

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”
Dipartimento di ingegneria civile
Dottorato in Ingegneria delle strutture e
geotecnica
XVIII ciclo
Un accurato modello analitico per la
statica dei ponti strallati di grande
luce

Tesi presentata per il conseguimento del titolo
di Dottore di Ricerca in Ingegneria
delle Strutture e Geotecnica da:
Stefano Dell’Amore Fachinetti

Coordinatore del corso di Dottorato
Chiar.mo Prof. Ing.
Franco Maceri
Tutori del candidato:
Chiar.mo Prof. Ing.
Franco Maceri
Dott. Ing.
Giuseppe Vairo

Luglio 2007

Indice

Sommario	iii
1 Modelli statici	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Modelli analitici del ponte strallato: l'approccio tangente e secante	2
1.3 Applicazioni e Confronti	10
2 I cavi nei ponti strallati	16
2.1 Introduzione	16
2.2 Comportamento elastico di uno strallo	17
2.2.1 Notazione e sintesi dei risultati della teoria esatta . . .	17
2.2.2 Livelli di tensione moderatamente elevati	22
2.2.3 La teoria di Dishinger: livelli di tensione molto elevati .	24
2.3 Il modello costitutivo quasi secante	25
2.4 Il modello quasi secante al secondo ordine negli spostamenti .	27
2.4.1 Tensione del cavo	27
2.4.2 Interazione stralli-struttura	28
2.5 Validazioni e confronti	31
3 Teoria quadratica quasi-secante	37
3.1 La soluzione reticolare	43

<i>INDICE</i>	ii
3.2 Ripristino della compatibilità	44
4 Validazioni e confronti	48
Conclusioni	65
Ringraziamenti	67
Bibliografia	68

Sommario

Le contrastanti esigenze connesse da un lato all'attraversamento di luci sempre maggiori e dall'altro al contenimento dell'impatto ambientale delle strutture che si realizzano pongono la necessità di riesaminare criticamente gli aspetti di carattere progettuale che hanno portato a definire gli standard attuali per la realizzazione dei ponti strallati di grande luce ([10], [11]). Ad esempio, riferendosi allo schema strutturale a ventaglio con pile ad H e seguendo gli attuali canoni progettuali, nel caso di una luce ℓ della campata centrale superiore ai 1000 m sarebbe necessario considerare torri di altezza h superiore ai 200 m dal piano di sviluppo della travata. D'altra parte, l'incremento del rapporto $r_1 = \ell/(2h)$ al fine di rispettare canoni ambientali può rendere critica l'applicabilità dei modelli analitici classici disponibili.

L'analisi del comportamento statico dei ponti strallati di grande luce è attualmente basato su modelli continui al primo ordine negli spostamenti, nei quali l'interazione fra la travata e gli stralli è modellata attraverso la ben nota teoria di Dischinger ([7], [10]). Come è stato messo in evidenza in [3], l'utilizzo di un approccio secante alla Dischinger consentirebbe di valutare in modo soddisfacente le forze di interazione tra stralli e travata ma, richiedendo procedure iterative, risulterebbe non applicabile per descrivere in forma chiusa la risposta della struttura.

Soluzioni analitiche della risposta statica e dinamica dei ponti strallati di grande luce sono state ottenute da Como et al. (e.g. [1] e [14]) considerando formulazioni tangenti di Dischinger, che però forniscono risultati quantitativamente soddisfacenti solo nel caso in cui gli stralli siano sottoposti a piccole variazioni del loro stato di tensione. D'altra parte, poichè le variazioni di tensione sugli stralli sono indotte dai carichi di esercizio, esse possono risultare dello stesso ordine di grandezza rispetto al livello di tensione iniziale prodotto dai carichi fissi. In questo caso, gli effetti non lineari nella risposta del singolo strallo, connessi alla deformata da peso proprio rispetto alla direzione della corda (*sag effect*), non sarebbero correttamente descritti mediante una formulazione tangente.

Inoltre, in ipotesi di piccoli spostamenti, si ottiene un pieno accordo tra

la teoria catenaria e quelle basate su approcci classici alla Dischinger solo nel caso in cui lo strallo sia sollecitato attraverso una condizione di carico, sovrapposta al suo tiro iniziale, che non induce variazioni significative della direzione di corda. Quando ciò non accade, Vairo et al. [2] hanno mostrato che la non considerazione dell'effetto di rotazione finita associata alla variazione di configurazione della corda può portare ad una scorretta valutazione delle forze di interazione fra lo strallo e la struttura che esso sorregge. Nei ponti strallati di grande luce ciò si verifica maggiormente per gli stralli che connettono le torri ai conci centrali. In questo caso, infatti, gli stralli presentano una configurazione “quasi-ortogonale” rispetto alla direzione della forza peso (cioè rispetto alla direzione delle forze che agiscono sull'impalcato) e pertanto le direzioni di corda relative alla configurazione di riferimento (sotto l'azione dei carichi fissi) ed a quella attuale (sotto l'azione di carichi di esercizio) possono risultare profondamente differenti. E' evidente che quando ciò accade, pur potendo ritenere accettabile l'ipotesi di piccoli spostamenti per la travata, è necessario modellare la risposta degli stralli attraverso un approccio in grandi spostamenti.

Partendo da un modello “quasi-secante” per descrivere il comportamento del singolo strallo [2], del secondo ordine sia rispetto alla variazione di tensione nel cavo che alla variazione di deformazione apparente valutata lungo la sua corda, l'interazione fra le cortine di stralli e la travata è caratterizzata in forma esplicita attraverso un approccio al secondo ordine negli spostamenti. Considerando poi per la travata una risposta flessionale e torsionale rispettivamente alla Eulero-Bernoulli ed alla De Saint Venant, si sviluppa un modello continuo non lineare in grado di descrivere il comportamento statico globale dei ponti strallati di grande luce con schema a ventaglio e pile ad H . Sfruttando il carattere prevalentemente reticolare delle strutture in esame ed utilizzando una tecnica perturbativa, si propone poi una soluzione approssimata esplicita del problema accoppiato flesso-torsionale.

Si propongono infine i risultati di alcune applicazioni preliminari su diversi casi studio ed i relativi confronti con approcci lineari classici e soluzioni numeriche, mettendo in evidenza gli effetti di irrigidimento indotti sulla struttura dall'accoppiamento fra il problema flessionale e quello torsionale.

Capitolo 1

Modelli del comportamento statico dei ponti strallati di grande luce

1.1 Introduzione

Lo schema di ponte strallato ha trovato numerose applicazioni per attraversamenti di grande luce specie grazie allo sviluppo di nuovi materiali, di nuove metodologie di progettazione, di nuove procedure e tecnologie realizzative che hanno reso tale soluzione costruttiva particolarmente competitiva e conveniente rispetto allo schema di ponte sospeso nell'attraversamento di grandi luci. Infatti per quanto riguarda i ponti strallati numerose sono le realizzazioni recenti, le opere in costruzione ed in fase di realizzazione con campate centrali che superano abbondantemente i 600 metri ed arrivano anche oltre i 1000 metri. D'altro canto, la recente diffusione nel mondo della soluzione strallata va indubbiamente messa in relazione anche con i risultati estetici che oggettivamente essa può offrire. Nell'ambito dell'analisi strutturale dei ponti di grande luce la non linearità della risposta elastica degli stralli che sorreggono la travata viene di norma affrontata per via numerica. In tale approccio si utilizzano codici di calcolo agli elementi finiti in cui gli stralli sono discretizzati mediante matrici di rigidezza tangente dedotte dalla catenaria secondo cui il singolo strallo si dispone sotto l'effetto del peso e del tiro imposto dal martinetto idraulico impiegato nel montaggio della struttura. L'impiego di algoritmi solutivi di tipo iterativo prevede l'aggiornamento di tali matrici in modo tale da portare in conto l'irrigidimento della risposta degli stralli durante il loro percorso deformativo. D'altra parte attraverso l'assunzione di ragionevoli ipotesi semplificative l'analisi del com-

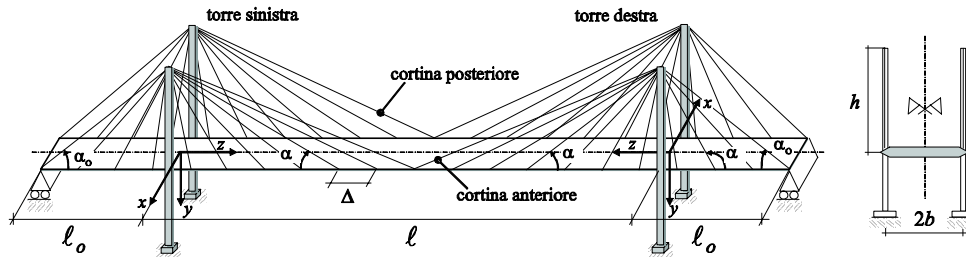


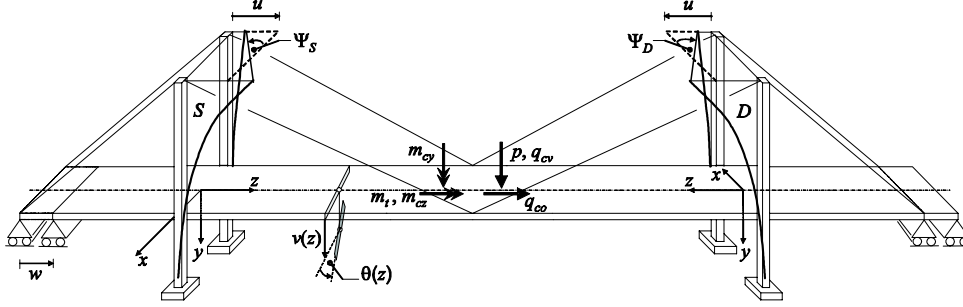
Figura 1.1: Schema strutturale del ponte con disposizione degli stralli a ventaglio e pile di forma ad H .

portamento statico dei ponti strallati di grande luce può essere affrontata per via analitica, ottenendo gli oggettivi vantaggi che una trattazione in forma chiusa fornisce in termini di comprensione sintetica del funzionamento della struttura e di operatività progettuale.

1.2 Modelli analitici del ponte strallato: l'approccio tangente e secante

Lo schema di ponte che si esamina è quello mostrato in Fig.1.1. La travata, libera da vincoli orizzontali, è sospesa alla sommità delle torri, assunte di forma ad H , attraverso due cortine parallele di stralli disposti a ventaglio e con passo Δ costante. Gli stralli di ormeggio sono ancorati alla travata per la quale in ogni punto di estremità sono impediti gli spostamenti verticali, cosicchè le stesse rotazioni torsionali sono bloccate in corrispondenza di tali sezioni. Inoltre, la quantità $\delta = b/h$ si assume piccola se confrontata con l'unità.

In accordo con gli usuali metodi di costruzione adottati, sotto l'azione dei carichi fissi q_g la travata presenta una configurazione rettilinea ed è libera da sollecitazioni flessionali, cosicchè lo stato di tensione è rappresentato da soli sforzi assiali sia negli stralli che nella travata e nelle torri, risultando quindi un prevalente funzionamento reticolare dello schema. La sezione trasversale dell'impalcato è assunta costante con z e lo schema in esame è simmetrico sia rispetto ad un piano verticale assiale che rispetto ad un piano verticale trasversale. Poichè nei moderni schemi di ponti strallati di grande luce il passo Δ degli stralli risulta molto piccolo rispetto alla luce centrale l , è possibile ipotizzare una distribuzione continua della strallatura [1]. Trascurando la deformabilità estensionale e tagliante delle torri e della travata, la risposta dell'impalcato può caratterizzarsi tramite le teorie classiche della flessione


Figura 1.2: Parametri di spostamento e convenzioni

alla Eulero-Bernoulli e della torsione alla De Saint-Venant. Inoltre, trascurando qualunque componente di spostamento deformativo in direzione x , la più generale configurazione deformata del ponte può identificarsi tramite le seguenti funzioni di spostamento (Fig. 1.2): $v(z)$, abbassamento verticale della linea d'asse, w spostamento longitudinale, e rotazione torsionale $\theta(z)$ della generica sezione retta della travata; spostamenti medi u diretti lungo z e rotazioni torsionali Ψ della sommità delle torri. Nel seguito, i pedici 'S' e 'D' si riferiranno rispettivamente alla parte sinistra e destra dell'impalcato.

Si osservi che, avendo assunto la travata assialmente inestensibile, risulta $w_S = w_D = w$. Inoltre, poichè la travata non è direttamente vincolata ai piloni e non presenta vincoli lungo z , l'equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura richiede che le azioni taglianti complessive sulla sommità dei piloni siano nulle per qualunque carico verticale. Pertanto, gli spostamenti in testa alle torri sono sempre opposti, cosicchè è sufficiente considerare il solo parametro u , i.e. rispetto alle convenzioni assunte in Fig. 1.2 $u_S = u_D = u$.

Le equazioni di governo del problema flesso-torsionale del ponte risultano quindi

$$E_T I_x v_\varphi^{iv}(z) = q_{cv}(z) + p(z) \quad (1.1)$$

$$G_T J_T \theta_\varphi^{ii}(z) = -m_{cz}(z) - m_t(z) \quad (1.2)$$

$$\int_\varphi -q_{co}(z) dz \mp ku - S_{o\varphi} = 0 \quad (1.3)$$

$$\int_\varphi -m_{cy}(z) dz - k_t \Psi_\varphi - M_{o\varphi} = 0 \quad (1.4)$$

avendo posto $v_\varphi^{iv} = d^4 v_\varphi / dz^4$ e $\theta_\varphi^{ii} = d^2 \theta_\varphi / dz^2$, essendo le equazioni (1.1) e (1.2) relative agli equilibri flessionale e torsionale della travata ed essendo le

(1.3) ed (1.4) relative agli equilibri delle torri, rispettivamente, a traslazione lungo z ed a rotazione intorno a y .

In termini di notazione, nelle equazioni (1.3–1.4) l'integrazione si intende estesa alle cortine di stralli appartenenti alla parte sinistra ($\wp = S$) o destra ($\wp = D$) del ponte, riferendo il segno '–' alla prima e quello '+' alla seconda. Inoltre, E_T e G_T indicano rispettivamente il modulo di Young e quello trasverso per la travata, I_x il momento di inerzia areale rispetto all'asse x per la sezione retta dell'impalcato, J_T il suo fattore di rigidità torsionale, $q_{co}(z)$ e $q_{cv}(z)$ le densità lineari delle forze orizzontali e verticali applicate sull'impalcato ed indotte dall'interazione con le cortine di stralli, $m_{cz}(z)$ e $m_{cy}(z)$ i momenti distribuiti sulla travata derivanti dall'azione dei cavi ed agenti rispettivamente lungo z ed y , S_o e M_o l'azione orizzontale e la coppia lungo y prodotte dai cavi di ormeggio, $p(z)$ e $m_t(z)$ i carichi distribuiti utili, in termini di azioni verticali e coppie torcenti. Infine, k rappresenta la rigidità flessionale globale di ciascuna torre per spostamenti orizzontali in testa e k_t la corrispondente rigidità torsionale. Assumendo tra loro indipendenti le due pile costituenti ciascuna torre, risulta $k_t = kb^2$ [14].

Il comportamento del singolo strallo viene in questo ambito convenientemente descritto impiegando la teoria di Dischinger, che come verrà di seguito precisato si adatta a cavi inizialmente tesi, come d'altra parte sono gli stralli dei ponti strallati di grande luce.

In dettaglio, se $\Delta\varepsilon_s$ è la deformazione indotta lungo la corda del generico strallo, l'incremento della forza assiale corrispondente può essere valutata secondo la seguente formula:

$$\Delta N_s = E_{sd}^* \Delta\varepsilon_s A_s \quad (1.5)$$

dove A_c è l'area della sezione retta del cavo mentre E_{sd}^* è il modulo secante di Dishinger:

$$E_{sd}^* = \frac{E_c}{(1 + a\zeta^2)\left(\frac{1+r_0}{2r_0^2}\right)} \quad (1.6)$$

essendo: $a = \gamma_c^2 E_c h^2 / (12\sigma_g^3)$ un parametro adimensionale indice della deformabilità dello strallo, γ_c il peso specifico del cavo, E_c il modulo di Young del materiale di cui è costituito il cavo, σ_g la tensione indotta sugli stralli dai carichi fissi q_g , $\zeta = z/h$ l'ascissa adimensionale lungo l'asse dell'impalcato ed essendo $r_0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_g}$ il rapporto tra la tensione del generico cavo prodotta dalla somma dei carichi fissi e mobili e quella prodotta dai soli carichi fissi. Nell'ipotesi in cui la tensione indotta nel generico strallo a seguito della sovrapposizione dei carichi mobili a quelli fissi non si discosti molto da quella prodotta da questi ultimi o in altri termini nel caso in cui $r_0 \rightarrow 1$, il

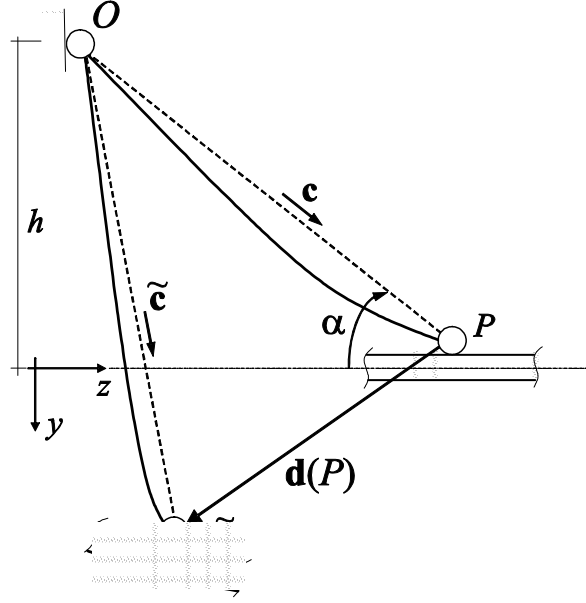


Figura 1.3: Variazione finita di configurazione del generico strallo: notazione

legame costitutivo del singolo strallo può essere convenientemente descritto attraverso il modulo fittizio tangente di Dischinger.

$$E_{td}^* = E_c [1 + a\zeta^2]^{-1} \quad (1.7)$$

In riferimento alla notazione introdotta in Fig. 1.3 e considerando grandezze vettoriali definite nel piano (y, z) , il generico strallo subisce, per effetto dello spostamento dell'impalcato rispetto alla testa del pilone, una variazione di configurazione descritta attraverso il vettore di spostamento relativo \mathbf{d} fra il punto P ed il punto O . Detta A_c l'area della sezione trasversale del cavo ed assumendo una misura lineare per la deformazione apparente $\Delta\varepsilon_s$, il vettore forza \mathbf{f} che lo strallo esercita sull'impalcato si scrive come:

$$\mathbf{f} = -A_c E_{sd}^* \frac{\beta}{h} \mathbf{d}^{\parallel} \quad (1.8)$$

essendo $\mathbf{c} = \beta(1, \zeta)^T$ il versore di corda nella configurazione di riferimento, $\beta = (1 + \zeta^2)^{-1/2} = \sin \alpha$, \mathbf{d}^{\parallel} il vettore componente di \mathbf{d} parallelo a \mathbf{c} :

$$\mathbf{d}^{\parallel} = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \mathbf{d} \quad (1.9)$$

Nelle precedenti relazioni si sono indicati con i simboli ' \otimes ' e ' \cdot ' rispettivamente gli operatori di prodotto tensoriale e di prodotto scalare e con $|\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$ la norma euclidea del vettore \mathbf{v} .

In riferimento ai parametri di spostamento che caratterizzano la configurazione attuale del ponte (cf. Fig. 1.2), il vettore spostamento \mathbf{d} che induce la variazione di configurazione del generico strallo può porsi nella forma

$$\mathbf{d}(z) = \left\{ \begin{array}{l} v_\varphi(z) + \lambda b \theta_\varphi(z) \\ -(u + \lambda b \Psi_\varphi \mp w) \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

essendo $\lambda = 1$ per gli stralli della cortina anteriore e $\lambda = -1$ per quelli della cortina posteriore.

Tenendo conto della (1.10) e dell'effetto di entrambe le cortine di stralli, lo sviluppo della (1.8) conduce alle seguenti espressioni (nelle quali per brevità si è ommesso il pedice φ) delle azioni di interazione stralli-travata:

$$q_{cv}(\zeta) = -\frac{2E_c A_c}{\Delta} \varphi_s \beta V \quad (1.11)$$

$$q_{co}(\zeta) = \frac{2E_c A_c}{\Delta} \varphi_s \beta \{\mp \zeta V - \zeta^2 (W \mp U)\} \quad (1.12)$$

$$m_{cz}(\zeta) = \frac{2E_c A_c b}{\Delta} \varphi_s (\beta \delta \zeta \Psi - \theta) \quad (1.13)$$

$$m_{cy}(\zeta) = \frac{2E_c A_c b}{\Delta} \varphi_s (\beta \delta \zeta^2 \Psi - \zeta \theta) \quad (1.14)$$

$$S_o = \Sigma_o [-2 (W \mp U)] \quad (1.15)$$

$$M_o = 2 \Sigma_o \delta b \Psi \quad (1.16)$$

dove il pedice ' o ' denota quantità riferite agli stralli di ormeggio ed avendo introdotto le seguenti quantità:

$$V(\zeta) = \frac{v(\zeta)}{h}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \delta = \frac{b}{h}, \quad (1.17)$$

$$\varphi_s(\zeta) = \frac{E_{sd}^* \beta^2}{E_c} = \frac{1}{(1 + a\zeta^2) \left(\frac{1+r_0}{2r_0}\right) (1 + \zeta^2)}, \quad (1.18)$$

$$\Sigma_o = E_{sdo}^* A_{co} \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o, \quad \Xi_o = [\cos^2 \alpha_o - 3 \sin^2 \alpha_o] \quad (1.19)$$

In accordo con quanto proposto in [12], è conveniente ricavare le aree delle sezioni trasversali degli stralli dai valori di progetto delle tensioni σ_g e σ_{go}

che si destano nei cavi per effetto dei carichi fissi, supposto nulli i momenti flettenti nella travata:

$$A_c = \frac{q_g \Delta \beta}{2\sigma_g}, \quad A_{co} = \frac{q_g \ell}{4\sigma_{go} \sin \alpha_o} \left[\left(\frac{L}{2\ell} \right)^2 - 1 \right] \quad (1.20)$$

Inoltre, in ciò che segue si assume che il dimensionamento degli stralli sia tale che σ_g risulti costante lungo l'asse dell'impalcato.

Utilizzando le (1.11–1.16) e le posizioni (1.20), le equazioni di governo del problema statico flesso-torsionale (1.1–1.4) si pongono nella seguente forma adimensionale:

$$\frac{\varepsilon^4}{4} V^{IV} + e\varphi_s [V - \zeta (U \mp W)] = P \quad (1.21)$$

$$\tau^2 \theta^{ii} + \varphi_s (\zeta \Psi - \theta) = -\mu \quad (1.22)$$

$$\rho_s W \mp (\rho_s + \chi) U \mp \left[- \int_{\varphi} \varphi_s (\zeta V) d\zeta \right] = 0 \quad (1.23)$$

$$\int_{\varphi} \varphi_s \zeta \theta d\zeta - (\rho_s + \chi) \Psi = 0 \quad (1.24)$$

avendo posto $V^{IV} = d^4V/d\zeta^4$ ed avendo introdotto le seguenti quantità adimensionali:

$$\frac{\varepsilon^4}{4} = \frac{I_x \sigma_g}{h^3 q_g}, \quad \tau^2 = \frac{G_T J_T \sigma_g}{E_c h b^2 q_g}, \quad P = p \frac{\sigma_g}{E_T q_g}, \quad \mu = m_t \frac{h \sigma_g}{E_c q_g b^2}, \quad (1.25)$$

$$e = \frac{E_T}{E_c}, \quad \chi = \frac{k \sigma_g}{E_c q_g}, \quad (1.26)$$

$$\chi_o = \frac{2\Sigma_o \sigma_g}{E_c q_g h}, \quad \rho_s = \int_{\varphi} \varphi_s \zeta^2 d\zeta + \chi_o \quad (1.27)$$

E' appena il caso di osservare che l'operazione di passaggio al limite per $r_0 \rightarrow 1$ nelle equazioni integro-differenziali (1.21–1.24) conduce alle equazioni di governo del problema flesso-torsionale proposte in [1], ottenute attraverso l'applicazione della teoria tangente di Dischinger. In altri termini le equazioni del problema tangente lineare si ottengono sostituendo le quantità $\varphi_s, \rho_s, E_{sd}^*$

con le corrispondenti grandezze tangenti. In dettaglio, oltre alla (1.7) valgono le seguenti:

$$\varphi(\zeta) = \frac{E_{td}^*}{E_c} \beta^2 = \frac{1}{(1 + a\zeta^2)(1 + \zeta^2)}, \quad \rho = \int_{\wp} \varphi \zeta^2 d\zeta + \chi_o \quad (1.28)$$

In entrambi i casi l'ipotesi di piccole deformazioni effettuata per valutare la deformazione apparente del cavo conduce ad equazioni integro-differenziali per cui il problema flessionale è totalmente disaccoppiato da quello torsionale.

L'approccio secante come è noto non conduce ad una soluzione in forma chiusa, e ciò in quanto la risposta elastica del singolo strallo dipende direttamente dal suo stato tensionale. Nell'approccio tangente l'ipotesi per cui lo stato tensionale degli stralli prodotto dai carichi fissi q_g subisca una piccola variazione per l'intervento dei carichi mobili p permette di rendere esplicito il legame costitutivo degli stralli e di ottenere una soluzione in forma chiusa per il problema della statica dei ponti strallati.

Le soluzioni analitiche della risposta statica e dinamica dei ponti strallati di grande luce sono state ottenute da Como et al. (e.g. [1] e [14]) considerando formulazioni tangenti di Dischinger, che però forniscono risultati quantitativamente soddisfacenti solo nel caso in cui gli stralli siano sottoposti a piccole variazioni del loro stato di tensione. D'altra parte, poichè le variazioni di tensione sugli stralli sono indotte dai carichi di esercizio, esse possono risultare dello stesso ordine di grandezza rispetto al livello di tensione iniziale prodotto dai carichi fissi. In questo caso, gli effetti non lineari nella risposta del singolo strallo, connessi alla deformata da peso proprio rispetto alla direzione della corda (*sag effect*), non sarebbero correttamente descritti mediante una formulazione tangente. Lo scopo di questa sezione è di fornire una valutazione critica sui limiti dell'approccio tangente quando esso viene impiegato per la valutazione del comportamento statico dei ponti strallati di grande e di grandissima luce. A tale scopo in questo lavoro si propone una soluzione numerica del problema statico del ponte strallato descritto da equazioni di governo ottenute mediante un approccio secante che si sviluppa attraverso un algoritmo iterativo che per successive approssimazioni tangenti permette di valutare l'effetto del raffinamento costitutivo non tenuto in conto in [1] e [14]. Infatti alcune quantità adimensionali precedentemente introdotte, direttamente legate allo stato di tensione dei singoli stralli possono essere iterativamente aggiornate durante il percorso deformativo degli stralli al variare dello stato di tensione degli stralli.

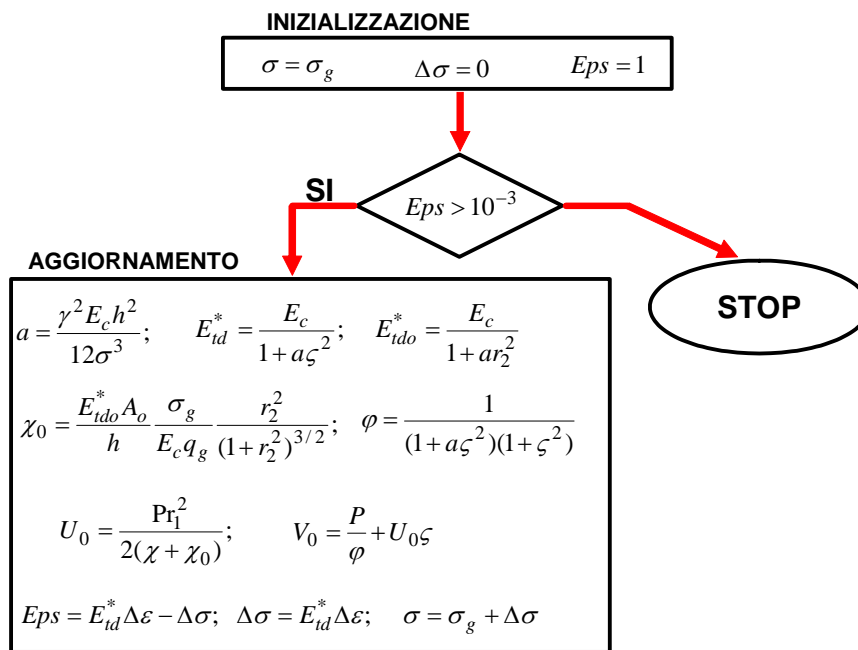


Figura 1.4: Diagramma di flusso dell’algoritmo di calcolo del contributo reticolare della funzione abbassamento calcolata secondo l’approccio secante risolto per successive iterazioni tangenti.

1.3 Applicazioni e Confronti

Si consideri l'applicazione di figura (1.5). Lo schema di ponte strallato è caricato oltrechè dai carichi fissi per unità di lunghezza q_g , agenti sulle tre campate del ponte, anche dai carichi vivi lineici p applicati centralmente sulla campata centrale. Considerando un approccio secante la soluzione del problema reticolare della flessione simmetrica del ponte si formula attraverso le seguenti equazioni:

$$U_0 = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{P}{\chi + \chi_0} \quad (1.29)$$

$$V_0 = \frac{P}{e\varphi_s} + \zeta U_0 \quad (1.30)$$

dove si è posto $r_1 = \ell/(2h)$. Il contributo correttivo necessario per il ripristino della congruenza da aggiungere al contributo reticolare è non nullo solo per la funzione abbassamento. Pertanto la soluzione completa del problema flessionale simmetrico si formula attraverso la 1.29 e la seguente:

$$V(\zeta) = \frac{P}{e\varphi_s} + \zeta U_0 + \frac{P\varepsilon}{2(e\varphi_s)^{1/4}} \left(\frac{r_1^2}{2(\chi + \chi_0)} + 2(1+a)r_1 + 4ar_1^3 \right) \exp[-f(\zeta)] (\sin(f(\zeta)) - \cos(f(\zeta))) \quad (1.31)$$

dove :

$$f(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{r_1} (e\varphi_s)^{1/4} d\zeta \quad (1.32)$$

Allo scopo di riesaminare criticamente l'adeguatezza dell'approccio tangente per applicazioni che presentano cavi fortemente inclinati in corrispondenza della mezzeria della luce centrale, si confrontano i risultati analitici del modello tangente con quelli ottenibili mediante un algoritmo iterativo applicato alle equazioni di governo secanti.

Vengono considerati differenti test case al variare della lunghezza della campata centrale L , mantenendo costante l'altezza delle pile in modo da variare il parametro r_1 . I confronti sono stati effettuati per i seguenti valori ($r_1 = 2$; $r_1 = 2.5$; $r_1 = 3.75$). In dettaglio, considerando diversi valori per i parametri r_1 .

Lo schema di ponte strallato cui si fa riferimento è caratterizzato dalle seguenti quantità:

$$k/q_g = 50, \quad \sigma_a/E_c = 7200/2.1 \times 10^6, \quad (1.33)$$

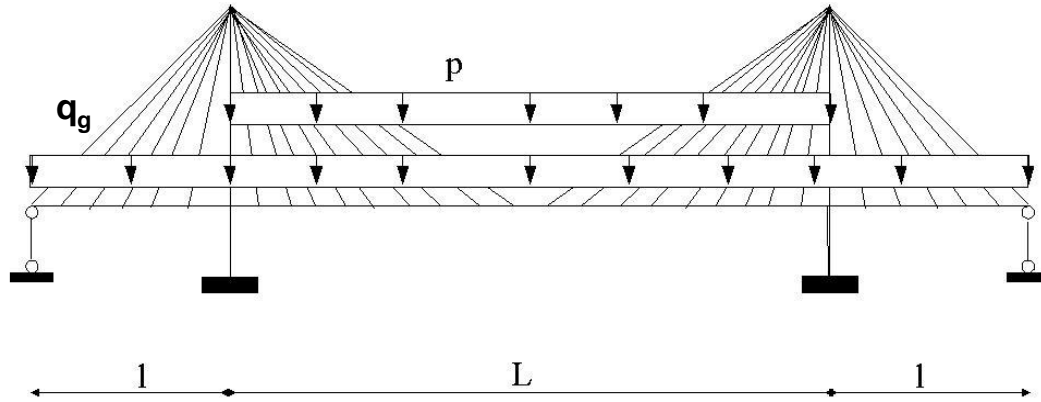


Figura 1.5: Schema di ponte strallato sottoposto ai carichi fissi q_g e ad un carico accidentale di pura flessione uniformemente distribuito sulla campata centrale.

$$h/\Delta = 10, \quad e = 1, \quad \delta = 0.075, \quad (1.34)$$

$$\varepsilon = 0.167, \quad \tau = 0.11, \quad p/q_g = 1, \quad \gamma_c = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad (1.35)$$

Nei grafici delle figure 1.6-1.7-1.8 si confrontano il contributo reticolare della deformata analitica del ponte, ottenuto mediante la teoria tangente lineare, ed il corrispondente contributo secante calcolato secondo l'approccio precedentemente illustrato.

Appare evidente che l'approccio tangente sottostima la rigidità degli stralli rispetto all'approccio secante e ciò interessa in particolare modo gli stralli che connettono la sommità delle torri con la parte centrale della travata. Lo scostamento della soluzione secante da quella tangente inoltre aumenta all'aumentare dell'inclinazione degli stralli e cioè all'aumentare del parametro r_1 . Nei grafici delle figure 1.6-1.7-1.8 appare altresì evidente che l'ipotesi di piccole deformazioni posta a fondamento degli approcci tangente lineare e secante lineare risulta essere sufficientemente realistica. L'introduzione di un raffinamento cinematico attraverso una misura di deformazione apparente logaritmica del cavo non porta ad ottenere informazioni aggiuntive di quelle ottenibili mediante una misura di deformazione lineare rispetto ai parametri di spostamento della struttura. L'esame dei grafici delle figure 1.9-1.10-1.11 conferma la natura reticolare del comportamento statico del ponte strallato,

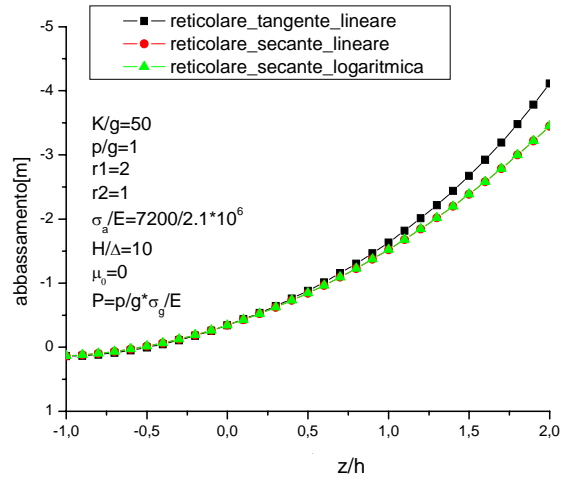


Figura 1.6: Confronto tra la deformata reticolare analitica calcolata mediante il modello tangente lineare ed il corrispondente contributo secante ottenuto mediante successive iterazioni tangenti. ($r1 = 2$)

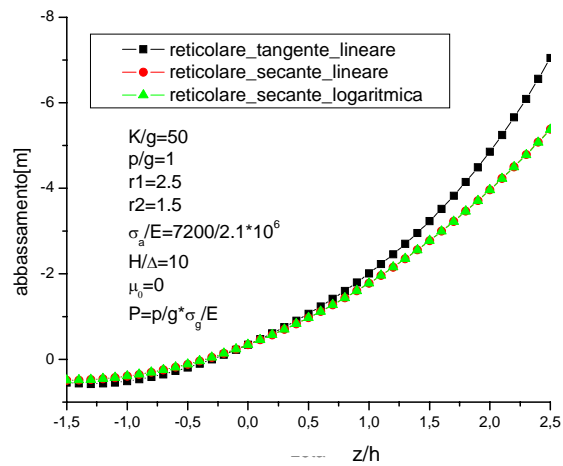


Figura 1.7: Confronto tra la deformata reticolare analitica calcolata mediante il modello tangente lineare ed il corrispondente contributo secante ottenuto mediante successive iterazioni tangenti. ($r1 = 2.5$)

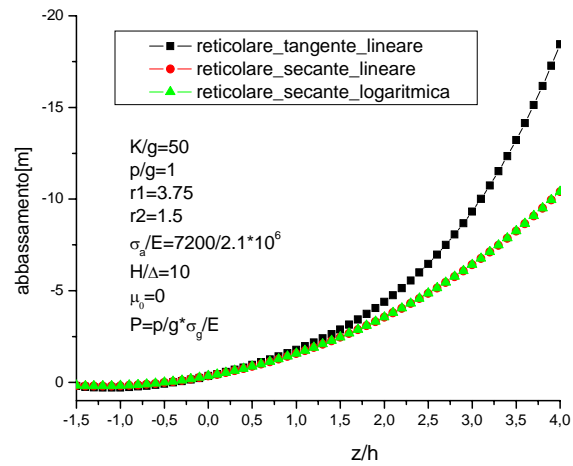


Figura 1.8: Confronto tra la deformata reticolare analitica calcolata mediante il modello tangente lineare ed il corrispondente contributo secante ottenuto mediante successive iterazioni tangenti ($r1 = 3.75$)

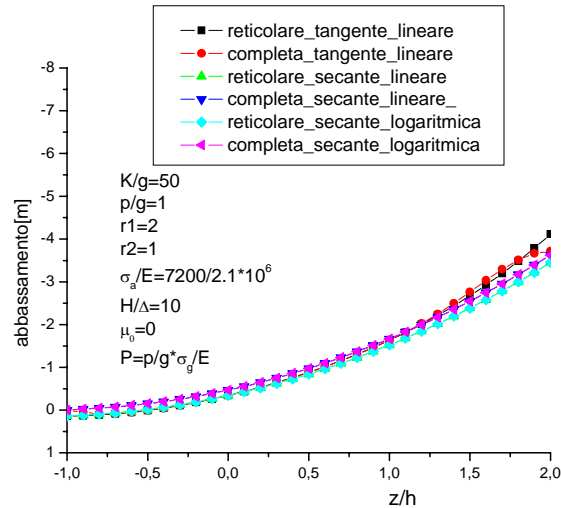


Figura 1.9: Deformate reticolari e congruenti calcolate mediante gli approcci tangente lineare, secante lineare e secante logaritmica ($r1 = 2$).

poichè il contributo correttivo per il ripristino della congruenza mantiene una natura locale che interviene esclusivamente per il ripristino della congruenza della soluzione. Allo scopo di superare gli inconvenienti dell'approccio tangente che si presenta nel caso di ponti di grandissima luce ma con l'obiettivo di formulare un modello analitico del comportamento statico del ponte stralato dal quale sia ottenibile una soluzione in forma chiusa viene rivisitata nella sezione che segue la teoria del comportamento elastico dei cavi. L'obiettivo è di formulare una modellazione analitica esplicita del comportamento degli stralli in grado di tenere in conto il raffinamento cinematico legato alla rotazione finita della corda del cavo ed il raffinamento costitutivo legato alla variazione non lineare della rigidezza del cavo durante il processo di carico.

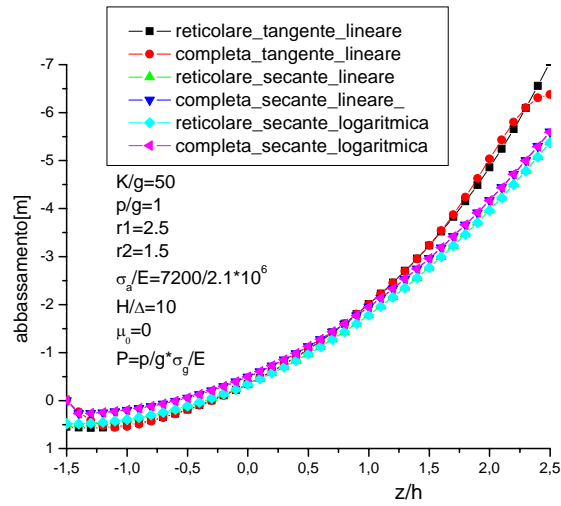


Figura 1.10: Deformate reticolari e congruenti calcolate mediante gli approcci tangente lineare, secante lineare e secante logaritmica ($r1 = 2.5$).

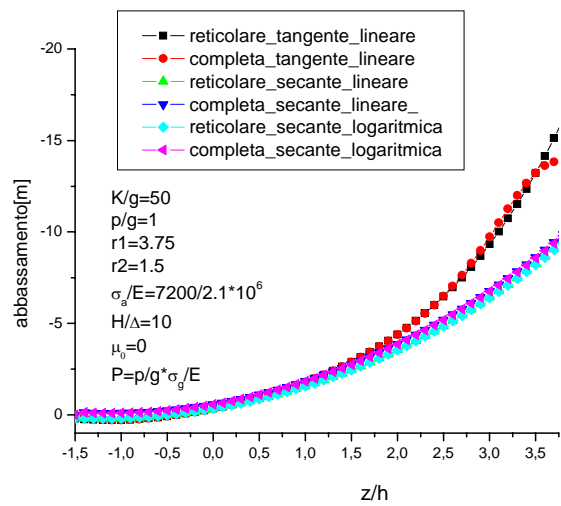


Figura 1.11: Deformate reticolari e congruenti calcolate mediante gli approcci tangente lineare, secante lineare e secante logaritmica ($r1 = 3.75$).

Capitolo 2

I cavi nei ponti strallati

2.1 Introduzione

Nelle applicazioni tecniche in cui una struttura (una piattaforma, un tetto, un impalcato da ponte) viene sorretta da stralli, la descrizione dell'interazione cavi-struttura, portando in conto la non linearità geometrica dovuta al *sag effect* dei cavi, avviene attraverso la ben nota teoria di Dischinger, in cui la risposta statica del cavo viene espressa per il tramite di un modulo elastico equivalente che è funzione del livello di *stress* del cavo. L'approccio migliore per valutare le forze di interazione tra cavi e struttura è quello secante ma le procedure iterative che devono essere impiegate non consentono di ottenere formule in forma chiusa per la descrizione analitica della struttura. Allo scopo di formulare un modello analitico capace di descrivere il comportamento di strutture strallate, limitatamente al caso in cui lo stress iniziale dei cavi sia sufficientemente elevato ed occorranò piccole variazioni di tensione a deformazione della struttura avvenuta, viene di solito impiegato con buoni risultati un approccio tangente della teoria di Dischinger. Tuttavia, in alcuni casi, i carichi strutturali vivi possono indurre variazioni di tensione dei cavi non trascurabili. Questo è il caso dei ponti strallati in cui la variazione di tensione dei cavi può raggiungere lo stesso valore della tensione iniziale. Pertanto il comportamento non lineare dei cavi dovuta alla non linearità geometrica dovuta al *sag effect* non è propriamente descritto attraverso la teoria tangente di Dischinger. Ne deriva che la non accurata modellazione dei cavi impiegati nei ponti strallati di grande luce si rifletta su una modellazione analitica poco accurata dell'intera struttura.

E' peraltro vero che, nell'ambito di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, caricando il cavo con forze, sovrapposte alla trazione iniziale, che agiscono lungo la corda del cavo nella configurazione di riferimento, si ha un

completo accordo tra i risultati della teoria esatta, che considera il cavo disposto secondo una catenaria sotto l'effetto del peso proprio, e quelli relativi alla teoria di Dischinger.

D'altra parte quando il carico addizionale non agisce lungo la corda nella configurazione di riferimento, la teoria di Dischinger cade in difetto se non è tenuta in conto la rotazione finita della corda del cavo. Questa situazione è facile immaginare come si verifichi per cavi lunghi disposti con una corda in configurazione di riferimento quasi orizzontale come accade nei ponti strallati di grande luce per i cavi che connettono la mezzeria del ponte alle torri. In questi casi pur rimanendo valida l'ipotesi di piccoli spostamenti per l'impalcato supportato dagli stralli, la modellazione analitica dell'interazione stralli-travata deve tenere in conto la rotazione finita della configurazione degli stralli.

Allo scopo di superare questi inconvenienti viene proposto un modello quasi secante per la modellazione analitica di cavi elastici che è in grado di tenere in conto la rotazione finita della corda del cavo e la variazione non lineare della rigidezza del cavo durante il processo di carico. Inoltre questa formulazione permette, a differenza dell'approccio secante, di ottenere una formulazione analitica in forma chiusa per l'analisi di ponti strallati di grande luce che non necessita di procedure iterative per valutare l'interazione cavi-impalcato.

2.2 Comportamento elastico di uno strallo

2.2.1 Notazione e sintesi dei risultati della teoria esatta

Si consideri un cavo vincolato alle sue estremità O e P e soggetto al peso proprio. In ciò che segue O è assunto fisso, mentre in P , come schematicamente mostrato in fig. 2.1, una struttura S è sorretta dal cavo.

I carichi fissi g su S inducono nel cavo uno stato di trazione. Il cavo è privo di rigidezza flessionale ed A_c sia l'area della sua sezione retta. Inoltre si assume elastico lineare isotropo ed omogeneo il materiale costituente il cavo e con γ_c e E_c si indichino rispettivamente il peso specifico del cavo e il modulo di Young. L'accelerazione di gravità agisce lungo \mathbf{e}_2 e la corda del cavo è descritta attraverso il vettore $(P - O)$, definito come:

$$(P - O) = \ell \mathbf{c} = \ell \mathcal{R}_2^{(\delta)} \mathcal{R}_3^{(\alpha)} \mathbf{e}_1 = \ell (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha, \cos \alpha \sin \delta)^T \quad (2.1)$$

dove ℓ è la lunghezza della corda e $\mathcal{R}_2^{(\delta)}$ ed $\mathcal{R}_3^{(\alpha)} \in Orth^+$ rappresentano rispettivamente i tensori del secondo ordine di rotazione di angolo δ intorno

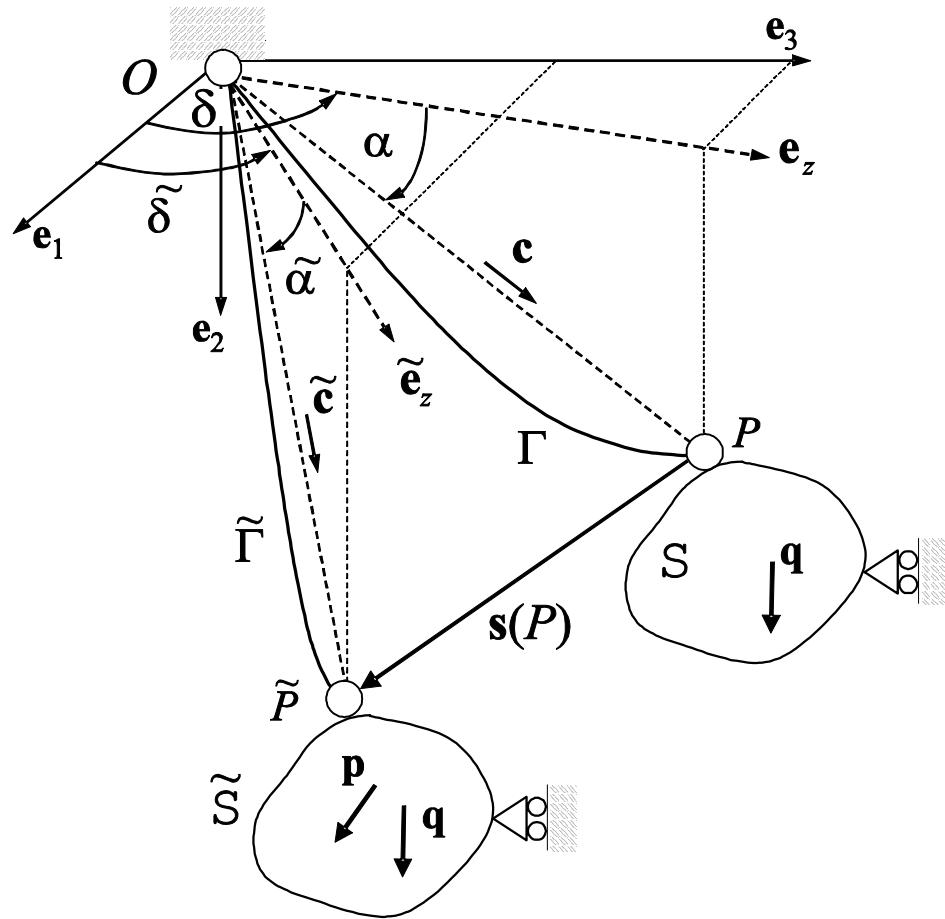


Figura 2.1: Configurazione tridimensionale dello strallo: notazione

ad \mathbf{e}_2 e di angolo α intorno ad \mathbf{e}_3 . Nel prosieguo della trattazione i simboli " \otimes " e " \bullet " denotano rispettivamente l'operatore di prodotto tensoriale e di prodotto scalare, di modo che $|\mathbf{w}| = (\mathbf{w} \bullet \mathbf{w})^{1/2}$, $\forall \mathbf{w} \in V$, essendo V lo spazio vettoriale associato allo spazio euclideo di punti geometrici. Inoltre i tensori del secondo ordine saranno distinti con il carattere calligrafico maiuscolo mentre i tensori del terzo ordine si indicheranno con il carattere maiuscolo fillettato, mentre \mathbb{I} rappresenta l'identità. Infine la notazione $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$ denota lo spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$, mentre $(A)^\perp$ denota il sottospazio vettoriale di V ortogonale ad A .

Con riferimento alla figura, la direzione della corda del cavo può essere scritta come:

$$\mathbf{c} = \beta(d, 1, \zeta)^T \quad (2.2)$$

dove:

$$\beta = (1 + \zeta^2 + d^2)^{-1/2}$$

$$\zeta = (P - O) \bullet \mathbf{e}_3 / h$$

$$d = (P - O) \bullet \mathbf{e}_1 / h$$

$$h = (P - O) \bullet \mathbf{e}_2.$$

La configurazione di equilibrio del cavo, indicata con Γ , giace sul piano $\pi = sp\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z\}$, con $\mathbf{e}_z = \mathbf{c}_z / |\mathbf{c}_z|$, dove $\mathbf{c}_z = (\mathbb{I} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{c}$ ed è descritta dalla catenaria elastica:

$$x_2(z, \eta) = -\frac{1}{\eta} \cosh(-\eta \frac{z}{L} + C_1) + C_2 \quad (2.3)$$

essendo z la coordinata lungo \mathbf{e}_z , $L = (P - O) \bullet \mathbf{e}_z$ la proiezione orizzontale del cavo e $C_1(\eta) = \ln(C + \sqrt{C^2 + e^\eta})$, $C_2(\eta) = \frac{1}{\eta} \cosh C_1$, $C(\eta) = \eta e^\eta \tan \alpha / (e^\eta - 1)$. Inoltre il parametro η rappresenta il rapporto adimensionale tra il peso del cavo ed il suo livello di tensione interno:

$$\eta = \frac{\gamma_c A_c L}{T} \quad (2.4)$$

essendo T la componente lungo \mathbf{e}_z , costante lungo il cavo, della forza di trazione del cavo. Quando il cavo lavora come strallo il parametro η risulta di solito piccolo in modo tale che ne deriva un piccolo *sag effect*. Indicate con \mathbf{f}_P e \mathbf{f}_O le reazioni vincolari alle estremità P ed O risulta che $T = \mathbf{f}_P \bullet \mathbf{e}_z = -\mathbf{f}_O \bullet \mathbf{e}_z$.

Si osservi che $-\mathbf{f}_P$ rappresenta la forza che descrive l'interazioni cavi-struttura. Le reazioni \mathbf{f}_P e \mathbf{f}_O giacciono sul piano π e sono definite come: $\mathbf{f}_P = N_P \mathbf{t}_P$, $\mathbf{f}_O = -N_O \mathbf{t}_O$, dove \mathbf{t}_Q ed N_Q sono rispettivamente il versore

tangente alla catenaria elastica e lo sforzo normale del cavo, positivo quando produce trazione, valutati nella posizione $Q(z, \eta)$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{z}, \eta) = (\mathcal{R}_2^{(\delta)} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial z} \mathbf{e}_2) [1 + (\frac{\partial x_2}{\partial z})^2]^{-1/2} \quad (2.5)$$

$$N(z, \eta) = T \cosh(-\eta \frac{z}{L} + C_1) \quad (2.6)$$

La seguente relazione di equilibrio lega N_P ed N_O :

$$N_P - N_O + \gamma_c A_c h = 0 \quad (2.7)$$

Sia $\sigma = F/A_c$ la tensione del cavo lungo la sua corda, dove $F = T/\cos \alpha$ essendo F la forza equivalente che agendo lungo la corda del cavo produrrebbe il medesimo tiro T . In altri termini σ , che corrisponde ad uno stress apparente del cavo, fornisce una misura dello stato di tensione medio del cavo. E' utile osservare che:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial x_2}{\partial z} = \tan \alpha \quad (2.8)$$

Ciò implica che:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{t} = \mathbf{c} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} N = T/\cos \alpha = F$$

cioè , considerando stralli molto tesi, σ fornisce una misura del livello di tensione reale del cavo. Indicando con L la lunghezza della linea elastica che corrisponde a Γ , con L_u la medesima lunghezza prima che il cavo sia sottoposto a tensione e con ΔL la variazione di lunghezza del cavo dovuto alla tensione, risulta valida la seguente condizione di compatibilità:

$$L = L_u + \Delta L \quad (2.9)$$

dove i valori esatti di L e ΔL sono rispettivamente:

$$L(\eta) = \int_0^L [1 + (\frac{\partial x_2}{\partial z})^2] dz \quad (2.10)$$

$$\Delta L(\eta) = \frac{T}{E_c A_c} \int_0^L [1 + (\frac{\partial x_2}{\partial z})^2] dz \quad (2.11)$$

Allo scopo di caratterizzare la risposta elastica di un cavo a seguito di una variazione della sua configurazione, si consideri il vettore spostamento $\mathbf{s} = s_i \mathbf{e}_i$ applicato all'estremità P . Esso può essere considerato indotto dai carichi attivi \mathbf{p} agenti su S . Ne discende che $(\tilde{P} - O) = (P - O) + \mathbf{s}$, essendo \tilde{P} la posizione attuale di P :

$$(\tilde{P} - O) = \mathcal{R}_a \mathcal{U}(P - O) = \mathcal{V} \mathcal{R}_a (P - O) \quad (2.12)$$

dove $R_{\mathbf{a}}$ è la rotazione relativa ad \mathbf{s} di cui l'asse è $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{s}$, mentre $\mathcal{U}(\mathbf{s})$, $\mathcal{V}(\mathbf{s})$ sono rispettivamente i tensori di *stretch* destro e sinistro.

La direzione attualizzata della corda $\tilde{\mathbf{c}} = R_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$ e la configurazione di equilibrio attualizzata $\tilde{\Gamma}$ giacciono nel piano $\tilde{\pi} = \text{span}\{e_2, \tilde{\mathbf{e}}_z\}$, mentre $\tilde{\mathbf{e}}_z = \tilde{\mathbf{c}}_z/|\tilde{\mathbf{c}}_z|$ con $\tilde{\mathbf{c}}_z = (I - e_2 \otimes e_2)\tilde{\mathbf{c}}$. Di regola, ogni caratteristica contrassegnata dal $(\tilde{\cdot})$ si riferisce alla configurazione attualizzata $\tilde{\Gamma}$. Introducendo il vettore spostamento adimensionalizzato $\mathbf{S} = S_i e_i = (s_i/h) \mathbf{e}_i$, gli angoli $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\delta}$ risultano:

$$\tan \tilde{\alpha} = \frac{1 + S_2}{\sqrt{(d + S_1)^2 + (\zeta + S_3)^2}}, \quad \tan \tilde{\delta} = \frac{\zeta + S_3}{d + S_1} \quad (2.13)$$

La nuova forza di interazione cavo-struttura è $\tilde{\mathbf{f}}_{\tilde{P}} = \tilde{N}_{\tilde{P}} \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}}$, dove il valore attuale della tensione in \tilde{P} può essere rivisto come il corrispondente valore in Γ più una variazione, i.e. $\tilde{N}_{\tilde{P}} = N_P + \Delta N$, mentre $\tilde{\mathbf{f}}_O = \tilde{N}_O \tilde{\mathbf{t}}_O$, risultando \tilde{N}_O resulting dalla condizione (2.7) scritta rispetto a $\tilde{\Gamma}$.

Allo scopo di caratterizzare la corrispondente deformazione del cavo, possono adottarsi differenti misure di deformazione finita: l'allungamento percentuale apparente $\Delta\varepsilon$ può essere espresso attraverso la misura unidimensionale di deformazione finita di Green-Lagrange o attraverso quella logaritmica.

$$\Delta\varepsilon_{GL}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}(\tilde{\ell}^2 - \ell^2)/\ell^2 = \frac{1}{2} [|\mathbf{c} + \beta\mathbf{S}|^2 - 1] = \Delta\varepsilon_n + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_n^2 \quad (2.14)$$

$$\Delta\varepsilon_{ln}(\mathbf{S}) = \ln \tilde{\ell} - \ln \ell = \ln(|\mathbf{c} + \beta\mathbf{S}|) = \ln(1 + \Delta\varepsilon_n) \quad (2.15)$$

essendo $\Delta\varepsilon_n = \tilde{\ell}/\ell - 1$ la deformazione del cavo nominale. Conseguentemente, i tensori di *stretch* sinistro e destro della corda risultano:(cf. Eq. (2.16-2.17)):

$$\mathcal{U}_{GL} = \sqrt{1 + 2\Delta\varepsilon_{GL}} \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \mathcal{V}_{GL} = \sqrt{1 + 2\Delta\varepsilon_{GL}} \tilde{\mathbf{c}} \otimes \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{U}_{ln} = \exp(\Delta\varepsilon_{ln}) \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \mathcal{V}_{ln} = \exp(\Delta\varepsilon_{ln}) \tilde{\mathbf{c}} \otimes \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.17)$$

E' bene osservare che, difinita la sfera $B = \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} : |\mathbf{w}| = \ell\}$, se $\tilde{P} \in B$ ne deriva un campo di spostamenti che con riferimento alla corda del cavo risulta rigido, cioè $\Delta\varepsilon = 0$, $\mathcal{U} = \mathcal{V} = 0$.

Con riferimento a $\tilde{\Gamma}$, la tensione del cavo \tilde{T} lungo $\tilde{\mathbf{e}}_z$ ed il parametro adimensionale $\tilde{\tau}$ può esprimersi in funzione η (cf. Eq. (2.4) and Fig. 1.1)

$$\tilde{T}(\eta) = \tilde{F}(\eta) \cos \tilde{\alpha} = [F + \Delta F(\eta)] \cos \tilde{\alpha} = A_c [\sigma + \Delta\sigma(\eta)] \cos \tilde{\alpha} \quad (2.18)$$

$$\tilde{\eta}(\eta) = \frac{\gamma_c A_c \tilde{L}}{\tilde{T}} = \eta \frac{\tilde{\ell}}{\ell} \frac{F}{\tilde{F}(\eta)} \quad (2.19)$$

dove $\Delta\sigma = \Delta F/A_c$ è la variazione della tensione apparente σ corrispondente a $\Delta\varepsilon$ che dipende da η .

Una volta assegnata la configurazione iniziale e dato il vettore spostamento \mathbf{s} , la nuova configurazione $\tilde{\Gamma}$, le corrispondenti reazioni vincolari e la nuova tensione del cavo possono valutarsi in modo esatto attraverso le Eqs. (2.3) and (2.5-2.6), scritte rispetto a $\tilde{\Gamma}$. Date le Eqs. (2.18-2.19) e considerando un allungamento della corda differente da zero, il comportamento elastico del cavo può essere valutato in modo esatto se è nota la variazione apparente di tensione lungo la corda. Quest'ultima può essere caratterizzata soltanto se viene introdotta una relazione costitutiva che metta in relazione $\Delta\sigma$ to $\Delta\varepsilon$.

E' bene osservare che assumendo indeformabile la sezione retta del cavo, $\Delta\sigma$ rappresenta allo stesso tempo la misura di tensione di Cauchy e quella Kirchhoff.

2.2.2 Livelli di tensione moderatamente elevati

Per livelli di tensione moderatamente elevati, i.e. quando il parametro η non è del tutto trascurabile, l'equazione di compatibilità (2.9) può essere approssimata con successo attraverso un'espansione in serie arrestata al secondo ordine fatta rispetto ad η . Conseguentemente, impiegando (2.4), Eq. (2.9) può essere riscritta come:

$$\ell + \frac{\gamma_c^2 \ell^3}{24\sigma^2} \cos^2 \alpha = \mathcal{L}_u + \frac{\sigma \ell}{E_c} + \frac{\gamma_c^2 \ell^3}{12E_c \sigma} \quad (2.20)$$

Tenendo in conto la condizione $dL_u = 0$ e differenziando l'equazione(2.20), risulta:

$$\frac{d\sigma}{d\ell} = \frac{1 + (\gamma_c^2 \ell^2 \cos^2 \alpha)/(8\sigma^2) - \sigma/E_c - (\gamma_c^2 \ell^2)/(4E_c \sigma)}{(\gamma_c^2 \ell^3 \cos^2 \alpha)/(12\sigma^3) + \ell/E_c - (\gamma_c^2 \ell^3)/(12E_c \sigma^2)} \quad (2.21)$$

Introducendo nell'equazione (2.21) la deformazione apparente elementare $d\varepsilon = d\ell/\ell$, il modulo equivalente tangente E_t^* può essere definito come:

$$E_t^* = \frac{d\sigma}{d\ell} \ell = E_c \frac{1 + \eta^2 \cos^2 \alpha / 8 - \omega(1 + \eta^2 / 4)}{1 + a(\zeta^2 + d^2)(1 - \omega / \cos^2 \alpha)} \quad (2.22)$$

dove:

$$\omega = \frac{\sigma}{E_c}, \quad a = \frac{\eta^2 \beta^2}{\omega 12} = \frac{E_c \gamma_c^2 h^2}{12\sigma^3} \quad (2.23)$$

Pertanto, risulta valida la seguente relazione tangente:

$$d\sigma = E_t^*(\sigma, \eta) d\varepsilon \quad (2.24)$$

Integrando l'Eq. (2.24), il modulo equivalente secante può scriversi nella forma:

$$E_s^*(\Delta\sigma, \eta) = \Delta\sigma \left[\int_{\sigma_o}^{\sigma_o + \Delta\sigma} \frac{1}{E_t^*(\sigma, \eta)} d\sigma \right]^{-1} \quad (2.25)$$

dove σ_o rappresenta la trazione iniziale del cavo. Dunque, la risposta elastica secante del cavo può essere rappresentata come:

$$\Delta\sigma(\eta, \Delta\varepsilon) = E_s^*(\Delta\sigma, \eta) \Delta\varepsilon \quad (2.26)$$

Nella precedente equazione si è evidenziato il fatto che $\Delta\sigma$ dipende da η , mentre il modulo secante dipende da η e $\Delta\sigma$ stesso. Inoltre, è bene osservare che

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} E_s^* = E_t^*|_{\sigma=\sigma_o}, \quad \left. \frac{\partial E_s^*}{\partial \Delta\sigma} \right|_{\Delta\sigma=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial E_t^*}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_o} \quad (2.27)$$

2.2.3 La teoria di Dishinger: livelli di tensione molto elevati

Nella tecnica, quando il materiale del cavo è caratterizzato da un rapporto molto grande tra il modulo di Young e la tensione di progetto, il parametro ω nell'Eq. (2.22) è molto piccolo. Inoltre, nel caso di cavi molto tesi risulta soddisfatta la condizione $\eta \ll 1$. Queste ipotesi sono di solito soddisfatte per gli stralli impiegati nei ponti strallati di grande luce, dove la trazione iniziale degli stralli è data dai carichi fissi del ponte.

Sotto queste ipotesi, l'equazione (2.22) può essere considerata al limite per ω e η che tendono a zero. Inoltre, allo scopo di portare in conto il *sag effect*, η^2 e ω si assume che abbiano lo stesso ordine di infinitesimo, in modo tale che(cf. Eq. (2.23))

$$\lim_{(\eta, \omega) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta^2}{\omega} = 12 \frac{a}{\beta^2} = \frac{E_c \gamma_c^2 \ell^2}{\sigma_o^3} \quad (2.28)$$

In questo modo si ottiene il ben noto modulo equivalente tangente di Dischinger:

$$E_{td}^* = E_c [1 + a(\zeta^2 + d^2)]^{-1} \quad (2.29)$$

Combinando le Eqs. (2.25) e (2.29), il modulo secante di Dischinger risulta:

$$E_{sd}^*(\Delta\sigma) = E_c \left[1 + a(\zeta^2 + d^2) \frac{2 + \Delta\sigma/\sigma_o}{2(1 + \Delta\sigma/\sigma_o)^2} \right]^{-1} \quad (2.30)$$

dove il parametro a , introdotto nell' Eq. (2.23), è valutato in corrispondenza del valore iniziale dell stress σ_o .

Come regola di notazione, se G è una generica quantità che dipende da η e ω , si ha

$$G_d = \lim_{(\eta, \omega) \rightarrow (0,0)} G(\eta, \omega) \quad (2.31)$$

sotto la condizione(2.28). Pertanto, possono verificarsi le seguenti affermazioni(cf. Eqs. (??)):

$$\Delta N_d = \Delta F_d = A_c E_{sd}^* \Delta \varepsilon, \quad \mathbf{t}_d = \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{t}}_d = \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{f}_{Pd} = F \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{Pd} = (F + \Delta F_d) \tilde{\mathbf{c}} = A_c(\sigma_o + E_{sd}^* \Delta \varepsilon) \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.33)$$

dove $\Delta F(\eta) = [\tilde{F}(\eta) - F]$. In altri termini, nell'ambito della teoria Dischinger, le quantità apparenti calcolate lungo la corda del cavo ΔF , $\Delta \sigma$ and $\Delta \varepsilon$ assumono il significato di variazioni reali, in modo tale che (2.24) e (2.26) possono considerarsi relazioni costitutive reali.

Come si evince chiaramente dalle Eqs. (2.26) e (2.30), la relazione secante tra l'incremento di tensione e quello di deformazione è di natura implicita. Conseguentemente, allo scopo di ottenere un' accurata valutazione dell'interazione cavo-struttura, devono impiegarsi procedure iterative, di modo che relazioni in forma chiusa non possono essere prodotte. D'altra parte, se la variazione di tensione apparente è molto piccola il comportamento del cavo può esprimersi in modo esplicito attraverso il modulo equivalente tangente (cf. Eqs. (2.24) and (2.29)). Questo è equivalente a considerare uno sviluppo in serie al primo ordine rispetto a $\Delta \sigma$ per la relazione costitutiva apparente che deriva da u approccio secante. Ad ogni modo, come precedentemente discusso, sotto significative variazioni di tensione, la teoria tangente di Dischinger non è adatta a fornire un'accurata approssimazione della risposta non lineare degli stralli.. Conseguentemente, un approccio al secondo ordine in $\Delta \sigma$ può essere ragionevolmente impiegato.

2.3 Il modello costitutivo quasi secante

Si consideri la funzione residuale R , definita come:

$$R(\Delta \sigma, \Delta \varepsilon) = \Delta \sigma - E_s^*(\Delta \sigma) \Delta \varepsilon \quad (2.34)$$

Se $\Delta \sigma$ e $\Delta \varepsilon$ soddisfano l'Eq. (2.26), allora $R = 0$. Espandendo R nell'intorno di $\Delta \sigma = 0$ e $\Delta \varepsilon = 0$

$$R(\Delta \sigma, \Delta \varepsilon) = \Delta \sigma - E_t^*|_{\sigma=\sigma_o} \Delta \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial E_t^*}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_o} \Delta \sigma \Delta \varepsilon + o(\Delta \sigma^2, \Delta \varepsilon^2) \quad (2.35)$$

dove (cf. Eq. (2.27))

$$R(0,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \Delta \sigma} \right|_{(0,0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \Delta \varepsilon} \right|_{(0,0)} = -E_t^*|_{\sigma=\sigma_o} \quad (2.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial \Delta \varepsilon^2} \right|_{(0,0)} = \left. \frac{\partial^2 R}{\partial \Delta \sigma^2} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 R}{\partial \Delta \sigma \partial \Delta \varepsilon} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial E_t^*}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_o} \quad (2.37)$$

Pertanto, trascurando i termini $o(\Delta \sigma^2, \Delta \varepsilon^2)$ ed introducendo il modulo quasi-secante E_{qs}^* definito come:

$$E_{qs}^* = E_t^*|_{\sigma=\sigma_o} + \Delta E_s \Delta \sigma \quad (2.38)$$

con $\Delta E_s = (1/2) (\partial E_t^* / \partial \sigma)|_{\sigma=\sigma_o}$, è possibile ottenere la seguente relazione costitutiva apparente approssimata:

$$\Delta \sigma = E_{qs}^* (\Delta \sigma) \Delta \varepsilon \quad (2.39)$$

Il modulo quasi-secante rappresenta una approssimazione al primo ordine in $\Delta \sigma$ del modulo secante E_s^* e fornisce una descrizione costitutiva del cavo con un'approssimazione del secondo ordine sia rispetto a $\Delta \sigma$ che a $\Delta \varepsilon$. In base a questo approccio, la relazione costitutiva tra $\Delta \sigma$ e $\Delta \varepsilon$ può essere rappresentata attraverso la seguente espressione esplicita:

$$\Delta \sigma = \frac{E_t^*|_{\sigma=\sigma_o} \Delta \varepsilon}{1 - \Delta E_s \Delta \varepsilon} \quad (2.40)$$

Nell'ambito della teoria di Dischinger la quantità ΔE_s diventa:

$$\begin{aligned} \Delta E_{sd} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_{td}^*}{\partial \sigma} = \frac{3 \overline{E}_{td}^* (1 - \overline{E}_{td}^*)}{2 \omega_0} 1 + \omega \frac{2}{\beta^2 (\zeta^2 + d^2)} \left(\frac{2}{3} - \overline{E}_{td}^* \right) \\ &+ \frac{5}{\overline{E}_{td}^* (1 - \overline{E}_{td}^*)} \left(\overline{E}_{td}^{*2} - \frac{2}{3} \overline{E}_{td}^* + \frac{1}{10} \right) = \frac{3 \overline{E}_{td}^* (1 - \overline{E}_{td}^*)}{2 \omega_0} [1 + O(\omega_0)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

dove $\overline{E}_{td}^* = E_{td}^* / E_c$ è il modulo di Dischinger tangente adimensionalizzato valutato per $\sigma = \sigma_o$ e $\omega_0 = \sigma_o / E$. Data la trascurabilità di ω , nella Eq (2.41) è stato messo in evidenza che il primo termine è dominante rispetto agli altri.

2.4 Il modello quasi secante al secondo ordine negli spostamenti

Come precedentemente discusso, gli stralli dei ponti strallati di grande luce hanno in esercizio caratteristiche tali da renderli compatibili con l'approccio di Dischinger. Inoltre, il comportamento delle strutture strallate è di solito analizzato considerando valida l'ulteriore ipotesi di piccoli spostamenti per la struttura. Sotto queste ipotesi, sembrerebbe ragionevole considerare anche per gli stralli una misura di deformazione apparente sviluppata fino al primo ordine nelle funzioni spostamento. D'altra parte, procedendo in questo modo, un completo accordo tra i risultati esatti e quelli basati sulla teoria di Dischinger appare soltanto quando la variazione di trazione del cavo è prodotta da spostamenti strutturali che agiscono lungo la corda del cavo. Al contrario, quando gli spostamenti strutturali non agiscono lungo la corda del cavo questo approccio non tiene conto la rotazione finita della direzione della corda.

Queste osservazioni suggeriscono di considerare un modello sviluppato al secondo ordine negli spostamenti. Inoltre, dalla struttura della Eq. (2.40), si evidenzia un raffinamento costitutivo rispetto al modello tangente, attraverso il parametro ΔE_s .

2.4.1 Tensione del cavo

Si consideri una espansione in serie di MacLaurin della quantità adimensionale $\Delta\sigma/E_c$ rispetto ad \mathbf{S} . Poichè risulta $\Delta\sigma = 0$ quando $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, risulta valida la seguente condizione:

$$\frac{\Delta\sigma}{E_c} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{2} \mathcal{H} \cdot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}) + o(|\mathbf{S}|^2) \quad (2.42)$$

dove $\mathbf{G} \in V$ e $\mathcal{H} \in \text{Sym}^+$

$$\mathbf{G} = \nabla \left(\frac{\Delta\sigma}{E_c} \right) \Big|_{\mathbf{S}=\mathbf{0}}, \quad \mathcal{H} = \nabla \left[\nabla \left(\frac{\Delta\sigma}{E_c} \right) \right] \Big|_{\mathbf{S}=\mathbf{0}} \quad (2.43)$$

e dove il simbolo ∇ ha il significato di operatore gradiente rispetto alle componenti adimensionali del vettore spostamento. In dettaglio, impiegando l'equazione (2.40), possono essere ottenute le seguenti espressioni:

$$\mathbf{G} = \overline{E}_t^* \nabla(\Delta\varepsilon)|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{H} = \overline{E}_t^* \{ \nabla[\nabla(\Delta\varepsilon)]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} + 2\Delta E_s[\nabla(\Delta\varepsilon) \otimes \nabla(\Delta\varepsilon)]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} \} \quad (2.45)$$

dove i termini relativi alla deformazione apparente posso esprimersi considerando le misure di deformazione(2.14-2.15):

$$\nabla(\Delta\varepsilon_{GL})|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \nabla(\Delta\varepsilon_{ln})|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \beta \mathbf{c} \quad (2.46)$$

$$\nabla[\nabla(\Delta\varepsilon_{GL})]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \beta^2 \mathbb{I} \quad (2.47)$$

$$\nabla[\nabla(\Delta\varepsilon_{ln})]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \beta^2(\mathbb{P}^\perp - \mathbb{P}^\parallel) \quad (2.48)$$

con $\overline{E}_t^* = E_t^*/E_c$. I tensori del secondo ordine $\mathcal{P}^\parallel = \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ e $\mathcal{P}^\perp = \mathbb{I} - \mathcal{P}^\parallel$ rappresentano, rispettivamente, gli operatori di proiezione lungo $span\{c\}$ e $(span\{c\})^\perp$, in modo che

$$\mathbf{v}^\parallel = \mathcal{P}^\parallel \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c}, \quad \mathbf{v}^\perp = \mathcal{P}^\perp \mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{v}^\parallel \cdot \mathbf{v}^\parallel = \mathcal{P}^\parallel \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp = \mathcal{P}^\perp \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad (2.50)$$

$\forall \mathbf{v} \in V$, tali che $\mathbf{v}^\parallel \in span\{c\}$ e $\mathbf{v}^\perp \in (span\{c\})^\perp$.

Pertanto, l'equazione(2.42) assume le seguenti differenti forme, in relazione alle differenti misure di deformazione adottate:

$$\left(\frac{\Delta\sigma}{E_c} \right)_{GL} = \overline{E}_t^* \beta |\mathbf{S}^\parallel| + \overline{E}_t^* \beta^2 \left(\frac{|\mathbf{S}|^2}{2} + \Delta E_s |\mathbf{S}^\parallel|^2 \right) + o(|\mathbf{S}|^2) \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\Delta\sigma}{E_c} \right)_{ln} = \overline{E}_t^* \beta |\mathbf{S}^\parallel| + \overline{E}_t^* \beta^2 \left(\frac{|\mathbf{S}^\perp|^2 - |\mathbf{S}^\parallel|^2}{2} + \Delta E_s |\mathbf{S}^\parallel|^2 \right) + o(|\mathbf{S}|^2) \quad (2.52)$$

2.4.2 Interazione stralli-struttura

Come precedentemente discusso, la forza di interazione cavi-struttura in $\tilde{\Gamma}$ risulta da $\tilde{\mathbf{f}}_{\tilde{p}} = N_P \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{p}} + \Delta f$, dove $\Delta f = \Delta N \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{p}}$. Introducendo il vettore adimensionale $\Delta \mathbf{F}$ come

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{f}}{E_c A_c} = \frac{\Delta N}{E_c A_c} \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}} = \Delta F \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}} \quad (2.53)$$

la seguente condizione può essere verificata:

$$\begin{aligned} \nabla (\Delta F \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}})|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} &= [\tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}} \otimes \nabla (\Delta F) + \Delta F \nabla \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}}]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} & (2.54) \\ \nabla [\nabla (\Delta F \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}})]|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} &= \{2 \operatorname{sym}^* [\nabla \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}} \otimes \nabla (\Delta F)] + \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{P}} \otimes \nabla [\nabla (\Delta F)]\}|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} & (2.55) \end{aligned}$$

essendo $\Delta \mathbf{F}|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Nell'equazione (2.55) l'operatore sym^* agisce su un tensore del terzo ordine ed è definito come:

$$\operatorname{sym}^*[\mathbb{A}] = \frac{1}{2} (\mathbb{A} + \mathbb{A}^{T*}) \quad \forall \mathbb{A} \in \operatorname{Lin} \quad (2.56)$$

dove A^{T*} è l'unico tensore del terzo ordine con la proprietà: $(\mathbb{A}\mathcal{S}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbb{A}^{T*} \mathcal{S}^T) \cdot \mathbf{v}$, \forall tensore del secondo ordine \mathcal{S} e $\forall \mathbf{v} \in V$. Pertanto, $(\mathbb{A}^{T*})_{ijk} = (\mathbb{A})_{ikj}$ dunque

$$\nabla(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})^{T*} + (\mathbf{v} \otimes \nabla \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \quad (2.57)$$

Considerando la legge costitutiva quasi-secante(2.40) e nell'ambito della validità delle ipotesi della teoria di Dischinger, i.e impiegando le considerando valide le condizioni(2.32-2.33), lo sviluppo in serie nell'intorno di $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ per $\Delta \mathbf{F}_d$ risulta in (cf. Eqs. (2.54-2.55)):

$$\Delta \mathbf{F}_d = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{G}_d) \mathbf{S} + \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{c} \otimes \mathcal{H}_d + \operatorname{sym}^* [\nabla \tilde{\mathbf{c}}|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} \otimes \mathbf{G}_d] \right\} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}) + o(|\mathbf{S}|^2) \quad (2.58)$$

Per qualsiasi tensore del secondo ordine \mathcal{S} e per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in V$, le seguenti proprietà possono essere dimostrate:

$$(\mathcal{S} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathcal{S} \mathbf{w} = (\mathcal{S} \otimes \mathbf{v})^{T*} (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) \quad (2.59)$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathcal{S})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \mathcal{S} \mathbf{u} = [\mathcal{S} \cdot (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u})] \mathbf{v} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{v}^{\parallel} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}^{\parallel}|^2, \quad \mathbf{v}^{\perp} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}^{\perp}|^2 \quad (2.61)$$

Inoltre, dopo alcuni passaggi algebrici, la seguente relazione risulta valida (cf. Eqs. (??) and (2.13)):

$$\nabla \tilde{\mathbf{c}}|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \beta \mathcal{P}^\perp \quad (2.62)$$

Pertanto, considerando Eq.(2.42) e le proprietà (2.59-2.62), lo sviluppo(2.58) diventa:

$$\Delta \mathbf{F}_d = \left(\frac{\Delta \sigma}{E_c} \right)_d \mathbf{c} + \overline{E}_{td}^* \beta^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{S}^\perp \quad (2.63)$$

Date le Eqs. (2.46-2.48), l'analisi delle equazioni(2.51-2.52) e (2.63) porta alle seguenti considerazioni:

- i) la variazione di tensione del cavo secondo l'approccio quasi-secante al secondo ordine negli spostamenti può essere rivista come la somma del termine tangente al secondo ordine, i.e. quello che si ottiene attraverso una legge costitutiva tangente (2.24), ed un raffinamento costitutivo, che dipende da ΔE_s e $|S^\parallel|^2$. Peraltro, risulta evidente che il raffinamento costitutivo apprezzabile mediante l'approccio quasi-secante è consentito se si considera una teoria almeno estesa fino al secondo ordine negli spostamenti. Quindi, la teoria quasi-secante sviluppata al primo ordine negli spostamenti coincide con quella lineare tangente.
- ii) se si considera il modello costitutivo tangente, impiegato nel caso di un approccio al secondo ordine negli spostamenti, la variazione di tensione e le forze di interazione cavo-struttura sono raffinate in modo esplicito soltanto attraverso il contributo dovuto alla rotazione finita della corda del cavo. D'altra parte, un significativo raffinamento costitutivo è ottenuto soltanto in virtù del modello quasi-secante.
- iii) i termini tangenti dipendono dalla scelta della misura di deformazione, mentre questo non si verifica per il termine di raffinamento costitutivo.
- iv) l'ultimo contributo nell'equazione(2.63) rappresenta un termine tangente del secondo ordine che accoppia le componenti di allungamento relative a $|S^\parallel|$ and $|S^\perp|$, e comporta una deviazione della forza di interazione dalla direzione della corda di riferimento \mathbf{c} .

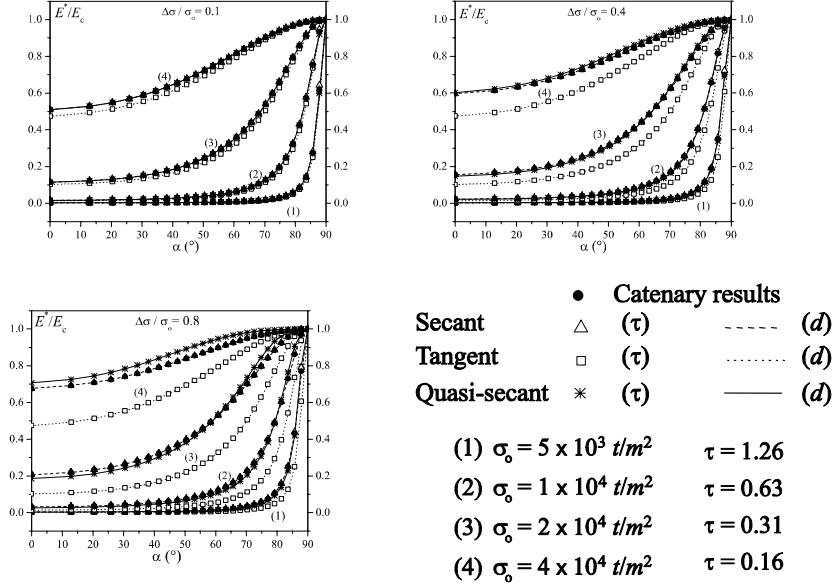


Tabella 2.1: Modulo equivalente adimensionale rispetto all'angolo di inclinazione dello strallo per differenti valori della trazione iniziale dello strallo e per differenti variazioni adimensionalizzate di tensione

Infine, può essere sottolineato che in base all'approccio proposto, una volta assegnato lo spostamento s , gli effetti di non linearità geometrica e quelli dovuti al legame costitutivo apparente quando agiscono sulla variazione di tensione del cavo e e sulla forza di interazione stralli-struttura possono essere descritti mediante relazioni in forma chiusa, che dipendono esclusivamente dalla configurazione di riferimento del cavo.

2.5 Validazioni e confronti

In questa sezione la validità e l'accuratezza del modello proposto sono mostrate attraverso diversi applicazioni su stralli generalmente impiegati su ponti strallati di grande luce. In dettaglio, con riferimento alla notazione introdotta in fig. 2.1 e considerando un cavo di acciaio con $\ell = 800 \text{ m}$, $\gamma_c = 7.86 \text{ t/m}^3$, $E_c = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, la tabella 2.1 rappresenta il modulo equivalente adimensionale E^*/E_c in funzione dell'angolo di inclinazione α per differenti valori della trazione iniziale del cavo (o equivalentemente per differenti valori di η) e per differenti valori della variazione adimensionale di tensione del cavo $\Delta\sigma/\sigma_0$.

Differenti modelli vengono confrontati con i risultati esatti della cate-

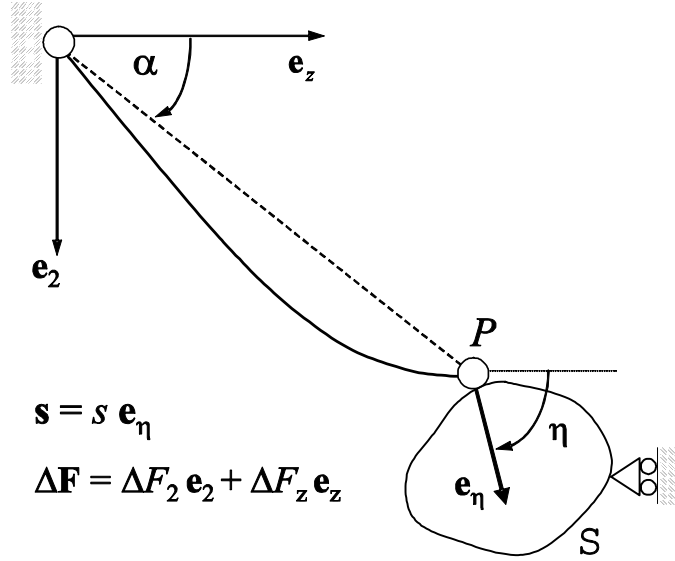


Figura 2.2: Casi test sul singolo strallo: notazione

naria mostrando che, per tipici valori di σ_o e $\Delta\sigma$, i modelli relativi ad una approssimazione del secondo ordine in τ (denoted by (τ)) sono praticamente equivalenti a quelli ottenuti mediante la teoria di Dischinger (denotati da (d)). Inoltre, il modello quasi-secante appare chiaramente essere in accordo con quello secante e con quello esatto per i differenti casi indagati, mentre il modello tangente non risulta pienamente adatto a riprodurre correttamente il comportamento del cavo, quando si verificano grandi variazioni di tensione.

Con riferimento alla notazione introdotta in fig.2.2, si consideri uno strallo soggetto allo spostamento s all'estremità P , in modo tale che la configurazione attuale $\tilde{\Gamma}$ si trovi nello stesso piano di Γ .

Lo strallo si assume sia caratterizzato dalle stesse proprietà della precedente applicazione ed essere soggetto al livello di tensione iniziale $\sigma_o = 36000 \text{ t/m}^2$. Per differenti configurazioni di riferimento dello strallo, i.e. per differenti valori dell'angolo di corda α , e per differenti direzioni di spostamento, i.e. per differenti valori di η , le figure da tabella 2.2 a tabella 2.4 mostrano la variazione di tensione adimensionale del cavo, la componente orizzontale (i.e. lungo e_z) e quella verticale (i.e. lungo e_2) della variazione della forza di interazione strallo-struttura rispetto allo spostamento adimensionale. I risultati riguardanti ΔF_2 e corrispondenti al caso $\alpha = 0^\circ$ non vengono mostrati perché non sono significativi, essendo trascurabili i valori corrispondenti. Nei grafici seguenti vengono contrassegnati con un pallino pieno i risultati della catenaria, con un triangolino vuoto quelli relativi al modello quasi-secante con

misura di deformazione logaritmica, con asterisco quelli relativi al modello quasi-secante con misura di deformazione di Green-Lagrange, con linea tratteggiata i risultati relativi alla teoria tangente con misura di deformazione sviluppata al primo ordine negli spostamenti ed infine con linea continua i risultati ottenuti impiegando il modulo secante ed una misura di deformazione sviluppata al primo ordine negli spostamenti. (cfr. legenda della tabella 2.1).

I risultati esatti della catenaria sono confrontati con i risultati del modello quasi-secante ottenuti nell'ambito di validità delle ipotesi di Dischinger considerando un'approssimazione del secondo ordine negli spostamenti, insieme a quelli ottenuti attraverso la classica applicazione della teoria di Dischinger, i.e. considerando una misura di deformazione al primo ordine. I risultati ottenuti si riferiscono a valori di spostamento compatibili con le applicazioni che riguardano i ponti strallati di grande luce e quindi con l'integrità strutturale degli stralli. I risultati ottenuti evidenziano che il modello quasi-secante è in grado di fornire una corretta descrizione della risposta non lineare del cavo, sia considerando la misura di deformazione logaritmica sia quella di Green-Lagrange. Inoltre, i risultati proposti, corrispondenti a differenti direzioni di spostamento, mostrano che l'accordo con i risultati della catenaria è buono sia per stralli fortemente inclinati e sia per quelli normalmente impiegati. Può essere sottolineato che, in tutte le applicazioni considerate, il modello quasi-secante mostra una buona accuratezza non soltanto per spostamenti positivi, i.e. per spostamenti che incrementano il livello di tensione del cavo, ma anche per valori negativi di s . Inoltre, il modello quasi secante proposto appare essere adatto a descrivere correttamente l'effetto sulla tensione del cavo e sulla forza di interazione strallo-struttura indotto dalla rotazione finita della corda dello strallo che diviene importante per i cavi fortemente inclinati soggetti a spostamenti verticali.

D'altra parte, appare chiaramente l'inadeguatezza, anche per piccoli valori di spostamento, della classica applicazione del modello di Dischinger tangente per descrivere la risposta elastica degli stralli e la corrispondente interazione stralli-struttura.

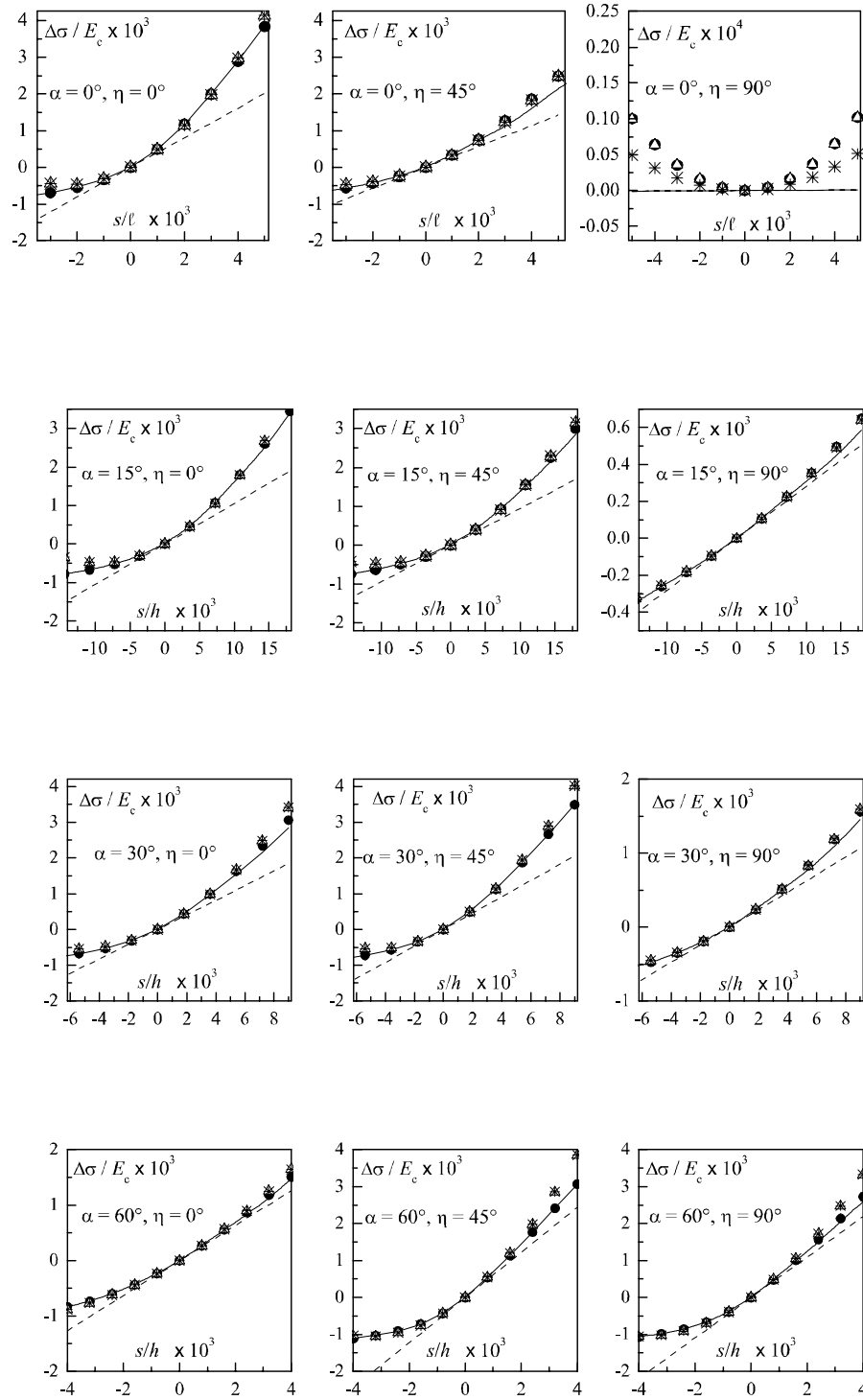


Tabella 2.2: Variazione della tensione adimensionale dello strallo rispetto allo spostamento adimensionale dell'estremo libero P

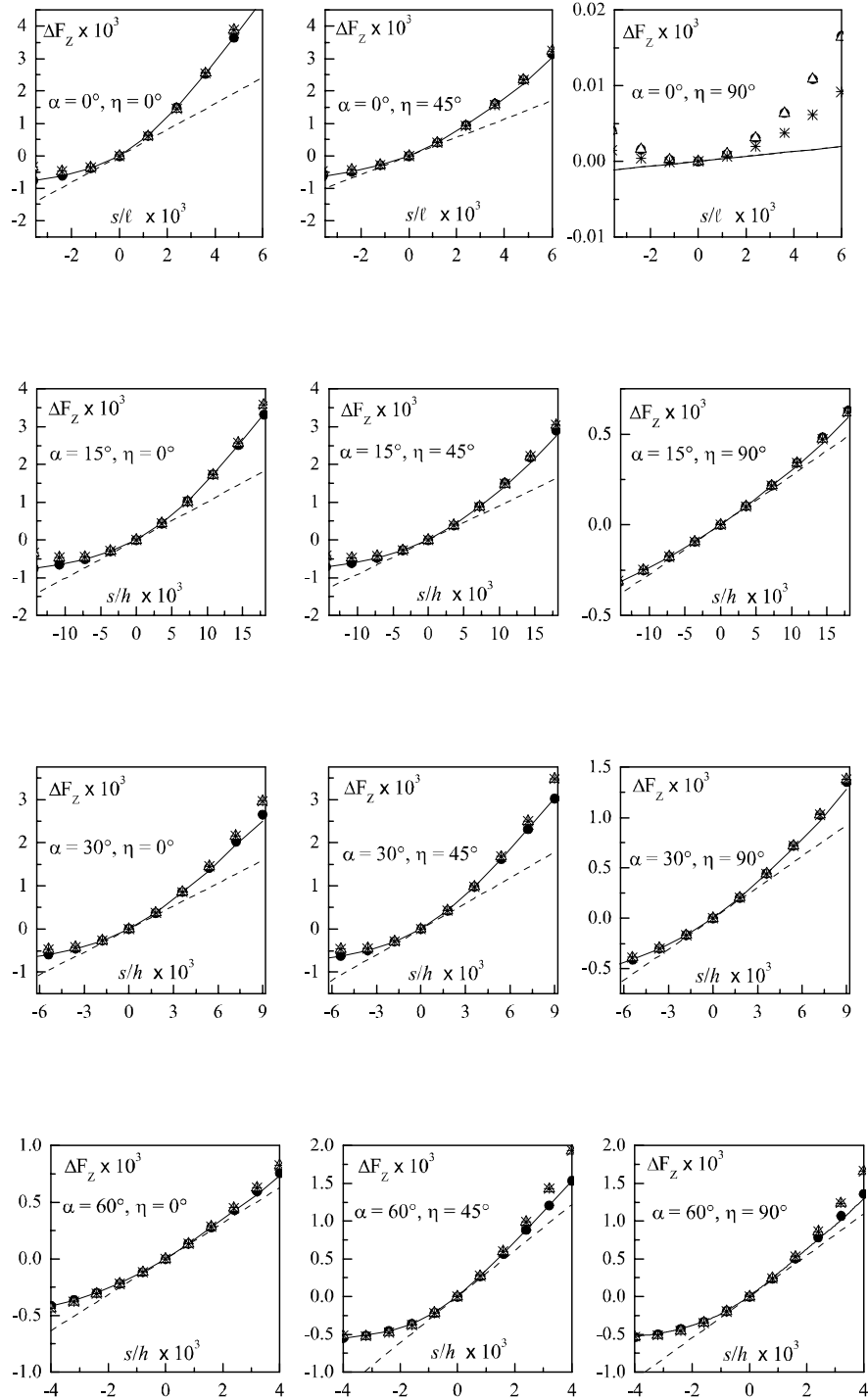


Tabella 2.3: Variazione della forza orizzontale di interazione strallo-struttura adimensionale rispetto allo spostamento adimensionale dell'estremo liberoP

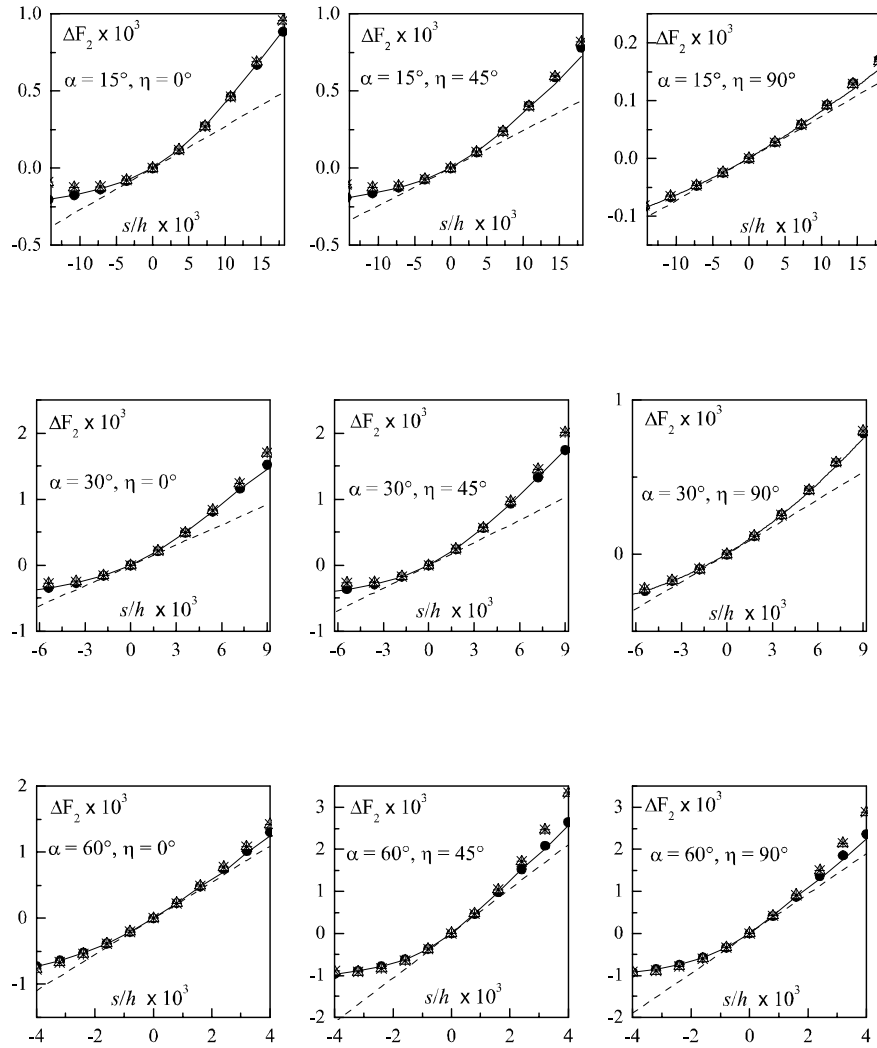


Tabella 2.4: Variazione della forza verticale adimensionale di interazione strallo-struttura rispetto allo spostamento adimensionale dell'estremo liberoP

Capitolo 3

Un modello quasi-secante per i ponti strallati di grande luce

A partire dal modello “quasi-secante” del singolo strallo sviluppato in [2] e descritto nel precedente capitolo, dove il comportamento del singolo strallo è modellato mediante uno sviluppo del secondo ordine sia rispetto alla variazione di tensione nel cavo $\Delta\sigma$ che alla variazione di deformazione apparente $\Delta\varepsilon$ valutata lungo la sua corda, l’interazione fra le cortine di stralli e la travata è caratterizzata in forma esplicita attraverso un approccio al secondo ordine negli spostamenti. Considerando poi per la travata una risposta flessionale e torsionale rispettivamente alla Eulero-Bernoulli ed alla De Saint Venant, in questo capitolo si descrive un modello continuo non lineare in grado di descrivere il comportamento statico globale dei ponti strallati di grande luce con schema a ventaglio e pile ad H [15].

Lo schema di ponte che si esamina è ancora quello mostrato in Fig. 1.1 mentre la notazione e le ipotesi precisate nel capitolo 1 conducono alle equazioni di governo del problema flessio-torsionale del ponte 1.1-1.4.

In dettaglio, assumendo valide le ipotesi di Dischinger, cioè elevati livelli di tensione per i cavi e piccolo rapporto tra la loro tensione ammissibile σ_a ed il modulo di Young E_c del materiale che li costituisce, si perviene al seguente legame costitutivo apparente per lo strallo:

$$\Delta\sigma = E_{td}^* \frac{\Delta\varepsilon}{1 - \Delta E_{sd} \Delta\varepsilon}, \quad \text{con} \quad \Delta E_{sd} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial E_{td}^*}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_g} = \frac{3}{2} \frac{E_{td}^*}{\sigma_g} \left(1 - \frac{E_{td}^*}{E_c} \right) \quad (3.1)$$

In riferimento alla notazione introdotta in Fig. 1.3 e considerando d’ora in

avanti grandezze vettoriali definite nel piano (y, z) , il generico strallo subisce, per effetto dello spostamento dell'impalcato rispetto alla testa del pilone, una variazione di configurazione descritta attraverso il vettore di spostamento relativo \mathbf{d} fra il punto P ed il punto O . Detta A_c l'area della sezione trasversale del cavo ed assumendo una misura logaritmica per la deformazione apparente $\Delta\varepsilon$, il vettore forza \mathbf{f} che lo strallo esercita sull'impalcato si scrive, trascurando contributi di ordine superiore al secondo nelle componenti di spostamento, come [2]

$$\mathbf{f} = -A_c E_{td}^* \frac{\beta}{h} \left\{ \mathbf{d}^{\parallel} + \frac{\beta}{h} \left[\left(\frac{|\mathbf{d}^{\perp}|^2 - |\mathbf{d}^{\parallel}|^2}{2} + \Delta E_{sd} |\mathbf{d}^{\parallel}|^2 \right) \mathcal{I}^{(2)} + (\mathbf{d}^{\perp} \otimes \mathbf{d}) \right] \mathbf{c} \right\} \quad (3.2)$$

essendo $\mathbf{c} = \beta(1, \zeta)^T$ il versore di corda nella configurazione di riferimento, $\beta = (1 + \zeta^2)^{-1/2} = \sin \alpha$, $\mathcal{I}^{(2)}$ il tensore identità di ordine due nel piano e \mathbf{d}^{\perp} , \mathbf{d}^{\parallel} i vettori componenti di \mathbf{d} ortogonale e, rispettivamente, parallelo a \mathbf{c} :

$$\mathbf{d}^{\parallel} = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \mathbf{d}, \quad \mathbf{d}^{\perp} = ({}^{(2)} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \mathbf{d} \quad (3.3)$$

In riferimento ai parametri di spostamento che caratterizzano la configurazione attuale del ponte (cf. Fig. 1.2), il vettore spostamento \mathbf{d} che induce la variazione di configurazione del generico strallo può porsi nella forma 1.10.

Tenendo conto della () e dell'effetto di entrambe le cortine di stralli, lo sviluppo della (3.2) conduce alle seguenti espressioni (nelle quali per brevità si è ommesso il pedice \wp) delle azioni di interazione stralli-travata:

$$q_{cv}(\zeta) = -\frac{2E_c A_c}{\Delta} \varphi \beta \{ V - \zeta (U \mp W) + \quad (3.4)$$

$$+ \eta_1 (V^2 + \delta^2 \theta^2) + \eta_2 [(U \mp W)^2 + \Psi^2 \delta^2] + \\ - 2\eta_3 [V (U \mp W) + \delta^2 \theta \Psi] \}$$

$$q_{co}(\zeta) = \frac{2E_c A_c}{\Delta} \varphi \beta \{ \mp \zeta V - \zeta^2 (W \mp U) + \quad (3.5)$$

$$- 2\eta_2 [V (W \mp U) \mp \delta^2 \theta \Psi] \mp \eta_3 (V^2 + \delta^2 \theta^2) \\ \mp \eta_4 [(W \mp U)^2 + \delta^2 \Psi^2] \}$$

$$m_{cz}(\zeta) = \frac{2E_c A_c b}{\Delta} \varphi \beta \delta \{ \zeta \Psi - \theta + \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& -2\eta_1 V\theta - 2\eta_2 \Psi (U \mp W) + 2\eta_3 [\theta (U \mp W) + V\Psi] \\
m_{cy}(\zeta) &= \frac{2E_c A_c b}{\Delta} \varphi \beta \delta \{ \zeta^2 \Psi - \zeta \theta + \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\eta_2 [\theta (U \mp W) + V\Psi] - 2\eta_3 V\theta - 2\eta_4 \Psi (U \mp W) \\
S_o = \Sigma_o \{ & -2(W \mp U) \mp \tan \alpha_o \Xi_o [(W \mp U)^2 + \delta^2 \Psi^2] \} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$M_o = 2\Sigma_o \delta b \Psi \{ 1 - \tan \alpha_o (U \mp W) \Xi_o \} \quad (3.9)$$

dove il pedice 'o' denota quantità riferite agli stralli di ormeggio ed avendo introdotto le seguenti quantità:

$$\eta_1(\zeta) = \frac{\beta^2}{2} (3\zeta^2 - 1 + 2\Delta E_{sd}), \quad \eta_2(\zeta) = \frac{\beta^2}{2} (1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^2 \Delta E_{sd}), \quad (3.10)$$

$$\eta_3(\zeta) = \frac{\beta^2 \zeta}{2} (\zeta^2 - 3 + 2\Delta E_{sd}), \quad \eta_4(\zeta) = \frac{\beta^2 \zeta}{2} (3 - \zeta^2 + 2\zeta^2 \Delta E_{sd}), \quad (3.11)$$

$$\Sigma_o = E_{tdo}^* A_{co} \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o, \quad \Xi_o = [\cos^2 \alpha_o (1 - 2\Delta E_{sd}) - 3 \sin^2 \alpha_o] \quad (3.12)$$

Assumendo in ciò che segue che il dimensionamento degli stralli sia tale che σ_g risulti costante lungo l'asse dell'impalcato ed utilizzando le (3.4–3.9) e le posizioni (1.20), le equazioni di governo del problema statico flessor-torsionale (1.1–1.4) si pongono nella seguente forma adimensionale:

$$\frac{\varepsilon^4}{4} V^{IV} + e\varphi \{ V - \zeta (U \mp W) + \eta_1 (V^2 + \delta^2 \theta^2) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_2 [(W \mp U)^2 + \delta^2 \Psi^2] - 2\eta_3 [V (U \mp W) + \delta^2 \Psi \theta] \} = P \\
\tau^2 \theta^{II} + \varphi \{ \zeta \Psi - \theta - 2\eta_1 V\theta - 2\eta_2 \Psi (U \mp W) + 2\eta_3 [\theta (U \mp W) + V\Psi] \} &= -\mu \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho W \mp (\rho + \chi) U \mp \left\{ - \int_{\varphi} \varphi (\zeta V + \eta_3 V^2) d\zeta + \right. \\
& + 2\delta^2 \Psi \int_{\varphi} \varphi \eta_2 \theta d\zeta - \delta^2 \int_{\varphi} \varphi \eta_3 \theta^2 d\zeta - \tilde{\rho} [(W \mp U)^2 + \delta^2 \Psi^2] \left. \right\} \\
& + 2(W \mp U) \int_{\varphi} \varphi \eta_2 V d\zeta = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi} \varphi \zeta \theta d\zeta - (\rho + \chi) \Psi + 2(U \mp W) \left[\tilde{\rho} \Psi - \int_{\varphi} \varphi \eta_2 \theta d\zeta \right] + \\
& - 2\Psi \int_{\varphi} \varphi \eta_2 V d\zeta + 2 \int_{\varphi} \varphi \eta_3 V \theta d\zeta = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

avendo introdotto le seguenti quantità adimensionali:

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_o &= \frac{\sigma_g \tan \alpha_o}{E_c q_g h} \Sigma_o \Xi_o, \\
\tilde{\rho} &= \int_{\varphi} \varphi \eta_4 d\zeta + \tilde{\chi}_o
\end{aligned} \tag{3.17}$$

E' appena il caso di osservare che l'eliminazione dei contributi al secondo ordine negli spostamenti nelle equazioni integro-differenziali (3.13–3.16) conduce alle equazioni di governo del problema flesso-torsionale proposte in [1], ottenute attraverso l'applicazione della teoria tangente di Dischinger. Inoltre, mentre nel caso di un approccio al primo ordine negli spostamenti il problema flessionale è totalmente disaccoppiato da quello torsionale, ciò non accade nel caso dell'approccio "quasi-secante". L'analisi delle (3.13–3.16) mostra infatti che, mentre è possibile avere una condizione di flessione pura (che coinvolge gli spostamenti V , U e W) senza attivare il problema torsionale (i.e. senza attivare θ e Ψ), non è in generale vero il contrario.

Si consideri ora uno spazio vettoriale a 4 dimensioni \mathcal{V} e si indichino con \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, 4$) i versori di una sua base ortonormale. Possono allora introdursi, raccogliendo le incognite di spostamento del problema in esame, i seguenti vettori $\mathbf{S}(\zeta)$, $\mathbf{s} \in \mathcal{V}$:

$$\mathbf{S}(\zeta) = (V_S, V_D, \theta_S, \theta_D)^T, \quad \mathbf{s} = (W, U, \Psi_S, \Psi_D)^T \tag{3.18}$$

Le equazioni (3.13–3.14) e (3.15–3.16) possono allora risciversi in forma compatta, rispettivamente, come:

$$\mathcal{D}[\mathbf{S}] + \varphi \{ \mathcal{A}[\mathbf{S}] - \zeta \mathcal{B}[\mathbf{s}] + \eta_1 \mathbb{A}[\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}] + \eta_2 \mathbb{B}[\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}] - 2\eta_3 \mathbb{D}[\mathbf{S} \otimes \mathbf{s}] \} = \mathbf{F} \quad (3.19)$$

$$\int_{\wp} \varphi \zeta \mathbf{S} d\zeta - \mathcal{C}[\mathbf{s}] + \int_{\wp} \varphi \eta_3 \mathbb{G}[\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}] d\zeta + \tilde{\rho} \mathcal{C}[\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}] - 2 \int_{\wp} \varphi \eta_2 \mathbb{H}[\mathbf{S} \otimes \mathbf{s}] d\zeta = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

avendo introdotto il vettore adimensionale dei carichi $\mathbf{F} = P(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{e}_\alpha + \mu(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}) \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$ ed i seguenti tensori del secondo (e.g. \mathcal{A}) e terzo (e.g. \mathbb{A}) ordine:

$$\mathcal{D}[\cdot] = \frac{\varepsilon^4}{4} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha - \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}, \quad \mathcal{A} = e \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{B} = e \omega_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{C} = \omega_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta + \chi \omega_{2\alpha} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_2 + (\rho + \chi) \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{Y} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbb{J} = \delta^2 \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*}, \quad \mathbb{K} = \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes [\mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*}] \quad (3.24)$$

$$\mathbb{N} = \bar{\omega}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma, \quad \mathbb{Q} = \delta^2 \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*}, \quad (3.25)$$

$$\mathbb{P} = \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes [\mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \otimes (\mathbf{e}_2 - \hat{\omega}_{\bar{\alpha}} \mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_2 - \hat{\omega}_{\bar{\alpha}} \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}], \quad (3.26)$$

$$\mathbb{M} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha \otimes (\mathbf{e}_2 - \hat{\omega}_{\alpha^*} \mathbf{e}_1), \quad \mathbb{T} = \delta^2 \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*}, \quad (3.27)$$

$$\mathbb{L} = \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes [\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_{\alpha^*} + \mathbf{e}_{\alpha^*} \otimes (\mathbf{e}_2 - \hat{\omega}_{\alpha^*} \mathbf{e}_1)] \quad (3.28)$$

$$\mathbb{A} = e(\mathbb{Y} + \mathbb{J}) + \mathbb{K}, \quad \mathbb{B} = e(\mathbb{N} + \mathbb{Q}) + \mathbb{P}, \quad \mathbb{D} = e(\mathbb{M} + \mathbb{T}) + \mathbb{L}, \quad (3.29)$$

$$\mathbb{G} = \mathbb{Y} + \mathbb{J} + \mathbb{K}, \quad \mathbb{C} = \mathbb{N} + \mathbb{Q} + \mathbb{P}, \quad \mathbb{H} = \mathbb{M} + \mathbb{T} + \mathbb{L} \quad (3.30)$$

dove $\alpha^* = \alpha + 2$ e valendo le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\alpha\alpha\alpha} = \bar{\omega}_{\alpha\beta\beta} = \bar{\omega}_{212} = \bar{\omega}_{221} = -\bar{\omega}_{112} = -\bar{\omega}_{121} = \\ = \omega_{\alpha 2} = \omega_{2\alpha} = -\omega_{11} = \hat{\omega}_3 = -\hat{\omega}_4 = 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

In termini di notazione, si considerano le seguenti posizioni: gli indici ripetuti si intendono soddisfare la convenzione di somma alla Einstein, gli indici latini variano in $\{1, 2, 3, 4\}$, gli indici greci variano in $\{1, 2\}$, gli indici greci soprasegnati variano in $\{3, 4\}$, i contributi integrali nella (3.20) sono da intendersi estesi alla parte sinistra o destra dell'impalcato a seconda che coinvolgano incognite a pedice S o D .

La soluzione esatta del sistema di equazioni integro-differenziali (3.19–3.20) non può essere valutata in modo agevole. Ad ogni modo, è possibile ricavare una soluzione approssimata osservando che nel caso di ponti di grande luce i parametri adimensionali ε e τ , che occorrono nella definizione dell'operatore differenziale \mathcal{D} , sono piccoli rispetto all'unità. Essi infatti rappresentano una misura del rapporto tra la rigidità della travata e quella offerta dalle cortine di stralli in relazione al comportamento flessionale e, rispettivamente, a quello torsionale. In dettaglio, generalmente risulta $\varepsilon < 0.3$, $\tau < 0.1$ e tali parametri sono tanto più piccoli quanto maggiore è la luce ℓ . Pertanto, nel caso di grandi luci i contributi $\mathcal{D}[\mathbf{S}]$ possono ritenersi trascurabili, cioè si può ipotizzare per la struttura un comportamento prevalentemente reticolare, attribuendo agli effetti flessionali e torsionali della travata una natura prettamente locale [1].

3.1 La soluzione reticolare

Si consideri il problema reticolare tangente al primo ordine nelle componenti di spostamento

$$\varphi \mathcal{A}[\mathbf{S}] - \zeta \varphi \mathcal{B}[\mathbf{s}] = \mathbf{F}, \quad \int_{\wp} \varphi \zeta \mathbf{S} d\zeta - \mathcal{C}\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

e sia $\{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{s}}\}$ la corrispondente soluzione:

$$\bar{\mathbf{S}}(\zeta) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi} \mathbf{F} + \zeta \mathcal{B}[\bar{\mathbf{s}}] \right\}, \quad \bar{\mathbf{s}} = \left\{ \mathcal{C} - \int_{\wp} \zeta \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} d\zeta \right\}^{-1} \left[\int_{\wp} \frac{1}{\varphi} \mathcal{A}^{-1} \mathbf{F} d\zeta \right] \quad (3.33)$$

La soluzione reticolare $\{\mathbf{S}^{(o)}, \mathbf{s}^{(o)}\}$ del problema “quasi-secante” può allora porsi nella forma:

$$\mathbf{S}^{(o)}(\zeta) = \bar{\mathbf{S}}(\zeta) + \Delta \mathbf{S}(\zeta), \quad \mathbf{s}^{(o)} = \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s} \quad (3.34)$$

avendo indicato con $\{\Delta \mathbf{S}, \Delta \mathbf{s}\}$ un contributo perturbativo rispetto a $\{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{s}}\}$. Com'è stato provato in [1], la soluzione al primo ordine $\bar{\mathbf{S}}$ è dello stesso ordine di grandezza sia di $\bar{\mathbf{s}}$ che di \mathbf{F} . Pertanto, è lecito assumere che anche $\Delta \mathbf{S}$ sia dello stesso ordine di $\Delta \mathbf{s}$ ed inoltre che ciascun contributo perturbativo sia piccolo rispetto alle componenti di $\{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{s}}\}$:

$$\left| \frac{\Delta S_i}{\bar{S}_j} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta s_i}{\bar{S}_j} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta S_i}{\bar{s}_j} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta s_i}{\bar{s}_j} \right| \ll 1 \quad (3.35)$$

Sostituendo la (3.34) nelle (3.19–3.20) e trascurando sia il termine differenziale $\mathcal{D}[\mathbf{S}]$ che i termini infinitesimi di ordine superiore al primo nei contributi perturbativi, si perviene al seguente sistema lineare in $\{\Delta \mathbf{S}, \Delta \mathbf{s}\}$:

$$\mathcal{H}_1[\Delta \mathbf{S}] + \mathcal{H}_2[\Delta \mathbf{s}] = \mathbf{y}_1 \quad (3.36)$$

$$\int_{\wp} \mathcal{H}_3[\Delta \mathbf{S}] d\zeta + \mathcal{H}_4[\Delta \mathbf{s}] = \mathbf{y}_2 \quad (3.37)$$

avendo definito

$$\mathcal{H}_1(\zeta) = \varphi \{ \mathcal{A} + \eta_1 (\mathbb{A} \bar{\mathbf{S}} + \mathbb{A} \odot \bar{\mathbf{S}}) - 2\eta_3 \mathbb{D} \bar{\mathbf{s}} \} \quad (3.38)$$

$$\mathcal{H}_2(\zeta) = -\varphi \{ \zeta \mathcal{B} - \eta_2 (\mathbb{B} \bar{\mathbf{s}} + \mathbb{B} \odot \bar{\mathbf{s}}) + 2\eta_3 \mathbb{D} \odot \bar{\mathbf{S}} \} \quad (3.39)$$

$$\mathcal{H}_3(\zeta) = \varphi \{ \zeta \mathcal{I}^{(4)} - 2\eta_2 \mathbb{H} \bar{\mathbf{s}} + \eta_3 (\mathbb{G} \bar{\mathbf{S}} + \mathbb{G} \odot \bar{\mathbf{S}}) \} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{H}_4(\zeta) = -\mathcal{C} + \tilde{\rho} (\mathbb{C} \bar{\mathbf{s}} + \mathbb{C} \odot \bar{\mathbf{s}}) - 2 \int_{\varphi} \varphi \eta_2 \mathbb{H} \odot \bar{\mathbf{S}} d\zeta \quad (3.41)$$

$$\mathbf{y}_1(\zeta) = -\varphi \{ \eta_1 \mathbb{A} [\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{S}}] + \eta_2 \mathbb{B} [\bar{\mathbf{s}} \otimes \bar{\mathbf{s}}] - 2\eta_3 \mathbb{D} [\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{s}}] \} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_2(\zeta) = \int_{\varphi} \varphi \{ 2\eta_2 \mathbb{H} [\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{s}}] - \eta_3 \mathbb{G} [\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{S}}] \} d\zeta - \tilde{\rho} \mathbb{C} [\bar{\mathbf{s}} \otimes \bar{\mathbf{s}}] \quad (3.43)$$

dove $\mathcal{I}^{(4)}$ è il tensore identità del secondo ordine riferito allo spazio vettoriale \mathcal{V} ed avendo introdotto la seguente notazione: $(\mathbb{A} \bar{\mathbf{S}})_{ij} = (\mathbb{A})_{ijk} \bar{S}_k$, $(\mathbb{A} \odot \bar{\mathbf{S}})_{ij} = (\mathbb{A})_{ikj} \bar{S}_k$.

La soluzione del sistema (3.36–3.37) conduce alla determinazione dei contributi correttivi

$$\Delta \mathbf{S}(\zeta) = \mathcal{H}_1^{-1} (\mathbf{y}_1 - \mathcal{H}_2 [\Delta \mathbf{s}]) \quad (3.44)$$

$$\Delta \mathbf{s} = \left(\mathcal{H}_4 - \int_{\varphi} \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_1^{-1} \mathcal{H}_2 d\zeta \right)^{-1} \left(\mathbf{y}_2 - \int_{\varphi} \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_1^{-1} \mathbf{y}_1 d\zeta \right) \quad (3.45)$$

i quali, attraverso le (3.33–3.34), consentono di determinare la soluzione reticolare “quasi-secante”.

3.2 Ripristino della compatibilità

Poichè il vettore adimensionale dei carichi esterni $\mathbf{F}(\zeta)$ è in generale variabile in modo arbitrario con ζ , la soluzione reticolare $\{\mathbf{S}^{(o)}(\zeta), \mathbf{s}^{(o)}\}$ può violare le condizioni di congruenza. Al fine di ristabilirla, è possibile procedere ancora attraverso un approccio perturbativo. In particolare, la soluzione completa del problema (3.19–3.20) può approssimarsi come:

$$\mathbf{S}(\zeta) = \mathbf{S}^{(o)}(\zeta) + \widehat{\mathbf{S}}(\zeta), \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{s}} \quad (3.46)$$

dove i contributi perturbativi $\{\widehat{\mathbf{S}}, \widehat{\mathbf{s}}\}$ soddisfano il seguente problema integro-differenziale non lineare ed omogeneo

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}[\widehat{\mathbf{S}}] + \varphi \{ \mathcal{A}[\widehat{\mathbf{S}}] - \zeta \mathcal{B}[\widehat{\mathbf{s}}] + \\
 & + \eta_1 \mathbb{A}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{S}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{S}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{S}}] + \eta_2 \mathbb{B}[\mathbf{s}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] \\
 & - 2\eta_3 \mathbb{D}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] \} = \mathbf{0} \\
 & \int_{\varphi} \varphi \zeta \widehat{\mathbf{S}} d\zeta - \mathcal{C}[\widehat{\mathbf{s}}] + \int_{\varphi} \varphi \eta_3 \mathbb{G}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{S}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{S}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{S}}] d\zeta \\
 & + \tilde{\rho} \mathbb{C}[\mathbf{s}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] \\
 & - 2 \int_{\varphi} \varphi \eta_2 \mathbb{H}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] d\zeta = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi} \varphi \zeta \widehat{\mathbf{S}} d\zeta - \mathcal{C}[\widehat{\mathbf{s}}] + \int_{\varphi} \varphi \eta_3 \mathbb{G}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{S}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{S}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{S}}] d\zeta \\
 & + \tilde{\rho} \mathbb{C}[\mathbf{s}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{s}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] \\
 & - 2 \int_{\varphi} \varphi \eta_2 \mathbb{H}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{s}^{(o)} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \widehat{\mathbf{s}}] d\zeta = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Nell'ipotesi, in generale soddisfatta, in cui $\delta = b/h \ll 1$, è possibile, a meno di termini in δ^2 , porre (cf. (3.24–3.30)) $\mathbb{A} \cong e\mathbb{Y} + \mathbb{K}$, $\mathbb{G} \cong \mathbb{Y} + \mathbb{K}$, $\mathbb{C} \cong \mathbb{N} + \mathbb{P}$, $\mathbb{B} \cong e\mathbb{N} + \mathbb{P}$, $\mathbb{D} \cong e\mathbb{M} + \mathbb{L}$ e $\mathbb{H} \cong \mathbb{M} + \mathbb{L}$. Inoltre, assumendo trascurabili i contributi quadratici nei termini perturbativi $\widehat{\cdot}$ e seguendo l'approccio risolutivo dello schema di trave su fondazione elastica, è possibile ricavare la seguente soluzione approssimata per il sistema (3.47–3.48):

$$\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \tag{3.49}$$

$$\widehat{V}_{\varphi}(\zeta) = e^{(\mp 1 \mp I)f_{\varphi}(\zeta)} \tag{3.50}$$

$$\widehat{\theta}_{\varphi}(\zeta) = e^{\mp g_{\varphi}(\zeta)} - 2 \frac{\eta_1 \theta_{\varphi}^{(o)} - \eta_3 \Psi_{\varphi}^{(o)}}{\Gamma_{\varphi}} \widehat{V}_{\varphi} \tag{3.51}$$

dove I indica l'unità immaginaria ed avendo posto

$$f_{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\zeta} (e \varphi \Gamma_{\varphi})^{1/4} d\zeta, \quad g_{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\zeta} (\varphi \Gamma_{\varphi})^{1/2} d\zeta \tag{3.52}$$

$$\Gamma_{\varphi}(\zeta) = 1 + 2\eta_1 V_{\varphi}^{(o)} + 2\eta_3 (U_{\varphi}^{(o)} \mp W_{\varphi}^{(o)}) \tag{3.53}$$

Nello spirito delle approssimazioni dette, le (3.49–3.51) soddisfano il problema (3.47–3.48) a meno di contributi dell'ordine di $\epsilon = \varepsilon(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\alpha})\mathbf{e}_{\alpha} + \tau(\mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\alpha}})\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$ e pertanto risultano applicabili per $|\epsilon| \ll 1$, i.e. per ponti strallati di

grande luce. Infatti, sfruttando la condizione (3.49) e le ipotesi di trascurabilità dei termini quadratici in $\widehat{\cdot}$ e dei contributi in δ^2 , è possibile scrivere l'equazione vettoriale (3.47) per componenti, nella forma:

$$\frac{\varepsilon^4}{4} \widehat{V}_\varphi^{IV} + e\varphi \Gamma_\varphi \widehat{V}_\varphi = 0 \quad (3.54)$$

$$\tau^2 \widehat{\theta}^{II} - \varphi \Gamma_\varphi \widehat{\theta}_\varphi - 2\varphi \left[\eta_1 \theta_\varphi^{(o)} - \eta_3 \Psi_\varphi^{(o)} \right] \widehat{V}_\varphi = 0 \quad (3.55)$$

Si noti che il problema perturbato flessionale (in \widehat{V}_φ) nella sua forma approssimata appare disaccoppiato da quello torsionale (in $\widehat{\theta}_\varphi$). Inserendo la (3.50) nella (3.54) è possibile verificare che

$$\frac{\varepsilon^4}{4} \widehat{V}_\varphi^{IV} = \widehat{V}_\varphi [-e\varphi \Gamma_\varphi + O(\varepsilon)] \quad (3.56)$$

Il contributo in \widehat{V}_φ nella (3.55) può allora riguardarsi come termine noto di un'equazione differenziale lineare di ordine due a coefficienti variabili, la cui soluzione può ricavarsi come somma della soluzione relativa all'equazione omogenea $\widehat{\theta}_0(\zeta)$, più una soluzione particolare $\widehat{\theta}_1(\zeta)$. Quest'ultima, nello spirito di approssimazione reticolare, può porsi pari a $\widehat{\theta}_0(\zeta) = -2(\eta_1 \bar{\theta} - \eta_3 \bar{\Psi}) \widehat{V}/\Gamma$ mentre, per verificare la forma omogenea della (3.55), la prima si pone pari a $\widehat{\theta}_1(\zeta) = e^{\mp g(\zeta)}$ (cf. (3.52)).

Infine, in virtù delle approssimazioni introdotte, è possibile verificare, in modo del tutto analogo a quanto proposto in [1], che vale la seguente condizione

$$\int_\varphi \varphi \zeta \widehat{\mathbf{S}} d\zeta + \int_\varphi \varphi \eta_3 \mathbb{G}[\mathbf{S}^{(o)} \otimes \widehat{\mathbf{S}} + \widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{S}^{(o)}] d\zeta - 2 \int_\varphi \varphi \eta_2 \mathbb{H}[\widehat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{s}^{(o)}] d\zeta = O(\varepsilon) \quad (3.57)$$

Pertanto, a meno di contributi trascurabili dell'ordine di ε e τ , la (3.48) si riduce al seguente sistema omogeneo lineare non singolare in $\widehat{\mathbf{s}}$:

$$\left\{ \mathcal{C} - \tilde{\rho} (\mathbb{C} \odot \mathbf{s}^{(o)} + \mathbb{C} \mathbf{s}^{(o)}) + 2 \int_\varphi \varphi \eta_2 \mathbb{H} \odot \mathbf{S}^{(o)} d\zeta \right\} \widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

che ammette come unica soluzione quella banale, i.e. $\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$.

In definitiva, a meno di contributi dell'ordine di ε , risulta verificato che le (3.49–3.51) soddisfano il problema perturbato (3.47–3.48) e quindi, nello spirito delle approssimazioni adottate, la soluzione completa del problema flessio-torsionale “quasi-secante” (3.19–3.20) risulta:

$$V_\varphi(\zeta) = V_\varphi^{(o)}(\zeta) + (c_{1\varphi}e^{-f_\varphi(\zeta)} + c_{2\varphi}e^{f_\varphi(\zeta)}) \sin f_\varphi(\zeta) + \quad (3.59)$$

$$+ (c_{3\varphi}e^{-f_\varphi(\zeta)} + c_{4\varphi}e^{f_\varphi(\zeta)}) \cos f_\varphi(\zeta)$$

$$\theta_\varphi(\zeta) = c_{5\varphi}e^{-g_\varphi(\zeta)} + c_{6\varphi}e^{g_\varphi(\zeta)} + \theta_\varphi^{(o)}(\zeta) \quad (3.60)$$

$$W = W^{(o)}, \quad U_\varphi = U^{(o)}, \quad \Psi_\varphi = \Psi_\varphi^{(o)} \quad (3.61)$$

dove $c_{i\varphi}$ (con $i = 1, \dots, 6$ e $\varphi = S, D$) sono le dodici costanti di integrazione da determinare imponendo le condizioni al contorno di natura statica e cinematica, rispettivamente per la parte sinistra e destra della struttura.

Si vuole osservare che la soluzione approssimata “quasi-secante” (3.59–3.61) si riduce a quella tangente al primo ordine ottenuta in [1] eliminando tutti i termini di ordine superiore al primo nelle incognite di spostamento. In questo caso, infatti, $\eta_i \rightarrow 0$, $\Gamma_\varphi \rightarrow 1$, $\mathbf{y}_\alpha \rightarrow \mathbf{0}$ e quindi $\Delta\mathbf{S}, \Delta\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$. Pertanto, risulta:

$$\{\mathbf{S}^{(o)}, \mathbf{s}^{(o)}\} \rightarrow \{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{s}}\}, \quad \widehat{\mathbf{S}} \rightarrow \widehat{\mathbf{S}}_t \quad (3.62)$$

essendo $\widehat{V}_t(\zeta) = e^{(\mp 1 \mp I)f_t(\zeta)}$ e $\widehat{\theta}_t(\zeta) = e^{\mp g_t(\zeta)}$, con

$$f_t(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\zeta (e\varphi)^{1/4} d\zeta, \quad g_t(\zeta) = \frac{1}{\tau} \int_0^\zeta (\varphi)^{1/2} d\zeta \quad (3.63)$$

Capitolo 4

Validazioni e confronti

Le soluzioni approssimate fornite nelle precedenti sezioni possono essere applicate per valutare il comportamento statico del ponte strallato tenendo conto del termine di rotazione finita della corda degli stralli e del contributo di raffinamento costitutivo nella modellazione della risposta elastica dei cavi mediante l'approccio quasi secante al secondo ordine negli spostamenti. Innanzitutto si considera il caso di un carico mobile uniformemente distribuito sulla campata centrale del ponte e perfettamente centrato (i.e. $x = 0$). Quindi si analizzerà l'effetto di una eccentricità di tale carico. In dettaglio, considerando diversi valori per i parametri $r_1 = \ell/(2h)$ e $r_2 = \ell_0/h$, lo schema di ponte strallato cui si fa riferimento è caratterizzato dalle seguenti quantità:

$$k/q_g = 50, \quad \sigma_a/E_c = 7200/2.1 \times 10^6, \quad h/\Delta = 10, \quad e = 1, \quad \delta = 0.075, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = 0.167, \quad \tau = 0.11, \quad p/q_g = 1, \quad \gamma_c = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad (4.2)$$

Nelle figure 4.1-4.2-4.3 vengono confrontate al variare della ascissa adimensionale ζ la deformata flessionale che è possibile calcolare attraverso l'approccio tangente lineare e quello quasi secante quadratico rispetto ai corrispondenti valori forniti mediante l'approccio secante che impiega una misura di deformazione logaritmica. In dettaglio si distinguono il contributo reticolare e l'abbassamento congruente forniti mediante i diversi approcci.

Dai precedenti diagrammi se ne deduce che la natura locale del contributo correttivo viene mantenuta ed anzi accentuata nell'approccio quasi secante. Il comportamento sostanzialmente reticolare della struttura viene pertanto confermato. La rigidezza flessionale della struttura appare maggiore osservando l'andamento della deformata quasi-secante rispetto a quella tangente

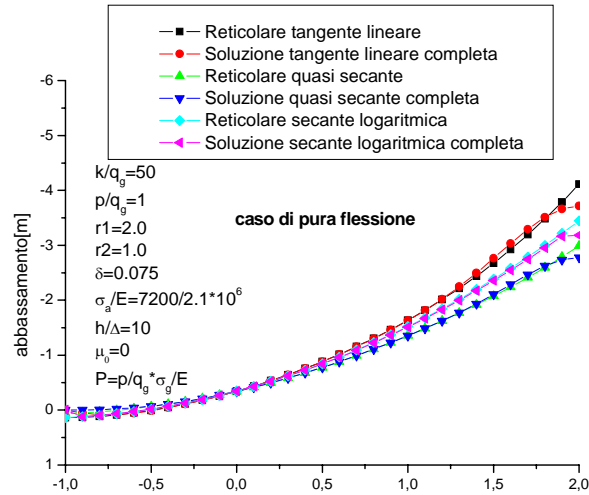


Figura 4.1: Confronti tra i modelli tangente lineare, quasi-secante quadratico, secante logaritmico in termini di deformate flessionali per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2$).

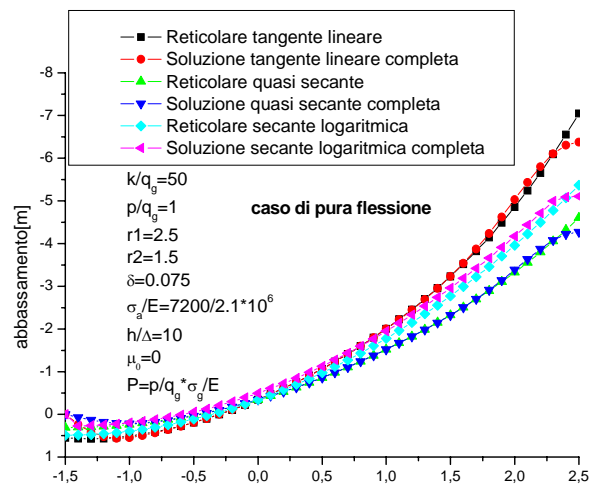


Figura 4.2: Confronti tra i modelli tangente lineare, quasi-secante quadratico, secante logaritmico in termini di deformate flessionali per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2.5$).

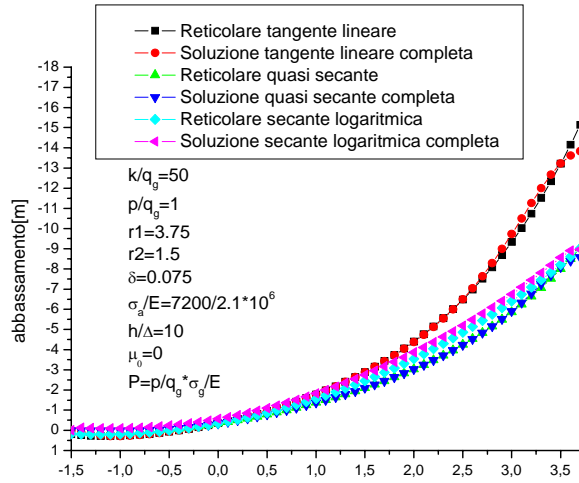


Figura 4.3: Confronti tra i modelli tangente lineare, quasi-secante quadratico, secante logaritmico in termini di deformate flessionali per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 3.75$).

lineare. Ciò è in accordo con quanto mostrato nelle analisi del comportamento del singolo strallo, che risultavano a parità di spostamento imposto maggiormente sollecitati, quando si teneva conto dei raffinamenti cinematico e costitutivo.

Va sottolineato che l’analisi precedentemente svolta sul comportamento statico del singolo cavo trova riscontro nel fatto che la correzione del modello quasi-secante rispetto a quello tangente lineare sulla freccia in mezzeria cresce all’aumentare del parametro r_1 , ossia all’aumentare dell’inclinazione degli stralli.

Dal punto di vista fisico pertanto, a parità di carico flessionale uniformemente applicato sulla campata centrale del ponte, le sollecitazioni assorbite dai cavi risultano sottovalutate dall’approccio tangente lineare. Il maggior cimento degli stralli si riflette sul livello inferiore delle sollecitazioni flessionali assorbite dalla travata calcolabili mediante il modello quasi secante.

A tal proposito il modello tangente lineare e quello quasi secante si confrontano in base all’andamento del momento flettente rispetto all’ascissa adimensionale ζ .(cfr. figure 4.4-4.5-4.6).

Allo scopo di mettere in evidenza il peso del ruolo svolto dal raffinamento costitutivo sulla deformata flessionale del ponte è interessante diagrammare in funzione dell’ascissa adimensionale ζ i soli contributi reticolari, che d’altra parte contengono la sostanza delle informazioni. Nelle figure (4.7-4.8-4.9) si confrontano i contributi reticolari delle deformate flessionali che è possibile

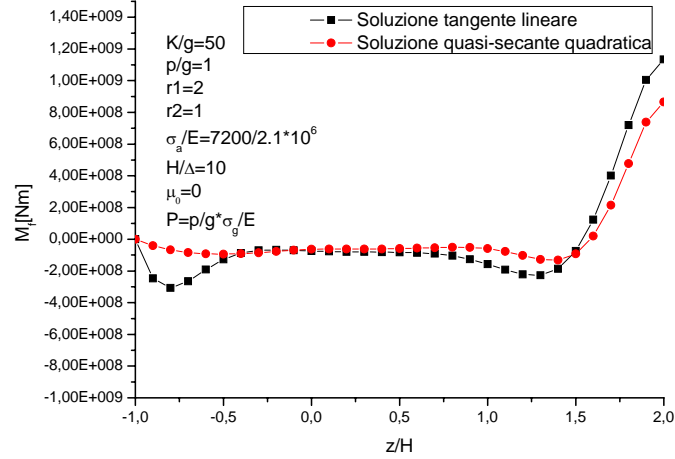


Figura 4.4: Confronti tra il modello tangente lineare ed il modello Quasi-secante quadratico in termini di momento flettente agente sulla travata per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2$)

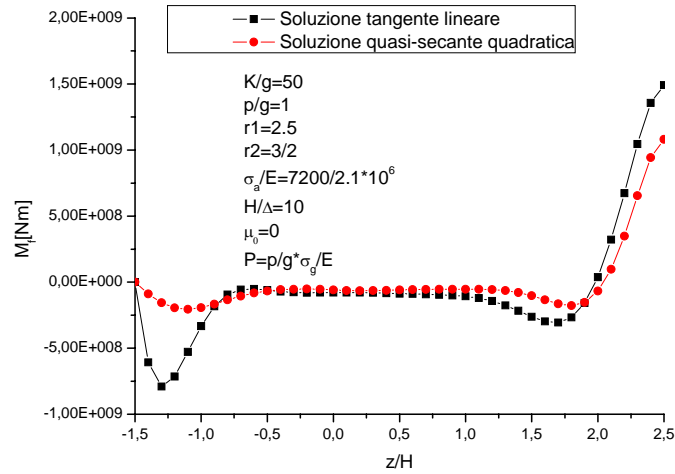


Figura 4.5: Confronti tra il modello tangente lineare ed il modello quasi-secante quadratico in termini di momento flettente agente sulla travata per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2.5$)

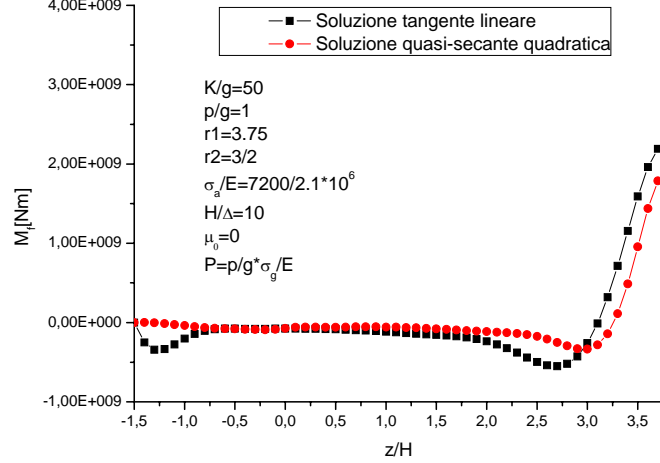


Figura 4.6: Confronti tra il modello tangente lineare ed il modello quasi secante quadratico in termini di momento flettente agente sulla travata per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 3.75$)

ottenere impiegando l'approccio tangente lineare negli spostamenti, l'approccio tangente quadratico negli spostamenti ed il modello quasi secante. Vale la pena ricordare che in accordo con quanto discusso precedentemente il modello tangente quadratico negli spostamenti è ottenibile da quello quasi-secante ponendo $\Delta E_{sd} = 0$. In altri termini in questo caso la risposta elastica dei cavi si arricchisce del solo raffinamento cinematico.

Appare evidente che i due contributi di raffinamento della risposta elastica degli stralli si riflettono sulla risposta flessionale dell'intera struttura in modo tale che sia più il raffinamento costitutivo piuttosto che il raffinamento cinematico a svolgere l'azione correttiva prevalente per ordinari valori del parametro r_1 . D'altra parte tenere conto del progressivo irrigidimento degli stralli con l'incremento della loro deformazione apparente perde di importanza quando gli stralli tendono a diventare orizzontali. In altri termini, al crescere di r_1 , il raffinamento cinematico assume progressivamente maggiore importanza nel correggere la deformata flessionale che il modello tangente lineare è in grado di calcolare.

Si vuole ora affrontare il caso di un carico eccentrico uniformemente distribuito sulla campata centrale. Ne deriva la presenza di un carico torcente anch'esso pensato agente uniformemente sulla campata centrale. In tale condizione di carico combinato flesso torsionale il modello tangente lineare for-

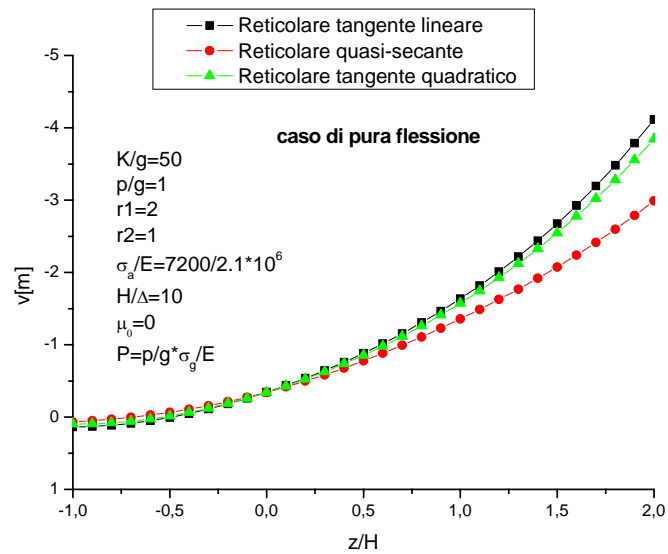


Figura 4.7: Confronti tra le deformate flessionali reticolari ottenute mediante il modello tangente lineare, il modello tangente quadratico ed il modello quasi secante per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2$)

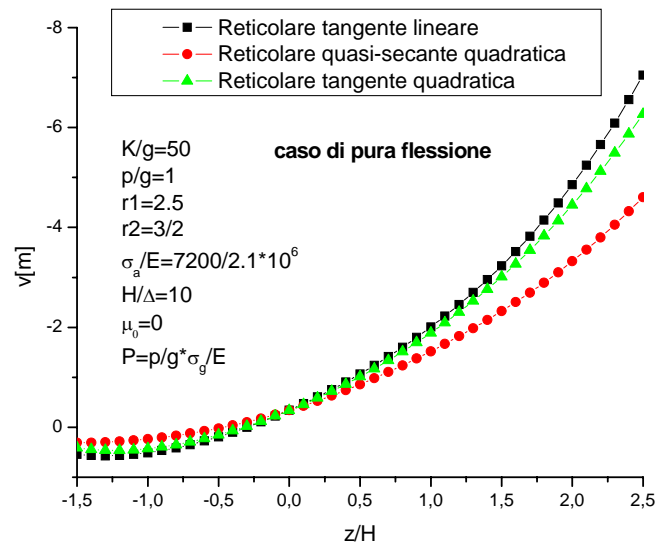


Figura 4.8: Confronti tra le deformate flessionali reticolari ottenute mediante il modello tangente lineare, il modello tangente quadratico ed il modello quasi secante per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 2.5$)

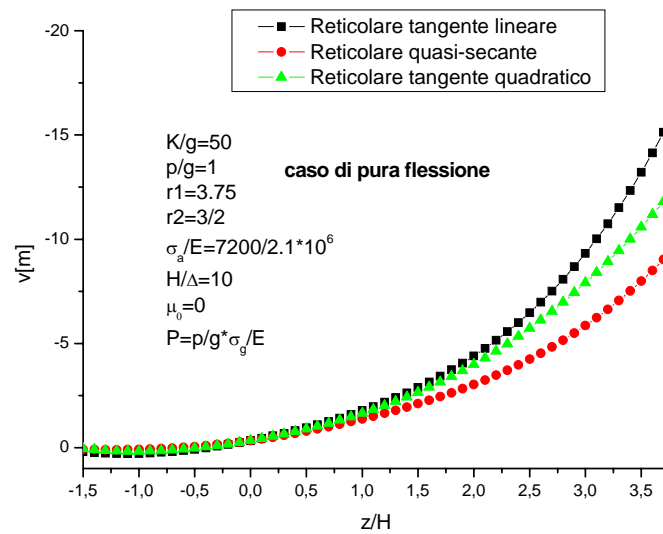


Figura 4.9: Confronti tra le deformate flessionali reticolari ottenute mediante il modello tangente lineare, il modello tangente quadratico ed il modello quasi secante per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P perfettamente centrato ($r_1 = 3.75$)

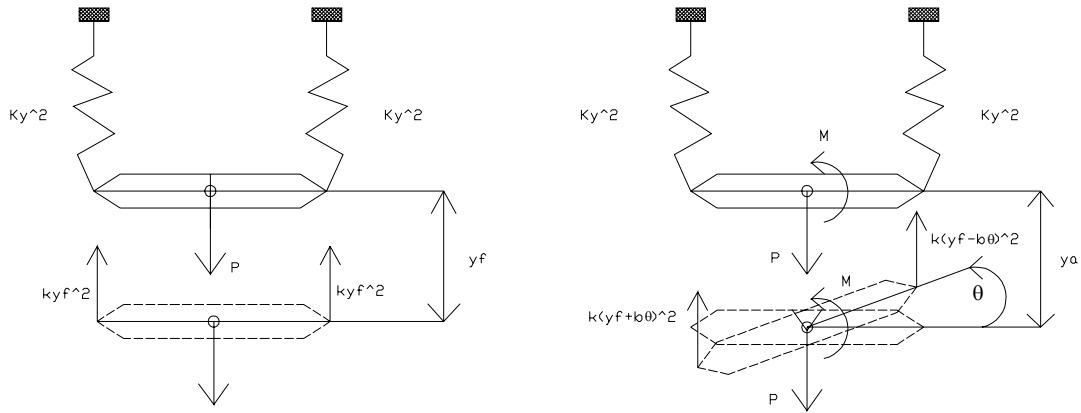


Figura 4.10: Schematizzazione dell'accoppiamento flessionale del ponte strallato

niscie soluzioni perfettamente disaccoppiate. La modellazione quasi secante della risposta elastica degli stralli ed in particolare l'approccio quadratico negli spostamenti comporta un accoppiamento del problema torsionale con quello flessionale. La natura dell'accoppiamento che si stabilisce si chiarisce osservando la seguente figura 4.10. In essa si considera in modo schematico la sezione retta di un ponte, in cui gli stralli sono modellati attraverso delle molle non lineari, la cui reazione in particolare risulta proporzionale al quadrato dello spostamento del punto di ancoraggio. L'applicazione di un carico perfettamente centrato comporta l'abbassamento della sezione retta della quantità $y_f = \sqrt{\frac{P}{2k}}$ come risulta dall'equazione di equilibrio alla traslazione verticale. E' banale rendersi conto che la travata subisce esclusivamente spostamenti flessionali, mentre la torsione è disattivata. Differentemente accade in presenza di un carico P eccentrico staticamente equivalente alla combinazione di carico costituita dal carico centrato P e dalla coppia torcente M . In tal caso la torsione attivata dalla coppia M si accoppia con la flessione. In particolare la torsione della travata comporta un irrigidimento flessionale che si evidenzia dalla scrittura dell'equazione di equilibrio verticale da cui risulta $y_a^2 = y_f^2 - (b\theta)^2$, essendo y_a lo spostamento verticale della sezione retta nel caso accoppiato. A sua volta la torsione risulta influenzata dal carico flessionale. Sviluppando l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al baricentro della sezione retta si ottiene $\theta^2 = \frac{y_f \pm \sqrt{y_f^2 - \frac{M}{kb}}}{2b}$, da cui si evince come necessariamente ad un carico di coppia debba corrispondere pure un abbassamento e come il carico flessionale sia di irrigidimento per la travata. Allo scopo di

verificare e di quantificare tali effetti sul modello quasi secante al secondo ordine degli spostamenti del ponte strallato, per un fissato valore del carico flessionale $P = \frac{p}{q_g} \frac{\sigma_g}{E}$ si confrontano le deformate reticolari flessionali che si ottengono mediante il modello tangente lineare ed il modello quasi secante, al variare del carico di coppia adimensionalizzata μ . Dal grafico di figura 4.11 si evidenzia come effettivamente la torsione del ponte sia accoppiata alla flessione nel modello quasi secante. Per un fissato valore di ζ l'abbassamento del ponte decresce all'aumentare della coppia torcente agente sulla travata. D'altra parte si evidenzia come sia il termine di raffinamento costitutivo di cui si arricchisce la risposta elastica degli stralli ad influenzare maggiormente l'accoppiamento della torsione della travata con la flessione. Infatti la curva ottenuta mediante il modello tangente quadratico negli spostamenti, ottenibile dal modello quasi secante ponendo $\Delta E_{sd} = 0$ tende a ritornare verso i valori calcolati mediante la teoria tangente lineare. L'errore commesso dal modello tangente lineare in condizioni di carico combinato flesso-torsionale si incrementa all'aumentare del parametro r_1 come si evidenzia nei grafici delle figure 4.7-4.9. D'altra parte si vede pure come diventi progressivamente più importante il termine di raffinamento cinematico nella modellazione dell'accoppiamento flesso-torsionale. In maniera duale, come si evince dalle figure 4.11-4.12-4.13 per un fissato valore del carico flessionale $\mu = 5 \frac{p}{q_g} \frac{\sigma_g}{E} \frac{H}{b}$ si confrontano le deformate reticolari torsionali che si ottengono mediante il modello tangente lineare ed il modello quasi secante, al variare del carico flessionale adimensionalizzato P .

L'analisi dell'accoppiamento flesso torsionale è stata effettuata sui termini reticolari della soluzione. D'altra parte i contributi correttivi mantengono caratteristica locale anche nel caso accoppiato. Le seguenti figure confrontano per differenti valori del parametro r_1 l'abbassamento e la rotazione, riportando il dettaglio del contributo reticolare, calcolate mediante il modello quasi secante accoppiato con le corrispondenti quantità calcolate mediante il modello tangente lineare.

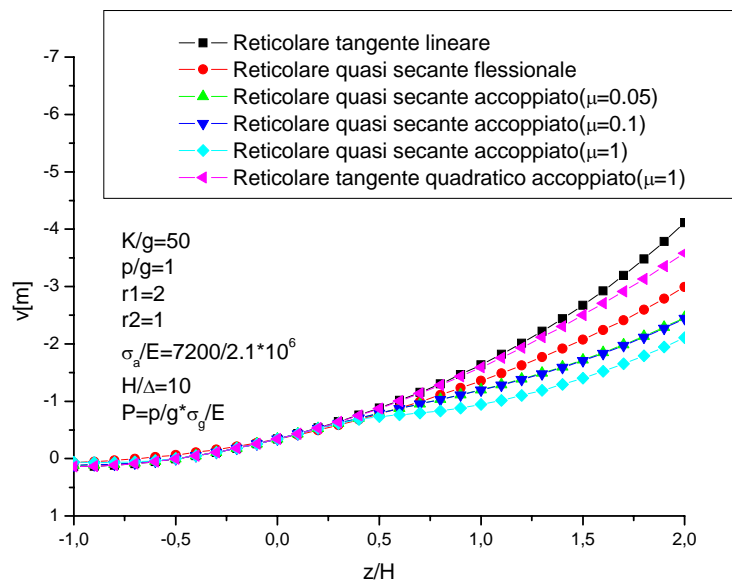


Figura 4.11: Deformate flessionali reticolari al variare della coppia torcente adimensionalizzata agente sulla travata μ per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P . ($r_1 = 2$)

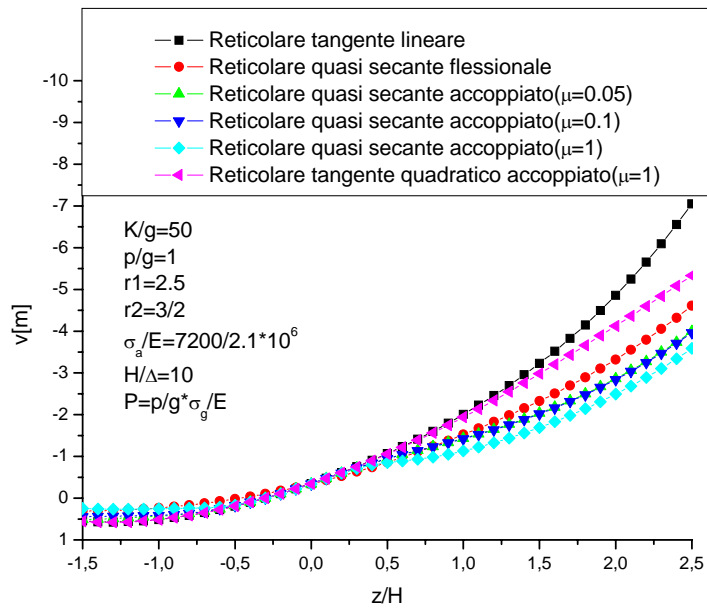


Figura 4.12: Deformate flessionali reticolari al variare della coppia torcente adimensionalizzata agente sulla travata μ per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P . ($r_1 = 2.5$)

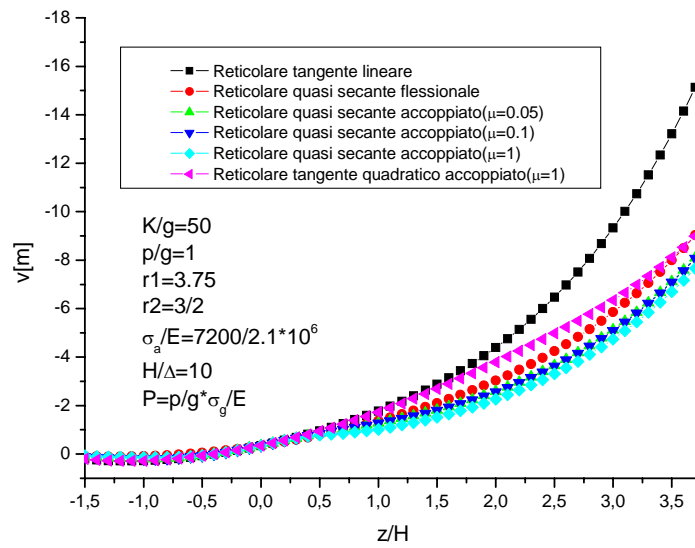


Figura 4.13: Deformate flessionali reticolari al variare della coppia torcente adimensionalizzata agente sulla travata μ per un determinato valore del carico flessionale adimensionalizzato P . ($r_1 = 3.75$)

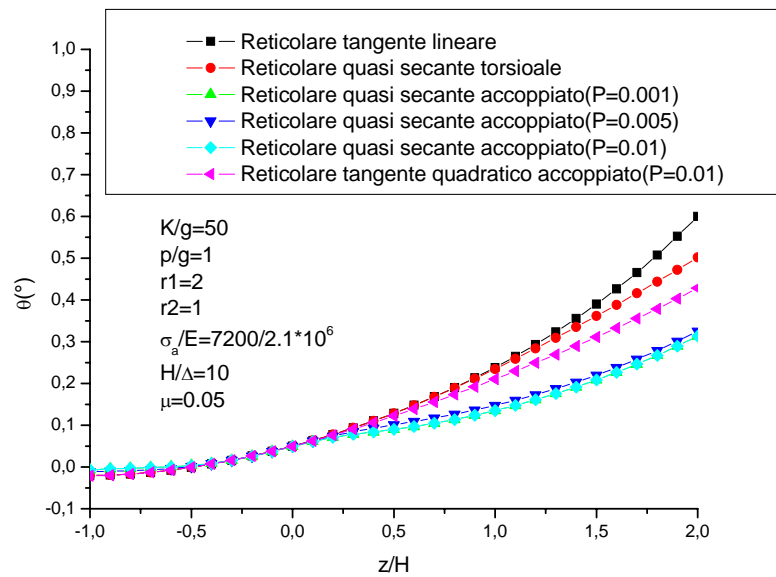


Figura 4.14: Deformate torsionali reticolari al variare del carico flessionale adimensionalizzato agente sulla travata P per un determinato valore della coppia torcente adimensionalizzata μ . ($r_1 = 2$)

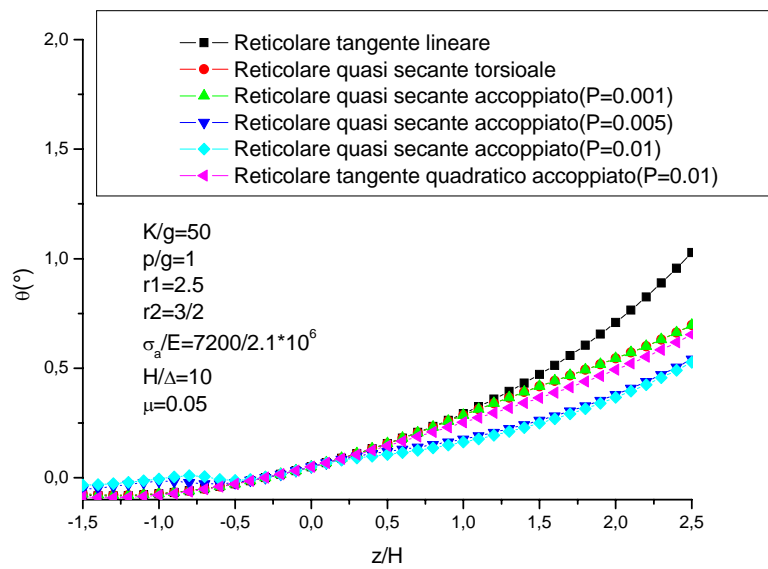


Figura 4.15: Deformate torsionali reticolari al variare del carico flessionale adimensionalizzato agente sulla travata P per un determinato valore della coppia torcente adimensionalizzata μ . ($r_1 = 2.5$)

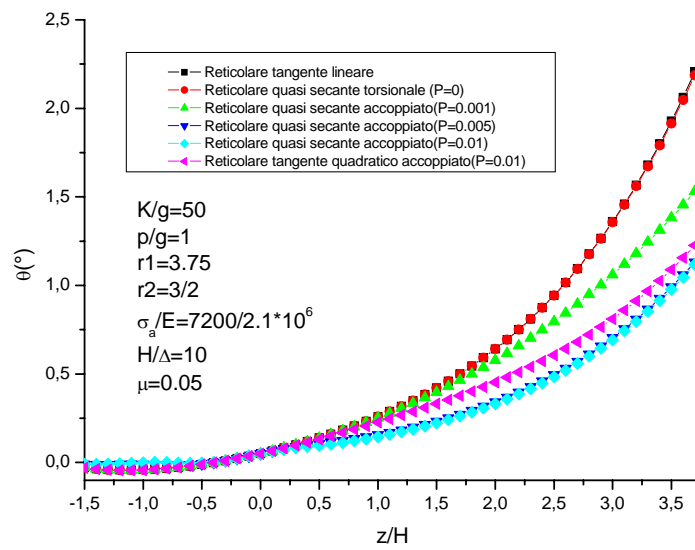


Figura 4.16: Deformate torsionali reticolari al variare del carico flessionale adimensionalizzato agente sulla travata P per un determinato valore della coppia torcente adimensionalizzata μ . ($r_1 = 3.75$)

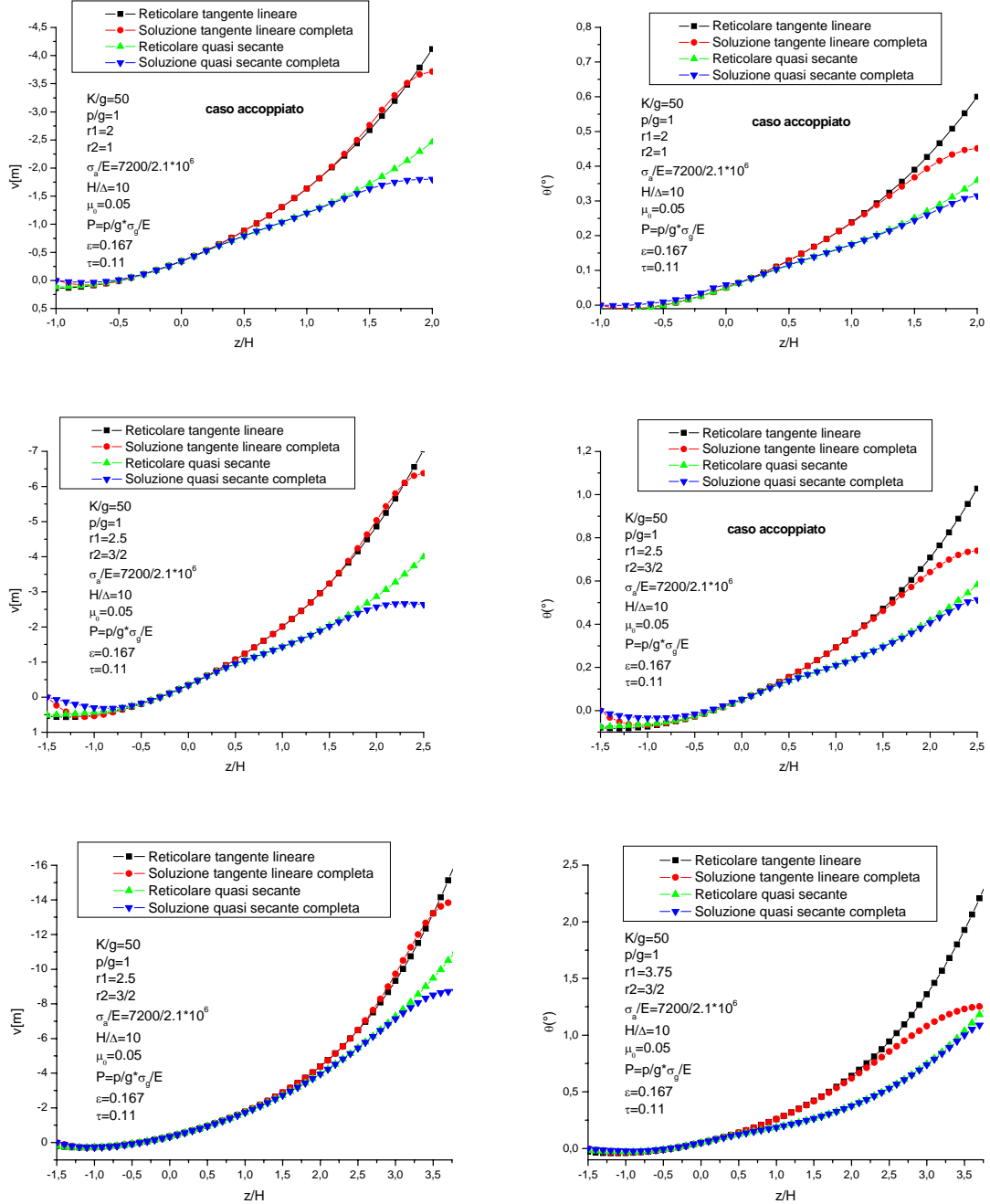


Tabella 4.1: Confronti tra modello tangente lineare modello quasi-secante quadratico in termini di abbassamento e rotazione della travata nel caso di carico accidentale eccentrico uniformemente distribuito sulla campata centrale per diversi valori del parametro $r1$

Conclusioni

Nel presente lavoro è stata dapprima riesaminata criticamente l'adeguatezza della teoria statica dei ponti strallati di grande luce che impiega il modulo tangente di Dischinger per la descrizione dei cavi ed un approccio lineare negli spostamenti per modellare l'interazione cavi-struttura con particolare attenzione per ciò che concerne la realizzazione di ponti strallati con cavi fortemente inclinati. A tale scopo sono stati confrontati i risultati ottenuti mediante l'approccio analitico tangente lineare ed i risultati ottenuti mediante un algoritmo iterativo di soluzione delle equazioni di governo scritte mediante un approccio secante.

Allo scopo di superare i limiti della teoria di Dischinger quando questa è impiegata per descrivere il comportamento dei ponti strallati, viene formulato un modello quasi secante per l'analisi della risposta statica di cavi elastici. Partendo da un approccio secante, si è dedotta una legge costitutiva del cavo in forma esplicita, del secondo ordine sia rispetto alla variazione di tensione nel cavo che alla variazione di deformazione apparente, valutata lungo la sua corda. Inoltre l'interazione cavi-struttura è modellata attraverso un approccio al secondo ordine negli spostamenti che consente di portare in conto la rotazione finita dello strallo prodotta per effetto della deformazione della travata sorretta. In questo modo si è ottenuta una formulazione esplicita che, a differenza dell'approccio secante classico, non richiede procedure iterative. L'efficacia del modello proposto è stata mostrata attraverso una serie di confronti numerici effettuati su differenti configurazioni di uno strallo.

Utilizzando la notazione tensoriale introdotta per l'analisi della risposta statica di cavi elastici è stato sviluppato un modello continuo per l'analisi del comportamento statico dei ponti strallati con pile ad H e disposizione degli stralli a ventaglio che impiega il modulo quasi-secante di Dischinger per la modellazione dei cavi ed un approccio quadratico negli spostamenti per ciò che concerne l'interazione stralli-travata. La soluzione, ottenuta mediante una tecnica perturbativa mantiene il comportamento prevalentemente reticolare del ponte e la natura locale del contributo correttivo della soluzione che si erano ottenuti mediante il modello tangente lineare, ma si arricchisce

sia nel termine reticolare sia in quello correttivo di contributi dovuti alla rotazione finita degli stralli e alla variazione del loro legame costitutivo che è possibile apprezzare grazie all'approccio al secondo ordine negli spostamenti della risposta statica degli stralli. L' accoppiamento flesso-torsionale che inevitabilmente complica la soluzione non inficia l'interpretazione fisica dell'arricchimento ottenuto poichè la soluzione disaccoppiata del modello tangente lineare è facilmente riottenibile da quella quasi secante quadratica. Infine si è indagata la natura di tale accoppiamento attraverso confronti numerici tra i differenti modelli per evidenziare la validità del modello proposto.

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro vorrei ringraziare tutte le persone che direttamente ed indirettamente hanno contribuito al raggiungimento di un obiettivo che ormai per oltre tre anni ha animato il mio spirito, allietato il mio animo quando l'obiettivo sembrava raggiunto e raggelato il mio cuore quando invece esso improvvisamente si rivelava lontano. Trionfo e disastro si alternano nella vita dell'uomo come ben sa il giovane ed inesperto pensiero quando la sua mente salpa alla volta di lidi inesplorati e sconosciuti. Imparare a controllare questi due impostori ossia la gioia del trionfo e lo sconforto del disastro equivale a saper parlare con la stessa tranquillità davanti ad un re o all'ultimo dei servi, equivale a dare valore ad ogni istante della propria vita, equivale, ancora di più, ad essere uomo. Travalicare i limiti delle proprie conoscenze è cosa ardua e spaventosa ma d'altra parte non siamo nati per vivere come bruti ma per seguire virtù e conoscenza.

Vorrei ringraziare innanzitutto il Prof. Franco Maceri che mi ha permesso di mettere in crisi la mia logica, di mettere in discussione le mie certezze illuminando questo mio percorso formativo con la sua luce scientifica oltre che per i consigli e le chiacchierate a volte paterne che hanno avuto un effetto trascinate e hanno rinnovato la fiducia nel mio lavoro.

Vorrei ringraziare poi l'ing. Giuseppe Vairo che con affettuosa disponibilità mi ha fornito preziosissimi consigli ed insegnamenti formativi oltre che sostegno e fiducia.

Bibliografia

- [1] Como, M., Grimaldi, A., Maceri, F., Statical behaviour of long-span cable stayed bridges, *Int. J. Solids Structures* Vol. 21/8, 1985, 831-850
- [2] Dell'Amore Fachinetti, S., Vairo, G., Quasi-secant behaviour of elastic cables for cable-stayed structures, *Atti del XXXIV Convegno Nazionale AIAS*, 14-17 Settembre 2005, Politecnico di Milano.
- [3] Bruno, D., Maceri, F., Olivito, R.S., Analysis of the Elastic Response of Stay and Stayed Systems, *IABSE Proc.* P-143, 1990, 29-44.
- [4] Vairo, G., Ponti di grande luce: modellazione e simulazione del comportamento aeroelastico, *Tesi di dottorato in ingegneria delle strutture*.
- [5] Simone, G., Modellazione e deformabilità di ponti strallati di grande luce, *Tesi di laurea in ingegneria civile*.
- [6] De Miranda, F., *I ponti strallati di grande luce*. Edizioni Scientifiche A. Cremonese, Roma, 1980.
- [7] Irvine, M., *Cable Structures*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.
- [8] Bruno, D., Maceri, F., Olivito R.S., An experimental study on the non linear effect behaviour of stays. *XII Convegno nazionale AIAS*, Sorrento 24-27 Settembre 1984.
- [9] Bruno, D., Maceri, F., Non linear models for cable stayed bridges analysis. *First European Simulation Congress ESC83*. Aachen, September 1983.
- [10] Gimsing, N.J., *Cable Supported Bridges: Concept and Design*, 2nd edition, John Wiley&Sons, New York, 1997.
- [11] De Miranda, F., *Il ponte strallato: soluzione attuale del problema delle grandi luci*, *Costruzioni metalliche*, Vol. 1, 1971.

- [12] De Miranda, F., Grimaldi, A., Maceri, F., Como, M., Basic problems in long-span cable stayed bridges, Dep. of tructures, Univ. of Calabria, Rep. 25, 1979.
- [13] Troitsky, M.S., Cable stayed bridges, Crosby Lockwood Staples, London, 1977.
- [14] Como, M. Stabilità aerodinamica dei ponti di grande luce, in Ingegneria delle strutture, vol. II, ed. Utet, 2002.
- [15] Dell'Amore Fachinetti, S., Vairo, G., Un modello continuo quasi secante per l'analisi dei ponti strallati di grande luce, Atti del XXXV Convegno Nazionale AIAS, 13-16 Settembre 2006, Università Politecnica delle Marche.