# Capitolo 6

# Risultati numerici

## 6.1 Introduzione

L'algoritmo di *return mapping* sviluppato per l'integrazione numerica del modello Cam-clay in deformazioni finite e la tangente elasto-plastica ottenuta dalla linearizzazione dello stesso algoritmo sono implementati, insieme ad un elemento finito isoparametrico tridimensionale ad otto nodi, nel codice *Finite Element Analysis Program* (FEAP) [95].

Risultati numerici ottenuti con tale procedura sono esposti nel presente capitolo. In particolare, vengono simulate prove di laboratorio (par. 6.2); le previsioni del modello sono quindi confrontate con dati sperimentali disponibili in letteratura (par. 6.3). Si analizza, successivamente, il caricamento di una fondazione nastriforme (par. 6.4).

Gli esempi numerici sono finalizzati alla validazione del modello proposto ed alla verifica dell'accuratezza e della stabilità dell'algoritmo di integrazione.

Per comodità, si richiamano le definizioni delle misure di sforzo e di deformazione utilizzate per presentare i risultati delle analisi numeriche. In particolare:

$$p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) \qquad\qquad q = \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\right\| \tag{6.1}$$

sono, rispettivamente, la tensione media e la tensione deviatorica di Cauchy. Mentre:

$$\breve{p} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \qquad\qquad \breve{q} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\right\| \tag{6.2}$$

sono le omologhe grandezze in termini di sforzo di Kirchhoff (cfr. par. 4.4). Si utilizza, inoltre, la deformazione volumetrica logaritmica (cfr. par. 3.3, 4.4 e 4.5.1):

$$\theta = -\ln J = -\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \tag{6.3}$$

e la misura di deformazione deviatorica (cfr. par. 4.4):

$$\breve{\varepsilon}_q = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\mathbf{e}\right\| \qquad \text{con:} \qquad \left(\mathbf{e}\right)_A := -\ln\left(J^{-\frac{1}{3}}\lambda_A\right) \tag{6.4}$$

dove i $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sono gli allungamenti principali totali.

## 6.2 Simulazione di prove di laboratorio

Si commentano, in questo paragrafo, le simulazioni numeriche di prove di laboratorio. In particolare, sono considerate prove di compressione isotropa e prove triassiali drenate. In queste ultime si impone una deformazione assiale crescente, mantenendo costante la pressione laterale sul provino; si tratta quindi di prove triassiali "standard", a cui corrisponde, nel piano $p - q$, un percorso di tensione di pendenza pari a 3.

### 6.2.1 Prova di compressione isotropa

La prova consiste nell'applicazione di un ciclo di carico-scarico-ricarico su un campione di argilla inizialmente normal-consolidato ($p_0 = \breve{p}_{c0} = 100$ kPa). Nell'analisi, si utilizzano i seguenti valori dei parametri:

$$\breve{k} = 0.02 \qquad \alpha = 100 \qquad \breve{\lambda} = 0.09 \qquad M = 0.9 \tag{6.5}$$

I risultati sono riportati in termini di pressione di Kirchhoff ($\breve{p}$) e di deformazione volumetrica logaritmica ($\theta$) (Fig. 6.1). Dopo una fase di carico in campo elasto-plastico (OA), si procede allo scarico (AB); è evidente, in questa parte della prova, la forte non linearità della risposta elastica del materiale. Durante il ricarico, il materiale si comporta elasticamente fino allo snervamento (BC) e quindi riprende a deformarsi in campo elasto-plastico (CD).

La simulazione della prova è ripetuta utilizzando due diverse suddivisioni della storia di carico: in 300 ed in 6 incrementi. Quindi, si sono applicati incrementi di carico di circa 1 kPa nella prima analisi, e incrementi decisamente più grandi ($100 \div 200$ kPa) nella seconda. I corrispondenti risultati sono praticamente coincidenti (Fig. 6.1); si ha, quindi, una prima conferma dell'accuratezza della procedura numerica.

La velocità di convergenza dell'algoritmo, nel corso dell'esempio numerico considerato, è studiata in Fig. 6.2. In questi diagrammi è riportato il numero dell'iterazione sull'asse delle ascisse ed il valore assunto da una norma dei residui ($err$) sull'asse delle ordinate. Se il carico è applicato in 300 incrementi (Fig. 6.2a), la velocità di convergenza della procedura è quadratica fin dalla prima iterazione; anche nel caso di incrementi molto più grandi (Fig. 6.2b, carico applicato in 6 incrementi), si osserva, a partire dalla seconda iterazione, la stessa velocità di convergenza.

### 6.2.2 Prove di compressione triassiale

Si considerano prove triassiali drenate standard su provini debolmente sovraconsolidati e fortemente sovraconsolidati.

A proposito di queste ultime prove, si ricorda che le previsioni del Cam-clay e del Cam-clay Modificato relative al comportamento delle argille fortemente sovraconsolidate non sono particolarmente soddisfacenti (cfr. par. 3.5). Tali legami sono infatti finalizzati alla modellazione costitutiva delle argille normal-consolidate o debolmente sovraconsolidate. Inoltre, nelle argille fortemente sovraconsolidate, è frequente un comportamento rammollente accompagnato dalla formazione di bande di taglio.

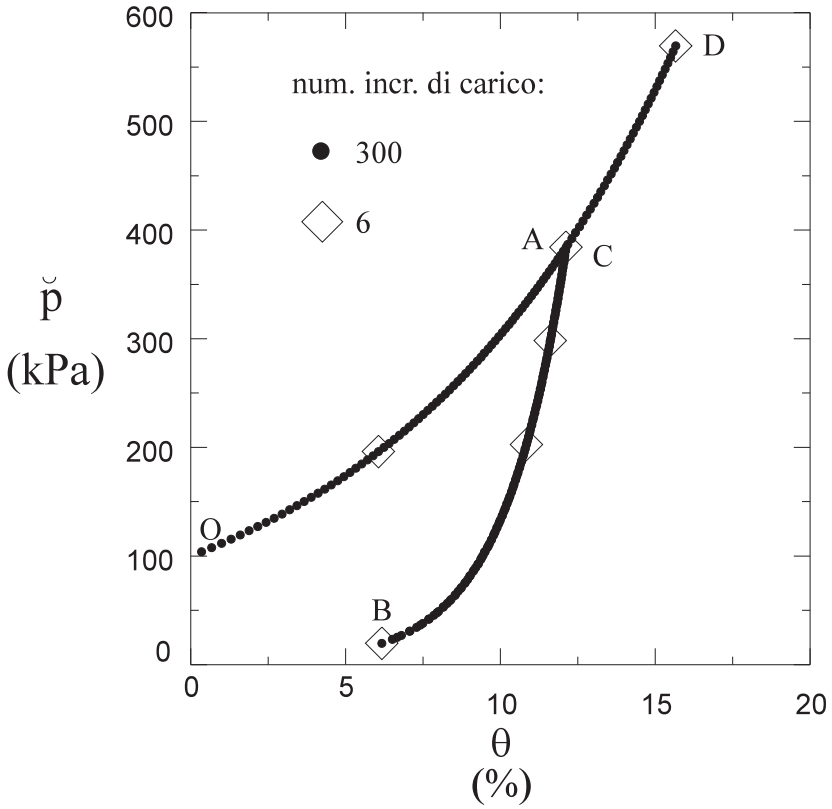



Figura 6.1: Simulazione di una prova di compressione isotropa. Pressione di Kirchhoff $\breve{p}$ vs. deformazione volumetrica logaritmica $\theta$

Tali fenomeni di localizzazione delle deformazioni non possono essere efficacemente simulati utilizzando elementi finiti convenzionali, come quello qui considerato. Infatti, la posizione della banda di taglio ricavata dall'impiego di tecniche standard agli elementi finiti risulta dipendente dalla geometria della mesh (cfr., ad es., [4, 5, 59, 77]).

Quindi, il motivo per cui è stata considerata una prova triassiale su argilla fortemente sovraconsolidata, è esclusivamente quello di verificare l'accuratezza e la stabilità dell'algoritmo di integrazione del modello anche in presenza di comportamento rammollente.

Si suppone di eseguire le prove su un'argilla caratterizzata dai parametri (6.5). Inoltre, al fine di rappresentare i risultati anche in termini di curve pressione-volume, si assegna il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino a $p = 1$ kPa:

$$v_{c1} = 3.5$$

Il volume specifico iniziale $v_0$ viene quindi ricavato utilizzando la relazione (4.133):

$$v_0 = \left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1}$$

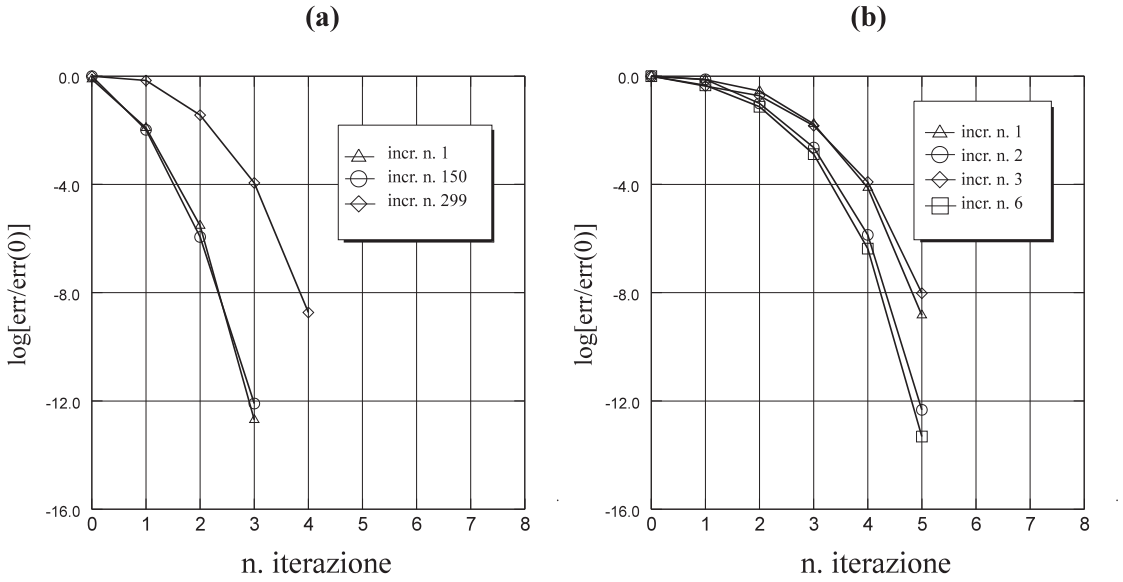



Figura 6.2: Simulazione di una prova di compressione isotropa. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico applicato in 300 (a) ed in 6 incrementi (b)

### Campione debolmente sovraconsolidato

Un provino, caratterizzato da una pressione di preconsolidazione iniziale $\breve{p}_{c0} = 100$ kPa, viene compresso isotropicamente da $p_0 = 10$ kPa fino a $\breve{p} = 80$ kPa; quindi, a partire da questo stato debolmente sovraconsolidato, si impone una deformazione assiale crescente, mantenendo costante la pressione di confinamento. In Fig. 6.3, i risultati di questa prova sono riportati in quattro diagrammi. Il percorso di tensione è tracciato nel piano $\breve{p} - \breve{q}$ (Fig. 6.3a); il campione si deforma elasticamente all'interno della curva di snervamento iniziale ($Y_0$), segue un comportamento incrudente fino al raggiungimento della linea di stato critico (CSL). In tale stato, la componente volumetrica dell'incremento di deformazione plastica è nulla, come è mostrato nel diagramma $\breve{\varepsilon}_q - \theta$ (Fig. 6.3c); quindi, la corrispondente curva di snervamento ($Y_f$) risulta stazionaria.

Se si impongono incrementi relativamente grandi di deformazione assiale (14 e 6 incrementi), si calcola una risposta praticamente coincidente con quella ottenuta dall'impiego di incrementi molto piccoli (1000 incrementi).

Infine, la velocità di convergenza della procedura numerica è studiata in Fig. 6.4, con riferimento ai casi in cui la deformazione assiale è imposta in 14 (Fig. 6.4a) ed in 6 incrementi (Fig. 6.4b). Nonostante tali incrementi siano relativamente grandi, la convergenza viene raggiunta dopo poche iterazioni.

### Campione fortemente sovraconsolidato

La prova viene eseguita a partire da uno stato fortemente sovraconsolidato del campione di argilla; in particolare, la preliminare compressione isotropa viene arrestata a $\breve{p} = 20$ kPa ($\breve{p}_{c0} = 100$ kPa). Di conseguenza, il materiale perviene allo stato critico manifestando un comportamento rammollente (Fig. 6.5b), a cui corrisponde un'inversione del

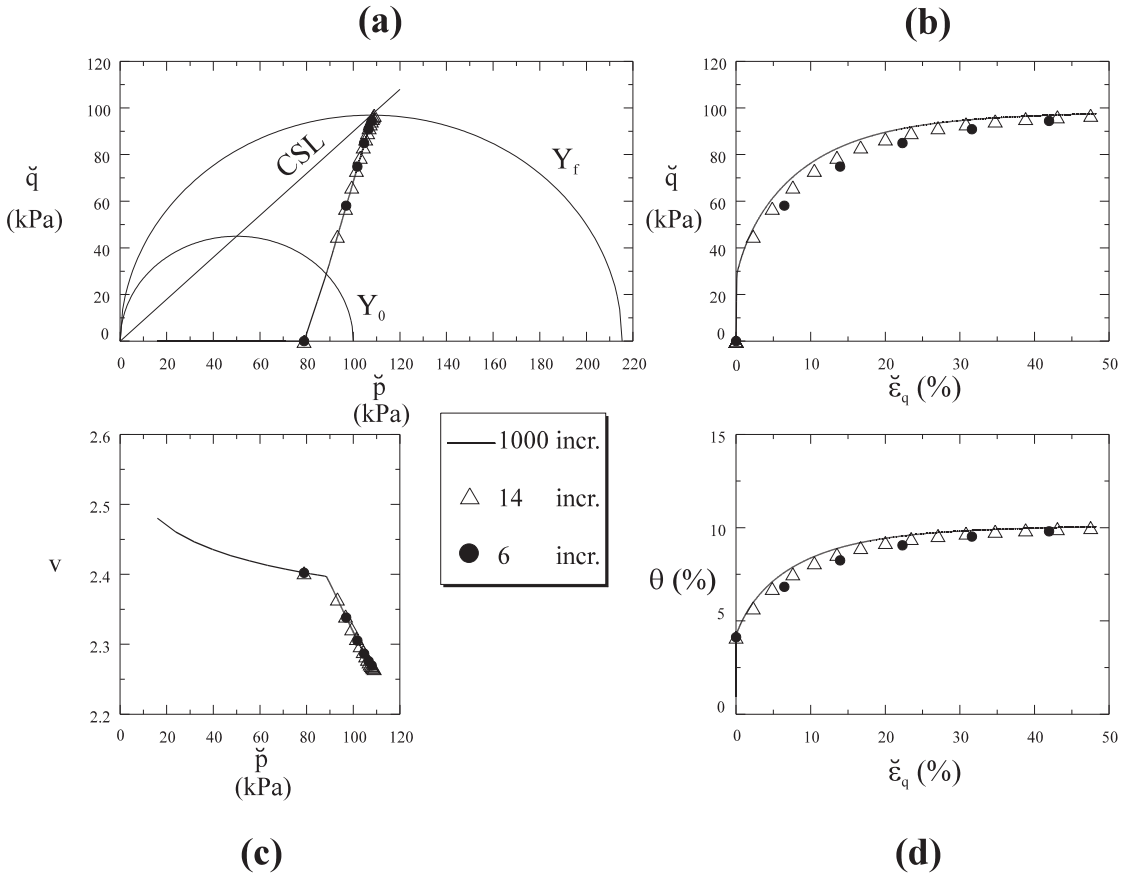



Figura 6.3: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media $\breve{p}$ e tensione deviatorica $\breve{q}$ di Kirchhoff, deformazione volumetrica $\theta$ e deviatorica $\breve{\varepsilon}_q$, volume specifico $v$

percorso di tensione (Fig. 6.5a) ed un fenomeno di dilatanza (Fig. 6.5c, d). Anche questa risposta del materiale, più complessa di quella osservata nella prova precedente, viene calcolata in modo accurato utilizzando incrementi di deformazione assiale relativamente grandi (20 e 10 incrementi).

All'interno del diagramma di Fig. 6.5b, è riportato un ingrandimento (ottenuto amplificando la scala di $\breve{\varepsilon}_q$) della parte della curva sforzo-deformazione precedente al raggiungimento del valore di picco di $\breve{q}$; la non linearità di questo tratto di curva è conseguenza del legame elastico adottato (cfr. par. 4.4.1).

La Fig. 6.6 mostra la velocità di convergenza osservata durante questa prova. La procedura numerica converge in $4 \div 6$ iterazioni. In corrispondenza dell'applicazione del primo incremento di deformazione assiale, durante il quale si verifica l'inversione del percorso tensionale, sono necessarie 7 iterazioni (Fig. 6.6b).

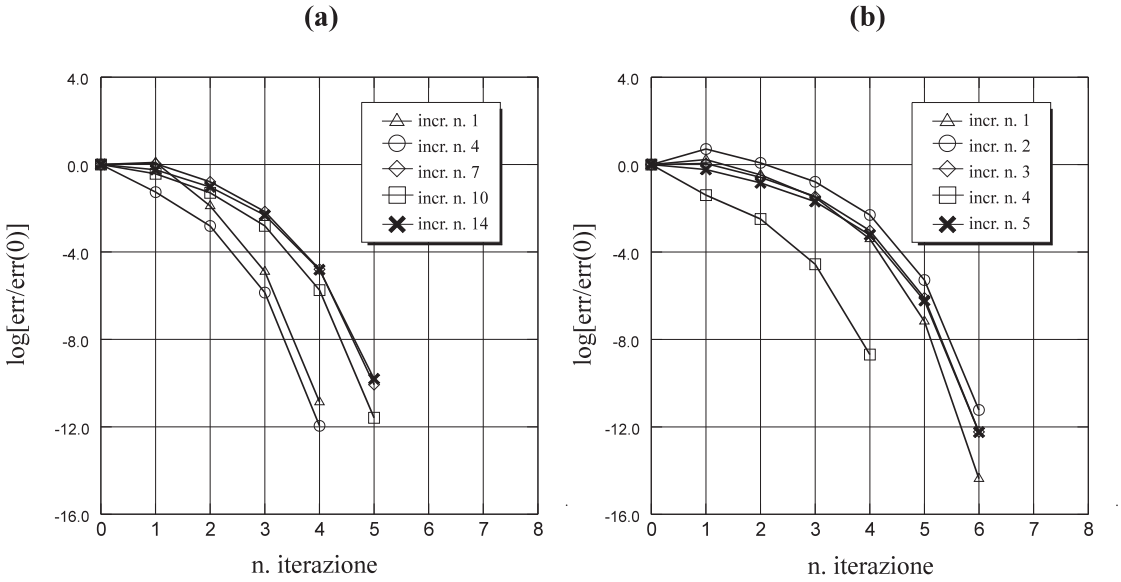



Figura 6.4: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 14 (a) ed in 6 incrementi (b)

## 6.3 Confronto con dati sperimentali

Al fine di verificare l'affidabilità del modello, si confrontano le sue previsioni con i risultati di prove di laboratorio riportati in [1]. In particolare, si considerano una prova di compressione isotropa ed una triassiale drenata standard su campioni di caolino speswhite.

Nel seguito, prima di presentare i risultati di tale confronto, la scelta dei parametri del materiale viene brevemente commentata.

In particolare, per quanto riguarda gli indici bi-logaritmici di rigonfiamento e di compressione vergine ($k^*$, $\lambda^*$; cfr. par. 3.5) del caolino speswhite, in letteratura [1] sono riportate le seguenti stime:

$$k^* = 0.013 \qquad \lambda^* = 0.085$$

Quindi, se si richiamano le relazioni (4.125):

$$\breve{k} = \frac{k^*}{1 - k^*} \qquad \breve{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \tag{6.6}$$

si calcolano i corrispondenti valori dei parametri del modello:

$$\breve{k} = 0.013 \qquad \breve{\lambda} = 0.093$$

Per la valutazione della costante elastica $\alpha$, si è fatto ricorso a [38], dove si riportano i valori di rigidezza a taglio misurati nella fase di scarico-ricarico di prove triassiali non drenate su caolino speswhite [24]. In particolare, il rapporto fra tale rigidezza e la

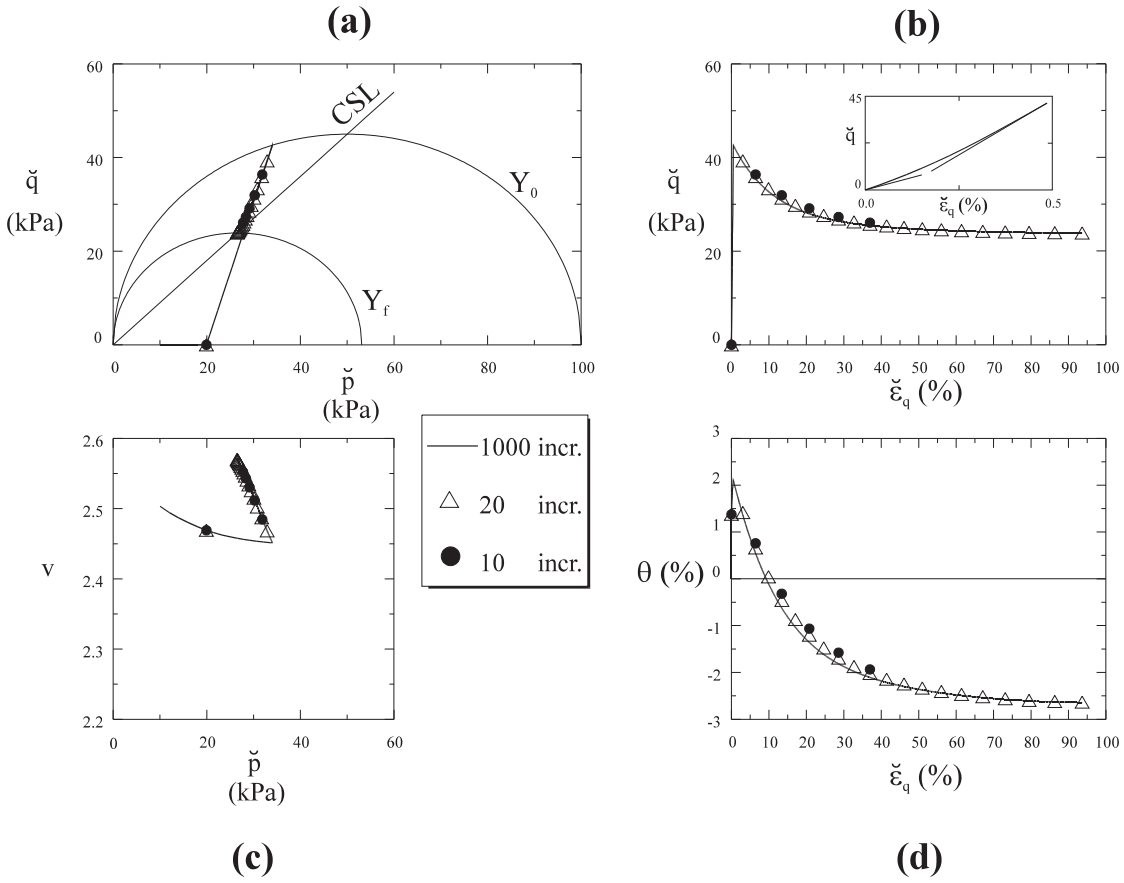



Figura 6.5: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media $\breve{p}$ e tensione deviatorica $\breve{q}$ di Kirchhoff, deformazione volumetrica $\theta$ e deviatorica $\breve{\varepsilon}_q$, volume specifico $v$

tensione media efficace ($\mu_u/p$) risulta variabile nell'intervallo $60 \div 110$. E' quindi in questo stesso intervallo che va scelto il valore di $\alpha$; tale costante del modello può essere infatti calcolata come $\alpha = \mu_u/p_0$ (cfr. par. 4.5.3).

Secondo [1], un campione di caolino speswhite normalmente consolidato fino a $p = 1$ kPa presenta volume specifico: $v_{c1} = 3.20$. Mentre per la pendenza media della linea di stato critico, si valuta: $M = 0.9$. Si osserva, sempre in [1], che altri autori riportano, per il caolino speswhite, stime di $v_{c1}$ e di $M$ variabili negli intervalli:

$$v_{c1} = 3.00 \div 3.65 \qquad M = 0.8 \div 0.9 \tag{6.7}$$

Alla luce di queste considerazioni, nelle simulazioni numeriche esposte nel seguito, si pone:

$$\breve{k} = 0.013 \qquad \alpha = 90 \qquad \breve{\lambda} = 0.093 \qquad M = \begin{cases} 0.8 \\ 0.9 \end{cases}$$

e inoltre, al fine di rappresentare i risultati anche in termini di curve pressione-volume, si sceglie $v_{c1} = 3.50$.

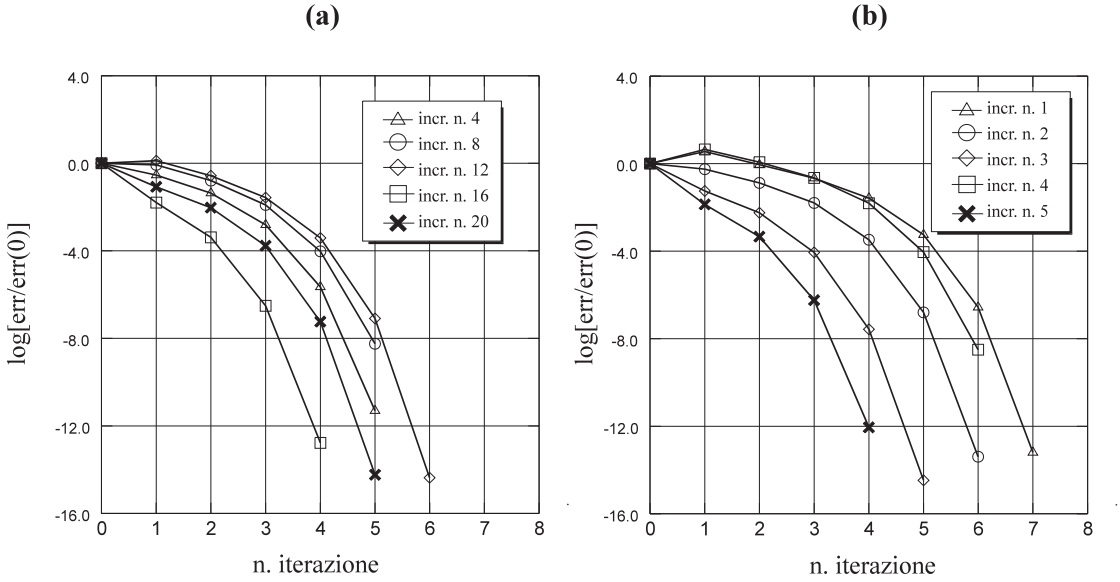



Figura 6.6: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 20 (a) ed in 10 incrementi (b)

La prova di compressione isotropa indicata come "test 1" in [1], consiste nell'applicazione, su un campione inizialmente normal-consolidato ($p_0 = p_{c0} = 100$ kPa), di una successione di cicli di carico-scarico-ricarico. La corrispondente curva $p - v$ è riportata nel piano bi-logaritmico di Fig. 6.7.

Nell'ambito della simulazione numerica della prova, il volume specifico iniziale è calcolato utilizzando la relazione (4.133):

$$v_0 = \left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1} = 2.37$$

E' evidente, in Fig. 6.7, il buon accordo fra risultati numerici e dati sperimentali.

La prova triassiale drenata indicata come "test 13" in [1], viene eseguita su un campione inizialmente normal-consolidato ($p_0 = p_{c0} = 300$ kPa). Tale prova comprende anche una fase di scarico, a cui si procede dopo aver raggiunto il valore di tensione deviatorica $q = 120$ kPa. Le corrispondenti curve sforzo-deformazione $q/p - \theta$ e $q/p - \breve{\varepsilon}_q$ sono riportate rispettivamente nei diagrammi di Fig. 6.8 e di Fig. 6.9. I calcoli sono ripetuti per valori di $M$ variabili nell'intervallo determinato sperimentalmente ($6.7_2$). L'esame delle suddette figure evidenzia un soddisfacente accordo fra risultati numerici e dati sperimentali, indicando in $M = 0.8$ il valore più adatto per la pendenza della linea di stato critico.

Nell'ambito della simulazione F.E.M. della prova triassiale, vengono anche valutate le prestazioni della procedura di Newton (5.47, pag. 89) utilizzata per la soluzione delle equazioni algoritmiche (4.50, 5.31, 5.36). Durante l'applicazione dell'ultimo incremento di carico in campo elasto-plastico, la velocità di convergenza mostrata da tale algoritmo è più che quadratica (Fig. 6.10).

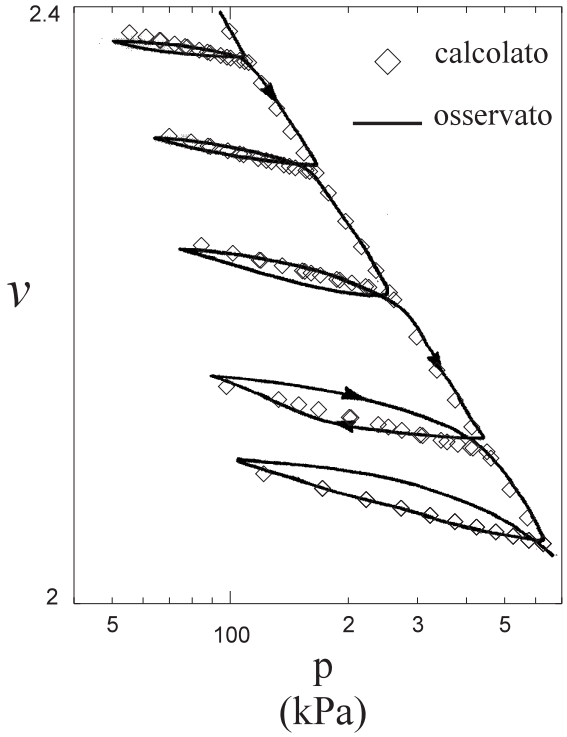



Figura 6.7: Prova di compressione isotropa su caolino speswhite. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Pressione $p$ vs. volume specifico $v$

## 6.4 Fondazione nastriforme

Si considera una fondazione nastriforme, di larghezza 1.0 m e di lunghezza infinita, soggetta ad un carico verticale uniformemente distribuito. Si assume che tale fondazione sia infinitamente flessibile; il carico è quindi applicato direttamente sul piano di posa. Tale struttura insiste su un banco di argilla tenera caratterizzato dai seguenti parametri:

$$\breve{k} = 0.05 \qquad \alpha = 90 \qquad \breve{\lambda} = 0.20 \qquad M = 1.0 \qquad \gamma = 20 \text{ kN/m}^3$$

dove $\gamma$ è il peso dell'unità di volume di terreno.

Si suppone che la velocità di applicazione del carico sia sufficientemente piccola da poter considerare l'argilla in condizioni drenate (cfr. par. 3.2).

La mesh è composta da 100 elementi tridimensionali ad 8 nodi. Lo stato piano di deformazione e la simmetria del problema permettono di considerare solo la metà di una "fetta" di terreno trasversalmente vincolata.

Lo stato tensionale *in situ* è generato attraverso la seguente procedura. Si impone, in ogni punto di integrazione, uno stato tensionale isotropo ($p_0 = p_{c0} = 1.0$ kPa $\cong$ 1.2 % della massima pressione indotta dal peso proprio del terreno); infatti, l'equazione costitutiva elastica (4.39) richiede che la parte sferica dello stato tensionale iniziale sia non nulla. Il banco di argilla viene quindi suddiviso in 6 strati e a questi si applica sequenzialmente il carico gravitazionale, iniziando dal basso, in 20 incrementi per ogni

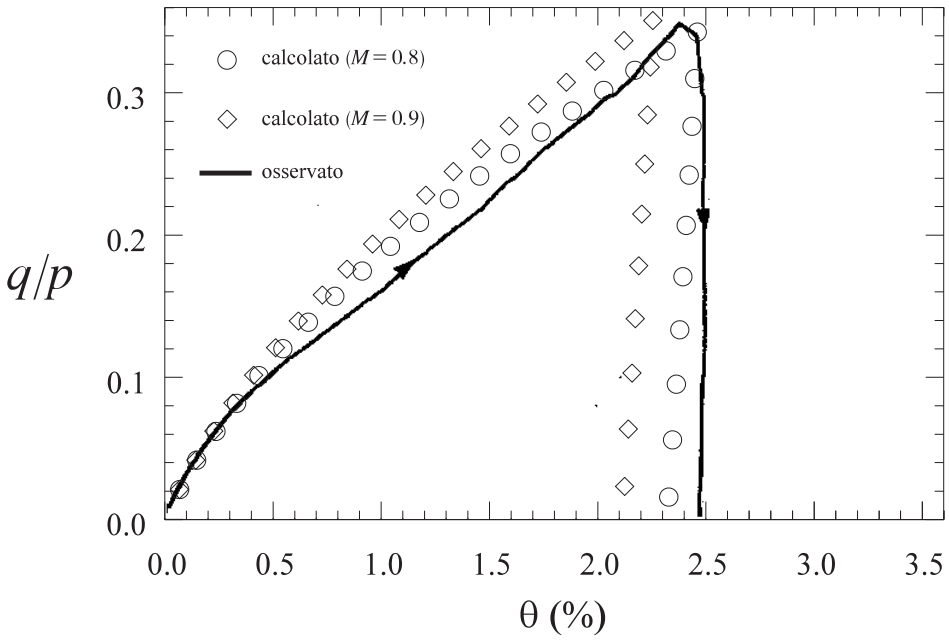



Figura 6.8: Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto $q/p$ vs. deformazione volumetrica $\theta$

strato.

Le tensioni verticali *in situ* sono graficamente riportate in Fig. 6.11; nella stessa figura sono rappresentati i carichi nodali equivalenti alla pressione della fondazione sul piano di posa.

Il carico della fondazione è applicato in uguali incrementi di 0.5, 1.0, 2.0 e 5.0 kPa fino ad un valore massimo di 80 kPa. In Fig. 6.12, le tensioni verticali sono graficamente rappresentate sulla mesh deformata. Il cedimento del centro della fondazione ($w$) in funzione del carico applicato, è riportato in Fig. 6.13.

La deformazione della superficie del terreno e l'evoluzione di $w$ sono quelli qualitativamente osservati nel caso di fondazioni di esigua larghezza che insistono su terreni molto compressibili; si osserva, infatti, un meccanismo di punzonamento, caratterizzato da assenza di rigonfiamento del terreno ai lati della fondazione e da cedimenti che crescono gradualmente con il carico applicato. Questi cedimenti sono di notevole entità; si osservi, a tal proposito, che in Fig. 6.12 la scala utilizzata per rappresentare gli spostamenti non è amplificata.

Nel diagramma di Fig. 6.13, si nota, soprattutto nella fase iniziale, un irrigidimento della risposta causato dalla non-linearità geometrica. Nella stessa figura viene anche verificata l'accuratezza dell'algoritmo; le soluzioni ottenute utilizzando incrementi di carico di diversa ampiezza sono infatti praticamente coincidenti.

Infine, nelle Fig. 6.14a e 6.14b, viene mostrata la velocità di convergenza della procedura numerica. La convergenza viene raggiunta in 6, al massimo 7, iterazioni; dopo la terza iterazione, tale velocità risulta quadratica.

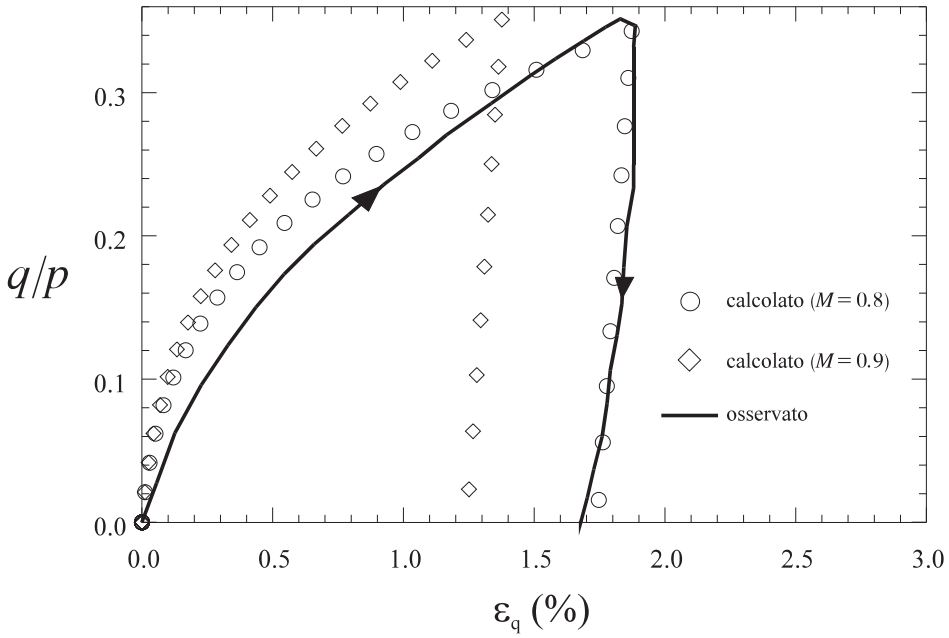



Figura 6.9: Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto $q/p$ vs. deformazione deviatorica $\varepsilon_q$

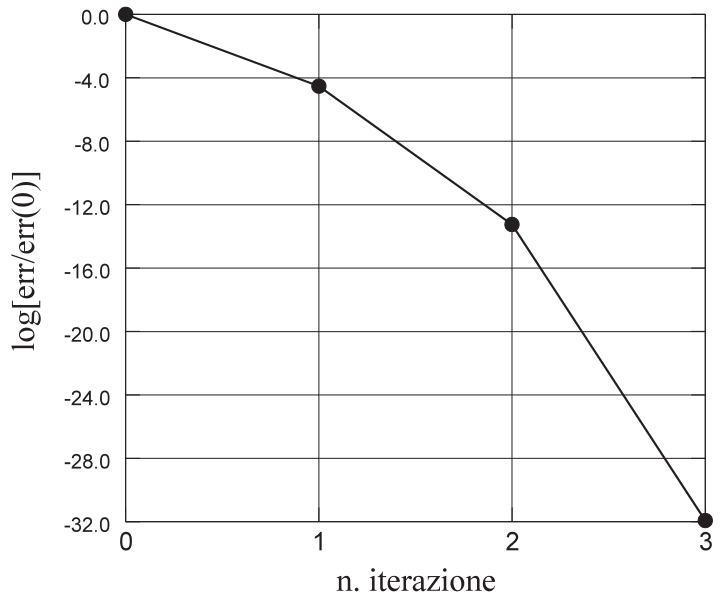



Figura 6.10: Prova triassiale drenata. Velocità di convergenza della procedura di Newton (5.47)

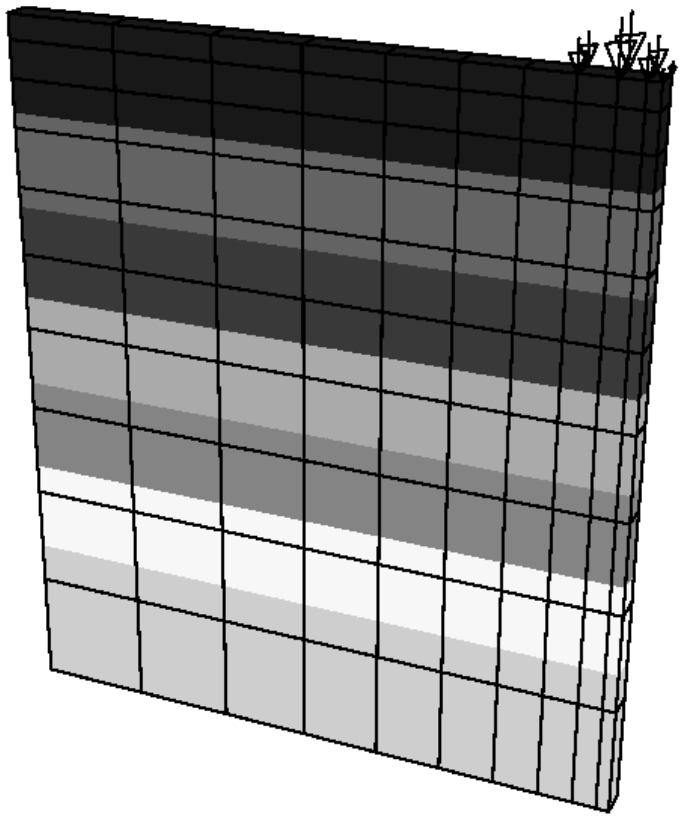


Figura 6.11: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Tensioni verticali in situ e carichi nodali equivalenti alla pressione della fondazione sul piano di posa

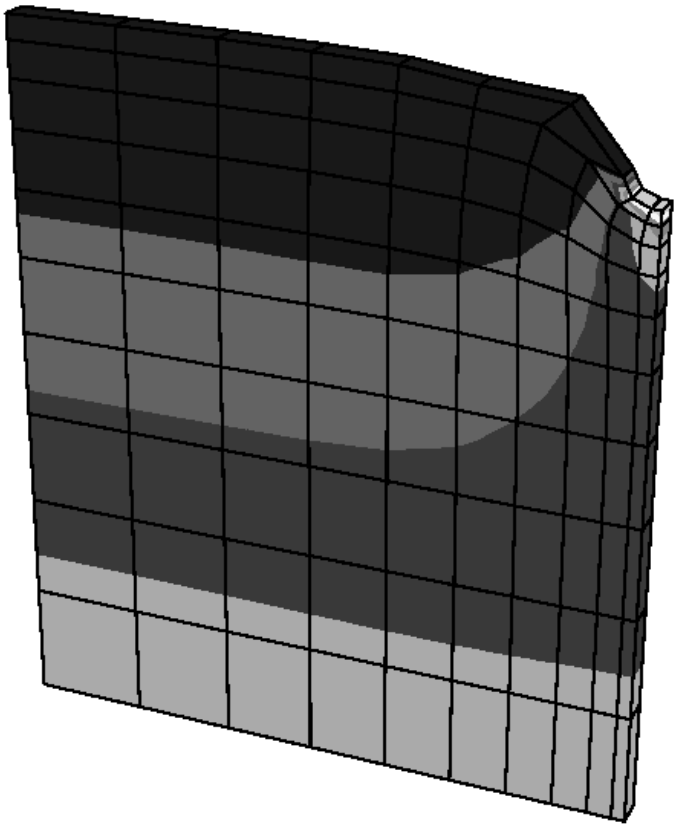


Figura 6.12: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Mesh deformata e distribuzione delle tensioni verticali

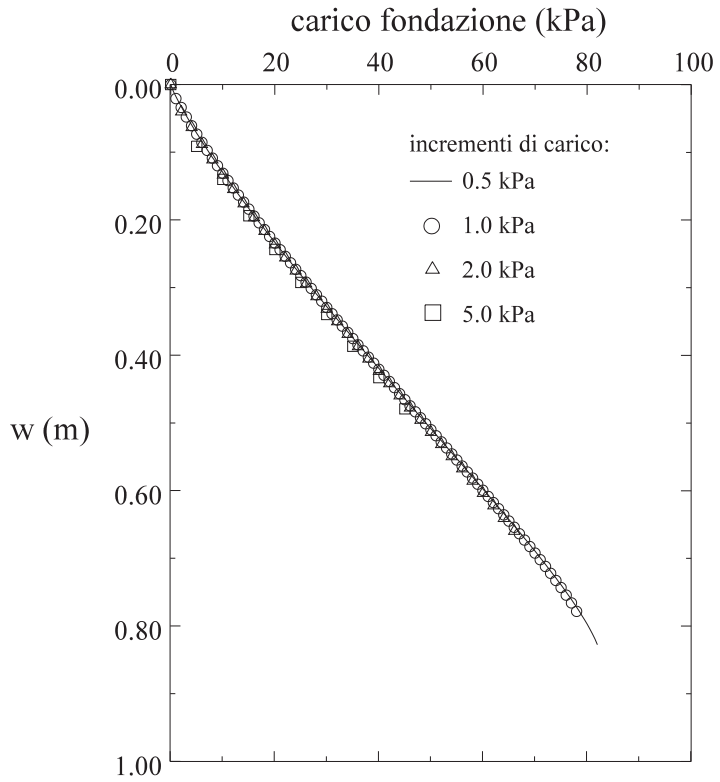



Figura 6.13: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Cedimento del centro della fondazione $w$ in funzione del carico applicato

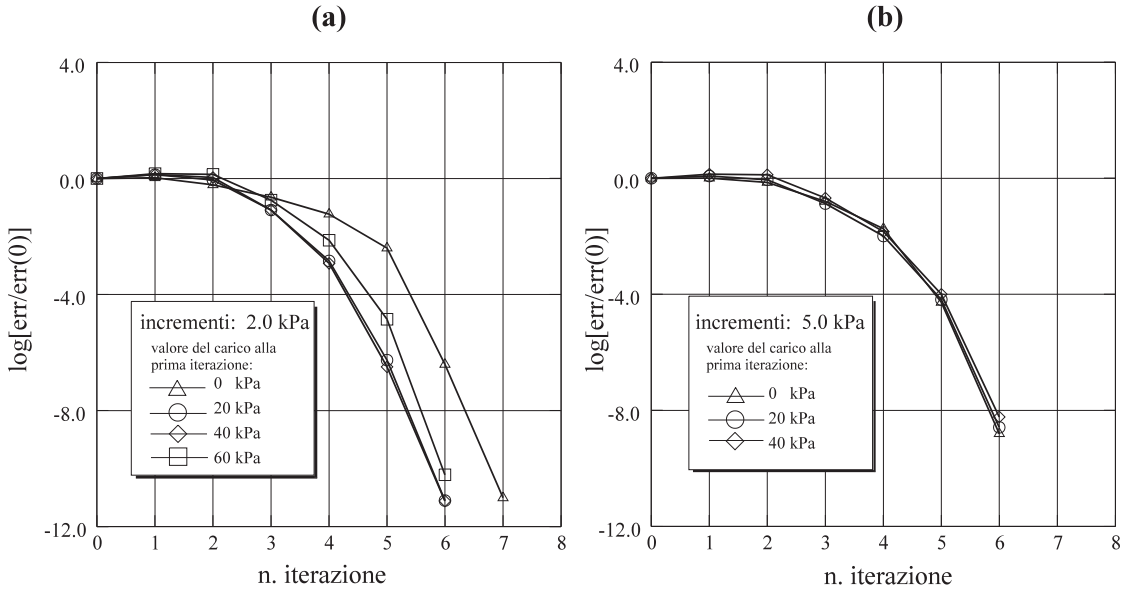



Figura 6.14: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico imposto utilizzando incrementi da 2.0 kPa (a) e da 5.0 kPa (b)