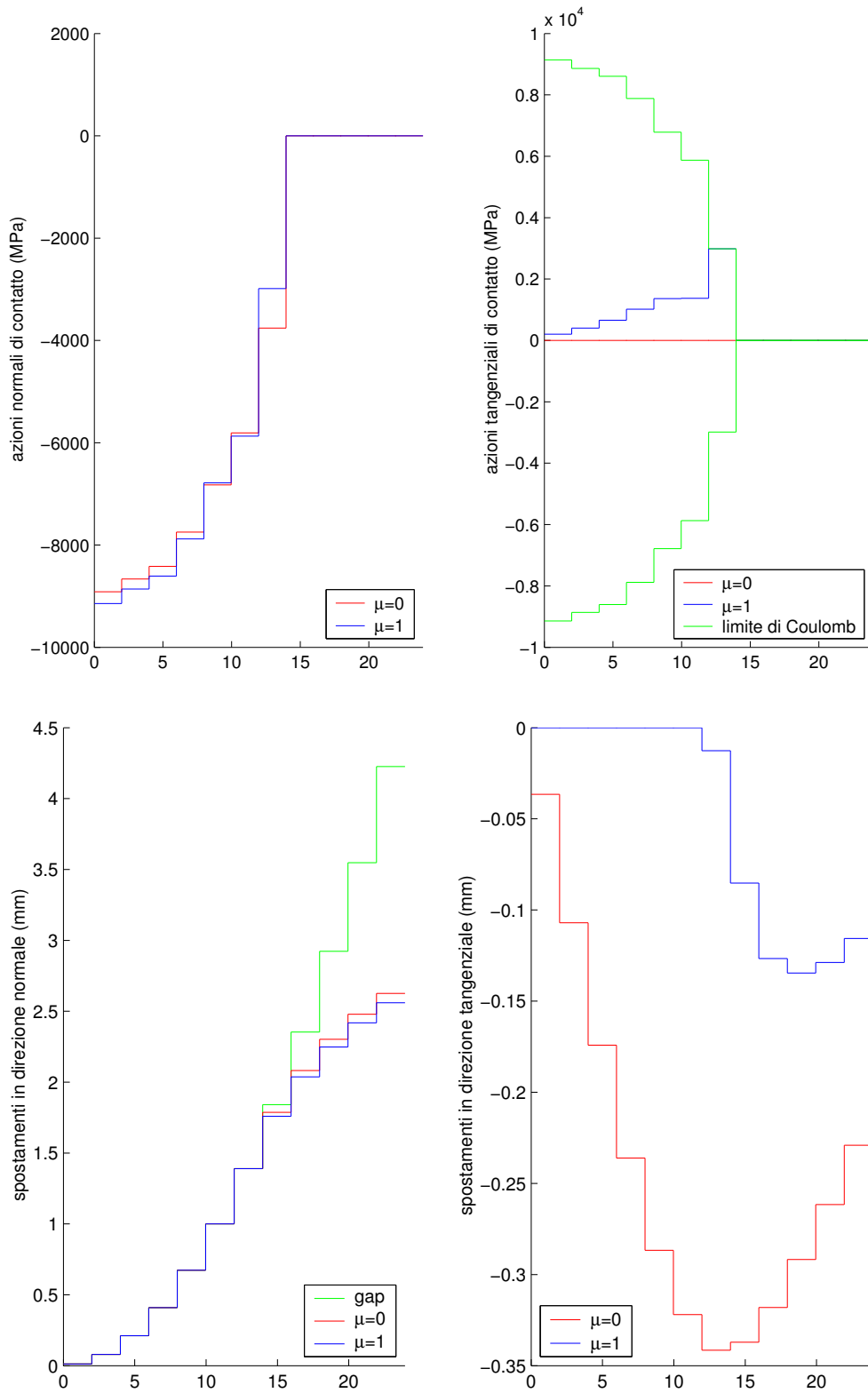


Figura 4.16: Risultati per $E^{(1)}/E^{(2)} = 1$

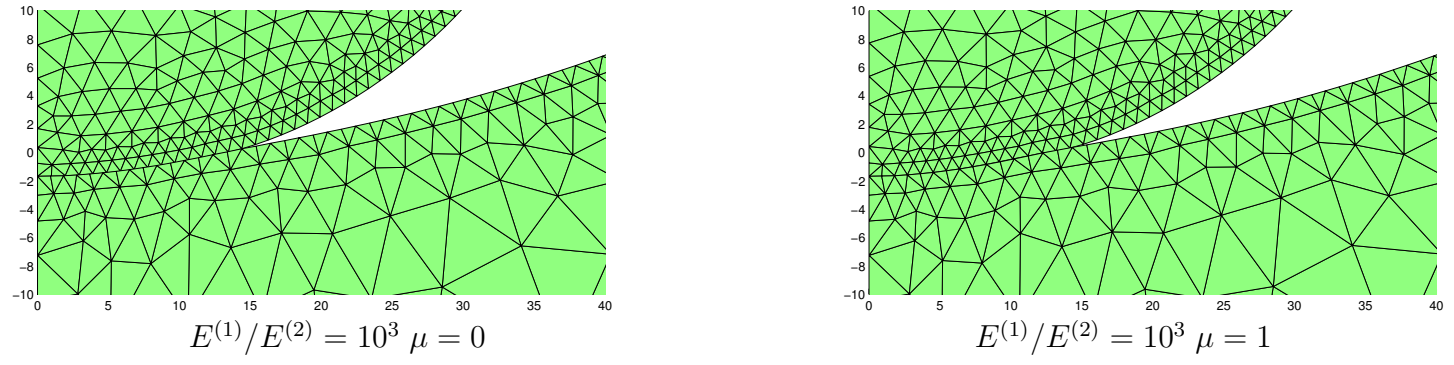


Figura 4.17: Configurazione deformata