Appendice A

Calcolo di $\mathbf{R}'$

La soluzione dell'algoritmo di *return mapping* formulato nel par. 5.3.1 è ottenuta impiegando la procedura di Newton (5.47), la cui implementazione richiede il calcolo del gradiente:

$$\mathbf{R}' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{A.1}$$

dove $\boldsymbol{\chi}$ è il vettore delle incognite:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \breve{p} \\ \breve{p}_c \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

ed $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi})$ il vettore dei residui:

$$R_1 = \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right) = \frac{3}{2}\frac{\|\mathbf{t}\|^2}{M^2} + \breve{p}\left(\breve{p} - \breve{p}_c\right) \tag{A.3}$$

$$R_2 = ghl - \breve{p} \tag{A.4}$$

$$R_3 = \breve{p}_{c,n} \exp\left[\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}}\Delta\gamma\left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\right] - \breve{p}_c \tag{A.5}$$

Il calcolo della matrice $\mathbf{R}'$ è svolto nella seguente maniera:

Derivate del residuo R_1

Si considerano i termini della $\mathbf{R}'$ ottenuti derivando la funzione di snervamento (A.3); il primo di questi è:

$$R'_{11} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} \tag{A.6}$$

Si derivano la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbf{t}^{tr}\left(\frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma}m + \frac{\partial m}{\partial \Delta\gamma}h\right) \tag{A.7}$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{\breve{k}}h\left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right) \tag{A.8}$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \Delta\gamma} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} g \left(h + \Delta\gamma \frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} \right) \tag{A.9}$$

si sostituiscono la (A.9) e la (A.8) nella (A.7); si nota inoltre che, per effetto della posizione (5.37), la (5.30) può essere scritta:

$$\mathbf{t}^{tr} = 2\alpha g \mathbf{e}^{e,tr} \tag{A.10}$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} = \left(-\frac{1}{\breve{k}} h a_1 a_2 + a_3 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \tag{A.11}$$

dove:

$$a_1 = 2\breve{p} - \breve{p}_c \tag{A.12}$$

$$a_2 = 2\alpha g m \left(1 - \frac{6\alpha}{M^2} m g h \Delta\gamma \right) \tag{A.13}$$

$$a_3 = -\frac{12\alpha^2}{M^2} (mgh)^2 \tag{A.14}$$

Si sostituiscono la (A.11) e la (4.56_2) nella (A.6) e si ricava il termine cercato:

$$R'_{11} = a_4 a_5 \left(a_3 - \frac{1}{\breve{k}} h a_1 a_2 \right) \tag{A.15}$$

dove:

$$a_4 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{A.16}$$

$$a_5 = \frac{3}{M^2} \tag{A.17}$$

Si calcola ora la quantità:

$$R'_{12} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}} = 2\breve{p} - \breve{p}_c + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}} \tag{A.18}$$

a tal fine, si derivano la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}} = \mathbf{t}^{tr} \left(\frac{\partial h}{\partial \breve{p}} m + \frac{\partial m}{\partial \breve{p}} h \right) \tag{A.19}$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \breve{p}} = -\frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} h \tag{A.20}$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \breve{p}} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma \, g \frac{\partial h}{\partial \breve{p}} \tag{A.21}$$

si sostituiscono questa relazione e la (A.20) nella (A.19), tenendo conto della (A.10). Si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}} = -\frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} h a_2 \mathbf{e}^{e,tr} \tag{A.22}$$

Per ricavare R'_{12}, si sostituisce la precedente equazione e la (4.56_2) nella (A.18):

$$R'_{12} = a_1 - \frac{6\Delta\gamma}{\breve{k}M^2} h a_2 a_4 \tag{A.23}$$

Si calcola ora il terzo termine:

$$R'_{13} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}_c} = -\breve{p} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}_c} \tag{A.24}$$

è quindi necessario derivare la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}_c} = \mathbf{t}^{tr} \left(\frac{\partial h}{\partial \breve{p}_c} m + \frac{\partial m}{\partial \breve{p}_c} h \right) \tag{A.25}$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \breve{p}_c} = \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} h \tag{A.26}$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \breve{p}_c} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma \, g \frac{\partial h}{\partial \breve{p}_c} \tag{A.27}$$

si sostituiscono questa relazione e la (A.26) nella (A.25), tenendo conto della (A.10); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}_c} = \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} h a_2 \mathbf{e}^{e,tr} \tag{A.28}$$

Il termine cercato si calcola sostituendo la precedente equazione e la (4.56_2) nella (A.24):

$$R'_{13} = -\breve{p} + \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} h a_2 a_4 a_5 \tag{A.29}$$

Derivate del residuo R_2

Si considerano i termini della $\mathbf{R}'$ ottenuti per derivazione della (A.4); il primo di questi è:

$$R'_{21} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta\gamma} = g \left(\frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} l + \frac{\partial l}{\partial \Delta\gamma} h \right) + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} \tag{A.30}$$

si deriva la (5.39) rispetto a $\Delta\gamma$:

$$\frac{\partial l}{\partial \Delta\gamma} = \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2} \left(\frac{3}{M^2} \Delta\gamma \left\| \mathbf{t} \right\|^2 - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \right) \tag{A.31}$$

la (A.4) e la (5.39) rispetto a $\mathbf{t}$:

$$\frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} = gh\frac{\partial l}{\partial \mathbf{t}} \tag{A.32}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{t}} = \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\Delta\gamma\left(\frac{3}{M^2}\Delta\gamma\mathbf{t} - \mathbf{e}^{e,tr}\right) \tag{A.33}$$

si sostituisce quest'ultima equazione in quella che la precede:

$$\frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} = \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\Delta\gamma\, gh\left(\frac{3}{M^2}\Delta\gamma\mathbf{t} - \mathbf{e}^{e,tr}\right) \tag{A.34}$$

e questa, a sua volta, nella (A.30), unitamente alle (A.8, A.31, A.11); si ricava:

$$R'_{21} = \frac{1}{\breve{k}}gh\left(\breve{k}a_6 - la_1 - \frac{1}{\breve{k}}ha_1a_2b_1 + a_3b_1\right) \tag{A.35}$$

dove:

$$a_6 = \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\left(\frac{3}{M^2}\Delta\gamma\left\|\mathbf{t}\right\|^2 - \mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr}\right) \tag{A.36}$$

$$a_7 = \frac{18\alpha}{\breve{k}M^4}\Delta\gamma^2 \tag{A.37}$$

$$b_1 = \breve{k}a_7a_4 - \frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2 \tag{A.38}$$

Si consideri ora il termine:

$$R'_{22} = \frac{\partial R_2}{\partial \breve{p}} = gl\frac{\partial h}{\partial \breve{p}} - 1 + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}}\cdot\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}} \tag{A.39}$$

Si sostituiscono in questa equazione le (A.20, A.34, A.22); si ha:

$$R'_{22} = -\frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}}gh\left(ha_2a_8 + l\right) - 1 \tag{A.40}$$

dove:

$$a_8 = \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2}\left(\frac{3\Delta\gamma}{M^2}\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr} - \left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2\right) \tag{A.41}$$

La terza derivata del residuo R_2 è data dalla:

$$R'_{23} = \frac{\partial R_2}{\partial \breve{p}_c} = gl\frac{\partial h}{\partial \breve{p}_c} + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}}\cdot\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \breve{p}_c} \tag{A.42}$$

in questa si sostituiscono le (A.26, A.34, A.28); si ricava:

$$R'_{23} = \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}}gh\left(ha_2a_8 + l\right) \tag{A.43}$$

Derivate del residuo R_3

I termini della $\mathbf{R}'$ ottenuti per derivazione della (A.5) sono:

$$R'_{31} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta\gamma} = a_1 a_9 \tag{A.44}$$

$$R'_{32} = \frac{\partial R_3}{\partial \breve{p}} = 2a_9 \Delta\gamma \tag{A.45}$$

$$R'_{33} = \frac{\partial R_3}{\partial \breve{p}_c} = -\left(1 + a_9 \Delta\gamma\right) \tag{A.46}$$

dove:

$$a_9 = \frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}} \breve{p}_{c,n} \exp\left[\frac{\Delta\gamma}{\breve{\lambda} - \breve{k}} \left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\right] \tag{A.47}$$

Riepilogo dei termini della $\mathbf{R}'$

Infine, la matrice $\mathbf{R}'$, è ottenuta come:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} a_4 a_5 \left(a_3 - \frac{1}{\breve{k}} h a_1 a_2\right) & a_1 - \frac{6\Delta\gamma}{\breve{k} M^2} h a_2 a_4 & -\breve{p} + \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} h a_2 a_4 a_5 \\ \frac{g}{\breve{k}} h \left(\breve{k} a_6 - l a_1 - \frac{h}{\breve{k}} a_1 a_2 b_1 + a_3 b_1\right) & -\frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} g h \left(h a_2 a_8 + l\right) - 1 & \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} g h \left(h a_2 a_8 + l\right) \\ a_1 a_9 & 2a_9 \Delta\gamma & -\left(1 + a_9 \Delta\gamma\right) \end{bmatrix}$$

le espressioni dei coefficienti g, h, l, a_i e b_i sono riepilogate in App. C.

Appendice B

Calcolo della tangente algoritmica

Per la determinazione della tangente elasto-plastica algoritmica (cfr. par. 5.3.1) è necessario differenziare le relazioni (5.31, 5.32, 5.36); infatti è:

$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \tag{B.1}$$

in particolare si ha:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \otimes \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \tag{B.3}$$

e inoltre:

$$\frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{B.4}$$

Per ottenere l'espressione in forma chiusa di $\mathbf{a}^{ep}$, si calcolano prima le derivate di $\breve{p}$, $\mathbf{t}$ e $\breve{p}_c$, sia rispetto a $\theta^{e,tr}$ che rispetto a $\mathbf{e}^{e,tr}$, quindi, per ricavare il differenziale di $\Delta\gamma$, viene imposta la condizione di consistenza.

Derivate rispetto a $\theta^{e,tr}$

Si deriva la (5.36) e la si esplicita rispetto a $\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}}$; si ha:

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} = b_2 \left(a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \right) \tag{B.5}$$

dove:

$$b_2 = \frac{a_9}{1 + a_9 \Delta\gamma} \tag{B.6}$$

La derivata della (5.31), se si tiene conto delle posizioni (5.37-5.39), assume la forma:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{\partial g}{\partial \theta^{e,tr}} hl + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} gl + \frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} gh \tag{B.7}$$

pertanto si derivano la (5.37):

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{1}{\breve{k}} g \tag{B.8}$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} = -\frac{1}{\breve{k}} h \left(a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} - \Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} \right) \tag{B.9}$$

e la (5.39):

$$\frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} = a_6 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + a_7 \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \cdot \mathbf{t} - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k} M^2} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.10}$$

Si deriva la (5.32), nella sua forma (5.42) ottenuta dalle posizioni (5.38, 5.41):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \theta^{e,tr}} hm + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} m + \frac{\partial m}{\partial \theta^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} h \tag{B.11}$$

quindi si derivano la (A.10):

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{2\alpha}{\breve{k}} g \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.12}$$

e la (5.41), tenendo conto della (B.8):

$$\frac{\partial m}{\partial \theta^{e,tr}} = -\frac{6\alpha}{M^2} m^2 \left(\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} gh + \frac{\Delta\gamma}{\breve{k}} gh + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} \Delta\gamma\, g \right) \tag{B.13}$$

Si sostituiscono le (A.10, B.12, B.13) nella (B.11); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left(a_3 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + a_2 \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} + a_2 \frac{h}{\breve{k}} \right) \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.14}$$

questa espressione viene a sua volta sostituita nella (B.10); si ricava:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} = b_3 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + b_4 \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} + b_4 \frac{h}{\breve{k}} \tag{B.15}$$

dove si è posto:

$$b_3 = a_6 + a_3 \left(a_4 a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k} M^2} \left\| \mathbf{e}^{e,tr} \right\|^2 \right) \tag{B.16}$$

$$b_4 = a_2 \left(a_4 a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k} M^2} \left\| \mathbf{e}^{e,tr} \right\|^2 \right) \tag{B.17}$$

Si sostituiscono le (B.15, B.8, B.9, B.5) nella (B.7), in cui può essere finalmente esplicitata la derivata di $\breve{p}$ rispetto a $\theta^{e,tr}$:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + c_2 \tag{B.18}$$

dove si è posto:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{\breve{k}} gha_1 (l + b_4 h)(b_2 \Delta\gamma - 1) + ghb_3}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh (l + b_4 h)(1 - b_2 \Delta\gamma)} \tag{B.19}$$

$$c_2 = \frac{1}{\breve{k}} \frac{\breve{p} + b_4 g h^2}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh (l + b_4 h)(1 - b_2 \Delta\gamma)} \tag{B.20}$$

La sostituzione della (B.18) nella (B.5) fornisce la derivata di $\breve{p}_c$:

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + d_2 \tag{B.21}$$

dove:

$$d_1 = b_2 (a_1 + 2\Delta\gamma c_1) \tag{B.22}$$

$$d_2 = 2\Delta\gamma b_2 c_2 \tag{B.23}$$

Le derivate di $\breve{p}$ (B.18) e $\breve{p}_c$ (B.21) vengono sostituite nella (B.9), in modo da ottenere:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} = f_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + f_2 \tag{B.24}$$

dove si è posto:

$$f_1 = -\frac{1}{\breve{k}} h [a_1 + \Delta\gamma (2c_1 - d_1)] \tag{B.25}$$

$$f_2 = -\frac{1}{\breve{k}} h \Delta\gamma (2c_2 - d_2) \tag{B.26}$$

Infine, per ottenere la derivata di $\mathbf{t}$, si sostituisce la (B.24) nella (B.14):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left(u_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + u_2 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.27}$$

dove:

$$u_1 = a_3 + a_2 f_1 \tag{B.28}$$

$$u_2 = a_2 \left(f_2 + \frac{1}{\breve{k}} h \right) \tag{B.29}$$

Derivate rispetto a $\mathbf{e}^{e,tr}$

Si deriva la (5.36) e la si esplicita rispetto a $\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}$; si ha:

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = b_2 \left(a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right) \tag{B.30}$$

La derivata della (5.31), se si tiene conto delle posizioni (5.37-5.39), assume la forma:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = g\left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} l + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} h\right) \tag{B.31}$$

è infatti nulla la derivata di g. Si derivano la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = -\frac{1}{\breve{k}} h\left(a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} - \Delta\gamma \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}\right) \tag{B.32}$$

e la (5.39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} &= a_6 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + a_7 \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}\right)^T \mathbf{t} - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}\right)^T \mathbf{e}^{e,tr} + \\ &+ \frac{2\alpha}{\breve{k}} \left(\mathbf{e}^{e,tr} - \frac{3}{M^2}\Delta\gamma\, \mathbf{t}\right) \end{aligned} \tag{B.33}$$

Si deriva la (5.32), nella sua forma (5.42) ottenuta dalle posizioni (5.38, 5.41):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} hm + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} m + \frac{\partial m}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} h \tag{B.34}$$

quindi si derivano la (A.10):

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = 2\alpha g \mathbf{I} \tag{B.35}$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = -\frac{6\alpha}{M^2} g m^2 \left(\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} h + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \Delta\gamma\right) \tag{B.36}$$

Si sostituiscono le (A.10, B.35, B.36) nella (B.34); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = a_{10}\mathbf{I} + \sum_{A=1}^{3} \mathbf{n}_A \otimes \left(a_3 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + a_2 \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}\right) e_A^{e,tr} \tag{B.37}$$

dove si è posto:

$$a_{10} = 2\alpha g h m \tag{B.38}$$

Dalla sostituzione della (B.37) nella (B.33) e dopo vari passaggi si ricava:

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = b_3 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + b_4 \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + b_5 \mathbf{e}^{e,tr} + b_6 \mathbf{t} \tag{B.39}$$

dove si è posto:

$$b_5 = \frac{2\alpha}{\breve{k}} \left(1 - \frac{3}{M^2}\Delta\gamma\, a_{10}\right) \tag{B.40}$$

$$b_6 = a_7 a_{10} - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2} \tag{B.41}$$

Si sostituisce la (B.30) nella (B.32) e questa, insieme alla (B.39), nella (B.31). Si può finalmente esplicitare la derivata di $\breve{p}$:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \tag{B.42}$$

dove si è posto:

$$c_3 = \frac{ghb_5}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\,(l + b_4 h)\,(1 - b_2 \Delta\gamma)} \tag{B.43}$$

$$c_4 = \frac{ghb_6}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\,(l + b_4 h)\,(1 - b_2 \Delta\gamma)} \tag{B.44}$$

Inoltre, la sostituzione della (B.42) nella (B.30) fornisce la derivata di $\breve{p}_c$:

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \tag{B.45}$$

dove:

$$d_3 = 2\Delta\gamma b_2 c_3 \tag{B.46}$$

$$d_4 = 2\Delta\gamma b_2 c_4 \tag{B.47}$$

Le derivate di $\breve{p}$ (B.42) e $\breve{p}_c$ (B.45) vengono sostituite nella (B.32), in modo da ottenere:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = f_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + f_3 \mathbf{e}^{e,tr} + f_4 \mathbf{t} \tag{B.48}$$

dove si è posto:

$$f_3 = -\frac{1}{\breve{k}} h\Delta\gamma\,(2c_3 - d_3) \tag{B.49}$$

$$f_4 = -\frac{1}{\breve{k}} h\Delta\gamma\,(2c_4 - d_4) \tag{B.50}$$

Infine, per ottenere la derivata di $\mathbf{t}$, si sostituisce la (B.48) nella (B.37):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \tag{B.51}$$

dove:

$$u_3 = a_2 f_3 \tag{B.52}$$

$$u_4 = a_2 f_4 \tag{B.53}$$

Imposizione della condizione di consistenza

Se vi è sviluppo di deformazioni plastiche risulta: $\Delta\gamma > 0$; quindi, le condizioni di Kuhn-Tucker (5.23_3) implicano l'annullamento dell'equazione di snervamento $\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta},\, \breve{p}_c\right) = 0$. Differenziando questa relazione si ottiene la condizione di consistenza:

$$d\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta},\, \breve{p}_c\right) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}_c} d\breve{p}_c = 0 \tag{B.54}$$

dove:

$$d\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.55}$$

$$d\breve{p}_c = \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.56}$$

Si sostituiscono le (B.18, B.42, B.4) nella (B.2); si ottiene:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + c_2 \mathbf{1} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \tag{B.57}$$

Analogamente, si sostituiscono le (B.27, B.51, B.4) nella (B.3); si ricava:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \tag{B.58}$$

La sostituzione delle (B.57, B.58) nella (B.1) fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = {} & \left(c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left(c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + \left(c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{t} + \\ & + \left(d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{1} + a_{10} \mathbf{I} \end{aligned} \tag{B.59}$$

Si sostituisce questa espressione nel differenziale di $\boldsymbol{\beta}$ (B.55); si ottiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta} = {} & \left(c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \left(\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \right) + \left(c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \left(\mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}\right) + \\ & + \left(c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \left(\mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}\right) + \left(d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \left(\mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}\right) + a_{10} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \end{aligned} \tag{B.60}$$

Nella precedente relazione si individua il differenziale di $\Delta\gamma$:

$$d\left(\Delta\gamma\right) = \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.61}$$

Inoltre si è posto:

$$d_5 = c_2 - \frac{1}{3} a_{10} \tag{B.62}$$

La (B.60), insieme alla (4.55), viene sostituita nel primo addendo a secondo membro della (B.54); dopo alcuni passaggi si ha:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} = \omega_1 d\left(\Delta\gamma\right) + \omega_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \omega_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \omega_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.63}$$

dove si è posto:

$$\omega_1 = a_1 c_1 + a_5 u_1 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.64}$$
$$\omega_2 = a_1 c_2 + a_5 u_2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.65}$$
$$\omega_3 = a_1 c_3 + a_5 u_3 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{B.66}$$
$$\omega_4 = a_1 c_4 + a_5 u_4 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} + a_5 a_{10} \tag{B.67}$$

Si valuta adesso il differenziale $d\breve{p}_c$ della pressione di preconsolidazione:

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \tag{B.68}$$

Si sostituiscono in questa equazione le (B.21, B.45, B.4):

$$\frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + d_2 \mathbf{1} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \tag{B.69}$$

e si ricava il differenziale considerato:

$$d\breve{p}_c = d_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.70}$$

Inoltre, derivando la condizione di snervamento (4.50), si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}_c} = -\breve{p} \tag{B.71}$$

Le (B.63, B.70, B.71) vengono sostituite nell'equazione scalare (B.54) la cui risoluzione fornisce il differenziale del parametro di consistenza:

$$d(\Delta\gamma) = \eta_1 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \eta_2 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \eta_3 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{B.72}$$

dove si è posto:

$$\eta_1 = -\frac{\omega_2 - \breve{p} d_2}{\omega_1 - \breve{p} d_1} \tag{B.73}$$
$$\eta_2 = -\frac{\omega_3 - \breve{p} d_3}{\omega_1 - \breve{p} d_1} \tag{B.74}$$
$$\eta_3 = -\frac{\omega_4 - \breve{p} d_4}{\omega_1 - \breve{p} d_1} \tag{B.75}$$

Si sostituisce l'espressione di $d(\Delta\gamma)$ nella (B.60) e finalmente, tenendo conto della (B.55), si ottiene il tensore algoritmico elasto-plastico:

$$\mathbf{a}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \left(\delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{1} + \left(\delta_3 \mathbf{1} + \delta_4 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + \left(\delta_5 \mathbf{1} + \delta_6 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \tag{B.76}$$

dove:

$$\delta_1 = c_1\eta_1 + d_5 \qquad \delta_2 = u_1\eta_1 + u_2 \tag{B.77}$$

$$\delta_3 = c_1\eta_2 + c_3 \qquad \delta_4 = u_1\eta_2 + u_3 \tag{B.78}$$

$$\delta_5 = c_1\eta_3 + c_4 \qquad \delta_6 = u_1\eta_3 + u_4 \tag{B.79}$$

In componenti si ha:

$$a^{ep}_{AB} = \left(\delta_1 + \delta_2 e^{e,tr}_A\right) + \left(\delta_3 + \delta_4 e^{e,tr}_A\right) e^{e,tr}_B + \left(\delta_5 + \delta_6 e^{e,tr}_A\right) t_B + a_{10}\delta_{AB} \tag{B.80}$$

dove δ_{AB} è il simbolo di Kronecker. Le posizioni assunte durante i calcoli sono riepilogate in App. C.

Appendice C

Riepilogo dei coefficienti

Sono qui riepilogate le posizioni assunte nei calcoli di $\mathbf{R}'$ (par. 5.3.2 e App. A) e del tensore algoritmico $\mathbf{a}^{ep}$ (par. 5.3.3 e App. B)

$$
\begin{aligned}
g &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right) \\
h &= \exp\left[-\frac{1}{\breve{\lambda}}\Delta\gamma\left(2\breve{p}-\breve{p}_c\right)\right] \\
l &= 1+\frac{\alpha}{\breve{k}}\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2+\frac{9\alpha}{\breve{k}M^4}\Delta\gamma^2\left\|\mathbf{t}\right\|^2-\frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\Delta\gamma\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr} \\
m &= \left(1+\frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma gh\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2\breve{p}-\breve{p}_c \\
a_2 &= 2\alpha gm\left(1-\frac{6\alpha}{M^2}mgh\Delta\gamma\right) \\
a_3 &= -\frac{12\alpha^2}{M^2}\left(mgh\right)^2 \\
a_4 &= \mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr} \\
a_5 &= \frac{3}{M^2} \\
a_6 &= \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\left(\frac{3}{M^2}\Delta\gamma\left\|\mathbf{t}\right\|^2-\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr}\right) \\
a_7 &= \frac{18\alpha}{\breve{k}M^4}\Delta\gamma^2 \\
a_8 &= \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2}\left(\frac{3\Delta\gamma}{M^2}\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr}-\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2\right) \\
a_9 &= \frac{1}{\breve{\lambda}-\breve{k}}\breve{p}_{c,n}\exp\left[\frac{\Delta\gamma}{\breve{\lambda}-\breve{k}}\left(2\breve{p}-\breve{p}_c\right)\right] \\
a_{10} &= 2\alpha ghm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \breve{k} a_7 a_4 - \frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma \left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2 \\
b_2 &= \frac{a_9}{1 + a_9\Delta\gamma} \\
b_3 &= a_6 + a_3\left(a_4 a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2}\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2\right) \\
b_4 &= a_2\left(a_4 a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2}\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2\right) \\
b_5 &= \frac{2\alpha}{\breve{k}}\left(1 - \frac{3}{M^2}\Delta\gamma\, a_{10}\right) \\
b_6 &= a_7 a_{10} - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\breve{k}M^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{1}{\breve{k}} ghb_1 \left(l + b_4 h\right)\left(b_2\Delta\gamma - 1\right) + ghb_3}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\left(l + b_4 h\right)\left(1 - b_2\Delta\gamma\right)} \\
c_2 &= \frac{1}{\breve{k}} \frac{\breve{p} + b_4 gh^2}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\left(l + b_4 h\right)\left(1 - b_2\Delta\gamma\right)} \\
c_3 &= \frac{ghb_5}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\left(l + b_4 h\right)\left(1 - b_2\Delta\gamma\right)} \\
c_4 &= \frac{ghb_6}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\breve{k}} gh\left(l + b_4 h\right)\left(1 - b_2\Delta\gamma\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= b_2\left(a_1 + 2\Delta\gamma c_1\right) \\
d_2 &= 2\Delta\gamma b_2 c_2 \\
d_3 &= 2\Delta\gamma b_2 c_3 \\
d_4 &= 2\Delta\gamma b_2 c_4 \\
d_5 &= c_2 - \frac{1}{3} a_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{1}{\breve{k}} h\left[a_1 + \Delta\gamma\left(2c_1 - d_1\right)\right] \\
f_2 &= -\frac{1}{\breve{k}} h\Delta\gamma\left(2c_2 - d_2\right) \\
f_3 &= -\frac{1}{\breve{k}} h\Delta\gamma\left(2c_3 - d_3\right) \\
f_4 &= -\frac{1}{\breve{k}} h\Delta\gamma\left(2c_4 - d_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_3 + a_2 f_1 \\
u_2 &= a_2 \left(f_2 + \frac{1}{\breve{k}} h \right) \\
u_3 &= a_2 f_3 \\
u_4 &= a_2 f_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= a_1 c_1 + a_5 u_1 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \\
\omega_2 &= a_1 c_2 + a_5 u_2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \\
\omega_3 &= a_1 c_3 + a_5 u_3 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \\
\omega_4 &= a_1 c_4 + a_5 u_4 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} + a_5 a_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\omega_2 - \breve{p} d_2}{\omega_1 - \breve{p} d_1} \\
\eta_2 &= -\frac{\omega_3 - \breve{p} d_3}{\omega_1 - \breve{p} d_1} \\
\eta_3 &= -\frac{\omega_4 - \breve{p} d_4}{\omega_1 - \breve{p} d_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= c_1 \eta_1 + d_5 \\
\delta_2 &= u_1 \eta_1 + u_2 \\
\delta_3 &= c_1 \eta_2 + c_3 \\
\delta_4 &= u_1 \eta_2 + u_3 \\
\delta_5 &= c_1 \eta_3 + c_4 \\
\delta_6 &= u_1 \eta_3 + u_4
\end{aligned}
$$