Математические заметки

том 60 выпуск 2 август 1996

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, М. О. Смолянова

Основными примерами объектов, к которым применимы излагаемые ниже результаты, являются счетноаддитивные гладкие меры [1], [2] на (бесконечномерных) локально выпуклых пространствах, так называемые меры Фейнмана [3], [4] и некоторые другие функциональные интегралы, а также несчетноаддитивные меры, в том числе те, которые порождаются лапласианами Леви [5], [6]. В заметке рассматривается общий метод получения формул, описывающих преобразования распределений (обобщенных мер) на локально выпуклых пространствах при (нелинейных) гладких преобразованиях этих пространств. С помощью этого метода получаются, в частности, (относящиеся к распределениям) аналоги известных формул Камерона–Мартина, Гирсанова–Маруямы и Реймера. Данный метод применялся для исследования преобразований гладких мер в работе [7] (см. также [8]) и для исследования преобразований меры Фейнмана – в работах [9] и [10].

Помимо описания общего метода, охватывающего все перечисленные частные случаи, заметка содержит также несколько конкретных новых формул; специально отметим, что, в отличие от всех перечисленных работ, мы не ограничиваемся случаем, когда рассматриваемое отображение локально выпуклого пространства может быть связано с тождественным отображением непрерывной кривой (в пространстве отображений). Такое расширение области применимости метода достигается за счет перехода от вещественных локально выпуклых пространств к их комплексификациям.

1. Обозначения и терминология. Предполагается, что все рассматриваемые топологические пространства являются отделимыми; локально выпуклые пространства (ЛВП), если не оговорено противное, считаются вещественными. Если E – ЛВП, то символ E' обозначает векторное пространство всех непрерывных линейных функционалов на E, наделенное слабой топологией $\sigma(E', E)$. Если при этом $x \in E$, $g \in E'$, то $(g,x) = (x,g) = g(x)$ и $\varphi_x(g) = \varphi_g(x) = e^{ig(x)}$. Если еще S $(= S(E))$ – некоторое ЛВП, состоящее из комплекснозначных функций на E (соответственно на E'), то преобразование Фурье (ПФ) элемента $\nu \in S$ – это функция на E' (соответственно на E), обозначаемая символом F_ν и определяемая равенством $F_\nu(\cdot) = (\nu, \varphi_g)$ $(= (\nu, \varphi_x))$. Всюду далее предполагается, что элемент ν однозначно восстанавливается по его ПФ.

2. Функции вещественного аргумента, принимающие значения в пространстве распределений. Пусть E – ЛВП и S – ЛВП, состоящее из не-

которых борелевских комплекснозначных функций на E, ограниченных на каждом компактном подмножестве пространства E, и содержащее все функции φ_g $(g \in E')$. Элементы пространства S' будут называться (S)-распределениями на E. Числовая функция f на E называется S-мультипликатором, если для каждой функции $\varphi \in S$ поточечное произведение $\varphi \cdot f$ принадлежит пространству S, причем отображение $\varphi \mapsto \varphi \cdot f$, $S \to S$ непрерывно; в этом случае для каждого $\nu \in S'$ естественно определяется произведение $f \cdot \nu$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha < \beta$ и f — S'-значная функция на (α, β).

Определение 1. Функция f называется *дифференцируемой по Фомину в точке* $t_0 \in (\alpha,\beta)$, если она дифференцируема в этой точке, причем существует S-мультипликатор $\beta_f(t_0)$, называемый логарифмической производной функции f в точке t_0, такой, что $f'(t_0) = \beta_f(t_0) \cdot f(t_0)$.

Следующая теорема позволяет восстанавливать функцию f по ее логарифмической производной и одному из значений.

Теорема 1 (ср. [2]). *Пусть f всюду дифференцируема по Фомину, причем выполнены следующие условия:*

(1) *S' содержит множество $\mathfrak{M}_C(E)$ всех счетноаддитивных числовых борелевских мер на E, обладающих компактными носителями, причем множество $\mathfrak{M}_C(E)$ плотно в S';*

(2) *$\forall x \in E$ функция $\beta_f(\cdot)(x)$ непрерывна;*

(3) *$\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ функция $\exp \int_{t_1}^{t_2} \beta_f(\tau)(\cdot)\, d\tau$ представляет собой S-мультипликатор;*

(4) *$\forall \psi \in S$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$ функция $(\alpha,\beta) \to S$, $t \mapsto (\exp \int_{t_0}^{t} \beta_f(\tau)\, d\tau)\psi$ дифференцируема.*

Тогда для всех $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ $f(t_2) = \left(\exp \int_{t_1}^{t_2} \beta_f(\tau)\, d\tau\right) f(t_1)$.

Доказательство использует элементарную теорию двойственности ЛВП. Сначала проверяется, что функция в правой части последнего равенства является решением задачи Коши $g'(t) = \beta_f(t) g(t)$, $g(t_0) = f(t_0)$, а затем с помощью теоремы Гольмгрена доказывается, что решение этой задачи единственно.

3. Дифференцируемые распределения на ЛВП. Отображение $\Phi\colon E \to E$ будет называться S-допустимым, если для каждого $\psi \in S$ композиция $\psi \circ \Phi$ снова принадлежит S, причем отображение $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$, $S \to S$ непрерывно; в этом случае для каждого S-распределения ν его образ $\nu\Phi^{-1}$ при отображении Φ (корректно) определяется равенством $(\nu\Phi^{-1}, \psi) = (\nu, \psi \circ \Phi)$ (согласующимся с формулой замены переменных в интеграле). Пусть теперь P – отображение пространства $\mathbb{R}^1 \times E$ в E такое, что для каждого $t \in \mathbb{R}^1$ частичное отображение $P(t, \cdot)$ является S-допустимым.

Определение 2. S-распределение ν называется *дифференцируемым по Фомину вдоль* P, если функция $f_\nu^P\colon \mathbb{R}^1 \to S'$, определяемая равенством $f_\nu^P(t) = \nu P^{-1}(t, \cdot)$, дифференцируема по Фомину при $t = 0$; в этом случае логарифмическая производная функции f_ν^P при $t = 0$ называется логарифмической производной распределения ν вдоль P и обозначается символом $\beta_\nu^P(\cdot)$.

Если $h \in E$ и для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times E$ $P_h(t,x) = x + th$, то распределение ν называется *дифференцируемым по Фомину вдоль вектора* h, если оно дифференцируемо вдоль P_h; логарифмической производной распределения вдоль вектора h называется его логарифмическая производная вдоль P_h; она обозначается символом $\beta_\nu(h,\cdot)$.

Векторное подпространство ЛВП E называется гильбертовым подпространством пространства E, если оно снабжено структурой гильбертова пространства, относительно которой его каноническое вложение в E непрерывно.

Пусть H – гильбертово подпространство ЛВП E.

Определение 3. Распределение $\nu \in S$ называется *дифференцируемым по Фомину вдоль* H, если ν дифференцируемо по Фомину вдоль каждого вектора $h \in H$, причем отображение (называемое логарифмическим градиентом ν вдоль H) $H \ni h \mapsto \beta_\nu(h,\cdot)\cdot\varphi$ линейно и непрерывно для каждого $\varphi \in S$.

Теорема 2. *Пусть S-распределение ν дифференцируемо по Фомину вдоль H, причем для каждого t из некоторой окрестности V точки t_0 отображение („векторное поле") $k\colon E \to E$, определяемое равенством $(P^{-1})'(t,x) = k(P^{-1}(t,x))$ обладает следующими свойствами:*

(1) *$k(E) \subset H$ и для каждого $x \in E$ производная отображения k вдоль H (обозначаемая символом $k'(x)$) представляет собой ядерный оператор, причем функция $E \ni x \mapsto k'(x)$ является S-мультипликатором;*

(2) *для всякого ортонормированного базиса (e_n) пространства H и всякого $n \in \mathbb{N}$ сумма $\sum_1^n (k'(\cdot)e_j, e_j)$ является S-мультипликатором, причем для каждого $\varphi \in S$ $\sum_1^\infty (k'(\cdot)e_j,e_j)\varphi = \operatorname{tr} k'(\cdot)\cdot\varphi$ в S;*

(3) *для всякого ортонормированного базиса (e_n) в H все частичные суммы ряда $\sum \beta_\nu(e_n,\cdot)(e_n,h(\cdot))$ являются S-мультипликаторами, причем для каждого $\varphi \in S$ $\sum \beta_\nu(e_n,\cdot)(e_n,h(\cdot))\varphi = \beta_\nu(h(\cdot),\cdot)\varphi$.*

Тогда функция f_ν^P дифференцируема в точке t_0 и

$$\beta_{f_\nu^P}(t_0) = \beta_\nu\Big((P^{-1})_1'(t_0,\cdot), P^{-1}(t_0,\cdot)\Big) + \operatorname{tr}\Big((P^{-1})''_{1,2}(t_0,\cdot)\circ\big((P^{-1})_2'(t_0,\cdot)\big)^{-1}\Big).$$

Теорема 3. *Пусть $\nu \in S'$ и для каждого $t \in [0,1]$ выполнены условия теоремы 2. Пусть, далее, для всех $t \in [0,1]$ функции $\beta_\nu\big((P^{-1})_1'(t,\cdot), P^{-1}(t,\cdot)\big)$ и $\operatorname{tr}\big((P^{-1})''_{1,2}(t,\cdot)(P^{-1})_2'(t,\cdot)\big)$ являются мультипликаторами и удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1 на функцию β_f, а функция $\exp\big(\operatorname{tr}\ln(P^{-1})_2'(t,\cdot)\big)$ корректно определена и принимает значения в пространстве S-мультипликаторов. Тогда если для каждого $\varphi \in S$ функция $t \mapsto \big(\operatorname{tr}\ln(P^{-1})_2''(t,\cdot)\big)\varphi$ непрерывна, а пространство S удовлетворяет условию (1) теоремы 1, то*

$$\nu P^{-1}(t,\cdot) = \big(\det P_2'(t,\cdot)\big)^{-1}\exp\bigg(-\int_0^1 \beta_\nu\Big(\big(P_2'(\tau,P^{-1}(\tau,\cdot))\big)^{-1} \circ P_1'(\tau,P^{-1}(\tau,\cdot)), P^{-1}(\tau,\cdot)\Big)\,d\tau\bigg)\cdot\nu.$$

В доказательствах теорем 2 и 3 используются вычисления, аналогичные [7].

Замечание 1. В силу последней теоремы $\exp(\cdots)$ не зависит от значений функции P при $t \in (0,1)$. Если β_ν' существует, то это является следствием $\beta_\nu'(x)(h_1)(h_2) = \beta_\nu'(x)(h_2)(h_1)$, что, в свою очередь, является следствием симметричности второй производной. Таким образом, если определить функцию σ_ν равенством $\sigma_\nu(x) = \int_{[0,x]}\beta_\nu(\cdot,s)\,ds$, где символ $\int_{[0,x]}$ обозначает интеграл вдоль „достаточно хорошего" пути, соединяющего точки 0 и x, и положить затем $\Lambda(x_2,x_1) = \sigma_\nu(x_2) - \sigma_\nu(x_1)$, то будет справедливо соотношение

$$\exp(\cdots) = \exp\Lambda\big(P^{-1}(x,1),x\big) = \exp\Big(\sigma_\nu\big(P^{-1}(x,1) - \sigma_\nu(x)\big)\Big).$$

Таким образом, множитель, связывающий распределения νP^{-1} и ν, равен произведению $\big(\det(\cdots)\big)^{-1}$ и отношения функций $\exp\big(\sigma_\nu\big(P^{-1}(\cdot,1)\big)\big)$ и $\exp\sigma_\nu(\cdot)$, что делает естественным использование для второй из них названия „обобщенная плотность" (распределения ν). Следует подчеркнуть, что обобщенная плотность определена только для $x \in H$, хотя функция $\exp\big(\sigma_\nu(\cdots) - \sigma_\nu(\cdots)\big)$ определена всюду.

Замечание 2. Путь, соединяющий точки 0 и x, может лежать не только в исходном пространстве, но и – при соответствующих дополнительных предположениях – в его комплексификации, что позволяет, в частности, использовать описанный метод для получения нового доказательства основного результата работы [11].

4. Примеры. Гауссовской α-мерой ($\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$) с корреляционным функционалом $b\colon E' \times E' \to \mathbb{R}^1$ называется S-распределение ν с ПФ $\exp\big(\frac{\alpha}{2}b(\cdot,\cdot)\big)$ (если оно существует). Если функционал неотрицательно определен и $\alpha > 0$, то ν можно отождествить с обычной гауссовской E'-цилиндрической мерой (не обязательно счетноаддитивной); если $\alpha = i$, то ν – „мера Фейнмана". Отметим, что если $b(x_1,x_2) = (Bx_1,x_2)$, где B – линейное отображение E' в E, то $\beta_\nu(h,x) = \alpha(B^{-1}h,x)$. С помощью этого замечания и теоремы 3 могут быть получены формулы Камерона–Мартина, Гирсанова–Маруямы и Реймера для меры Фейнмана и несчетноаддитивных гауссовских мер.

Одним из важных примеров несчетноаддитивных гауссовских мер является так называемая мера Леви–Гаусса, возникающая при исследовании лапласиана Леви. Пусть E – сепарабельное ЛВП, $\|\cdot\|$ – непрерывная гильбертова норма на E, $E \subset H \subset E'$ – соответствующее оснащенное гильбертово пространство и $b = (e_n)$ – ортонормированный базис в H, содержащийся в E. Предполагается, что ряд $\sum c_n e_n$ сходится в E' для каждой последовательности $(c_n) \in \ell_\infty$, и через S_b обозначается линейная оболочка в E' множества всех векторов $\sum e^{i\lambda n}e_n$, наделенная скалярным произведением Леви, определяемым так:

$$\Big(\sum c_n e_n, \sum d_n e_n\Big)_{PL} = \lim\Big(n^{-1}\sum_1^n c_j d_j\Big).$$

Пространство S_b связано естественной двойственностью с пространством E; кроме того, оно двойственно самому себе, а также прямой сумме $K = E \oplus S_b$, реализуемой как векторное подпространство алгебраического сопряженного к S_b. Мера Леви–Гаусса ν_L, соответствующая базису b, – это гауссовская (S_b – цилиндрическая) мера на E (или на K) с корреляционным функционалом $(\cdot,\cdot)_{PL}$. Для каждого линейного оператора A в H, область определения которого содержит E, след и определитель Леви задаются равенствами: $\operatorname{tr}_{PL}A = \lim n^{-1}\sum_1^n (Ae_j,e_j)$;

$\det_{PL} A = \lim(\det|(Ae_j, e_k)|_{j,k=1,2,\dots,n})^{1/n}$. Отметим, что пространство $S(K)$, для которого меры Леви–Гаусса и Фейнмана существуют (как распределения), описано в [9], [10]. Таким образом, к этим мерам применимы теоремы 2 и 3. В частности, формула, описывающая преобразование меры Леви–Гаусса, имеет вид

$$\nu_L P(t,\cdot) = \det_{PL} P_2'(t,\cdot) \exp\left(-\frac{1}{2}(F(t,\cdot),F(t,\cdot))_{PL} - (\cdot,\cdot)_{PL}\right)\cdot \nu_L;$$

кроме того,

$$\beta_{\nu_L}^{P^{-1}}(t)(x) = -\left(P_1'(t,x), P(t,x)_{PL} + \mathrm{tr}_{PL}\left(P_{1,2}''(t,x)\circ\left((P_2'(t,x))^{-1}\right)\right)\right).$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
04.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smolyanov O. G., Weizsäker H. V. // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. № 2. P. 455–476. 2. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 133–174. 3. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Наука, 1990. 4. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals.. Berlin: Springer, 1976. 5. Аккарди Л., Розелли П., Смолянов О. Г. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 144–149. 6. Hida T., Obata N., Saito K. // Nagoya Math. J. 1992. V. 128. P. 65–93. 7. Smolyanov O. G., Weizsäker H. V. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321. P. 103–108. 8. Daletskii Yu. L., Fomin S. V. Measures and differential equations on infinite-dimentional spaces. Kluwer: Kluwer Acad. Publ., 1992. 9. Смолянов О. Г., Смолянова М. О. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 3. С. 154–156. 10. Смолянов О. Г., Смолянова М. О. // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 29–32. 11. Elworty D., Truman A. // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1984. V. 41. № 2. P. 115–142.

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПОРЯДКА 24

Г. В. Воскресенская

Изучение связей между конечными группами и модулярными формами является одной из интересных тем современных математических исследований. Рассматриваются различные способы сопоставления элементам группы модулярных форм. Один из них состоит в следующем: пусть G – конечная группа, g – ее элемент, Φ – некоторое унимодулярное представление группы G в пространстве V, степень которого кратна 24, $P_g(x) = \prod_k (x^{a_k} - 1)^{t_k}$ – характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$; рассмотрим η-функцию Дедекинда

$$\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости. Тогда элементу $g \in G$ сопоставляется функция $\eta_g(z) = \prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$, которая называется функцией, ассоциированной с элементом g. Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой с характером, веса $k(g) = \frac{1}{2}\sum_k t_k$, некоторого уровня $N(g)$, вычисляемого по известной формуле [1].

Интересной проблемой является нахождение конечных групп, со всеми элементами которых ассоциированы модулярные формы, собственные относительно всех операторов Гекке.

В статье [2] доказано, что существует ровно 30 параболических форм вида $\prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$, где $a_k, t_k \in \mathbb{N}$, собственных относительно всех операторов Гекке. Они характеризуются условием $\sum_k a_k t_k = 24$, $\forall k \quad a_k \mid a_{k+1}$. Приведем их полный список. Две из этих параболических форм имеют полуцелый вес. Авторы называют эти 30 функций мультипликативными η-произведениями (название объясняется мультипликативностью коэффициентов разложений по степеням q). Мы далее также используем это название для краткости и удобства.

С другой стороны, автором настоящей статьи доказано [3], что эти 30 функций и только они являются параболическими формами, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющими нулей на верхней комплексной полуплоскости вне параболических вершин.

Дж. Мейсон в статье [4] показал, что для группы Матье M_{24} и ее представления на решетке Лича все параболические формы, ассоциированные с элементами $g \in M_{24}$, являются мультипликативными η-произведениями.

Автором этой статьи были найдены все конечные подгруппы $\mathrm{SL}(5,\mathbb{C})$, с элементами которых с помощью присоединенного представления можно ассоциировать мультипликативные η-произведения [6]. В следующей теореме приводится еще один пример таких групп.

Теорема. *Пусть G – любая группа порядка 24, Φ – ее регулярное представление, $P_g(x) = \prod_k (x^{a_k} - 1)^{t_k}$ – характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ для элемента $g \in G$. Тогда функция $\eta_g(z) = \prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$ является собственной относительно всех операторов Гекке и не имеющей нулей вне параболических вершин (т.е. мультипликативным η-произведением).*

Доказательство. Как уже отмечалось, список таких функций известен. В книге [6] приведены порождающие элементы и определяющие соотношения для всех неабелевых групп 24 порядка. Используя их, можно выписать для исследуемых групп все классы сопряженных элементов, все подгруппы и все фактор-группы. Затем, используя известные представления абелевых групп, групп D_n, S_4, Q_8 и соотношения ортогональности для характеров представлений, составляются таблицы неприводимых представлений и находятся их собственные значения. Так как регулярное представление есть прямая сумма, в которую входят неприводимые представления с кратностью, равной их степени, то на основе этих таблиц можно выписать собственные значения регулярных представлений. Вычисления эти носят технический характер и слишком объемны, поэтому мы приведем лишь результат-списки параболических форм, соответствующих элементам групп порядка 24. Заметим, что при этом оказалось, что во всех группах всем элементам одинакового порядка соответствуют одни и те же функции и из 30 мультипликативных η-произведений появляются только 8, и две из них $\eta(24z)$ и $\eta^3(8z)$ имеют полуцелый вес.

Итак, имеем:

1) группа $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, функции $\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^3(8z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z)$,

$\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

2) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

3) группа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

4) группа S_4, функции $\eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

5) группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_4$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

6) группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times Q_8$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

7) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_6$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

8) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times A_4$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

9) группа D_{12}, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

10) группа $\langle R, S : R^4 = S^6 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 \rangle$, функции $\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

11) группа $\langle R, S : R^3 = S^3 = (RS)^2 \rangle$, функции $\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

12) группа $\langle R, S : RSR^{-1} = S^2, R^8 = E, S^3 = E \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^3(8z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

13) группа $\langle R, S : S^6 = R^2 = (SR)^2 \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

14) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \langle R, S : S^6 = R^4 = E, R^{-1}SR = S^{-1} \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$;

15) группа $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

Самарский государственный университет

Поступило
22.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mason G. // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 381–409. 2. Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98. 3. Воскресенская Г. В. Конечные подгруппы в SL(5, $\mathbb{C}$) и модулярные формы // Деп. ВИНИТИ. №610–В93. 4. Mason G. // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244. 5. Воскресенская Г. В. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. №2. С. 71–73. 6. Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

ШТЕЙНОВЫ ОБЛАСТИ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. Ю. Немировский

0. Введение. В последние полтора десятилетия в ряде работ изучались геометрия и топология штейновых и строго псевдовыпуклых областей (см. обзор [1]). Такие области в принципе можно использовать для доказательства алгебраичности или рациональности компактных многообразий в духе классической работы Г. Грауэрта [2] (см. также [3]). Поэтому определенный интерес представляет выяснение возможного расположения штейновых областей на комплексных многообразиях.

Известно (см. [2]), что строго псевдовыпуклая область не может содержать компактных комплексных гиперповерхностей с положительным нормальным расслоением (соответственно в двумерном случае все комплексные кривые в такой области имеют отрицательный индекс самопересечения [3]). Кроме того, существует классический способ построения строго псевдовыпуклого исчерпания дополнения к подобной гиперповерхности [4]. Поскольку на компактной алгебраической поверхности "много" кривых с положительным индексом самопересечения, можно спросить, а верно ли, что *любая* строго псевдовыпуклая область на ней лежит в дополнении к некоторой кривой. Этот вопрос возник в [3] в связи с теоремой Ходжа об индексе для строго псевдовыпуклых областей.

В настоящей заметке мы покажем, что ответ отрицателен даже для штейновых строго псевдовыпуклых областей, по крайней мере, если нет дополнительных ограничений на поверхность. Кроме того, будет установлено, что для многообразий большей размерности ответ также отрицателен уже в простейшем случае $\mathbb{CP}^n$.

Сформулируем теперь точно полученные результаты. Мы будем строить области $U \subset X$ на комплексном многообразии, удовлетворяющие следующему условию $(*)$:

> любое линейное расслоение на X вида $\mathcal{O}(D)$, где D – эффективный дивизор, нетривиально на U.

Это условие заведомо не выполнено, если в $X \setminus U$ содержится компактная комплексная гиперповерхность.

Теорема 1. *Можно указать рациональную поверхность и штейнову строго псевдовыпуклую область на ней, удовлетворяющую условию $(*)$. Такие области существуют также на любой поверхности с численно неотрицательным каноническим классом.*

Численная неотрицательность означает, что для любой комплексной кривой $C \subset X$ индекс пересечения $\mathcal{K}_X \cdot C \geqslant 0$.

Теорема 2. *Штейновы области, удовлетворяющие условию $(*)$, существуют в $\mathbb{CP}^N$ для любого $N \geqslant 3$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00225, и Международного научного фонда, грант 508.s.