

LA MECCANICA QUANTISTICA NONRELATIVISTICA
COME PROCESSO DI MARKOF NONCOMMUTATIVO (*)

LUIGI ACCARDI

1. Introduzione.

Nel presente lavoro viene proposta una assiomatica del formalismo matematico della meccanica Quantistica non relativistica basata su una definizione generale del concetto di « processo stocastico non commutativo » e sulla determinazione della struttura di una classe particolare di tali processi: i processi di Markof noncommutativi indicizzati da R^+ (semiretta reale positiva).

L'assiomatizzazione proposta differisce da quelle consuete soltanto a livello di « Postulato dinamico »: più precisamente: si suppone che le assiomatiche del tipo von Neumann-Segal-Mackey definiscano completamente la struttura matematica della teoria quantistica ad ogni fissato istante di tempo, e si postula che le relazioni tra le algebre di osservabili relative ad istanti diversi di tempo siano identiche alle relazioni intercorrenti tra le algebre di osservabili relative a tempi diversi nella rappresentazione prodotto di un processo stocastico discreto (cf. Teorema (3.7) e Definizione (3.8)). Tali relazioni sono canoniche poichè la classe di equivalenza di un qualsiasi processo stocastico discreto (cioè classificato in base alle sue distribuzioni congiunte a dimensione finita cf. (8), pag. 47) è completamente determinata dalla rappresentazione prodotto di questo.

Il postulato dinamico della teoria quantistica si introduce, quindi, nella forma seguente:

« Un sistema quantistico è un processo di Markof noncommutativo ».

Il motivo per cui quest'affermazione gioca il ruolo di postulato dinamico della teoria risiede nel fatto che ad ogni processo di Markof noncommutativo sono canonicamente associate delle equazioni di evoluzione (le equazioni di Kolmogorof non commutative) le quali costi-

(*) I risultati conseguiti in questo lavoro sono stati esposti nella conferenza tenuta il 15 marzo 1975.

tuiscono una naturale generalizzazione dell'equazione di Schrödinger nella forma di Heisenberg (cf. n. 6).

La classe di tutti i processi di Markof non commutativi è strettamente più vasta di quella dei sistemi quantistici. Questi ultimi sono caratterizzati come quei processi di Markov non-commutativi cui è associata canonicamente una evoluzione reversibile. La corrispondenza così stabilita è biunivoca nel senso che l'equazione di Kolmogorof noncommutativa associata a un processo di Markof con evoluzione reversibile coincide con l'equazione di Schrödinger e, viceversa un'equazione di Schrödinger determina un *unico* processo di Markof noncommutativo con questa proprietà (cf. n. 7).

Le evoluzioni associate ad arbitrari processi di Markof non commutativi includono quelle prescritte dalla teoria quantistica della misura (cf. n. 8). Infine il formalismo proposto permette di *dedurre* la ben nota formula per le probabilità di transizione tra due stati quantistici (cf. n. 9).

2. Formulazione degli assiomi.

Il modello matematico della teoria quantistica non relativistica sarà costruito specificando gli oggetti matematici corrispondenti ai concetti di « stato », « osservabile limitata », « valore di attesa di un'osservabile A in uno stato » (Assiomi statici) e specificando inoltre la forma matematica della legge di evoluzione del sistema (Postulato dinamico).

Per quanto riguarda il primo gruppo di assiomi, nel presente lavoro adotteremo la formulazione dovuta a J. von Neumann [31], [32], [34], e I. E. Segal [26], [27]; la formulazione del Postulato dinamico sarà invece, come vedremo più oltre, radicalmente diversa.

Supporremo, ammettendo il « Principio fenomenologico fondamentale » enunciato da I.E. Segal [27, cap. I], che l'insieme di tutte le osservabili limitate di un sistema fisico definisca tale sistema completamente, in tutti i suoi aspetti fisicamente osservabili, ed enunceremo gli Assiomi Statici della teoria nel modo seguente:

- I) Ad ogni fissato istante di tempo le osservabili limitate di un sistema fisico sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi Hermitiani di una C^* -algebra A .
- II) Gli stati del sistema sono in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme S_0 dell'insieme di tutte le forme lineari positive normalizzate su A .

- III) Se $\bar{a}$ è un'osservabile limitata a cui corrisponde l'operatore hermitiano a e Φ è uno stato a cui corrisponde il funzionale φ su A allora il valore di attesa (o valor medio) di $\bar{a}$ nello stato Φ è $\varphi(a)$.

Questi tre assiomi non determinano univocamente il modello; al contrario, come segue dall'analisi di von Neumann (cf. [32], oppure [34] pag. 297 e seguenti), si può affermare che essi descrivono la più generale teoria statistica di una classe di sistemi fisici per la quale si assuma la validità del « Principio fenomenologico fondamentale ».

OSSERVAZIONE 1: L'insieme S_0 non viene supposto convesso poichè in tal modo gli assiomi I), II), III) vengono a descrivere, a meno di evidenti isomorfismi, anche le teorie classiche *esatte* cioè quelle caratterizzate dalla proprietà che il valore esatto di ogni osservabile $\bar{a}$ nello stato Φ coincide con $(\varphi(a))$.

OSSERVAZIONE 2: Nel presente lavoro C^* -algebra significherà sempre C^* -algebra con identità, e un funzionale lineare positivo normalizzato sarà detto, conformemente alla nomenclatura corrente, uno stato. Occorrerà però distinguere, nel presente contesto, gli stati sulla C^* -algebra, A dai corrispondenti, nel modello matematico, degli stati del sistema fisico.

All'interno di una teoria statistica generale, definita dagli assiomi I), II), III) sopra-enunciati, il carattere specifico della teoria quantistica è determinato dalle seguenti scelte di A e di S :

- I') Esiste uno spazio di Hilbert complesso separabile $\mathcal{H}$ tale che A coincide con l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di tutti gli operatori lineari limitati su $\mathcal{H}$.
- II') Gli stati del sistema fisico sono in corrispondenza biunivoca con gli stati normali su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Questa specificazione di A e di S determina completamente il modello nel senso che, come ha dimostrato von Neumann [32], l'unico modo « ragionevole » di definire un valor medio, o valore d'attesa, su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è determinato dall'assioma II').

L'assioma II') caratterizza la teoria quantistica in quanto teoria statistica: le affermazioni della meccanica quantistica riguardano i valori medi — o valori d'attesa — delle osservabili in uno stato arbitrario, e gli stati formano un insieme convesso. Esistono, nella letteratura, vari modi di introdurre le affermazioni statistiche della teoria quantistica. La formulazione adottata nell'assioma (II) è quella originaria di von Neumann [32], [34].

Nel caso in cui $A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la formulazione di von Neumann equivale a quella di Mackey e l'equivalenza si stabilisce mediante il teo-

rema di Gleason. Nel caso di una arbitraria C^* -algebra questo Teorema non sussiste (cf. tuttavia il recente lavoro di A. Lodkin [15]), quindi in questo caso la formulazione di von Neumann è più adeguata ai nostri scopi.

Gli assiomi sopra elencati caratterizzano la descrizione quantistica (statica) di un sistema dinamico arbitrario. Il fatto che si considerino sistemi fisici di tipo particolare, definiti cioè da particolari gruppi di simmetrie, si esprime con un ulteriore assioma sulla esistenza di una rappresentazione di tali gruppi mediante automorfismi dell'algebra A , che è collegata con alcune, particolari, osservabili. Tuttavia noi, essendo interessati — in questo lavoro — soltanto nel carattere statistico della teoria, non considereremo quest'aspetto nè enunceremo il postulato corrispondente (rimandiamo per esso, al libro di Mackey [18] o alla monografia [19] dello stesso autore).

Per quanto riguarda gli assiomi dinamici, alcuni autori (per es. von Neumann) postulano senz'altro l'equazione di Schrödinger come legge di evoluzione temporale dei sistemi quantistici. Uno dei primi tentativi matematicamente rigorosi, di dare un fondamento teorico alla legge di evoluzione di un sistema quantistico è dovuto, per quanto risulta all'autore, a G. W. Mackey il quale, in analogia con la situazione classica, formula il postulato dinamico della meccanica quantistica, nel modo seguente (cf. [19], pag. 81):

Postulato dinamico (Mackey), l'evoluzione temporale di un sistema dinamico quantistico è descritta da un gruppo a un parametro (V_t) di applicazioni biunivoche dell'insieme degli stati in sè, che conservano le combinazioni convesse (cioè, se (φ_i) è una famiglia di stati e (t_i) una famiglia di numeri positivi di somma 1, allora

$$V_s\left(\sum_i t_i \varphi_i\right) = \sum_i t_i V_s(\varphi_i)$$

(In effetti il postulato dinamico è formulato per un semigruppato (V_s) tuttavia l'analisi successiva viene limitata ai sistemi « reversibili », per i quali tale semigruppato si estende a un gruppo).

Poichè il postulato dinamico della Meccanica quantistica è l'oggetto principale della nostra analisi, sarà opportuno esaminare più in dettaglio l'enunciato di questo nella formulazione di Mackay.

Essendo, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, l'applicazione V_t biunivoca, essa trasforma stati puri in stati puri; quindi, poichè $A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, un risultato di Kadison [14] permette di dedurre che il gruppo (V_t) è indotto da un gruppo di automorfismi interni dell'algebra.

Ciò permette, mediante considerazioni relativamente semplici (cfr. [18], pag. 82) di associare ad ogni gruppo siffatto un gruppo a un

parametro fortemente continuo (u_t) di trasformazioni unitarie su $\mathcal{H}$ e poi, mediante il teorema di Stone di dedurre l'esistenza di una Hamiltoniana (il generatore infinitesimo di tale gruppo unitario) e, differenziando la funzione $t \mapsto u_t \xi$ (dove ξ è un vettore di $\mathcal{H}$ nel dominio del generatore infinitesimo di (V_s)) l'equazione di Schrödinger.

Riassumendo, l'assioma dinamico di Mackey postulando che l'evoluzione di un sistema quantistico sia analoga all'evoluzione indotta per dualità del gruppo evolutivo di un sistema dinamico classico sul convesso delle misure di probabilità sul suo spazio delle fasi, permette non solo di caratterizzare i singoli sistemi quantistici (ciascuno di essi è completamente determinato dalla Hamiltoniana), ma determina anche la loro legge di evoluzione, cioè l'equazione di Schrödinger.

Tuttavia, su questo punto ci sono alcune osservazioni da fare. Innanzitutto c'è la questione metodologica sottolineata dallo stesso Mackey ([18], pag. 81) che in una teoria statistica, come la Meccanica Quantistica risulta essere dagli assiomi statici enunciati sopra, si introduce, nel postulato dinamico, un'affermazione strettamente deterministica e cioè che la assegnazione dello stato di un sistema ad un istante di tempo determina, mediante il gruppo di trasformazioni la cui esistenza è postulata, lo stato del sistema ad ogni istante successivo.

Inoltre l'analogia con la situazione classica, anche se altamente desiderabile, non è un requisito soddisfacente, dal punto di vista fisico, in quanto fondamento teorico di un assioma.

Nella formulazione della assiomatica quantistica discussa nel presente lavoro il sistema dei postulati statici sarà mantenuto inalterato, mentre si farà un tentativo di introdurre il postulato dinamico basandosi non su una analogia con i sistemi classici deterministici, ma su un'analogia con i sistemi stocastici classici, che si traduce in una richiesta di carattere puramente fisico.

Ora senza dubbio, come von Neumann sottolinea ripetutamente [32], la caratteristica fondamentale della evoluzione dei sistemi quantistici è che lo stato di un sistema a un certo tempo determina completamente gli stati in tutti i tempi futuri indipendentemente dalla storia passata. Tuttavia questa caratteristica, se si intende il termine « stato di un sistema classico » nel senso lato di misura di probabilità, non è peculiare dei sistemi deterministici della meccanica classica. Esistono dei processi stocastici classici il cui stato ad un tempo fissato (cioè la distribuzione di probabilità associata al sistema in quel tempo) determina univocamente lo stato ad ogni tempo futuro. Questi sono i processi di Markof. È quindi naturale, essendo la Meccanica Quantistica una teoria statistica in cui gli stati giocano il ruolo di misure di probabilità (cf. Assioma III) cercare di descrivere la sua struttura matematica in analogia con la teoria dei processi stocastici, piuttosto che con la meccanica classica. Inoltre il carattere deterministico dell'evo-

luzione temporale degli stati quantistici suggerisce l'analogia non con un qualsiasi processo stocastico ma con un processo di Markof. Questi ultimi possono essere caratterizzati dalla seguente proprietà:

- (P) comunque fissato un istante di tempo t_0 le variabili casuali (osservabili) relative a un qualsiasi istante successivo a t_0 sono statisticamente correlate con le variabili casuali al tempo t_0 ma non con quelle relative a un qualsiasi tempo passato (i.e. $< t_0$).

Naturalmente nella teoria classica dei processi stocastici la proprietà (P) è formulata in termini quantitativi (cfr. [8]), tuttavia la formulazione qualitativa data sopra ha un significato anche in un modello matematico di teoria statistica come specificato dagli assiomi statici.

Noi assumeremo la proprietà espressa sopra come principio dinamico della teoria quantistica. Più precisamente enunceremo il seguente: Principio di correlazione statistica locale della meccanica quantistica non-relativistica.

« La storia futura di un'osservabile quantistica rispetto ad un qualsiasi istante di tempo è statisticamente correlata soltanto con la sua situazione presente (cioè a quel dato istante) e non con la sua storia passata ».

La nostra analisi successiva mostrerà poi che esiste essenzialmente un unico modo di formulare, in linguaggio quantitativo, il « Principio di correlazione statistica locale » enunciato sopra, e precisamente il seguente:

IV) Un sistema quantistico è un processo di Markof noncommutativo.

La proprietà enunciata sopra sarà assunta come postulato dinamico della Meccanica Quantistica poichè da essa, come si dimostrerà nel seguito (cf. n. 7) la legge di evoluzione di un sistema quantistico, e cioè l'equazione di Schrödinger, potrà essere *dedotta* in modo matematicamente rigoroso.

In effetti, dall'Assioma (IV) si dedurrà una equazione di evoluzione più generale di quella di Schrödinger. Questa equazione permette di descrivere l'evoluzione non soltanto dei consueti sistemi quantistici, ma anche di una classe di « sistemi aperti » (open systems, cf. [11], [16]), quelli cioè la cui evoluzione non può essere descritta da una hamiltoniana.

Quindi la formulazione del Postulato dinamico della Meccanica Quantistica espressa dall'Assioma (IV) permette di trattare con un formalismo unificato, sia i sistemi quantistici con evoluzione reversibile che quelli con evoluzione irreversibile.

OSSERVAZIONE: Così come gli assiomi statici definiscono i corrispondenti matematici di *oggetti* fisici i quali non vengono definiti in altro modo se non attraverso questa corrispondenza, così l'Assioma (IV) esprime la formulazione matematica di una *proprietà* di un sistema fisico la quale soltanto attraverso questa corrispondenza assume un significato ben determinato.

Allo scopo di chiarire in che senso l'Assioma (IV) è la formulazione matematica di quello che abbiamo chiamato il « Principio di correlazione statistica locale della Meccanica Quantistica non relativistica », occorrerà descrivere almeno nelle sue linee generali, l'apparato analitico della teoria.

3. Processi stocastici non commutativi.

In teoria classica delle probabilità una « Variabile casuale » sullo spazio probabilistico $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ e a valori nello spazio misurabile $(S, \mathfrak{B})$ è definita come la classe di equivalenza di una funzione $x: \Omega \rightarrow S$ misurabile per le rispettive strutture.

Nel seguito si supporrà sempre che lo spazio $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ è completo (i.e. se $E \in \mathfrak{B}$ e $\mu(E) = 0$ allora ogni $F \subseteq E$ appartiene a $\mathfrak{B}$), e che lo spazio $(S, \mathfrak{B})$ è uno spazio di Borel standard (cioè è isomorfo, come spazio misurabile, ad uno spazio metrizzabile separabile completo con la struttura misurabile di Borel). Ogni variabile casuale X definisce un omomorfismo di σ -algebre che conserva le unità booleane:

$$(3.1) \quad \bar{X}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}/\mu$$

(se x è un rappresentante di X allora $\forall B \in \mathfrak{B}$, $x^{-1}(B)$ è un rappresentante di $\bar{X}(B)$). dove $\mathfrak{B}/\mu$ denota la σ -algebra quoziente di $\mathfrak{B}$ per il σ -ideale degli insiemi μ -nulli.

Inversamente, per un teorema di von Neumann [35] ogni siffatto omomorfismo definisce una variabile casuale.

Pertanto, in accordo con [22] una variabile casuale (generalizzata) può essere definita come un omomorfismo di σ -algebre che conserva le unità booleane.

Nel seguito denoteremo X una variabile casuale ed $\bar{X}$ l'omomorfismo di σ -algebre ad esso corrispondente.

Un processo stocastico indirizzato dall'insieme T su $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ a valori in $(S, \mathfrak{B})$ è determinato dalla assegnazioni di una famiglia $(X_t)_{t \in T}$ di variabili casuali.

Le distribuzioni congiunte (a dimensione finita) del processo $(X_t)_{t \in T}$ per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq T$ sono definite da:

$$(B_t)_{t \in F} \in \prod_F \mathfrak{B} \mapsto \mu \left(\bigcap_{t \in F} \bar{X}_t(B_t) \right)$$

Nella teoria classica i processi stocastici vengono classificati secondo le loro distribuzioni a dimensione finita; cioè due processi stocastici sono detti equivalenti se le loro distribuzioni congiunte a dimensione finita coincidono (cfr. [8] pag. 47). Allo scopo di enunciare in modo più preciso e lievemente più generale questo concetto introduciamo alcune notazioni.

Per ogni sotto-insieme $I \subseteq T$ denotiamo

$$\bar{X}_I(\mathcal{B}) = V_{t \in I} \bar{X}_t(\mathcal{B})$$

la sotto σ -algebra di $\mathcal{B}/\mu$ generata dalle $\bar{X}_t(\mathcal{B})$, per $t \in I$; $\bar{\mu}_I$ la restrizione di μ su $\bar{X}_I(\mathcal{B})$.

DEFINIZIONE (3.1). I due processi stocastici indicizzati da $T, (X_t^{(i)})_{t \in T}$ su $(\Omega^i, \mathcal{B}^i, \mu^i)$ a valori in $(S^i, \mathcal{B}^i)$, $i = 1, 2$, sono detti equivalenti se esiste un isomorfismo di σ -algebre

$$\Phi: \bar{X}_T^1(\mathcal{B}^1) \rightarrow \bar{X}_T^2(\mathcal{B}^2)$$

tale che:

$$\bar{\mu}_T^2 \cdot \Phi = \bar{\mu}_T^1$$

e per ogni sotto-insieme finito $F \subseteq T$, risulta:

$$\Phi(\bar{X}_F^1(\mathcal{B}^1)) = \bar{X}_F^2(\mathcal{B}^2).$$

Cioè, in questa classificazione di processi stocastici gli invarianti sono la classe delle algebre « locali » e la corrispondente classe di misure. Un ulteriore indebolimento della relazione di equivalenza esposta sopra si ottiene permettendo che i due processi stocastici siano indicizzati da due insiemi diversi T_1 e T_2 tali che esista un isomorfismo $\alpha: T_1 \rightarrow T_2$ compatibile (nel senso ovvio) con l'isomorfismo della Definizione (3.1). Questa classificazione è significativa nel caso di processi stocastici « continui », cioè tali che gli insiemi d'indici T siano a loro volta dotati di una struttura (per es. topologica, o lineare topologica ...); gli insiemi $F \subseteq T$ siano definiti da questa struttura (per es. insiemi aperti; sotto-spazi chiusi;) e l'isomorfismo: T_1, T_2 sia compatibile con essa (i.e. continuo; lineare continuo; ...).

Nel caso di processi stocastici discreti, (i.e. classificati secondo le loro distribuzioni congiunte a dimensione finita) tuttavia, questa classificazione è meno significativa; perciò, nel presente lavoro, dove saranno considerati soltanto processi stocastici di questo tipo, l'insieme d'indici sarà considerato assegnato una volta per tutte e l'equivalenza sarà intesa nel senso della Definizione (3.1).

LEMMA (3.2): Esiste una corrispondenza biunivoca tra variabili casuali X su $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ a valori in $(S, \mathcal{B})$ e omomorfismi di C^* -algebre

$$X: L^\infty(\mathcal{Q}, \mathcal{B}) \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$$

tali che:

$$i) X(1_S) = 1_\Omega$$

dove 1 : (risp. 1_I) è la funzione (risp. μ -classe di funzioni) identicamente uguale a 1 su S (risp. Ω).

ii) Se (f_α) è una famiglia filtrante crescente in $L_+^\infty(S, \mathcal{B})$ (= le funzioni positive in $L^\infty(S, \mathcal{B})$) tale che

$$f = \sup f_\alpha \in L_+^\infty(S, \mathcal{B})$$

allora:

$$\bar{X}(f) = \sup \bar{X}(f_\alpha).$$

Da quanto detto sopra risulta che assegnare un processo stocastico indicizzato da T , su $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ a valori in $(S, \mathcal{B})$, equivale ad assegnare una famiglia $(\mathcal{K}_t)_{t \in T}$ di omomorfismi di C^* -algebre:

$$\bar{X}_t: L^\infty(S, \mathcal{B}) \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu); \quad t \in T$$

ciascuno dei quali soddisfa le condizioni (i) e (ii) del Lemma (3.2).

LEMMA (3.3): Siano $(X_t^{(i)})_{t \in T}$; $i = 1, 2$, due processi stocastici (nel senso specificato sopra) indicizzati da T rispettivamente su $(\Omega^i, \mathcal{B}^i, \mu^i)$ e a valori in $(S^i, \mathcal{B}^i)$. I due processi stocastici sono equivalenti se e solo se esiste un isomorfismo di algebre di von Neumann

$$u: L^\infty(\Omega^1, X_T^1(\mathcal{B}^1), \mu_T^1) \rightarrow L^\infty(\Omega^2, X_T^2(\mathcal{B}^2), \mu_T^2)$$

con le seguenti proprietà:

j1) $\bar{\mu}_T^1 \cdot u = \bar{\mu}_T^2$, $\bar{\mu}_T^i$ denota lo stato su

$$(3.3.1) \quad L^\infty(\Omega^i, \bar{X}_T^i(\mathcal{B}^i), \mu_T^i)$$

indotto da μ_T^i , $i = 1, 2$.

j2) Detta per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq T$, $\mathcal{A}_{\mu^i}(F)$ la sotto-algebra di von Neumann di $L^\infty(\Omega^i, \bar{X}_T^i(\mathcal{B}^i), \mu_T^i)$ generata dalla famiglia:

$$\{\bar{X}_t^i(L^\infty(S^i, \mathcal{B}^i)): t \in F\}$$

risulta

$$(3.3.2) \quad u(\mathcal{A}_{\mu^1}(F)) = \mathcal{A}_{\mu^2}(F).$$

Siano ora $(\bar{X}_t^i)_{t \in T}$, $i = 1, 2$, due processi stocastici come nel Lemma (3.3). Supponiamo che

$$(3.3.3) \quad \bar{X}_T^i(\mathcal{B}^i) = \mathcal{B}^i / \mu^i$$

cioè il caso in cui il processo stocastico $\bar{X}_T^i$ sia « determinante » nel senso di (22) per $(\Omega^i, \mathcal{B}^i, \mu^i)$. Allora

$$(3.3.4) \quad L^\infty(\Omega^i, \bar{X}_T(\mathcal{B}^i), \mu_\mu^i) = L^\infty(\Omega^i, \mathcal{B}^i, \mu^i) \cong A_{\mu^i}$$

dove A_{μ^i} denota l'algebra di von Neumann ottenuta dalla C^* -algebra $L^\infty(\Omega^i, \mathcal{B}^i, \mu^i)$ e dal suo stato μ^i mediante la costruzione Gelfand-Neumark-Segal. In questo caso le algebre $A_{\mu^i}(F)$ definite al punto (j2) del Lemma (3.3) sono naturalmente identificate a sotto-algebre di von Neumann di A_{μ^i} .

COROLLARIO (3.4): Se vale l'uguaglianza (3.3.3), le condizioni (j1) e (j2) del Lemma (3.3) sono equivalenti alla seguente: detta $\{\mathcal{A}_{\mu^1}, \mathcal{H}_{\mu^1}, \xi_{\mu^1}\}$ la terna associata alla C^* -algebra $L^\infty(\Omega^1, \mathcal{B}^1, \mu^1)$ e al suo stato μ^1 con la costruzione GNS, esiste una trasformazione unitaria $u: \mathcal{H}_{\mu^1} \rightarrow \mathcal{H}_{\mu^2}$ tale che

$$u \cdot \mathcal{A}_{\mu^1} \cdot u^* = \mathcal{A}_{\mu^2}$$

$$u \cdot \xi_{\mu^1} = \xi_{\mu^2}$$

$$u \cdot \mathcal{A}_{\mu^1}(F) \cdot u^* = \mathcal{A}_{\mu^2}(F); \quad \forall \text{ sottoinsieme finito } F \subseteq T.$$

COROLLARIO (3.5): Nelle notazioni del Lemma (3.3) la proprietà (j2) è verificata se e solo se per ogni $t \in T$, risulta:

$$u(\mathcal{A}_{\mu^1}\{t\}) = \mathcal{A}_{\mu^2}\{t\}.$$

Le considerazioni precedenti mostrano che ad ogni processo stocastico indicizzato da T è associata una terna $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}(F), \mu\}$ dove: $\mathcal{A}$ è una algebra di von Neumann; μ uno stato normale fedele su $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}(F)$ è una famiglia di sotto-algebre di von Neumann di $\mathcal{A}$ indicizzata dai sotto-insiemi finiti $F \subseteq T$ e con le seguenti proprietà:

i1) Se F e G sono due sottoinsiemi finiti di T , allora $\mathcal{A}(F \cup G)$ è l'algebra di von Neumann generata da $\mathcal{A}(F)$ ed $\mathcal{A}(G)$.

i2) $\mathcal{A}$ è l'algebra di von Neumann generata dalla famiglia.

Se a due processi stocastici sono associate le terne $\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^i(F), \mu^i\}$, $i = 1, 2$ allora questi sono equivalenti se e solo se esiste un isomorfismo di algebre di von Neumann

$$u: \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^2$$

tale che:

$$(3.5.1) \quad \mu^2 \cdot u = \mu^1$$

$$(3.5.2) \quad u(\mathcal{A}^1(F)) = \mathcal{A}^2(F); \quad F \text{ s.i. finito di } T$$

DEFINIZIONE (3.6): Due terne $\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^i(F), \mu^i\}$ $i = 1, 2$ con le proprietà descritte sopra, saranno dette equivalenti se esiste un isomorfismo di algebre di von Neumann

$$\mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^2$$

che soddisfa (3.5.1) e (3.5.2).

Come mostra il Corollario (3.4) per l'equivalenza di processi stocastici è sufficiente limitarsi ai sottoinsiemi di T che contengono un solo elemento. Tuttavia ciò è legato al fatto che finora ci siamo limitati alla considerazione di processi stocastici *discreti* (cioè classificati secondo le loro distribuzioni a dimensione finita). Per processi stocastici di tipo più generale la classificazione data dal Lemma (3.3) continua ad essere vera, con la differenza che i sotto-insiemi $F \subseteq T$ non appartengono alla classe dei sotto-insiemi finiti di T , ma ad una classe più generale. Per esempio i processi stocastici infinitamente decomponibili e quelli che intervengono in teoria euclidea dei campi sono di questo tipo.

Le relazioni i1), i2) tra le « algebre locali » $\mathcal{A}(F)$ sono universali nel senso che valgono per qualsiasi processo stocastico, indipendentemente dalle eventuali relazioni specifiche tra le variabili casuali del processo. In generale, relazioni di questo ultimo tipo si tradurranno in relazioni algebriche tra le algebre locali. In ciò che segue si mostrerà che, nel caso di processi stocastici *discreti* è possibile, rimanendo nella stessa classe di equivalenza di processi stocastici, dedurre delle relazioni universali tra le algebre locali, più precise delle (i1), (i2).

È noto (cfr. [8], pag. 621) che ogni processo stocastico indicizzato dall'insieme T e a valori nello spazio di Borel standard $(S, \mathcal{B})$ è equivalente al processo stocastico determinato, sullo spazio $\prod_T (S, \mathcal{B})$ (= prodotto di card T — copie di $(S, \mathcal{B})$) con una misura μ , dall'assegnazione della famiglia delle proiezioni canoniche $(\pi_t)_{t \in T}$

$$\pi_t: (x_s)_{s \in T} \in \prod_T S \rightarrow x_t \in S.$$

Le proiezioni canoniche inducono, per dualità delle immersioni di C^* -algebre:

$$(3.6.1) \quad \pi'_t: L^\infty(S, \mathcal{B}) \rightarrow L^\infty\left(\prod_T S, \prod_T \mathcal{B}\right).$$

Denotiamo $\mathcal{A}_t$ l'immagine di $L^\infty(S, \mathcal{B})$ per l'immersione π_t ; $\mathcal{A}_0$ la chiusura (per la sup norma) dell'algebra generata dall'insieme di tutte le A_t ; μ_0 la restrizione di μ su $\mathcal{A}_0$.

Siano $\mathcal{A}_0, (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mu_0$ come sopra. Sia $\mathcal{A}_\mu$ (risp. $\mathcal{K}_\mu$) l'algebra di von Neumann (risp. lo spazio di Hilbert) costruita da $\mathcal{A}_0$ e μ_0 con la costruzione GNS; $\bar{\mu}$ (risp. ξ_μ) lo stato su $\mathcal{A}_\mu$ (risp. il vettore in $\mathcal{K}_\mu$) indotto da μ_0 ; per ogni sotto-insieme finito $F \subseteq T$, $\mathcal{A}_\mu(F)$ la sottoalgebra di von Neumann di $\mathcal{A}_\mu$ generata dalle immagini, per la rappresentazione GNS, delle C^* -algebre A_t , $t \in F$. Diremo che $\{\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\mu(F), \bar{\mu}\}$ è la terna associata ad $\{A_0, (\mathcal{A}_t), \mu_0\}$ con la costruzione GNS e che le due terne $\{A_0, (\mathcal{A}_t), \mu_0\}$ sono equivalenti se le terne di algebre di von Neumann ad esse corrispondenti sono equivalenti nel senso della Definizione (3.6).

La terna $\{A_0, (A_t), \mu\}$ è una caratteristica del processo stocastico nel senso specificato del seguente teorema:

TEOREMA (3.7): Ad ogni processo stocastico (discreto) indicizzato dall'insieme T è naturalmente associata una terna $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mu\}$ dove $\mathcal{A}$ è una C^* -algebra; μ uno stato su $\mathcal{A}$; ed $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ una famiglia di sotto C^* -algebre di $\mathcal{A}$ tali che

- i1) $\mathcal{A}$ è la C^* -algebra generata da $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$.
- i2) Per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq T$, l'algebra $\mathcal{A}(F)$ generata da $(A_t)_{t \in F}$ è isomorfa a $\bigotimes_{t \in F} \mathcal{A}_t$.
- i3) Tutte le $\mathcal{A}_t$ sono isomorfe ad una stessa C^* -algebra commutativa.

Due processi stocastici sono equivalenti se e solo se le terne ad essi associate sono equivalenti. Inversamente per ogni terna come sopra esiste un processo stocastico tale che la terna naturalmente associata ad esso è equivalente a quella iniziale. Se si interpreta il parametro t come «tempo», dalla discussione precedente risulta che l'algebra $\mathcal{A}_t$ ammette una interpretazione naturale come algebra delle osservabili del sistema, descritto dal processo stocastico, all'istante t .

Per esempio, se lo spazio S è lo spazio delle «posizioni» del sistema, allora un punto di $\prod_t S$ è una traiettoria e un elemento di $\mathcal{A}_t$ è una funzione della posizione del sistema all'istante t ; mentre l'algebra $\mathcal{A}$ è un'algebra di funzioni (misurabili) sullo spazio delle traiettorie del processo.

Il passaggio dalla teoria classica dei processi stocastici alla teoria non commutativa sarà effettuato postulando che le relazioni universali tra le algebre locali naturalmente associate al processo, che sono state dedotte nel caso di processi stocastici classici (cf. Teorema (3.7)), rimangono valide anche in questo caso e permettendo invece che le algebre $\mathcal{A}_t$ (delle osservabili relative ad un istante di tempo t , fissato) siano arbitrarie C^* -algebre invece che C^* -algebre commutative.

DEFINIZIONE (3.8). Un processo stocastico (discreto) simmetrico indicizzato da un insieme T è una terna $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mu\}$ tale che $\mathcal{A}$ è una C^* -algebra; μ uno stato su $\mathcal{A}$; $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ una famiglia di sotto C^* -algebre di $\mathcal{A}$ con le seguenti proprietà:

- i1) $\mathcal{A}$ è la C^* algebra generata dalla famiglia $(A_t)_{t \in T}$.
- i2) Per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq T$, la C^* -algebra generata dalla famiglia è isomorfa a $\bigotimes_{t \in F} \mathcal{A}_t$.
- i3) Le C^* algebre $\mathcal{A}_t$ ($t \in T$) sono mutuamente isomorfe.

Due processi stocastici simmetrici saranno detti equivalenti se le terne che li definiscono sono equivalenti. Cioè: i due processi stocastici simmetrici $\{A', (\mathcal{A}'_t)_{t \in T}, \mu^2\}$ saranno detti equivalenti se, detta $\mathcal{A}_{\mu^2}$ l'algebra di von Neumann ottenuta da $\mathcal{A}'$ e μ^2 con la costruzione GNS; $\bar{\mu}^2$ lo stato indotto da $\mathcal{A}_{\mu^2}$ su $\mathcal{A}_{\mu^2}$; e $\mathcal{A}_{\mu^2}(F)$ l'algebra di von Neumann generata dalle immagini delle A_t , $t \in F$, per la rappresentazione GNS di $\mathcal{A}'$; esiste un isomorfismo (normale) $u: \mathcal{A}_{\mu^2} \rightarrow \mathcal{A}_{\mu^2}$ tale che:

$$\bar{\mu}^2 \circ u = \bar{\mu}^1$$

e, per ogni sotto-insieme finito $F \subseteq T$

$$u(\mathcal{A}_{\mu^2}(F)) = \mathcal{A}_{\mu^1}(F)$$

OSSERVAZIONE 1: Il prodotto tensoriale che compare al punto i2) della definizione va inteso rispetto ad una qualsiasi C^* -norma incrociata sul prodotto tensoriale algebrico corrispondente, quindi un processo stocastico simmetrico è definito anche dalla scelta di questa norma. Tuttavia nella maggior parte dei casi concreti sul prodotto tensoriale algebrico esiste una C^* -norma incrociata «naturale» proveniente per esempio dal fatto che le algebre $\mathcal{A}_t$ sono realizzate come algebre di operatori su un certo spazio di Hilbert e quindi, in questi casi, la ambiguità menzionata sopra scompare.

OSSERVAZIONE 2: Nel seguito useremo spesso il termine «processo stocastico simmetrico» (o semplicemente «processo stocastico») per denotare una qualsiasi terna $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mu\}$ equivalente ad una che possiede le proprietà i1), i2), i3), elencata nella definizione (3.8).

4. Processi di Markof non commutativi.

Per chiarire in che senso l'Assioma IV) è la formulazione matematica del Principio di correlazione statistica locale premetteremo, alla definizione rigorosa del concetto di «processo di Markof non commutativo», alcune considerazioni euristiche su una classe molto semplice di processi stocastici classici.

Sia ξ un sistema ed $S = \{1, \dots, n\}$ l'insieme dei suoi stati (consideriamo un insieme finito allo scopo di identificare funzioni continue e funzioni misurabili; cf. (2) per una discussione del caso generale).

Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ denotiamo $\mathcal{A}_t \cong C(S)$ (= funzioni continue $S \rightarrow \mathbb{C}$) l'algebra delle osservabili del sistema all'istante t , e sia $\mathcal{A} = C\left(\prod_{\mathbb{R}^+} S\right) \cong \bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{A}_t$ l'algebra delle funzioni continue delle « storie » del processo.

(Se $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}^+$ una « storia » del processo nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è data dall'insieme $(\xi_s)_{s \in [t_0, t_1]}$ degli stati del sistema corrispondenti a tutti i tempi $s \in [t_0, t_1]$. In una descrizione statistica, la descrizione della situazione del sistema ad un qualsiasi istante è fornita dall'insieme dei valori medi (o di aspettazione) di tutte le osservabili del sistema relative a quell'istante (cioè di tutte le $f \in \mathcal{A}_t$) e la descrizione statistica del sistema in un intervallo di tempo $[s, t]$ è fornita dall'insieme dei valori di aspettazione delle funzioni (continue) delle storie possibili del processo nell'intervallo $[s, t]$, cioè delle funzioni $f \in \mathcal{A}_{[s, t]}$ (= sotto-algebra di $\mathcal{A}$ generata dalle A_r con $r \in [s, t]$).

Consideriamo ora un qualsiasi istante di tempo $t_0 \in \mathbb{R}^+$ e supponiamo nota la storia del processo $(\xi_s)_{s \in [0, t_0]}$ nell'intervallo $[0, t_0]$.

La teoria generale dei processi stocastici permette di dedurre dei valori di aspettazione dei funzionali del processo, i valori di aspettazione condizionati:

$$E(f_{[s, t]} | (\xi_s)_{s \in [0, t_0]})$$

che esprimono il valore di aspettazione di un qualsiasi funzionale delle possibili storie future del sistema ($s, t > t_0$) nell'ipotesi che la storia di questo sia nota fino allo istante t_0 . Più in generale, è possibile ottenere aspettative condizionate del tipo:

$$E(f_{[s, t]} | (f_r(\xi_r))_{r \in [0, t_0]})$$

che esprimono il valore di attesa del funzionale $f_{[s, t]} \in \mathcal{A}_{[s, t]}$ nell'ipotesi che, $\forall s \in [0, t_0]$ l'osservabile $f_s \in \mathcal{A}_s$ nello stato $\xi_s \in S$ abbia un preassegnato valore.

Espressioni di questo genere specificano quanto il valore di aspettazione di un funzionale delle storie del sistema in un certo intervallo di tempo è influenzato dalla conoscenza del valore (esatto) di un altro funzionale in un altro intervallo di tempo. In questo senso tali espressioni misurano la correlazione statistica tra osservabili (delle storie) del sistema relative ad intervalli di tempo diverso.

Il principio di correlazione statistica locale, si esprime in questo caso, in forma generalizzata con l'uguaglianza:

$$E(f_{[s, t]} | (f_r(\xi_r))_{r \in [0, t_0]}) = E(f_{[s, t]} | f_{t_0}(\xi_{t_0}))$$

per ogni scelta di $f_{[s, t]} \in \mathcal{A}_{[s, t]}$, $f_r \in \mathcal{A}_r$, $r \in [0, t_0]$, $\xi_s \in S$, $s, t > t_0$.

Ovvero, considerando il membro a destra come funzione di ξ_{t_0} e introducendo la notazione:

$$E_{t, t_0}(f_{[s, t]})(\eta_s) = E(f_{[s, t]} \eta_s)$$

con la relazione:

$$(4.0) \quad E_{t, t_0}(\mathcal{A}_{[s, t]}) \subseteq \mathcal{A}_{t_0}; \quad t_0 < s < t.$$

La relazione (4.0), che equivale al Principio di correlazione statistica locale per la classe di processi considerata sopra (cf. [2]), per una discussione del caso generale) è una formulazione della « proprietà di Markof ».

I processi stocastici (indicizzati da $\mathbb{R}^+$) ai quali è associata una famiglia $(E_{t, s})$ di attese condizionate che soddisfa la (4.0) vengono detti processi di Markof. La classe di tali processi rappresenta pertanto la più generale classe di processi stocastici per i quali sia soddisfatto il Principio di correlazione statistica locale, la misura della correlazione statistica essendo fornita dalle attese condizionate.

Supponiamo ora di avere definito un analogo non commutativo del concetto di « attesa condizionata ».

Allora sarà naturale definire « processi di Markof non commutativi » quei processi stocastici simmetrici (cf. Definizione (3.8)) ai quali è associata una famiglia $(E_{t, s})$ di attese condizionate non commutative che soddisfano la relazione (4.0). Tale classe sarà necessariamente la più generale classe di processi stocastici non commutativi per i quali sia soddisfatto questo principio (infatti ogni classe di processi con questa proprietà deve ridursi alla classe dei processi di Markof quando tutte le algebre sono commutative).

Un concetto analogo, in un contesto non-commutativo, al concetto classico di « attesa condizionata » e particolarmente utile per considerazioni di tipo probabilistico è fornito dalle « quasi-attese condizionate ». Nel presente lavoro utilizzeremo una classe particolare di quasi-attese condizionate (cioè quelle relative ai processi stocastici simmetrici, indicizzati da $\mathbb{R}^+$) e rimanderemo ai lavori [1], [2] per una discussione di questo concetto in un contesto più generale, così come dei motivi per cui, da un punto di vista puramente probabilistico, la teoria delle attese condizionate su C^* -algebre si riveli non sufficientemente ricca.

Sia $\mathcal{A}$ un C^* -algebra e $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ una famiglia di sotto- C^* -algebre di $\mathcal{A}$ che verifica le condizioni i1), i2), i3) della Definizione (3.8). Denotiamo, per ogni sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}^+$, $\mathcal{A}_I$ la sotto- C^* -algebra di $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\{A_r; r \in I\}$.

DEFINIZIONE (4.1): Una quasi-attesa condizionata rispetto alla terna $\mathcal{A}_{[0,s]} \in \mathcal{A}_{[0,s]} \in \mathcal{A}_{[0,t]}$ è un'applicazione lineare $E_{t,s}: \mathcal{A}_{[0,t]} \rightarrow \mathcal{A}_{[0,s]}$ che gode delle seguenti proprietà:

- i1) $E_{t,s}(a) \geq 0$; se $a \geq 0$; $a \in \mathcal{A}_{[0,t]}$
- i2) $E_{t,s}(a_r \cdot b) = a_r \cdot E_{t,s}(b)$; $\forall a_r \in \mathcal{A}_r$; $r < s$; $b \in \mathcal{A}_{[0,t]}$
- i3) $\|E_{t,s}(b)\| \leq \|b\|$; $b \in \mathcal{A}_{[0,t]}$.

La quasi-attesa condizionata $E_{t,s}$ sarà detta normalizzata se

$$i4) E_{t,s}(1) = 1.$$

Si verifica facilmente che $E_{t,s}$ è un'attesa condizionata, nel senso consueto, se e solo se essa è normalizzata e la uguaglianza i2) nella Definizione (4.1) ha luogo anche per $r = s$. Cioè, la differenza tra i due tipi di operatori si manifesta soltanto per l'algebra relativa al punto di frontiera s ; vedremo in seguito (cf. Lemma (4.3)) come questa differenza sia essenziale per la non banalità della teoria.

Dalle proprietà di $E_{t,s}$ e dalle algebre $(\mathcal{A}_{[s,t]})$ segue facilmente la seguente relazione fondamentale:

$$(4.2) \quad E_{t,s}(\mathcal{A}_{[s,t]}) \subseteq \mathcal{A}_s; \quad s < t$$

Vale a dire: ogni quasi-attesa condizionata rispetto alla terna $\mathcal{A}_{[0,s]} \subseteq \mathcal{A}_{[0,s]} \subseteq \mathcal{A}_{[0,t]}$ soddisfa la proprietà di Markof (cf. relazione (4.0)).

DEFINIZIONE (4.2). Siano $\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ come sopra. Uno stato φ su $\mathcal{A}$ sarà detto stato di Markof rispetto alla famiglia di algebre locali $(\mathcal{A}_{[s,t]})$ se per ogni $0 \leq s < t$ esiste una quasi-attesa condizionata rispetto alla terna

$$(4.2.1) \quad \mathcal{A}_{[0,s]} \subseteq \mathcal{A}_{[0,s]} \subseteq \mathcal{A}_{[0,t]}, \quad \text{tale che} \quad \varphi_{[0,t]} = \varphi_{[0,s]} \cdot E_{t,s}$$

($\varphi_{[0,s]}$ denota la restrizione di φ su $\mathcal{A}_{[0,s]}$).

La necessità di sostituire il concetto di attesa condizionata con quello di quasi-attesa condizionata è illustrata dal seguente:

LEMMA (4.3): Sia φ stato di Markof rispetto alla famiglia di algebre locali $(\mathcal{A}_{[0,t]})$. Supponiamo che ciascuna algebra $\mathcal{A}_t$ abbia centro banale. Sia $(E_{t,s})$ la famiglia delle quasi-attese condizionate associate a φ secondo la definizione (4.2). Allora se ciascuna $E_{t,s}$ è una attesa condizionata da $\mathcal{A}_{[0,t]}$ su $\mathcal{A}_{[0,s]}$, φ è uno stato prodotto, cioè:

$$\varphi = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi_t, \quad \varphi_t = \text{restrizione di } \varphi \text{ su } \mathcal{A}_t.$$

Inversamente ogni stato prodotto su $\mathcal{A} = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}^+} \mathcal{A}_t$ è uno stato di Markof nel senso della definizione (4.2) e le $E_{t,s}$ ad esso associate possono essere scelte come attese condizionate.

(Cf. [3] per la dimostrazione).

Sia ora φ -stato di Markof su $\mathcal{A}$ relativamente alla famiglia $(\mathcal{A}_{[s,t]})$ di algebre locali. Denotiamo $\mathcal{A}_s \vee \mathcal{A}_t$ la sotto- C^* -algebra di $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{A}_s$ ed $\mathcal{A}_t$, ed $\bar{E}_{t,s}$ la restrizione di $E_{t,s}$ su $\mathcal{A}_s \vee \mathcal{A}_t$. La famiglia $(\bar{E}_{t,s})$ gode delle seguenti proprietà.

(4.3.1) ciascuna $\bar{E}_{t,s}: \mathcal{A}_s \vee \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{A}_s$ è un'applicazione lineare completamente positiva.

$$(4.3.2) \quad \bar{E}_{t,s}(1) = 1; \quad \text{mod } \{\varphi_0, (\bar{E}_{t',s'})\}$$

$$(4.3.3) \quad \bar{E}_{s,r}(a_r \cdot \bar{E}_{t,s}(b_t)) = \bar{E}_{t,r}(a_r \cdot b_t) \quad \text{mod } \{\varphi_0; (\bar{E}_{t',s'})\}$$

$\forall a_r \in \mathcal{A}_r$ e per ogni $r < s < t, b_t \in \mathcal{A}_t$.

Dove la notazione $\text{mod } \{\varphi_0, (\bar{E}_{t',s'})\}$ significa che in ogni espressione del tipo

$$\varphi(\bar{E}_{t_1,0}(a_0 \cdot \bar{E}_{t_2,t_1}(a_1 \dots \bar{E}_{t_n,t_{n-1}}(a_{n-1}) \dots)))$$

$0 < t_1 < \dots < t_n; a_i \in \mathcal{A}_{t_i}; i = 1, \dots, n-1.$

ciascun membro di una delle uguaglianze (4.3.2) e (4.3.3) può essere sostituito all'altro senza alterare il risultato.

Si verifica facilmente che la coppia $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ determina completamente lo stato φ mediante le uguaglianze:

$$(4.4) \quad \varphi(a_0 \dots a_n) = \varphi_0(\bar{E}_{t_1,0}(\alpha_0 \cdot \bar{E}_{t_2,t_1}(a_1 \dots \bar{E}_{t_n,t_{n-1}}(a_n) \dots)))$$

dove $a_i \in \mathcal{A}_{t_i}$; $0 < t_1 < \dots < t_n < v$, e il secondo membro non dipende da v .

PROPOSIZIONE (4.5): Ogni coppia $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ che soddisfa le proprietà (4.3.1) (4.3.2), (4.3.3) determina un unico stato φ su $\mathcal{A}$ mediante le relazioni (4.4).

Gli stati definiti della proposizione (4.5), pur avendo una struttura quasi identica a quella degli stati di Markov, nel senso della Definizione (4.2), possono non essere tali poichè per essi non necessariamente è soddisfatta la condizione:

$$\varphi \cdot E_{t,s} = \varphi$$

(cf. [2] per un controesempio). Noi indicheremo col termine generale di *catene di Markof* gli stati che soddisfano le condizioni della Proposizione (4.5) mentre riserveremo il termine di *stato* di Markof per gli stati che soddisfano le condizioni della Definizione (4.2).

DEFINIZIONE (4.6): Un processo di Markof non commutativo è un processo stocastico simmetrico $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \varphi\}$ dove φ è una catena di Markof.

Osserviamo ora che, se per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ risulta $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (= algebra degli operatori limitati sullo spazio di Hilbert complesso separabile $\mathcal{H}$), e se si richiede che, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ la restrizione di φ su $\mathcal{A}_t$ sia normale, allora la teoria risultante ad ogni tempo fisso t è compatibile con gli assiomi statici della Meccanica Quantistica come enunciati al n. 2.

Nel seguito considereremo processi di Markof non commutativi che soddisfano le seguenti condizioni:

- (4.6.1) Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{A}_t$ è isomorfa all'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert complesso separabile $\mathcal{H}$.
- (4.6.2) Per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq \mathbb{R}^+$ la norma sul prodotto tensoriale $\bigotimes_{t \in F} \mathcal{A}_t$ è quella indotta dalla identificazione del prodotto tensoriale algebrico della famiglia $(\mathcal{A}_t)_{t \in F}$ con una algebra di operatori su $\bigotimes_F \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- (4.6.3) Per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq \mathbb{R}^+$ la restrizione di φ sull'algebra generata da $(\mathcal{A}_t)_{t \in F}$ e identificata ad un'algebra di operatori su $\bigotimes_F \mathcal{H}$, ammette una estensione normale alla chiusura debole di quest'algebra.

5. Stati stazionari.

Nelle notazioni del numero precedente, sia $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $J_t: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}_t$ un isomorfismo (normale) fissato una volta per tutte che chiameremo la t -esima immersione canonica. Allora le uguaglianze

$$T_s \circ J_t = J_{s+t}; \quad s, t \in \mathbb{R}^+$$

definiscono univocamente un'azione T , per endomorfismi, del semi-gruppo $\mathbb{R}^+$ su $\mathcal{A}$.

DEFINIZIONE (5.1): Uno stato φ su $\mathcal{A}$ viene detto stazionario se è

T -invariante; cioè se

$$\varphi \circ T_s = \varphi; \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Corrispondentemente un processo stocastico $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \varphi\}$ che soddisfa (4.6.1) sarà detto stazionario se lo stato φ è stazionario.

Siano ora $\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ come nel numero precedente; φ stato di Markof ed $(E_{t,s})$ una famiglia di quasi-attese condizionate ad esso associata. Si è visto che φ è completamente determinato dalla coppia $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$, dove φ_0 è la restrizione di φ su $\mathcal{A}_0$ ed $\bar{E}_{t,s}$ è la restrizione di $E_{t,s}$ su $\mathcal{A}_s \vee \mathcal{A}_t$ mediante la formula cf. [3]:

$$\varphi = \lim_{\substack{t_0=0 < t_1 < \dots < t_n \rightarrow \infty \\ \max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0}} \varphi_0 \cdot \bar{E}_{t_1,0} \cdot \bar{E}_{t_2,t_1} \cdot \dots \cdot \bar{E}_{t_n,t_{n-1}}.$$

Ciascuna delle $\bar{E}_{t,s}$ induce un'applicazione lineare (completamente positiva):

$$\mathcal{E}_{t,s}: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

definita dalla relazione

$$(5.4) \quad \bar{E}_{t,s} \circ (J_s \otimes J_t) = J_s \circ \mathcal{E}_{t,s}$$

Si vede subito che φ è stato di Markof stazionario se e solo se per ogni $r, s, t \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathcal{A}_{[0,t]}$, $b \in \mathcal{A}_{[r,s+t]}$ risulta:

$$\varphi_{[r,s+t]}(b \cdot T_r E_{t,s}(a)) = \varphi_{[r,s+t]}(b \cdot E_{t+r,s+r}(T_r a)).$$

Concordemente con le notazioni finora impiegate, scriveremo semplicemente:

$$T_r \cdot E_{t,s} = E_{t+r,s+r} \cdot T_r; \quad (\text{mod } \varphi)$$

per denotare la proprietà di covarianza (debole) espressa dalla uguaglianza precedente.

Il seguente lemma mostra che anche la stazionarietà di uno stato di Markof è una proprietà puramente locale, cioè esprimibile soltanto in termini di φ_0 e degli $\mathcal{E}_{t,s}$.

LEMMA (5.3): Nelle notazioni precedenti lo stato di Markof $\varphi = \{\varphi_0, (\mathcal{E}_{t,s})\}$ è stazionario se e solo se $\forall r, s, t \in \mathbb{R}^+$, $s < t$ risulta:

$$(5.3.1) \quad \bar{\varphi}_s = \bar{\varphi}_0; \quad (\bar{\varphi}_s = \varphi \circ J_s)$$

$$(5.3.2) \quad \mathcal{E}_{t,s} = \mathcal{E}_{t+r,s+r}.$$

Dove la (5.3.2) va intesa nel senso che:

$$\varphi_{[0,s]}(b \cdot J_s \mathcal{E}_{t,s}(x)) \eta = \varphi_{[0,s]}(b \cdot J_s \mathcal{E}_{r+s,r}(x))$$

per ogni $r, s, t \in \mathbb{R}^+$, $s < t$; $b \in \mathcal{A}_{[0,s]}$; $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

6. Equazioni di evoluzione.

In questa parte mostreremo che, in analogia con la situazione classica, ai processi di Markof non commutativi sono associate naturalmente delle equazioni di evoluzione.

Sia $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \varphi\}$ un processo di Markof non-commutativo ed $(E_{t,s})$ la famiglia delle quasi-attese condizionate associate allo stato φ . Se $(Z(t, s))$ denota la restrizione di $E_{t,s}$ su $\mathcal{A}_t$, allora gli operatori $Z(t, s)$ sono completamente positivi e le seguenti uguaglianze hanno luogo:

$$(6.1) \quad \varphi_t = \varphi_s \cdot Z(t, s)$$

$$(6.2) \quad Z(s, r) \cdot Z(t, s) = Z(t, r)$$

$$(6.3) \quad Z(t, s)[1] = 1$$

(ora e nel seguito tutte le uguaglianze verranno intese mod $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ (cf. (4.3.2) (4.3.3)), tuttavia negli esempi concreti di processi di Markof che saranno considerati questa restrizione non sarà necessaria).

OSSERVAZIONE: Nella formula (6.1) abbiamo usato la notazione $\varphi \mapsto \varphi \cdot Z(t, s)$ per indicare l'azione di $Z(t, s)$ sul duale di $\mathcal{A}_s$.

Ora nel caso di processi di Markof classici, se cioè tutte le algebre $\mathcal{A}_t$ sono commutative, gli operatori $Z(t, s)$ sono noti come operatori di transizione, l'equazione (6.1) è l'equazione di evoluzione (in forma integrale) della misura di probabilità del processo a tempi fissi, e l'equazione (6.2) è nota come equazione di Chapman-Kolmogorof.

Sotto ipotesi di regolarità, che qui non esplicheremo (cf. [3]) dalle equazioni (6.1), (6.2) si possono dedurre nelle equazioni differenziali, cioè:

$$(6.4) \quad \frac{d}{dt} \varphi_t = \varphi(t) S(t),$$

$$(6.5) \quad \frac{d}{dt} a_t = -S(t) a_t,$$

ovvero, in maniera più simmetrica:

$$(6.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} Z(t, s) = Z(t, s) \cdot S(s),$$

$$(6.7) \quad \frac{\partial}{\partial s} Z(t, s) = -S(s) Z(t, s).$$

In queste equazioni $Z(t, s)$ è identificato ad un operatore lineare $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (completamente positivo) e $S(t): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore lineare, generalmente illimitato, definito dal fatto che la funzione di Green delle equazioni (6.4) e (6.5) è data da $Z(t, s)$.

Le equazioni differenziali (6.4) e (6.5) sono note rispettivamente come equazione diretta (6.4) e inversa (6.5) di Kolmogorof. (Spesso questa terminologia viene usata per le corrispondenti equazioni sulla funzione di Green, cioè le (6.6), (6.7)).

Definiremo *operatore di Kolmogorof non-commutativo* una famiglia $S(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ di operatori lineari $S(t): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ densamente definiti e tali che sia univocamente determinata la funzione di Green $Z(t, s)$ delle equazioni (6.4) e (6.5) e soddisfi le seguenti proprietà:

$$1) \quad Z(t, s)[1] = 1.$$

$$2) \quad Z(t, s): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ è } \forall t > s, \text{ un operatore lineare completamente positivo, ultra-fortemente continuo.}$$

Osservare che nel caso di Processi di Markof stazionari (o, più in generale, di processi di Markof che soddisfano (5.3.2)) l'operatore di Kolmogorof non-commutativo corrispondente è indipendente da t . Recentemente una caratterizzazione degli operatori di Kolmogorof non commutativi limitati e indipendenti da t , è stata data da G. Lindblad (16) (cf. anche [11]). L'esempio più semplice di operatore di Kolmogorof non-commutativo si ottiene scrivendo la (6.4) non in termini dello stato (normale, cf. 4.6.3)) φ_t , ma della sua matrice densità W_t , e scegliendo in qualità di $S(t)$ l'operatore

$$W_t \mapsto i[W_t, H(t)] = i(W_t H(t) - H(t) W_t)$$

dove $H(t)$ è un operatore autoaggiunto e si suppone che la derivazione corrispondente sia densamente definita.

Con queste scelte si ha:

$$\frac{d}{dt} W_t = i[W_t, H(t)].$$

Si vede quindi come l'equazione di Schrödinger nella forma di Heisenberg sia un caso particolare dell'equazione diretta di Kolmogorof non-commutativa.

7. Sistemi quantistici.

Nel numero precedente si è visto come ad ogni processo di Markof siano canonicamente associate (sotto deboli ipotesi di regolarità sugli operatori di transizione) delle equazioni di evoluzione: le equazioni diretta e inversa di Kolmogorof (6.4), (6.5). Inversamente l'assegnazione di queste equazioni determina (sotto ipotesi di regolarità sull'operatore di Kolmogorof) gli operatori di transizione del processo. La differenza fondamentale tra i processi di Markof classici e quelli noncommutativi consiste nel fatto che i primi sono completamente determinati all'assegnazione dello stato iniziale φ_0 e della famiglia $(Z(t, s))$ degli operatori di transizione; mentre ciò non è vero, in generale, per i processi noncommutativi i quali, come si è visto — cf. Proposizione (4.5) — sono determinati dalla coppia $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ dove $Z(t, s)$ è la restrizione di $\bar{E}_{t,s}$ su $\mathcal{A}_t$ e, in generale, non è sufficiente a determinare l'intero operatore $\bar{E}_{t,s}$. Quindi, in generale, esisteranno più processi di Markof noncommutativi ai quali sono associate le stesse equazioni di Kolmogorof. Il seguente teorema mostra che non solo i sistemi quantistici sono particolari processi di Markof non commutativi, ma anche che le equazioni di Kolmogorof non commutative ad essi corrispondenti (cioè l'eq. di Schrödinger) determinano completamente il processo.

TEOREMA (7.1): Sia dato un sistema quantistico (considerato univocamente determinato dall'assegnazione di una funzione $H(t)$ e di una matrice densità iniziale W_0), allora:

i) Esiste un unico processo di Markof non commutativo tale che l'equazione diretta di Kolmogorof ad esso associata coincida con l'equazione di Schrödinger (nella forma di Heisenberg) del sistema quantistico.

ii) Lo stato di Markof φ associato al sistema quantistico è definito da: $\varphi = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi_t$ dove W_0 è la matrice densità di φ_0 e W_t — la matrice densità di φ_t — soddisfa: $W_t = W_s Z(t, s)$, dove $Z(t, s)$ è la funzione di Green dell'equazione di Schrödinger del processo.

iii) A sistemi quantistici conservativi ($H(t) = H$ indipendente dal tempo) corrispondono processi di Markof con quasi-attese condizionate stazionarie (nel senso della uguaglianza (5.3.2)).

Per la dimostrazione di questo teorema cfr. [3].

In particolare, dall'affermazione ii) segue che la corrispondenza tra sistemi quantistici e processi di Markof non commutativi dipende linearmente dal dato iniziale, nel senso che gli operatori di transizione del processo dipendono solo dalla hamiltoniana $H(t)$ e non dallo stato iniziale W_0 .

COROLLARIO (7.2): Un processo di Markof non commutativo corrisponde ad un processo quantistico se e solo se:

i) l'operatore $Z(t, s)$ definisce, per ogni $s < t$, un biiezione degli stati su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

ii) $Z(t, s)$ è « sufficientemente regolare » (cfr. [3]).

Se le quasi-attese condizionate del processo sono stazionarie (nel senso del numero 5), la condizione (ii) è superflua e il sistema quantistico corrispondente è conservativo.

La dimostrazione del teorema (7.1) è basata sul seguente:

LEMMA (7.3): Sia $\psi \equiv \{\varphi_0, (E_{t,s})\}$ una catena di Markof su $\mathcal{A} = \bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con operatori di transizione $(Z(t, s))$. Allora, se per ogni $s < t$, $Z(t, s)$ è invertibile, si ha:

$$\psi = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi_t; \quad \varphi_t = \varphi_s \cdot Z(t, s).$$

Il risultato del Lemma (7.3) è in stretta analogia con ciò che si verifica per processi di Markof classici. Infatti, se $(P(t, s))$ denotano le probabilità di transizione di un processo di Markof classico sull'algebra $\mathcal{A} = \bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}(S)$ dove S è uno spazio compatto separato, e se ciascuno degli operatori $P(t, s)$ è invertibile, allora è ben noto che $P(t, s)$ è indotto da una trasformazione $T(s, t): S \rightarrow S$ mediante la formula:

$$P(t, s)(f) = f \cdot T(t, s)^{-1}; \quad f \in \mathcal{C}(S)$$

e l'equazione di Chapman-Kolmogorof implica:

$$T(s, r) \circ T(t, s) = T(t, r); \quad r < s < t$$

quindi $(T(t, s))$ è un gruppoide di automorfismi di S e, se $P = \{W_0; (P(t, s))\}$ è un qualsiasi stato di Markof su $\bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}(S)$ con probabilità di transizione $(P(t, s))$ e stato iniziale W_0 , le attese congiunte del processo

avranno la forma

$$(7.3.1) \quad \begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(f_{t_1} \otimes \dots \otimes f_{t_n}) &= \\ &= W_{t_1}[f_{t_1} \cdot P(t_2, t_1)[f_{t_2} \cdot P(t_3, t_2) \dots [P(t_n, t_{n-1})(f_{t_n})] \dots]] \\ &= W_{t_1}[f_{t_1}[P(t_2, t_1)f_{t_2}] \dots [P(t_n, t_1)f_{t_n}]] \end{aligned}$$

dove $W_t = W_0 \cdot P(t, 0)$.

In particolare, se W_0 è uno stato puro (cioè, nel caso considerato, una misura di Dirac):

$$P_{t_1, \dots, t_n}(f_{t_1} \otimes \dots \otimes f_{t_n}) = W_{t_1}(f_{t_1}) \cdot W_{t_2}(f_{t_2}) \cdot \dots \cdot W_{t_n}(f_{t_n});$$

riassumendo si è provato che:

LEMMA (7.4): Sia $P = \{W_0, (P(t, s))\}$ una catena di Markof su $\mathcal{A} = \bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}(S)$. Allora, se per ogni $s < t$, $P(t, s): \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ è invertibile, e se W_0 è uno stato puro su $\mathcal{C}(S)$:

$$P = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}^+} W_t; \quad W_t = W_s \cdot P(t, s).$$

Quindi i processi di Markof classici con operatori di transizione reversibili descrivono i sistemi dinamici con evoluzione deterministica il cui carattere statistico può dipendere al più da una imperfetta conoscenza dello stato iniziale del sistema. Se anche questa indeterminazione è eliminata, cioè se la distribuzione iniziale W_0 è uno stato puro, il processo diviene completamente deterministico e le probabilità congiunte si fattorizzano.

Perciò i processi di Markof non commutativi corrispondenti ai consueti sistemi quantistici costituiscono l'analogo non commutativo dei sistemi dinamici classici con evoluzione deterministica.

Se lo stato iniziale è puro, le probabilità congiunte si fattorizzano in entrambi i casi; se non è puro esse si fattorizzano nel caso non commutativo e soddisfano la (7.3.1) nel caso classico. Questa differenza è strettamente connessa con il fatto che l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ha centro banale e, in generale, per un'algebra non commutativa, una espressione come la (7.3.1) non può essere utilizzata come definizione di un'attesa congiunta poichè può assumere valori negativi (o complessi) anche se tutte le osservabili $f_{t_1}, \dots, f_{t_n}$ sono positive.

L'affermazione ii) del teorema (7.1) costituisce una estensione del teorema di von Neumann-Varadarajan [30] che afferma che una famiglia di distribuzioni congiunte relative ad un insieme di osservabili quantistiche esiste se e solo se queste osservabili commutano. Infatti

da tale affermazione segue che, anche ammettendo la commutatività delle osservabili relative a tempi diversi (all'interno dell'algebra $\mathcal{A}$ -analogo non commutativo dell'algebra dei funzionali misurabili sulle traiettorie di un processo stocastico classico —) l'unico tipo di probabilità congiunte compatibile con la scelta di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ come algebra delle osservabili quantistiche, a un qualsiasi istante e con le evoluzioni degli stati quantistici è quello banale: cioè le probabilità congiunte relative a istanti di tempo diversi sono il prodotto delle probabilità congiunte relative ai singoli istanti di tempo.

8. Evoluzioni irreversibili.

I sistemi quantistici sono stati caratterizzati come quei processi di Markof non commutativi le cui famiglie $\bar{E}_{t,s}$ di quasi-attese condizionate hanno la forma:

$$\bar{E}_{t,s}(a_s \cdot a_t) = \varphi_s(a_s) \cdot \bar{Z}(t, s)(a_t)$$

dove φ_s è uno stato su $\mathcal{A}_1$ e $\bar{Z}(t, s): \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{A}_s$ è un isomorfismo di C^* -algebre.

Un modo semplice per costruire processi di Markof non commutativi che non sono processi quantistici è il seguente: sia, per ogni $s \in \mathbb{R}^+$, $(\varphi_s^i)_{i \in F}$ una famiglia di stati su $\mathcal{A}_s$; $(Z_i(t, s))_{i \in F}$ una famiglia di gruppi di automorfismi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ed $(l_i)_{i \in F}$ una famiglia di proiettori in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che:

$$l_i \cdot l_j = \delta_{ij} l_i; \quad \sum_i l_i = 1$$

$$Z_i(t, s)(l_i) = l_i; \quad i \in F.$$

Denotiamo, come al solito, $J_t: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}_t$ la t -esima immersione naturale; l'inverso sinistro di J_t e

$$\bar{Z}_i(t, s) = J_s \circ \bar{Z}_i(t, s) \circ J_t^*.$$

Definiamo, per ogni $s < t$, $a_t \in \mathcal{A}_t$, $a_s \in \mathcal{A}_s$

$$E_{t,s}(a_s \cdot a_t) = \sum_{i \in F} \varphi_s^i(a_s) \cdot \bar{Z}_i(t, s)[J_t(l_i) \cdot a_t \cdot J_t(l_i)].$$

Denotando $P_t^i: a_t \in \mathcal{A}_t \rightarrow J_t(l_i) \cdot a_t \cdot J_t(l_i)$, il proiettore associato ad l_i per

ogni t , da (4.12.3) segue:

$$\bar{Z}_i(t, s) \circ P_i^t = P_i^s \circ \bar{Z}_i(t, s); \quad i \in F$$

e quindi:

$$\bar{E}_{t,s}(a_s \cdot a_t) = \sum_{i \in F} \varphi_s^i(a_s) \cdot P_i^s \cdot \bar{Z}_i(t, s)[a_t]$$

(l'insieme F può essere finito o infinito ma, in ogni caso noi non discuteremo qui questioni di convergenza).

Ciascuno $\bar{E}_{t,s}$ è una applicazione lineare completamente positiva poichè è somma di applicazioni siffatte. Si ha:

$$\bar{E}_{t,s}(1_s \cdot 1_t) = \sum_{i \in F} \varphi_s^i(1_s) \cdot J_s(l_i) = 1$$

Inoltre, se $r < s < t$, $a_r \in \mathcal{A}_r$, $a_t \in \mathcal{A}_t$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{s,r}(a_r \cdot \bar{E}_{t,s}(1_s \cdot a_t)) &= \sum_{j \in F} \varphi_r^j(a_r) \cdot \bar{Z}_j(s, r) \cdot P_j^s \cdot \varphi_s^j(1_s) \cdot P_j^s \cdot \bar{Z}_j(t, s)[a_t] = \\ &= \sum_i \varphi_r^i(a_r) \cdot \bar{Z}_i(s, r) \cdot P_i^s \cdot \bar{Z}_i(t, s)[a_t] = \sum_i \varphi_r^i(a_r) \cdot P_i^r \cdot \bar{Z}_i(s, r) \cdot \bar{Z}_i(t, s)[a_t] = \\ &= \bar{E}_{t,r}(a_r \cdot a_t). \end{aligned}$$

Perciò le condizioni della proposizione (4.5) sono soddisfatte senza alcuna restrizione e quindi per ogni stato φ_0 su $\mathcal{A}_0$ la coppia $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ definisce un'unica catena di Markof su $\mathcal{A}$. Detti $(Z(t, s))$ gli operatori di transizione di questa catena di Markof, si ha:

$$Z(t, s)[a] = \sum_{i \in F} Z_i(t, s)[l_i a l_i]; \quad a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Se W è una matrice densità in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si avrà

$$WZ(t, s) = \sum_{i \in F} l_i (WZ_i(t, s)) l_i.$$

In particolare, se tutti i $Z_i(t, s)$ sono uguali ad un unico gruppoide $Z_0(t, s)$ di automorfismi interni di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ che definisce la funzione di Green dell'equazione di Schrödinger definita da un'Hamiltoniana $H(t)$, la legge di evoluzione canonicamente associata alla catena di Markof $\{\varphi_0, (\bar{E}_{t,s})\}$ definita sopra coincide esattamente con quella predetta dalla teoria della misura in meccanica quantistica [34] cap. VI.

9. Probabilità di transizione.

Per concludere, calcoliamo la probabilità di transizione da uno stato ad un altro servendoci della Teoria di Markof non commutativa. Nella teoria classica il concetto di probabilità di transizione presuppone quello di probabilità congiunta; quindi in una teoria che prescrive soltanto i valori di aspettazione a tempi fissi, l'interpretazione di una qualsiasi espressione come probabilità di transizione può essere soltanto postulata, e non dedotta.

Per illustrare la situazione, cominciamo a considerare l'esempio di un sistema classico, con un numero finito di stati.

Sia ξ un sistema con un numero finito di stati: $S = \{1, \dots, n\}$. Descriveremo le osservabili di ξ come matrici diagonali $n \times n$ e le misure di probabilità su S come matrici densità (diagonali) rispetto alla traccia non normalizzata τ , e denotiamo P la matrice densità corrispondente al proiettore sulle funzioni di $\alpha \in S$. Supponiamo che il processo ξ_t sia parametrizzato da $\mathbb{R}^+$, che siano assegnate le attese condizionate $(E_{t,s})$, e che queste siano *markoviane*.

Dire che all'istante s il sistema si trova nello stato α_s è lo stesso che dire che la matrice densità del processo all'istante s è P_{α_s} . Nelle nostre ipotesi allora, la probabilità di transizione dello stato α_s al tempo s allo stato β_t al tempo t è espressa dalla formula:

$$(9.1) \quad P_{\alpha_s, \beta_t} = \tau(P_{\alpha_s} \cdot E_{t,s}(P_{\beta_t})) = \varphi_s(E_{t,s}(P_{\beta_t})) = \varphi(P_{\beta_t}).$$

Dove $\varphi = (\varphi_{t,s})$ è lo stato di Markof su $\bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}(S)$ determinato dalla famiglia di attese condizionate $(E_{t,s})$ e dalla distribuzione iniziale φ_0 che, nelle nostre ipotesi, non è necessario conoscere per il calcolo di P_{α_s, β_t} . Quindi, per un processo di Markof classico (discreto) di cui si conosce lo stato α_s all'istante s , la probabilità di transizione P_{α_s, β_t} è data da:

$$(9.2) \quad P_{\alpha_s, \beta_t} = \varphi(P_{\beta_t}).$$

Applichiamo ora la formula (9.2) al caso di un sistema quantistico. α_s, β_t sono vettori unitari su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, $P_{\alpha_s}, P_{\beta_t}$ sono i corrispondenti proiettori di rango 1, $H(t)$ è l'hamiltoniana del sistema quantistico; e φ è lo stato di Markof su $\bigotimes_{\mathbb{R}^+} \mathcal{B}(\mathcal{H})$ determinato da $H(t)$ ed uno stato iniziale φ_0 che, come nell'esempio precedente, nelle nostre ipotesi non è necessario conoscere. Nelle notazioni del numero 8), applicando la (9.2), si trova:

$$P_{\alpha_s, \beta_t} = \varphi(P_{\beta_t}) = \varphi_s(\bar{E}_{t,s}(P_{\beta_t})) = \tau(P_{\alpha_s} \cdot \bar{Z}(t, s)[P_{\beta_t}]) = \tau(\bar{Z}(t, s)^*[P_{\alpha_s}] \cdot P_{\beta_t})$$

e, se $Z(t, s)$ è l'automorfismo di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ indotto da $u(t, s)$:

$$P_{\alpha_s, \beta_t} = \tau(P_{u(t,s)\alpha_s} \cdot P_{\beta_t}) = |\langle u(t, s)\alpha_s, \beta_t \rangle|^2$$

in particolare, se α_s è invariante per $u(t, s)$ (nel caso stazionario $H(t) = H$ e ciò equivale al fatto che sia un autovettore di H), si ha

$$P_{\alpha_s, \beta_t} = |\langle \alpha_s, \beta_t \rangle|^2$$

Le ultime due uguaglianze forniscono, in un contesto quantistico le formule consuete per la probabilità di transizione $\alpha_s \rightarrow \beta_t$.

Testo pervenuto il 6 maggio 1976.

Bozze licenziate il 6 agosto 1976.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. ACCARDI, *On the non-commutative Markof property*, Funct. Anal. and its Appl. (in russian), 9, 1 (1975).
- [2] L. ACCARDI, *Non-commutative Markof chains*, Proceedings of the Summer School in Mathematical Physics, Camerino (1974) (to appear).
- [3] L. ACCARDI, *Non relativistic Quantum Mechanics as a non-commutative Markof process*, Advances in Mathematics 20, 3 (1976), pp. 329-366.
- [4] E. B. DAVIES, *On the repeated measurement of Continuous Observables in Quantum Mechanics*, Journ. of Funct. Anal., 6 (1970), pp. 318-346.
- [5] P. A. M. DIRAC, *The principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press (1958).
- [6] P. A. M. DIRAC, *Lectures on Quantum Field Theory*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. York (1966).
- [7] R. L. DOBRUSCIN, *Description of a stochastic field by means of its conditional probabilities and the condition of its regularity*, Prob. Theory and its appl. (in russian), 13 (1968), pp. 201-229.
- [8] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, J. Wiley and Sons Inc. (1967).
- [9] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I, II, J. Wiley and Sons, Inc. (1966).
- [10] R. FEYNMAN and HIBBS, *Quantum Mechanics and path integral*, McGraw-Hill, N.Y. (1965).
- [11] V. GORINI, A. KOSSAKOWSKI and E. C. G. SUDARSHAN, *Completely Positive Dynamical semi-groups of n-level systems*, Preprint, University of Texas at Austin.
- [12] R. HAAG and D. KASTER, *An algebraic approach to Quantum Field Theory*, Journ. of Math. Phys., 5 (1964), pp. 848-861.
- [13] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-groups*, Amer. Math. Soc. Providence (1957).

- [14] R. V. KADISON, *Transformations of States in Operator theory and Dynamics*, Topology, 3 suppl. 2 (1965), pp. 177-198.
- [15] A. LODKIN, *Every measure on the projectors of a W^* -algebra extends to a state*, Funct. Anal. and its appl., T 8, N. 4 (1974), pp. 54-58.
- [16] G. LINDBLAD, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Preprint, Royal Institute of Technology - Dept. of Theoretical Physics, Stockholm.
- [17] M. LOEVE, *Probability theory*, D. van Nostrand Company, Inc. (1963).
- [18] G. W. MACKEY, *Mathematical foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin Inc. (1963).
- [19] G. W. MACKEY, *Group representations* (to appear).
- [20] C. PIRON, *Survey of general Quantum Physics*, Foundations of Physics, vol. 2, n. 3, Oct. 1972.
- [21] S. SAKAI, *C^* -algebras and W^* -algebras*, Springer-Verlag (1971).
- [22] I. E. SEGAL, *Abstract probability spaces and a theorem of Kolmogoroff*, Amer. J. Math., 76 (1954), pp. 721-732.
- [23] I. E. SEGAL, *Algebraic integration theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (1965), pp. 419-489.
- [24] I. E. SEGAL, *Distributions in Hilbert space and canonical system of operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), pp. 12-41.
- [25] I. E. SEGAL, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. of Math., 57 (1953), pp. 401-457.
- [26] I. E. SEGAL, *Postulates for general Quantum Mechanics*, Ann. of Math., 48, 2 (1947), pp. 930-948.
- [27] I. E. SEGAL, *Mathematical problems of relativistic physics*, Amer. Math. Soc., Providence (1963).
- [28] E. STØRMER, *Positive linear maps of Operator Algebras*, Acta Math., 110 (1963), pp. 223-278.
- [29] Z. TAKEDA, *Inductive limit and infinite direct product of operator algebras*, Tohoku Math. J., 7 (1955), pp. 67-86.
- [30] V. S. VARADARAJAN, *Geometry of Quantum Theory* (vol. I, II), D. Van Nostrand Company, Inc. (1968).
- [31] J. VON NEUMANN, D. HILBERT und L. NORDHEIM, *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* in: J. von Neumann, Coll. Works, Pergamon Press, vol. I, pp. 104-133.
- [32] J. VON NEUMANN, *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik* in: J. Von Neumann, Coll. Works, Pergamon Press, vol. I, pp. 208-235.
- [33] J. VON NEUMANN, *Thermodynamik Quantenmechanischer gesamtheiten* in: J. Von Neumann, Coll. Works, Pergamon Press, vol. I, pp. 236-254.
- [34] J. VON NEUMANN, *Mathematical foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1955).
- [35] J. VON NEUMANN, *Einige Satze über messbare Abbildungen* in: J. Von Neumann, Coll. Works, Pergamon Press, vol. II, pp. 294-306.
- [36] H. WEYL, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc. (1950).