Luigi Accardi

Probabilità quantistica

Voce per la: Storia della Matematica, vol. 4, Einaudi

1 Introduzione

I risultati stabiliti dallo studio assiomatico, e cioè l'esistenza di una molteplicità di modelli probabilistici empiricamente inequivalenti suggeriscono di ampliare lo scopo della teoria delle probabilità, a simiglianza di quanto è avvenuto in geometria, dallo studio di un singolo modello (quello euclideo o quello kolmogoroviano) allo studio di una molteplicità di possibili modelli e delle loro relazioni. Mentre nella prima parte della presente esposizione ci si è limitati agli aspetti storici e, per quanto riguarda la probabilità quantistica, concettuali, il fine della presente esposizione è quello di chiarire la struttura matematica della probabilità algebrica nel suo complesso e le sue relazioni con la probabilità classica. Nell'esposizione cercheremo di sottolineare come alcune delle nuove idee introdotte dalla probabilità quantistica sono emerse da motivazioni puramente matematiche ed altre dal tentativo di risolvere specifici problemi posti dalla fisica. Maggiori informazioni sulla filosofia generale della *matematica non commutativa* possono essere trovate nell'articolo [AcGib00].

2 Il modello Kolmogoroviano della probabilità classica

Gli oggetti fondamentali della probabilità classica sono gli eventi e le loro probabilità. Nel modello Kolmogoroviano della probabilità classica un evento è rappresentato da un sotto–insieme di un dato insieme Ω e, tra tutti i sotto–insiemi di Ω, viene fissata a priori una sotto–famiglia $\mathcal{F}$, che definisce *l'universo degli eventi* e gode delle seguenti proprietà:
(i) la classe vuota $\emptyset$ e Ω appartengono ad $\mathcal{F}$
(ii) complementi insiemistici, unioni e intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{F}$ appartengono ad $\mathcal{F}$.
Una tale famiglia $\mathcal{F}$ è detta una σ–algebra Booleana o più semplicemente una σ–algebra. Se nella condizione (ii) si sostituisce l'aggettivo *numerabile* con *finito* si parla di algebra Booleana.

L'insieme di tutte le σ–algebre (qui usiamo la parola insieme in senso intuitivo) contiene la famiglia $\mathcal{P}(\Omega)$ di tutti i sotto–insiemi (parti) di Ω ed è chiuso per intersezioni arbitrarie. Quindi, data una sotto–famiglia $\mathcal{F}_0$ di parti di Ω, la più piccola σ–algebra $\mathcal{F}$ contenuta in $\mathcal{P}(\Omega)$ e contenente $\mathcal{F}_0$ è univocamente definita ed è chiamata *la σ–algebra generata da $\mathcal{F}_0$*.
Se Ω non è al più numerabile, la famiglia $\mathcal{P}(\Omega)$ di tutte le parti di Ω è troppo grande per permettere una teoria matematicamente interessante. Quindi in genere si usano σ–algebre molto più piccole di $\mathcal{P}(\Omega)$. Per esempio, se Ω è uno spazio topologico, spesso si usa la σ–algebra di Borel, generata dagli insiemi aperti, o la σ–algebra di Baire, generata dagli insiemi compatti.
Ad ogni evento $A \in \mathcal{F}$ si associa un numero $P(A)$, nell'intervallo $[0, 1]$, interpretato come la probabilità di tale evento, in modo tale che la funzione $P : A \in \mathcal{F} \to P(A) \in [0, 1]$ assegni probabilità nulla all'insieme vuoto $\emptyset$ e soddisfi la condizione di numerabile additività cioé, se (A_n) è una successione di elementi di $\mathcal{F}$ mutuamente disgiunti ($A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$) allora:

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \tag{1}$$

La coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ è detta uno spazio misurabile e la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è detta uno spazio di probabilità. Per quest'ultimo tipo di spazi si può sempre supporre, e ciò sarà fatto tacitamente in seguito, che $\mathcal{F}$ sia *ereditaria* rispetto agli insiemi di probabilità nulla, cioé che se $A \in \mathcal{F}$ e $P(A) = 0$, allora ogni sotto–insieme $N \subseteq A$ anche appartiene ad $\mathcal{F}$. Ciò implica che se $A \in \mathcal{F}$ e $B \subseteq \Omega$ differisce da A per un insieme di probabilità nulla ($P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0$, $A \setminus B := \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A, \ \omega \notin B\}$) allora anche $B \in \mathcal{F}$.
Un morfismo tra due spazi misurabili $(S, \mathcal{B})$ e $(S', \mathcal{B}')$ è una funzione *misurabile* $F : S \to S'$ cioé tale che $F^{-1}(\mathcal{B}') \subseteq \mathcal{B}$. Come in ogni categoria, un morfismo invertibile è detto un isomorfismo. Un morfismo tra due spazi di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ è un morfismo di spazi misurabili $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ che conserva le probabilità, cioé

$$P \circ X^{-1} = P' \tag{2}$$

Per molte applicazioni è sufficiente utilizzare un modello matematico in cui la numerabile additività viene sostituita dalla finita additività (nella quale la (1) vale solo per successioni finite, cioé tali che $A_m = \emptyset$ per m abbastanza grande). La condizione di numerabile additività è una condizione di continuità: essa equivale a dire che, se una successione di eventi converge

all'insieme vuoto (evento di probabilità nulla) le probabilità di questi eventi devono convergere a zero. Questa condizione di continuità è un assioma del modello kolmogoroviano. Diverse idee intuitive sulla nozione di *probabilità* hanno condotto ad opinioni diverse sulla necessità di introdurre tale assioma nel modello matematico. Quello che è certo è che:
(i) molte applicazioni della P. coinvolgono solo un numero finito di eventi alla volta e quindi per esse il problema non si pone.
(ii) La scelta della numerabile additività, oggi adottata nella grande maggioranza della letteratura matematica sulla probabilità classica, permette di porre al servizio della teoria delle probabilità strumenti analitici più potenti di quelli disponibili con le misure finitamente additive.
Una variabile casuale è definita da una terna:

$$\{(\Omega, \mathcal{F}, P), (S, \mathcal{B}), X\} \tag{3}$$

dove:
– $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è uno spazio di probabilità, detto *spazio campione (sample space)*
– $(S, \mathcal{B})$ è uno spazio misurabile detto *spazio degli stati* – $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{B})$ è una funzione misurabile. Spesso, invece della terna (3) si usa la notazione

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{B})$$

La misura di probabilità su $(S, \mathcal{B})$ definita da

$$P_X := P \circ X^{-1} \tag{4}$$

è detta la *distribuzione di probabilità di* X. Due variabili casuali

$$\{(\Omega, \mathcal{F}, P), (S, \mathcal{B}), X\} \qquad , \qquad \{(\Omega', \mathcal{F}', P'), (S', \mathcal{B}'), X'\}$$

sono dette *equivalenti* se gli spazi di probabilità

$$((S, \mathcal{B}), P_X) \qquad , \qquad (S', \mathcal{B}'), P_{X'})$$

sono isomorfi. Un processo stocastico è una famiglia di variabili casuali

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S_t, \mathcal{B}_t) \qquad ; \qquad t \in T \tag{5}$$

dove T è un insieme, detto *l'insieme degli indici.* Nel seguito per semplicità considereremo solo il caso in cui gli spazi degli stati $(S_t, \mathcal{B}_t)$ sono identificati a un unico spazio $(S, \mathcal{B})$:

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{B}) \qquad ; \qquad t \in T \tag{6}$$

Le decomposizioni integrali di un'algebra di von Neumann rispetto a sue sotto–algebre abeliane massimali o, più in particolare il caso in cui T è una varietà differenziabile e $\pi : (S, \mathcal{B}) \to T$ è un pre–fibrato misurabile (in questo caso si parla di sezioni random del pre–fibrato) forniscono esempi interessanti in cui tale condizione non è soddisfatta.
Esistono molte nozioni di equivalenza per processi stocastici. Nel caso di due processi

$$X_t, X'_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{B}) \qquad ; \qquad t \in T \tag{7}$$

corrispondenti alla stessa terna $\{(\Omega, \mathcal{F}, P), (S, \mathcal{B}), T\}$, una relazione di equivalenza frequentemente usata è la coincidenza delle probabilità congiunte finito–dimensionali:

$$P\left(\bigcap_{t\in F} X_t^{-1}(A_t)\right) = P\left(\bigcap_{t\in F} X_t^{'-1}(A_t)\right) \tag{8}$$

per ogni sotto–insieme finito $F \subseteq T$ e per ogni famiglia di eventi $A_t \in \mathcal{B}$. Nozioni più sofisticate di equivalenza stocastica richiedono le identificazioni degli spazi campione $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, degli spazi degli stati $(S, \mathcal{B})$ e $(S', \mathcal{B}')$ e degli insiemi degli indici T e T'.

3 Formulazione algebrica del modello della probabilità classica

La struttura di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ è univocamente determinata dall'algebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$, delle funzioni misurabili e limitate su esso definite e a valori nei numeri complessi. Una misura di probabilità P su tale spazio è univocamente determinata dalla restrizione ad $L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$, denotata φ, dell'integrale ad essa associato:

$$f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \varphi(f) := \int_\Omega f dP := E_P(f) \tag{9}$$

Possiamo quindi affermare che assegnare uno spazio di probabilità classico equivale ad assegnare la coppia

$$\{L^\infty(\Omega, P, \mathcal{F}), \varphi\} \tag{10}$$

La scelta di questa coppia non è canonica: molte altre coppie $\{\mathcal{A}, \varphi\}$, dove $\mathcal{A}$ è un'algebra di funzioni misurabili su $(\Omega, \mathcal{F})$ e φ è la restrizione ad $\mathcal{A}$

dell'integrale associato a P, permettono di ricostruire univocamente lo spazio di probabilità $(\Omega, P, \mathcal{F})$. Ogni variabile casuale classica

$$X : (\Omega, P, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{B})$$

definisce l'omomorfismo

$$j_X : f \in L^\infty(S, \mathcal{B}) \to j_X(f) := f \circ X =: f(X) \in L^\infty(\Omega, P, \mathcal{F}) =: \mathcal{A} \quad (11)$$

Notare che tale omomorfismo conserva le identità delle algebre:

$$j_X(1_{L^\infty(S,\mathcal{B})}) = 1_{\mathcal{A}} \quad (12)$$

Dato che la variabile casuale X è unicamente determinata, a meno di equivalenza stocastica, dallo $*$–omomorfismo j_X, possiamo identificare i due oggetti. Similmente ogni variabile casuale di un processo stocastico classico (X_t) definisce un omomorfismo

$$j_t : f \in L^\infty(S, \mathcal{B}) \to j_t(f) := f \circ X_t =: f(X_t) \in L^\infty(\Omega, P, \mathcal{F}) \quad (13)$$

e la famiglia degli omomorfismi (j_t) caratterizza il processo (X_t).

4 Probabilità algebrica

Una volta formulato algebricamente il modello della probabilità classica, il passaggio da questa a quella non commutativa (quantistica) si ottiene sostituendo alle algebre commutative della teoria classica, algebre non commutative. Poiché in probabilità la nozione di positività gioca un ruolo importante, occorre che su tali algebre sia definita un cono di elementi positivi. Un modo naturale, anche se non unico, di conseguire tale fine è di considerare la categoria delle $*$–algebre nelle quali tale cono è definito dalle combinazioni lineari a coefficienti positivi di elementi della forma a^*a (o dalla chiusura di queste nel caso di algebre topologiche).
Uno *spazio di probabilità algebrica* è definito da una coppia $\{\mathcal{A},\ \varphi\}$, dove $\mathcal{A}$ è una $*$–algebra e φ è uno stato su $\mathcal{A}$ (funzionale lineare positivo che vale 1 sull'identità dell'algebra). L'insieme degli stati su $\mathcal{A}$ si denota $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Uno spazio di probabilità algebrico $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ è detto *classico* se $\mathcal{A}$ è un'algebra commutativa, *quantistico* se è non commutativa. Le nozioni di variabile casuale

e di processo stocastico vengono introdotte in analogia con il caso classico: una *variabile casuale algebrica* è definita da una terna

$$\{\{\mathcal{A},\ \varphi\},\ \mathcal{B},\ j\} \tag{14}$$

dove $\{\mathcal{A},\ \varphi\}$ è uno spazio di probabilità algebrico ($\mathcal{A}$ è talvolta chiamata *sample algebra* come remnant del sample space della probabilità classica), $\mathcal{B}$ è una $*$–algebra (*state algebra*) e $j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ uno $*$–omomorfismo. Tipicamente si usa la nozione forte di omomorfismo, che richiede la conservazione delle identità:

$$j(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{A}}$$

ma talvolta conviene indebolire questa condizione – in questi casi $j(1_{\mathcal{B}})$ è solo un proiettore auto–aggiunto in $\mathcal{A}$. Lo stato $\varphi \circ j \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ è detto *la distribuzione* della variabile casuale algebrica (14).
Se B è un insieme di generatori algebrici dell'algebra $\mathcal{A}$ (che si può sempre supporre auto–aggiunto, i.e. $B^* = B$, l'omomorfismo j, cioè la variabile casuale, è univocamente determinato dall'assegnazione delle immagine degli elementi di B:

$$X_b := j(b) \in \mathcal{A} \qquad ; \qquad b \in B$$

ciascun X_b ($b \in B$) viene detta una variabile casuale operatoriale e in molti casi concreti si preferisce lavorare con questo tipo di variabili casuali. Tuttavia, dato che $X_b \in \mathcal{A}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche $X_b^n \in \mathcal{A}$ e quindi il momento n–mo di X_b, $\varphi(X_b^n)$, è ben definito. Quindi la nozione di variabile casuale operatoriale non include quelle variabili casuali che non godono di questa proprietà, e dato che tali variabili casuali giocano un ruolo importante in probabilità classica, si preferisce la definizione più generale in termini di omomorfismi.
Un *processo stocastico algebrico* è una famiglia di variabili casuali algebriche

$$\{\{\mathcal{A},\ \varphi\}, \mathcal{B},\ (j_t)_{t \in T}\} \tag{15}$$

dove T è un insieme (insieme degli indici).
La nozione generale di processo stocastico algebrico è stata introdotta in [Ac74], [Ac75] e successivamente generalizzata e completata con un teorema di ricostruzione in [AFL82].
D'ora in avanti tutte le nozioni saranno introdotte direttamente nel contesto della probabilità algebrica e poi illustrate nel caso classico e nei principali contesti quantistici.

4.1 Esempi di spazi di Probabilità algebrica

Il principale esempio di spazio di probabilità algebrico è la coppia $\{\mathcal{B}(\mathcal{H}), \varphi\}$, dove φ è uno stato normale sull'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert H. Un tale stato ha la forma

$$\varphi(b) = Tr(wb) \; ; \; b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

dove Tr è la traccia su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e W è un operatore positivo di traccia 1, detto **operatore densità**. Esempi che coinvolgono operatori non limitati, si ottengono sostituendo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con l'algebra dei polinomi negli operatori di campo quantistico in qualche rappresentazione.
Altri esempi significativi sono discussi nella sezione (5.1).

5 Leggi dei grandi numeri (LGN) e teoremi centrali del limite (CLT)

Siano $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ uno spazio di probabilità, $\mathcal{B}$ una $*$–algebra e

$$j_k : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \qquad ; \qquad k \in \mathbb{N} \tag{16}$$

una successione di variabili casuali algebriche. La somma delle prime N variabili casuali è definita da:

$$S_N(b) := \sum_{k=1}^{N} j_k(b) \qquad ; \qquad b \in \mathcal{B} \;\; N \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Si dice che la successione (31) soddifa la legge dei grandi numeri se $\forall h \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall b^{(1)}, \ldots, b^{(h)} \in \mathcal{B}$ e per ogni polinomio $P(X_1, \ldots, X_h)$ nelle h indeterminate non commutative $X_1, \ldots, X_h$, esiste il limite

$$\lim_{N\to\infty} \varphi \left(P \left[\frac{S_N(b^{(1)})}{N}, \frac{S_N(b^{(2)})}{N}, \ldots, \frac{S_n(b^{(h)})}{N} \right] \right) \tag{18}$$

Nelle stesse notazioni si dice che la successione (31) soddifa il teorema del limite centrale se esiste il limite

$$\lim_{N\to\infty} \varphi \left(P \left[\frac{S_N(b^{(1)})}{N^{1/2}}, \frac{S_N(b^{(2)})}{N^{1/2}}, \ldots, \frac{S_n(b^{(h)})}{N^{1/2}} \right] \right) \tag{19}$$

sotto la ulteriore condizione che sia soddisfatta la condizione di *media zero*:

$$\varphi(j_n(b^{(j)})) = 0 \quad ; \quad \forall j \in \{1, \cdots, h\} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

che in ogni caso è necessaria per l'esistenza del suddetto limite. Nel caso classico si considerano funzioni P di tipo piú generale (continue, limitate, ...), ma se le b_j non commutano, queste espressioni non hanno un significato naturale a meno che P non sia un polinomio.
Si dimostra che, in condizioni generiche, se $\alpha \neq 1, 1/2$, il limite delle espressioni

$$\varphi\left(P\left[\frac{S_N(b^{(1)})}{N^\alpha}, \frac{S_N(b^{(2)})}{N^\alpha}, \ldots, \frac{S_n(b^{(h)})}{N^\alpha}\right]\right)$$

o non esiste oppure è identicamente zero.
Nel seguito della presente sezione discuteremo i teoremi di limite centrale.
Poichè φ è lineare e P è un polinomio, lo studio dei limiti del tipo (19) si riduce allo studio dei limiti, per $N \to \infty$ quantità del tipo

$$\varphi\left(\left(\frac{(S_N(b^{(1)}))}{N^{1/2}}\right)^{k_1}\left(\frac{S_N(b^{(2)})}{N^{1/2}}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{S_N(b^{(3)})}{N^{1/2}}\right)^{k_h}\right) \tag{21}$$

dove $h, N, b_1, \ldots, b_h$ sono come sopra e $k_1, \ldots, k_h \in \mathbb{N}$ dipendono solo da P (che è indipendente da N). Poichè non si richiede che gli elementi $b_1, \cdots, b_h \in \mathcal{B}$ siano tutti diversi tra loro, è possibile modulo un cambio di notazioni scrivere la quantità (21) nella forma

$$\varphi\left(\frac{S_n(b^{(1)})}{N^{1/2}}\frac{S_N(b^{(2)})}{N^{1/2}}\cdots\frac{S_N(b^{(k)})}{N^{1/2}}\right) \tag{22}$$

e la (22), tenuto conto di (17) e della linearità di φ, è uguale a:

$$N^{-1/2k} \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{N} \varphi\left(b^{(1)}_{m_1} \cdots b^{(k)}_{m_k}\right) \tag{23}$$

dove si è usata la notazione

$$b^{(h)}_{m_h} := j_{m_h}(b^{(h)}) \qquad ; \qquad h \in \{1, \ldots, k\} \tag{24}$$

5.1 Significato dei CLT algebrici

Nelle notazioni (31), (17), fissiamo un sotto–insieme

$$B \subseteq \mathcal{B}$$

che soddisfa la condizione di media zero (20) (tipicamente B è un insieme di generatori algebrici di $\mathcal{B}$). Denotiamo

$$\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}]$$

la $*$–algebra dei polinomi e coefficienti complessi nelle indeterminate non commutative $(X_b, X_b^*)_{b\in B}$, cioè la $*$–algebra libera con generatori

$$(X_b, X_b^*)_{b\in B}$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}$ l'applicazione

$$X_b \mapsto \frac{S_N(b)}{N^{1/2}} \quad ; \qquad b \in B \tag{25}$$

si estende in modo univoco a un omomorfismo da $\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}]$ alla sotto–$*$–algebra di $\mathcal{A}$ generata dagli

$$S_N(b)/N^{1/2} \qquad (b \in B)$$

Se il limite (19) esiste, esso definisce un unico stato φ_∞ sull'algebra $\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}]$ mediante la prescrizione

$$\varphi_\infty \left(X_{b^{(1)}} \cdots X_{b^{(k)}}\right) := \lim_{N\to\infty} \varphi\left(P\left[\frac{S_N(b^{(1)})}{N^{1/2}}, \frac{S_N(b^{(2)})}{N^{1/2}}, \ldots, \frac{S_n(b^{(h)})}{N^{1/2}}\right]\right) \tag{26}$$

D'altra parte l'omomorfismo (25) introduce delle relazioni tra le variabili (X_b, X_b^*) di cui rimane traccia nello stato limite φ_∞. La determinazione di tali relazioni costituisce una parte essenziale dei teoremi centrali di limite di tipo algebrico. Essa si effettua analizzando la rappresentazione ciclica dello spazio di probabilità algebrico $\{\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}], \varphi_\infty\}$.
I seguenti esempi descrivono alcune di tali relazioni, che si incontrano molto frequentemente. Per semplicità di linguaggio non distingueremo tra l'algebra $\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}]$ e la sua rappresentazione ciclica in uno stato φ_∞ e quindi parleremo di *relazioni tra le variabili* (X_b, X_b^*) intendendo le corrispondenti relazioni tra le immagini di queste nella suddetta rappresentazione ciclica.

Esempio 1 *Se l'insieme* $(X_b)_{b\in B}$ *è ridotto a un solo elemento auto–aggiunto denotato*

$$X = X^*$$

allora l'algebra

$$\mathbb{C}[(X_b, X_b^*)_{b\in B}]$$

si riduce alla $*$*–algebra abeliana* $\mathbb{C}[X]$ *dei polinomi complessi in una indeterminata.*

Molte misure di probabilità X (ma non tutte) sono univocamente determinate dalla restrizione su quest'algebra dell'integrale ad essa associato.

Esempio 2 *Se l'insieme* $(X_b)_{b\in B}$ *è ridotto a un solo elemento non auto–aggiunto denotato* b *e la coppia* b, b^+ *(aggiunto di* b*) soddisfa la regola di commutazione*

$$[b, b^+] := bb^+ - b^+b = 1 \tag{27}$$

l'algebra $\mathbb{C}[b, b^+]$ *è detta l'algebra completa dell'oscillatore (full oscillator algebra) e gioca un ruolo molto importante in tutta la matematica poiché essa è isomorfa all'algebra degli operatori differenziali in una variabile a coefficienti polinomiali.*

Esempio 3 *Se* $d \in \mathbb{N}$ *l'algebra* $M_d(\mathbb{C})$*, delle matrici complesse* $d \times d$*, si può identificare all'algebra*

$$\mathbb{C}[(e_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,d\}^2}]$$

con le relazioni

$$e_{ij}^* = e_{ji}$$

$$e_{ij}e_{hk} = \delta_{ih}e_{ik} \quad ; \quad i, j, k \in \{1, \cdots, d\}$$

Esempio 4 *Sia* $\mathcal{L}$ *una* $*$*–algebra di Lie con generatori*

$$\{l_t^-, l_t^+ \quad : \quad t \in T\}$$

e relazioni

$$(l_t^+)^* = l_t^- \quad ; \quad t \in T$$

dove T è un insieme. Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia localmente finita cioè che $\forall s,t \in T, \varepsilon, \delta \in \{+,-\}$ nell'identità:

$$[l_s, l_t^\delta] = \sum_{u \in T, \mu \in \{+,-\}} c^{\varepsilon,\delta:\mu}_{(s,t);u} l_u^\mu$$

le costanti di struttura $c^{\varepsilon,\delta;\mu}_{(s,t);u}$ siano tutte nulle tranne al più un numero finito. Per il teorema di Poincarè-Birkhoff-Witt la $*$–algebra

$$\mathbb{C}[(l_s^+, l_s^-)_{s \in T}]$$

si può identificare all'algebra universale inviluppante di $\mathcal{L}$, denotata $U(\mathcal{L})$.

6 La singleton indipendenza

L'esistenza di limiti del tipo (23) viene garantita da varie condizioni di *indipendenza stocastica (o statistica)*. Queste sono condizioni sufficienti, e possono essere indebolite in vari modi (dipendenze deboli o asintotiche, stazionarietà,...). Tali estensioni sono molto importanti nelle applicazioni alla fisica, alla biologia, all'economia,... ma l'essenza concettuale delle dimostrazioni resta simile a quella del caso di indipendenza.
La formulazione algebrica della indipendenza classica equivale alla *singleton–indipendenza*.

Definizione 1 *Siano $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ uno spazio di probabilità algebrico e T un insieme. Una famiglia $(\mathcal{A}_t)_{t \in J}$ di sotto algebre di $\mathcal{A}$ è detta φ–singleton–indipendente se per ogni intero naturale $k \in \mathbb{N}$, e per ogni funzione*

$$t : k \in \{1, \cdots, k\} \to t_k \in T$$

nel cui range esiste un $\bar{t}$ tale che

$$|\{m \in \{1, \cdots, k\} : t_m = \bar{t}\}| = 1$$

dove $|\quad|$ denota la cardinalità (un tale $\bar{t}$ è detto un singleton per la funzione t) allora per ogni

$$a_{t_1} \in \mathcal{A}_{t_1}, \cdots, a_{t_k} \in \mathcal{A}_{t_k}$$

risulta

$$\varphi(a_{t_1} \cdot a_{t_2} \cdot \cdots \cdot a_{t_k}) = \varphi(a_{t_1} \cdots \hat{a}_{\bar{t}} \cdots a_{t_k}) \varphi(a_{\bar{t}}) \tag{28}$$

($\hat{a}_{\bar{t}}$ significa che $a_{\bar{t}}$ non compare nel prodotto).
Una famiglia di variabili casuali

$$j_t : \mathcal{B} \to \{\mathcal{A}, \varphi\}; t \in T \tag{29}$$

è detta φ–singleton–indipendente, se le algebre

$$j_t(\mathcal{B}) =: \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A} \quad ; \quad t \in T \tag{30}$$

sono φ–singleton–indipendenti.

Osservazione
Nel caso di variabile casuali classiche, si può sempre supporre che, a membro sinistro di (28) tutti i t_m siano singleton. Infatti se t_1 non è singleton, possiamo definire

$$a'_{t_1} := \prod_{\{m \in \{1,\cdots,k\}: t_m = t_1} a_{t_m} \in \mathcal{A}_{t_1}$$

Iterando il procedimento su tutti gli indici e usando la commutatività di $\mathcal{A}$, si scrive il membro sinistro di (28) nella forma

$$\varphi(a'_{s_1} \cdots a'_{s_h})$$

con tutti gli $\{s_1, \ldots, s_h\} \subseteq \{t_1, \cdots, t_k\}$ sono singleton. In questo caso l'identità (28) si riduce a

$$\varphi(a_{t_1} a_{2_2} \cdots a_{t_k}) = \varphi(a_{t_1})\varphi(a_{t_2}) \cdots \varphi(a_{t_k})$$

Se le algebre $\mathcal{A}_t$ sono definite da variabili casuali j_t mediante la (30) e se le variabili casuali sono classiche cioè della forma

$$a_{t_h} = f_h(X_{t_h}); h \in \{1, \cdots, k\}$$

per qualche $f_h \in L^\infty(S, \mathcal{B})$ (v. (13)), allora ricordando che φ, in questo caso, denota la restrizione del valore d'attesa E_P rispetto a P (v.(9)), la (28) si riduce a:

$$E_P(f_1(X_{t_1}) \cdots f_k(X_{t_k})) = E_P(f_1(X_{t_1})) \cdot E_P(f_2(X_{t_2})) \cdots E_P(f_k(X_{t_k}))$$

che è la formulazione standard dell'indipendenza stocastica classica.

6.1 Radici combinatorie delle varie nozioni di Gaussianità

La singleton indipendenza non basta da sola a garantire l'esistenza di limiti del tipo (23) ma, come si vede dal seguente teorema, è sufficiente a ridurre tali limiti ad una forma dalla quale risultano evidenti a vista tutta una serie di semplici condizioni algebriche che garantiscono l'esistenza di tali limiti.

Teorema 1 *Siano $\mathcal{B}$ una algebra normata, $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ uno spazio di probabilità e*

$$j_k : \mathcal{B} \to \{\mathcal{A}, \varphi\} \qquad ; \qquad k \in \mathbb{N} \tag{31}$$

una successione di variabili casuali algebriche φ–singleton indipendenti. Sia B un sotto–insieme di elementi di $\mathcal{B}$ di media zero e tale che per ogni $b, b' \in B$ esista la covarianza media

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \varphi\left(j_\alpha(bb')\right) =: \varphi_0\,(bb) \tag{32}$$

Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni funzione $m \in \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto b^{(m)} \in B$, il limite

$$\lim_{N\to\infty} \varphi\left(\frac{S_n(b^{(1)})}{N^{1/2}} \frac{S_N(b^{(2)})}{N^{1/2}} \cdots \frac{S_N(b^{(k)})}{N^{1/2}}\right) \tag{33}$$

esiste ed è nullo se k è dispari mentre, se $k = 2n \in \mathbb{N}$, tale limite esiste (cioé il CLT ha luogo) se e solo se esiste il limite

$$\sum_{\{i_h,j_h\}_{h=1}^n \in p.p.\{1,\ldots,2n\}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{N} \varphi\left(j_{\alpha_1}(b^{(i_1)}) \cdots j_{\alpha_1}(b^{(j_1)}) \cdots j_{\alpha_n}(b^{(i_n)}) \cdots j_{\alpha_n}(b^{(j_n)})\right) \tag{34}$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, p.p.$\{1, \ldots, 2n\}$ denota l'insieme delle partizioni a coppie dell'insieme $\{1, \ldots, 2n\}$. Queste possono essere identificate alle famiglie di sotto–insiemi $\{i_h, j_h\}$ $(h \in \{1, \ldots, 2n\})$ che soddisfano le condizioni:

$$\{1, \ldots, 2n\} = \bigcup_{h=1}^{n} \{i_h, j_h\}\ ,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_n\ ,\ i_h < j_h\ ,\ h \in \{1, \ldots, n\}$$

Perchè la somma (34) si estende solo alle partizioni a coppie?
Il motivo è un argomento combinatorio semplice e profondo, dovuto a W. von

Waldenfels. Riscrivendo il limite (33) nella forma (23) si vede che la somma è estesa a tutte le funzioni $\alpha : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, N\}$. La somma in (23) si può quindi riscrivere come $\sum_{p=1}^{k} \sum_{[p]}$ dove $\sum_{[p]}$ denota la sommatoria su tutte le funzioni α il cui range ha cardinalità $p \in \{1, \ldots, k\}$. I termini con $p < k/2$ danno contributo nullo poichè le funzioni a valori in $\{1, \ldots, N\}$ con range di cardinalità p sono dell'ordine di N^p e i singoli termini della somma sono equilimitati in norma. Quindi tale parte della sommatoria dà un contributo dell'ordine $N^{p-k/2} \to 0$ per $N \to \infty$ e perciò solo gli α con range di cardinalità $p \geq k/2$ possono dare contributo non nullo alla somma (23). Ma un tale α non deve avere singleton quindi la partizione di $\{1, \ldots, k\}$, data dalle immagini inverse $\{S_1, \ldots, S_p\}$ dei valori di α, soddisfa la condizione $k = \sum_{j=1}^{p} |S_j| \geq 2p$. Ne segue che k dev'essere uguale a $2p$, quindi pari, e che $\{S_1, \ldots, S_p\}$ dev'essere una partizione a coppie di $\{1, \ldots, k\}$.

Osservazione. La condizione (32) è banalmente soddisfatta nel caso in cui le variabili casuali della successione siano *identicamente distribuite*, cioé se esiste un $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ tale che

$$\varphi \circ j_n = \varphi_0 \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

In tal caso infatti $\forall N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \varphi \left(j_\alpha(bb') \right) = \varphi_0(bb') \tag{36}$$

e il limite (32) esiste banalmente ed è uguale a $\varphi_0(bb')$.

6.2 Il caso commutativo e l'indipendenza classica

Si è visto che, nel caso di processi stocastici classici, la singleton indipendenza coincide con l'usuale indipendenza stocastica. La condizione (34) è una generalizzazione tipicamente non commutativa della condizione (32) sull'esistenza della covarianza che risulta superflua se l'algebra $\mathcal{A}$ è commutativa. Infatti in questo caso i limiti che compaiono in (32) si riducono a limiti del tipo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{N} \varphi \left(j_{\alpha_1}(b^{(i_1)} b^{(j_1)}) \cdots j_{\alpha_n}(b^{(i_n)} b^{(j_n)}) \right) \tag{37}$$

e quindi, per la condizione di singleton, a limiti del tipo

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha_1=1}^{N}\varphi\left(j_{\alpha_1}(b^{(i_1)}b^{(j_1)})\right)\cdot\ldots\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha_n=1}^{N}\varphi\left(j_{\alpha_n}(b^{(i_n)}b^{(j_n)})\right)$$

la cui esistenza segue dalla condizione (32) sull'esistenza della covarianza. Quindi anche il limite (34) esiste e, nella notazione (32), è uguale a

$$\varphi_\infty\left(X_{b^{(1)}}\cdots X_{b^{(k)}}\right):=\sum_{\{i_h,j_h\}_{h=1}^n\in p.p.\{1,\ldots,2n\}}\prod_{h=1}^{n}\varphi_0\left(b^{(i_h)}b^{(j_h)}\right)\tag{38}$$

Nel caso dell'Esempio (1) della sezione (5.1) (l'insieme dei $b^{(1)},\ldots,b^{(k)}$ è ridotto a un solo elemento auto–aggiunto) si è visto che l'algebra su cui agisce φ_∞ si riduce alla $*$–algebra abeliana $\mathbb{C}[X]$, dei polinomi complessi in una indeterminata e l'identità (38) si riduce a

$$\varphi_\infty\left(X^{2n}\right)=\frac{(2n)!}{n!2^n}\varphi_0(X^2)^n\tag{39}$$

che fornisce i momenti della Gaussiana standard con covarianza $\varphi_\infty\left(X^{2n}\right)$ (in questo caso si può dimostrare che i momenti definiscono univocamente la misura di probabilità). Infine lo spazio della rappresentazione ciclica dello stato φ_∞ è lo spazio delle funzioni complesse sulla retta reale a quadrato integrabile rispetto alla suddetta Gaussiana.

6.3 Il caso di indipendenza bosonica

Il ragionamento della precedente sezione (6.2) può essere ripetuto senz'alcun cambiamento se le algebre $j_n(\mathcal{B}):=\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}$ commutano per valori diversi di n – questo è il caso dell'indipendenza bosonica. Anche la formula (38) continua a valere immutata in questo caso. Se l'insieme dei generatori è ridotto alla coppia b, b^+ (aggiunto di b) (v. esempio (2) della sezione (5.1)), lo stato φ_∞ è univocamente determinato dalla sua matrice di covarianza:

$$\begin{pmatrix}\varphi_\infty(b^+b) & \varphi_\infty(bb)\\ \varphi_\infty(b^+b^+) & \varphi_\infty(bb^+)\end{pmatrix}\tag{40}$$

nel caso in cui tale matrice abbia la forma

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \varphi_\infty(bb^+)\end{pmatrix}\tag{41}$$

si parla di stato di Fock con covarianza $\varphi_\infty(bb^+)$. Se $\mathcal{H}$ è lo spazio della rappresentazione ciclica dello stato φ_∞ e $\Phi \in \mathcal{H}$ è il vettore ciclico, ciò è equivalente alla condizione

$$b\Phi = 0 \tag{42}$$

In quest'ultimo caso un teorema di Giri e von Wallenfelds mostra che, nella rappresentazione ciclica dello stato φ_∞, l'algebra generata da b e b^+ (con covarianza normalizzata a 1) coincide con quella descritta nell'esempio (2) della sezione (5.1).
In particolare b e b^+ soddisfano le relazioni di commutazione di Heisenberg (27). Questo è un risultato non banale della probabilità quantistica: le relazioni di commutazione di Heisenberg emergono naturalmente dalla rappresentazione ciclica associata a un teorema centrale di limite nelle sole ipotesi di:
– indipendenza singleton
– commutatività delle algebre $j_n(\mathcal{B}) := \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$
– due generatori per la $*$–algebra degli stati $\mathcal{B}$
– varianza della forma (41)
– caso di distribuzione identica.
Risultati analoghi permettono di trattare casi molto più generali.

6.4 Il caso q–indipendenza

Per garantire l'esistenza del limite (34) quindi del CLT in condizioni di indipendenza singleton è sufficiente molto meno della commutatività delle algebre $j_n(\mathcal{B}) := \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$. Per esempio ogni relazione, tra i generatori $b^{(j)}$, della forma

$$b_m^{(j)} b_n^{(j)} = \sum_{p,q\in F} q_{ij,pq} b_n^{(p)} b_m^{(q)} + Q\left(b^{(j)}, b^{(j)}\right) \tag{43}$$

dove F è un insieme finito, $Q\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è una forma quadratica su $\mathcal{B}$ e $q_{ij,pq}$ sono numeri complessi, permette di ridurre il calcolo dei momenti misti

$$\varphi\left(j_{\alpha_1}(b^{(i_1)})\cdots j_{\alpha_1}(b^{(j_1)})\cdots j_{\alpha_n}(b^{(i_n)})\cdots j_{\alpha_n}(b^{(j_n)})\right) \tag{44}$$

a combinazioni lineari di momenti che coinvolgono solo singleton e quindi di ripetere gli argomenti della sezione (6.3) dimostrando l'esistenza del limite (34).
Identità del tipo (43), tra un insieme di generatori di un'algebra $\mathcal{B}$, vengono dette relazioni di q–commutazione generalizzate. Se l'insieme dei generatori

è ridotto alla coppia b, b^+ (o a coppie del tipo b_i, b_j^+ con i, j in un insiemem finito F) v. l'Esempio (2) le regole di q–commutazione

$$b_i b_j^+ - q b_j^+ b_i = \delta_{ij} \qquad ; \qquad q \in [-1, 1] \tag{45}$$

interpolano tra la regole di commutazione fermionica e quella bosonica. Oltre alle regole di q–commutazione ci sono vari altri tipi di condizioni algebriche che garantiscono la validità del teorema centrale del limite (relazioni di tipo braid, di tipo Yang-Baxter, ...). Queste sono state studiate in particolare da M. Bozeiko e la sua scuola.
Alcune di queste deformazioni delle regole di commutazione emergono da importanti problemi fisici. In effetti la teoria del limite stocastico ha dimostrato come la elettro–dinamica quantistica senza approssimazione di dipolo conduca naturalmente ad una estensione delle regole di q–commutazione al caso di moduli Hilbertiani (v. sezione (10.4)).

6.5 Indipendenza libera

L'esistenza del limite (34) quindi del CLT in condizioni di indipendenza singleton può essere garantita, oltre che da relazioni di commutazione tra le algebre $j_n(\mathcal{B}) := \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$. anche da relazioni statistiche.
Per esempio, usando la condizione di singleton, l'esistenza del limite (34) viene ridotta all'esistenza di limiti del tipo

$$\lim_{N\to\infty} \{ \prod_{a=1}^{n-q} \varphi_0 \left(b^{(s_{q+a})} b^{(t_{q+a})} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{N^q} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_q=1 \\ \alpha_i \neq \alpha_{i+1}}}^{N} \varphi \left(j_{\alpha_1}(b^{(s_1)}) \cdots j_{\alpha_1}(b^{(t_1)}) \cdots j_{\alpha_q}(b^{(s_q)}) \cdots j_{\alpha_q}(b^{(t_q)}) \right) \} \tag{46}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $\{s_h, t_h\}_{h=1}^n$ è una partizione a coppie di $\{1, \dots, 2n\}$ e dove, per convenzione, se $q = 0$ la parte dipendente da N si pone $= 1$.
Un caso molto semplice, in cui l'esistenza del limite (46) è garantita, si ha quando ciascun termine della sommatoria in (46) è identicamente nullo a meno che non risulti $q = 0$. Ciò accade automaticamente se le algebre $j_n(\mathcal{B}) := \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ soddisfano la condizione di φ–indipendenza libera,

$$\varphi\left(a_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_m} \right) = 0 \tag{47}$$

ogniqualvolta

$$a_{\alpha_j} \in \mathcal{A}_{\alpha_j} \ ; \ \varphi(a_{\alpha_j}) = 0 \ , \ j \in \{1, \ldots, m\} \ ; \ \alpha_j \neq \alpha_{j+1} \tag{48}$$

Sotto questa condizione il limite (34) esiste ma, a differenza del caso bosonico e classico, ha la forma

$$\varphi_\infty \left(X_{b^{(1)}} \cdots X_{b^{(k)}} \right) := \sum_{\{i_h, j_h\}_{h=1}^n \in n.c.p.p.\{1,\ldots,2n\}} \prod_{h=1}^n \varphi_0 \left(b^{(i_h)} b^{(j_h)} \right) \tag{49}$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n.c.p.p.\{1, \ldots, 2n\}$ denota l'insieme delle partizioni a coppie non crossing dell'insieme $\{1, \ldots, 2n\}$. Queste possono essere identificate alle consuete partizioni a coppie $\{i_h, j_h\}_{h=1}^n$ che soddisfano la condizione addizionale che, se $h \neq h'$, gli intervalli

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ i_h \leq n \leq j_h\} \qquad ; \qquad \{n \in \mathbb{N} \ : \ i_{h'} \leq n \leq j_{h'}\}$$

o hanno intersezione vuota o sono contenuti l'uno nell'altro.
Anche in questo caso, se l'insieme dei generatori è ridotto alla coppia b, b^+ (v. esempio (2) della sezione (5.1)), lo stato φ_∞ è univocamente determinato dalla sua matrice di covarianza (40) e il caso di Fock è caratterizzato dalla condizione (41). In questo caso la (49) diventa

$$\varphi_\infty \left((b^+ + b)^{2n} \right) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \varphi_\infty \left(b^+ b \right)^n \tag{50}$$

Il fattore $(2n)!/n!(n+1)!$ è un numero intero (noto in combinatoria come n–mo numero di Catalan) che conta le partizioni a coppie non crossing dell'insieme $\{1, \ldots, 2n\}$. I momenti (50) caratterizzano univocamente la legge del semi–cerchio con covarianza $\sigma^2 := \varphi_\infty (b^+ b)$, cioè la distribuzione di probabilità su $\mathbb{R}$ con densità

$$w_\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \text{ se } \ |x| \leq 2\sigma \\ 0 \text{ se } \ |x| > 2\sigma \end{cases}$$

Le relazioni di commutazione associate danno luogo al caso estremo dell'algebra delle relazioni di q–commutazione corrispondente a $q = 0$, i.e.

$$b_i b_j^+ = \delta_{ij} \tag{51}$$

Negli anni 90 sono stati dimostrati una molteplicità di analoghi liberi di risultati probabilistici classici: sull'addizione di variabili casuali indipendenti sulle relazioni combinatorie fra momenti e cumulanti, (cfr. [Sp98] per una rassegna), sulla struttura dei processi liberi a incrementi indipendenti, ... Si può dire che tutti i principali risultati della probabilità classica siano stati *tradotti* nella probabilità libera.

6.6 Indipendenza libera e matrici random

La nozione di *indipendenza libera* è stata introdotta da Voiculescu (v. la monografia [VoDyNi92]) astraendo le proprietà dei generatori della rappresentazione ciclica, rispetto alla traccia, dell'algebra del gruppo libero con N generatori. Speicher [Sp90] ha dimostrato che le tecniche probabilistiche quantistica, sviluppate nei primi lavori di von Waldenfels per dimostrare i teoremi quantistici di limite centrale, possono essere applicato senza modifiche essenziali per dimostrare varie generalizzazioni del risultato di Voiculescu.
L'indipendenza libera si è rivelata uno strumento utile per lo studio della statistica di importanti classi di matrici casuali $N \times N$ nel limite $N \to \infty$.
In fisica tale problema era stato studiato da Wigner negli anni 50 in relazione ad alcuni modelli fenomenologici di fenomeni nucleari e in questo contesto era emerso il ruolo della legge del semicerchio come limite centrale della distribuzione empirica degli autovalori di alcune classi di matrici random.
Tale studio era rifiorito negli anni 80 a causa dei suoi collegamenti con il così–detto *limite di grande N nella teoria euclidea dei campi quantistici.* Tale limite introduce un parametro fittizio di spin in un modello fisico reale e poi studia le approssimazioni di questo modello quando la dimensione dello spazio degli spin tende all'infinito. L'uso di tecniche di probabilità libera per la soluzione di tale problema è stato suggerito nei lavori [AcArKoVo95], [AcArVo96] e ha condotto alla soluzione del problema ottenuta da I. Arefeva e I. Volovich [ArVo96].
L'entropia logaritmica, introdotta da Voiculescu [Voic94] come analogo libero dell'entropia di von Neumann e Shannon, permette di controllare, come riconosciuto da Ben Arous e Guionnet [BAGu97], le grandi deviazioni del limite di grande N degli ensembles gaussiani. I migliori risultati attualmente conosciuti sono dovuti a Petz e Hiai [HiPe98]).
Questi risultati forniscono un ulteriore esempio di come idee e tecniche di probabilità quantistica possono essere utilizzati per ottenere nuovi e profon-

di risultati in probabilità classica.

6.7 Indipendenza monotona

Il fatto che lo spazio di Fock bosonico (rispettivamente Fermionico) può essere ottenuto come limite centrale di un certo genere di *processi di Bernoulli quantistico* era noto dagli anni 80 [AcBa87] (rispettivamente [Lu89]).
Il risultato analogo per una classe particolare di spazi di Fock interagenti, *spazio di Fock cronologico*, è stato ottenuto da De Giosa e Lu [LuDeG95].
La prova che la distribuzione di vuoto dell'operatore del campo è la distribuzione arcoseno è stata ottenuta successivamente da Lu [Lu95], [Lu96] e, indipendentemente, da Muraki [Mur96a], [Mur96b].
Un nuovo metodo per la derivazione del teorema di limite centrale in probabilità monotona è stato trovato da Liebscher [Liebs97]. Il metodo di Liebscher produce anche una rappresentazione del rumore quantistico risultante in termini di integrali stocastici bosonici e una realizzazione dell'indipendenza monotona nello spazio di Fock bosonico.
La costruzione sistematica della teoria della probabilità monotona, inclusa la *traduzione* di tutti i principali risultati della probabilità classica menzionata alla fine della sezione (6.5) è stata realizzata da N. Muraki.

6.8 Altre nozioni di indipendenza

Ulteriori generalizzazioni algebriche della nozione di indipendenza stocastica sono state studiate da Bozejko e da Speicher [BoSp91]. Accardi, Hashimoto e Obata [Aho98] hanno dimostrato che, considerando la rappresentazione GNS dei gruppi liberi, non rispetto alla traccia ma ad una arbitraria funzione di Haagerup, si è naturalmente condotti ad una nozione di indipendenza che manifesta alcune nuove proprietà qualitative riguardo alle usuali nozioni di indipendenza:
– (i) la condizione di singleton non è soddisfatta
– (ii) non solo le partizioni a coppie, ma anche alcuni singleton (e solo quelli) danno i contributi alla distribuzione limite.
M. Schurmann ha proposto una assiomatizzazione della nozione di indipendenza stocastica in termini di convoluzione di stati su bi–algebre e ha dimostrato che solo 5 tipo di indipendenza soddisfano i suddetti assiomi, cioé le indipendenze: classica, bosonica, libera, monotona e anti–monotona.

L'assiomatizzazione di Schurmann non include l'indipendenza Fermionica.
R. Lenczewsky ha dimostrato che è possibile ridurre tutte le nozini note di indipendenza al caso tensoriale. Tale riduzione si ottiene con una costruzione abbastanza complessa, per cui nelle applicazioni pratiche è preferibile servirsi delle nozioni originarie.
La proliferazione di nozioni di indipendenza stocastiche ha trovato una sua spiegazione teorica in un risultato ottenuto indipendentemente e con metodi completamente diversi da L. Accardi e M. Bozejko [AcBo98] e Cabanal–Duvillard T., Ionescu V. [CabDuvIon97]: comunque data una misura di probabilità P, sulla retta reale, con momenti di ogni ordine, esiste una nozione di indipendenza stocastica tale che la misura P giochi il ruolo di *misura gaussiana* rispetto a tale di indipendenza. Un teorema centrale del limite che realizza in modo semplice e non ad hoc questa situazione è stato dimostrato, nel contesto degli spazi di Fock Interagenti di *tipo a 1 modo* nel lavoro [AcCrLu05] e il quadro è stato completato dal risultato di Krystek e Wojakowski, che hanno dimostrato che la convoluzione, associata alla nozione di indipendenza utilizzata nel lavoro [AcCrLu05] è esattamente la *convoluzione universale*, definita in [AcBo98]. Questi risultati giustificano l'idea di Lenczewsky, che vede le infinite possibilità di nozioni di indipendenza stocastiche come forme di *dipendenze mascherate*.

6.9 Gli spazi di Fock interagenti (IFS) come ambiente naturale per la teoria dei polinomi ortogonali

I tentativi di spiegare l'emergenza di una deformazione non lineare della legge del semi–cerchio in elettrodinamica quantistica hanno condotto all'introduzione della nozione di *spazio di Fock interagente*, che ora è considerato come il candidato naturale per sostituire l'usuale spazio di Fock nel caso di sistemi mutuamente interagenti (l'articolo di di rassegna [AcLuVo97b] contiene una molteplicità di esempi che sostengono quest'affermazione).
Poco tempo dopo Accardi e Bozejko [AcBo98], unificando la tecnica di convoluzione mediante frazioni continue, dovuta a Bozejko, con la nozione di spazio di Fock interagente, hanno provato che lo spazio L^2 di una qualsiasi misura di probabilità μ sulla retta reale, con momenti di ogni ordine, può essere canonicamente identificato con uno spazio di Fock interagente a un modo (cioè un grado di libertà), determinato univocamente dalla sequenza principale, nella relazione tri–diagonale di Jacobi fra i polinomi ortogonali di

μ, im modo tale che l'operatore di posizione nello spazio L^2 (cioè la variabile casuale classica di cui la distribuzione è μ) è trasformato in un operatore di campo generalizzato dello IFS (cioè una combinazione lineare degli operatori di creazione, annichilazione e (una funzione del) numero di tale spazio): questa identificazione è detta *la decomposizione quantistica della variabile casuale classica*.
Infine le relazioni di commutazione fra creatori e annichilatori sono determinati unicamente dalla sequenza principale di Jacobi di μ. Quasta è una generalizzazione, in termini di teoria della probabilità, delle relazioni di commutazione di Heisenberg le quali risultano essere associate alla classe di equivalenza di tutte le misure di probabilità la cui sequenza principale di Jacobi è la successione dei numeri naturali.
Il fatto che sia la misura di Poisson che la gaussiana appartengano a tale classe spiega e generalizza in modo non banale un fatto notato in periodi differenti da differenti ricercatori, cioè che gli spazi L^2 dei processi di Wiener e di Poisson risultino canonicamente isomorfi.
Infine, in tale costruzione, i vettori numero vengono canonicamente identificati con i polinomi ortogonali della misura data che quindi hanno, nell'IFS, lo stesso ruolo che i polinomi di Charlier hanno per il processo di Poisson e quelli di Hermite per il processo di Wiener.
La decomposizione quantistica di una variabile casuale classica è un risultato profondo della probabilità quantistica e in un breve periodo ha trovato una molteplicità di applicazioni in campi differenti sia della matematica che della fisica (v. la sezione seguente).
Una prima conseguenza importante, anch'essa dedotta nel lavoro menzionato sopra, della decomposizione quantistica di una variabile casuale classica con distribuzione di probabilità μ, è che i momenti di vuoto dell'operatore generalizzato di campo, canonicamente associati alla variabile casuale, coincidono con quelli di μ e, usando la decomposizione quantistica, possono essere espressi unicamente in termini di singleton, pesati dalla sequenza secondaria di Jacobi, e partizioni a coppie non crossing, pesate dalla sequenza principale. Poiché nella probabilità classica questa combinatoria caratterizza le distribuzioni gaussiane, questo fenomeno è stato denominato *Gaussianizazione* della misura di probabilità data.
La transizione dal caso di una a quello di molte variabili (cioé da misure su $\mathbb{R}$ a misure su $\mathbb{R}^n$) è un problema tutt'altro che semplice, come si vede dalla notevole differenza fra l'abbondanza di letteratura sulla teoria dei polinomi ortogonali in una variabile e la relativa scarsezza di tale letteratura nel caso

multidimensionale (la maggior parte dei riferimenti in questo campo si trova pricipalmente in pubblicazioni di carattere applicativo).
L'approccio mediante gli spazi di Fock interagenti ha portato alla conclusione [AcKuSt04b] che l'analogo multidimensionale dei coefficenti di Jacobi è determinato da una successione crescente di terne di matrici quadrate (di dimensione crescente): di queste due sono positive definite e Hermiteane (e generalizzano la sequenza principale di Jacobi) ed una è Hermiteana arbitraria (e generalizza quella secondaria).
Nel caso uni–dimensionale queste terne di matrici si riducono a coppie di numeri perché in questo caso $xx^* = x^*x$ e le due sequenze positive sono identiche. Gli invarianti di queste terne (per una relazione di equivalenza che non specificheremo) identificano le classi delle misure polinomialmente equivalenti e ciò apre la strada ad una classificazione puramente algebrica delle misure di probabilità.

6.10 Spazi di Fock interagenti ed asintotica di grandi grafi

Gli spazi di Fock interagenti e la nozione di decomposizione quantistica di una variabile casuale classica hanno permesso di scoprire una relazione tanto fruttuosa quanto inattesa tra le varie nozioni di indipendenza quantistica e l'analisi spettrale di grandi grafi (qui il termine *grande* si riferisce al numero di vertici e la variabile casuale classica è la matrice di adiacenza del grafo).
Accade infatti che, in molti tipi di grafi, la matrice di adiacenza si può esprimere come somma di varibili casuali operatoriali che risultano *indipendenti* per una qualche nozione di indipendenza stocastica dipendente dal grafo stesso. Questo fenomeno è stato scoperto nel caso dei grafi a pettine, per cui la nozione di indipendenza coinvolta è quella monotona [AcBGOb03]. La scoperta è stata motivata da un'interazione tra fisica e matematica, infatti alcuni risultati numerici ottenuti nella letteratura fisica sulla condensazione di Bose-Einstein in grafi irregolari suggerivano l'emergere di una distribuzione di tipo arcoseno: dato che la distribuzione arcoseno è *la gaussiana dell'indipendenza monotona* era naturale sospettare una connessione: questo sospetto è stato poi confermato dall'analisi matematica.
Successivamente il risulato è stato esteso da R. Lenczewsky e da N. Obata ai grafi a stella, associati alla nozione di indipendenza booleana, e da L. Accardi, R. Lenczewsky e R. Salapata [AcLeSa07] ai prodotti liberi di grafi, associati

alla nozione di indipendenza libera. Questi ed altri risultati sono stati successivamente discussi nella monografia di A. Hora e N. Obata [HoOb06] . Parecchi altri autori, tra cui T. Matsui, F. Fidaleo, D. Guido, T. Isola, hanno approfondito gli aspetti probabilistici della condensazione di Bose-Einstein ed alcuni dei loro risultati hanno concrete potenzialità di applicazioni sperimentali.

6.11 Il teorema ergodico entangled

La relazione (34) ha suggerito la seguente estensione non banale dei *teoremi ergodici*. Sia $\mathcal{A}$ uno spazio vettoriale topologico e sia (X_n) una successione di elementi di $\mathcal{A}$. La media aritmetica

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha \quad ; \quad N \in \mathbb{N}$$

viene anche chiamata la media ergodica di ordine N. La convergenza di tali medie, sotto varie condizioni sulla successione $(X_n \in \mathcal{A})$ (che non specificheremo) è oggetto di studio dei *teoremi ergodici*.
La relazione (34) suggerisce una estensione delle medie ergodiche al caso in cui $\mathcal{A}$ è una $*$–algebra e tali medie sono sostituite da espressioni del tipo:

$$\frac{1}{N^n}\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=1}^{N} X_{\alpha_1}\cdots Y_{\alpha_1}\cdots X_{\alpha_n}\cdots Y_{\alpha_n}\cdots$$

dove $N, n \in \mathbb{N}, X_\alpha, Y_\beta \in \mathcal{A}$ e i puntini $\cdots$ indicano l'eventuale presenza di elementi di tipo X_α o Y_β tra due elementi X_{α_j} e Y_{α_j} corrispondenti allo stesso indice α_j.
Se $\mathcal{A}$ è commutativa tali medie si riducono a espressioni del tipo

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha_n=1}^{N} X_{\alpha_1}Y_{\alpha_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha_n=1}^{N} X_{\alpha_n}Y_{\alpha_n}\right)$$

cioè a prodotti di consuete medie ergodiche. Se $\mathcal{A}$ non è commutativa, questa riduzione non è possibile poichè i prodotti sono *intrecciati* (entangled).
Da ciò il nome *entangled ergodic theorems*.
In tal caso le tecniche consuete di teoria ergodica non si possono applicare e quindi per dimostrare la convergenza delle medie ergodiche entangled sono necessarie nuove idee. Alcuni risultati in questa direzione sono stati ottenuti da V. Liebscher [ ] e da F. Fidaleo [ ].

7 Dipendenze stocastiche: attese condizionate

Il problema del condizionamento è un altro esempio in cui la transizione dalla probabilità classica a quella quantistica non si riduce ad una traduzione più o meno automatica: le proprietà matematiche nei due casi sono notevolmente differenti e ciò riflette una differenza profonda tra la fisica classica e quella quantistica: il ruolo passivo della misura nel primo caso, attivo nel secondo. Tale ingrediente mancava nello schema unificante di von Neumann, per la probabilità classica e quantistica. In particolare von Neumann aveva introdotto l'analogo quantistico della densità di probabilità (matrice densità) ma l'analogo della densità di probabilità condizionata era assente.
Per studiare dipendenze statistiche non banali (corrispondenti in fisica a sistemi mutuamente interagenti), in particolare per costruire l'analogo quantistico delle catene di Markov, occorreva colmare questa lacuna.
Un primo tentativo in questa direzione, motivato da precedenti lavori di Doob e Moy, nel caso commutativo, e di I. Segal nel caso a traccia, aveva condotto alla nozione di *attesa condizionata di Umegaki* [Ume54] da una $*$–algebra $\mathcal{A}$ su una sua sotto–$*$–algebra $\mathcal{A}_0$ come una applicazione lineare completamente positiva $E : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ tale che

$$a \geq 0 \Rightarrow E(a) \geq 0 \; ; \; a \in \mathcal{A} \tag{52}$$

$$E(a_0 a) = a_0 E(a) \; ; \; a_0 \in \mathcal{A}_0, \; a \in \mathcal{A}$$

$$E(1) = 1$$

$$E(a)^* E(a) \leq E(a^* a) \; ; \; a \in \mathcal{A}$$

E è detta *compatibile* con uno stato φ su $\mathcal{A}$, se questo è invariante per applicazione di E, i.e. se

$$\varphi \circ E = \varphi$$

Un'attesa condizionata di Umegaki su una C^*–algebra è una proiezione di norma uno su una sotto–algebra. Questa nozione è molto importante nella teoria delle algebra di operatori e in probabilità quantistica. Tuttavia, per gli scopi specifici della probabilità quantistica, in particolare per la costruzione delle catene di Markov quantistiche, essa è troppo restrittiva.
Per esempio, quando l'algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, cioè nel caso classico, ogni sottoalgebra di $\mathcal{A}$ è l'immagine di una attesa condizionata di Umegaki E e

se φ è uno stato su $\mathcal{A}$, allora è sempre possibile scegliere E compatibile con φ. Nessuna di queste proprietà è vera nel caso quantistico: una sottoalgebra di $\mathcal{A}$, che è l'immagine di una attesa condizionata di Umegaki viene detta *attesa*. Inoltre si puó dimostrare che in molti modelli interessanti (e.g. i prodotti tensoriali di algebre di matrici, che descrivono sistemi di spin quantistici), un'attesa condizionata di Umegaki puó essere compatibile solo con stati prodotto. Ciò differisce profondamente da quanto accade nel caso classico ed è abbastanza insoddisfacente da un punto di vista probabilistico perché il ruolo del condizionamento è precisamente quello di descrivere le *dipendenze statistiche*, i.e. le deviazioni di uno stato dall'essere uno stato *prodotto*. Anche dal punto di vista delle applicazioni alla fisica la situazione è insoddisfacente poichè gli stati prodotto descrivono solo sistemi non interagenti. Per questi motivi è stato necessario introdurre una nozione di *attesa condizionata generalizzata* che permetta di considerare anche i casi fisicamente e matematicamente non banali.
La soluzione del problema del condizionamento quantistico è stata ottenuta prima nel caso di algebre di von Neumann di tipo I [Ac74], poi nel caso generale [AcCe82]. Attraverso i risultati successivi di vari autori tra cui D. Petz [Pe84], [Pe88], R. Longo [Lo84], Connes-Narnhofer-Thirring, A. Majewsky, B. Zegarlinsky, ... le attese condizionate generalizzate sono divenute uno strumento utile non solo nella probabilità quantistica, ma anche nella soluzione di alcuni problemi aperti di teoria degli operatori e della teoria algebrica dei campi come la congettura di Stone-Weierstrass per i fattori, la teoria delle standard split W*-inclusions, la costruzione del morfismo canonico, le estensioni quantistiche della nozione di entropia di Kolmogorov, ...
Sulla nozione di attesa condizionata generalizzata è basata lo studio, dovuto a Cecchini e Petz delle *estensioni di stati* (o lifting) su algebre di von Neumann, che oggi è spesso usata nella teoria dell'informazione quantistica, nonchè l'analisi di Cecchini delle varie nozioni di Markovianità nelle algebre di von Neumann.
Nelle attese condizionate generalizzate (generiche) la proprietà di proiezione viene persa. Ciò è la controparte matematica della differenza principale fra la fisica classica e quella quantistica: nella fisica classica una misura non disturba il sistema misurato e quindi realizzare due volte la stessa misura è equivalente a realizzare una singola misura (proprietà di proiezione). Nella fisica quantistica le cose vanno diversamente.

8 Dipendenze stocastiche locali: Markovianità

La nozione di attesa condizionata generalizzata ha reso possibile la costruzione delle catene di Markov quantistiche (QMC).
Questo problema era stato considerato da molti ricercatori sia in fisica che in matematica. In particolare, negli anni 1970, la teoria rigorosa della meccanica statistica classica di equilibrio per sistemi classici di spin su reticoli trova una sua formulazione matematica soddiscfacente nella teoria di Dobrushin e il problema di estendere questi risultati ai sistemi di spin quantistici era stato considerato da Araki e poi da altri autori. Era noto che, nel caso classico, interazioni di tipo *prossimi vicini* davano luogo a campi stocastici Markoviani e, nella sua introduzione all'edizione russa del libro di D. Ruelle sui metodi probabilistici in meccanica statistica classica, J.G. Sinai aveva enunciato il problema di estendere tali risultati al caso quantistico.
Negli stessi anni metodi di probabilità classica erano stati introdotti con successo nella teoria euclidea dei campi bosonici attraverso i lavori di Symanzik e di Nelson e la speranza di ottenere risultati simili per i campi fermionici aveva condotto naturalmente al problema di estendere queste nozioni probabilistiche al caso non commutativo.
Il problema di dare una formulazione generale della proprietà di Markov quantistica, di dedurre da questa costruzioni di esempi significativi di processi markoviani quantistici (catene nel caso discreto) e di dimostrare che tali processi sono canonicamente associati ad analoghi quantistici dei semigruppi di Markov classici (generalizzazioni irreversibili dell' equazione di Schroedinger), è stato risolto in [Ac74].
I lavori [Ac76], [Ac78a] studiano e risolvono in alcuni casi particolari, il problema opposto, successivamente divenuto noto sotto il nome di *problema della dilatazione*, cioè: dato un semigruppo di Markov quantistico, quali informazioni supplementari sono necessarie per costruire un processo markoviano quantistico tale che il semigruppo markoviano canonicamente associato ad esso sia quello dato?
Nel caso classico soltanto la distribuzione iniziale è necessaria.
Nel caso quantistico questo è vero soltanto al costo di ottenere un processo debole (cioè tale che gli omomorfismi che definiscono le variabili casuali non conservano l'dentità) [BhP95].
La costruzione delle catene di Markov quantistiche ha richiesto l'introduzione

di nuove idee e di nuovi oggetti matematici che ancora oggi attraggono gli sforzi di matematici, fisici matematici, fisici, esperti di teoria quantistica dell'informazione, ...

8.1 Applicazioni delle catene di Markov quantistiche alla fisica

L'importanza delle catene di Markov quantistiche sta nel fatto che esse costituiscono il primo esempio non banale di stati su prodotti tensoriali infiniti di C*–algebre che non siano stati prodotto e le cui distribuzioni finito dimensionali siano esplicitamente costruibili in termini di oggetti relativamente semplici. Se $\mathcal{C}(S)$ denota la C*–algebra delle funzioni continue su uno spazio compatto S, il prodotto tensoriale infinito $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{C}(S)$ è naturalmente identificato alla C*–algebra $\mathcal{C}(\prod_{\mathbb{N}} S)$ delle funzioni continue sullo spazio delle successioni $\Omega := \prod_{\mathbb{N}} S$. In questo senso uno stato su un prodotto tensoriale infinito di C*–algebre si può pensare come un analogo non commutativo di una misura su uno spazio funzionale.
Date due C*–algebre $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ una *attesa di transizione* da $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1$ è un'applicazione completamente positiva $\mathcal{E} : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0$ che soddisfa

$$\mathcal{E}(1_1 \otimes 1_0) = 1_0$$

Se $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 =: \mathcal{B}$ diremo che $\mathcal{E}$ è un'attesa di transizione su $\mathcal{B}$. Data un'attesa di transizione $\mathcal{E}$ da $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}_0$, e uno stato φ_0 su $\mathcal{B}_0$, *la catena di Markov* associata alla coppia $\{\varphi_0, (\mathcal{E})\}$ è lo stato φ on $\otimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_1$ caratterizzato dalla proprietà che, per ogni intero n ed ogni $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}_1$, si ha

$$\varphi_0\Big(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1_1 \otimes \ldots\Big) = \varphi_0\Big(a_0 \otimes \mathcal{E}(a_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}(a_n \otimes 1_0))\Big)$$

Circa 16 anni dopo la loro introduzione, cioé all'inizio degli anni 1990, l'interesse dei fisici per le catene di Markov quantistiche ha subito un forte incremento grazie alla comprensione, dovuta a Fannes, Nachtergaele, Werner [FNW92a], [FNW92b], [FNW94], del fatto che queste includono i cosidetti *valence bond states*, introdotti e studiati da noti fisici teorici, quali Anderson, Affleck e altri, nel tentativo di spiegare il fenomeno della superconduttività ad alte temperature. Oggi le QMC sono divenute un oggetto standard nello studio non solo nella fisica matematica (dove sono anche chiamate stati C*-finitamente correlati), ma anche in discipline più direttamente collegate alla

fisica, dove sono chiamate stati di tipo Bethe ansatz.
L'uso di tecniche della teoria generale ha permesso a questi autori di risolvere alcuni problemi che nelle letteratura fisica erano aperti (come il problema del mass gap per tali modelli) o risolti solo in casi molto particolari e con metodi computazionali che lasciavano poco spazio all'intuizione degli elementi essenziali. Nel caso di catene di Markov quantistiche su prodotti tensoriali infiniti di algebre di matrici (ma la definizione originariamente data di catene di Markov quantistiche non richiede questa limitazione) Fannes, Nachtergaele e Werner hanno ottenuto una molteplicità di nuovi risultati matematici per esempio la dimostrazione del fatto che le catene di Markov mixing che corrispondono ai modelli di tipo valence bond states sono stati puri, la completa decomposizione ergodica di una qualsiasi catena di Markov su prodotti tensoriali di algebre di matrici, la realizzazione di alcune classi di tali catene come ground states di particolari Hamiltoniane con interazioni di tipo prossimi vicini. In questa direzione un risultato molto interessante è dovuto Matsui [Mat98] che ha dimostrato che uno stato invariante per traslazione e mixing è uno stato fondamentale (ground state) di energia zero per una Hamiltoniana con interazione a prossimi vicini invariante per traslazione se e soltanto se è una catena di Markov pura quantistica e, se l'Hamiltoniana soddisfa una condizione supplementare di non degenerazione, persino uno stato finitamente correlato. Un Hamiltoniana a prossimi vicini su un reticolo uni–dimensionale è una somma formale di operatori auto–agiunti, ciascuno dei quali è localizzato su due siti successivi del reticolo (una tale Hamiltoniana ha un significato rigoroso come derivazione sull'algebra delle osservabili quasi–locali e, da un teorema di Sakai è noto che essa genera una dinamica quantistica).
Uno stato di energia zero per una tale hamiltoniana è uno stato che attribuisce media zero a ciascuno di questi operatori esclusivamente e non solo, come un usuale ground state, alla loro somma.
Negli anni 1970 le catene di Markov quantistiche erano state introdotte in analogia con gli stati di Gibbs della meccanica statistica; la scoperta dell'esistenza di stati di Markov puri che inoltre sono ground state di hamiltoniane d'interesse fisico ha notevolmente ampliato il campo d'applicazione di questi oggetti matematici.

8.2 Processi di Markov quantistici con parametro continuo

Quando un'attesa condizionata di Umegaki esiste, la teoria quantistica dei processi markoviani diventa una semplice riformulazione algebrica di quella classica (v. [Ac78b]). Anche se meno eccitante da un punto di vista teorico, questa sottoclasse dei processi markoviani quantistici, *i processi attesi*, è importante poiché quasi tutti gli esempi attualmente conosciuti di processi markoviani quantistici a tempo continuo sono inclusi in essa.
Nel seguito esporremo le idee e alcuni dei risultati principali di questa teoria.
Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra. Una *filtrazione passsata* su $\mathcal{A}$ è una famiglia $\{\mathcal{A}_{t]}\}$ di C*-algebre contenute in $\mathcal{A}$ e tali che, se $s \leq t$, allora $\mathcal{A}_{s]} \subseteq \mathcal{A}_{t]}$. Similmente si definisce una *filtrazione futura* $\{\mathcal{A}_{[t}\}$. Per ogni intervallo chiuso $[s,t]$ l'*algebra locale* $\mathcal{A}_{[s,t]}$ è per definizione $\mathcal{A}_{[s} \cap \mathcal{A}_{t]}$; l'algebra $\mathcal{A}_{[t,t]}$ è chiamata l'*algebra del presente al tempo* t e si denota $\mathcal{A}_{\{t\}}$.
Un gruppo a un parametro u_t di endomorfismi di $\mathcal{A}$ che soddisfa la relazione $u_s(\mathcal{A}_{t]}) \subseteq \mathcal{A}_{t+s]}$ (e quelle simili per le algebre del passato e del presente) e tale che ogni u_t ha un inverso sinistro, che denoteremo u_t^*, è detto uno *shift* temporale per le corrispondenti filtrazioni. L'esistenza di uno shift temporale implica che le algebre a tempo fisso $\mathcal{A}_t$ sono tutte isomorfe a una algebra fissa $\mathcal{B}$, independente da $t \in T$ e chiamata, a seconda dell'interpretazione, l'*algebra iniziale* o l'*algebra del sistema* (v. sezione.
Nel seguito denoteremo j_0 l'identificazione di $\mathcal{B}$ con $\mathcal{A}_0$.
Un'applicazione completamente positiva $E_{t]} : \mathcal{A}_{t]} \to \mathcal{A}_{s]}$ è detta *Markoviana* se condizionando il futuro sul passato si ottiene qualcosa nel presente:

$$E_{s]}(\mathcal{A}_{[s,t]}) \subseteq \mathcal{A}_{\{s\}} \qquad ; \qquad \forall s < t$$

Essa è detta *projettiva* se

$$E_{s]} \cdot E_{t]} = E_{s]} \qquad ; \qquad s < t$$

Le applicazioni $E_{t]}$ sono dette covarianti rispetto allo shift temporale, se

$$u_r \circ E_{t]} = E_{t+r]} \circ u_r$$

In queste ipotesi, la famiglia a un parametro

$$P_t^0 = E_{0]} \circ u_t \mid_{\mathcal{A}_0} \qquad ; \qquad t \geq 0$$

dove $|_{\mathcal{A}_0}$ denota la restrizione, è un *semigruppo Markoviano* di $\mathcal{A}_0$ in se, cioé un semigruppo di applicazioni completamente positive che conservano l'identità. Identificando $\mathcal{A}_0$ a $\mathcal{B}$ mediante j_0 si ottiene un semigruppo Markoviano su $\mathcal{B}$ e la terna $\{\mathcal{A}, (u_t), j_0\}$, è chiamata una *dilatazione* del semigruppo $P_t^0 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

8.3 Funzionali moltiplicativi

Una famiglia a due parametri $m_{r,t}$ di applicazioni completamente positive di $\mathcal{A}_0$ in se che, per ogni $r < s < t$ soddisfa le condizioni

$$m_{r,s} \circ m_{s,t} = m_{r,t} \tag{53}$$

$$m_{s,t}(\mathcal{A}_{[s,u]}) \subseteq \mathcal{A}_{[s,u]}$$

$$m_{r,s} \circ E_{t]} = E_{t]} \circ m_{r,s}$$

$$m_{s,t}(1) = 1$$

$$u_r^0 \circ m_{s,t} = m_{s+r,t+r} \circ u_r^0$$

è detta un *funzionale moltiplicativo omogeneo* , in analogia con la probabilità classica. In particolare, la famiglia a un parametro

$$P^t := E_{0]} \circ m_{0,t}$$

è un semigruppo, detto una *perturbazione di Feynman–Kac* del semigruppo P_t^0. Questa tecnica perturbativa è chiamata la *formula di Feynman-Kac quantistica* ed è alla base di tutte le note costruzioni di processi di Markov quantistici a tempo continuo. I funzionali moltiplicativi omogenei che soddisfano una equazione differenziale stocastica sono chiamati *flussi stocastici* .

8.4 Funzionali moltiplicativi ed evoluzioni quantistiche

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico é uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e si studiano le evoluzioni dinamiche descritte dalle equazioni della forma

$$\partial_t U_{s,t}^{(\lambda)} = -iH_I(t)U_{s,t} \qquad ; \qquad U_{s,s} = 1; \qquad s \le t \tag{54}$$

dove, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $H_I(t)$ è un operatore auto–aggiunto e $U_{s,t}$ è un operatore unitario che agisce su $\mathcal{H}$. Supponiamo che l'equazione (54) ammetta un'unica soluzione globale (cioé per definita ogni $t \geq s$). L'unicità implica che $U_{s,t}$ sia una evoluzione (*evoluzione di Schroedinger*), cioè.

$$U_{r,s}U_{s,t} = U_{r,} \qquad ; \ r \leq s \leq t \tag{55}$$

Di conseguenza, se definiamo l'*evoluzione di Heisenberg* associata a $U_{r,s}$ mediante

$$j_{s,t}(x) := U^*_{s,t} x U_{s,} \qquad ; \ r \leq s \leq t \tag{56}$$

con $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, vediamo che $j_{s,t}$ soddisfa l'equazione di flusso:

$$j_{r,s} \circ j_{s,t} = j_{r,} \qquad ; \ r \leq s \leq t \tag{57}$$

Come si vede le equazioni (55), (57) hanno la stessa struttura dell'equazione (53), che definisce i funzionali moltiplicativi. In particolare lo studio di equazioni deterministiche di evoluzione conduce ai flussi usuali. Lo studio di equazioni di evoluzione guidate da un rumore bianco conduce a flussi stocastici, la ulteriore condizione di località definisce i flussi markoviani.
Così il problema dello studio della struttura delle evoluzioni dinamiche non lineari è equivalente a determinare la struttura dei flussi markoviani.
Riassumendo: *formulando algebricamente la teoria delle probabilità classica, automaticamente si ottiene un'unificazione del problema fondamentale del calcolo stocastico classico con il problema fondamentale della meccanica quantistica*!
Questa unificazione permette di introdurre idee e tecniche di una disciplina nell'altra con mutui benefici.

8.5 Semigruppi di Markov quantistici

La struttura dei generatori dei semigruppi di Markov quantistici è stata chiarita, nel caso finito dimensionale in [GKS76] e, poco dopo, nel caso continuo in norma, in [Li76]. Il risultato è il seguente.

Teorema 2 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Un operatore lineare normale $L : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è il generatore di un semigruppo di Markov uniformemente continuo su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se e soltanto se L ha la forma*

$$La = i[h, a] + \sum_{j=1}^{\infty} \left(B^*_j a B_j - \frac{1}{2}\{B^*_j B_j, a\} \right) \quad ; \quad a \in \mathcal{A} \tag{58}$$

dove $h = h^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e i $B_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono tali che la serie $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^* B_j$ converge nella topologia ultra–debole.

Una descrizione generale dei generatori di semigruppi di Markov fortemente continui, ancora manca. I migliori risultati attualmente disponibili, che coprono parecchi casi importanti per le applicazioni, sono dovuti a Chebotarev e Fagnola i quali hanno derivato test di verifica dell'esistenza, unicità, unitarietà delle soluzioni per generatori classici e quantistici [CheFa93], basati su alcune diseguaglianze che, in molti casi importanti, possono direttamente essere verificate.

9 Calcolo stocastico quantistico

Il problema della costruzione di processi markoviani quantistici si riduce, attraverso la formula di Feynman–Kac quantistica, alla costruzione di cocicli di markov unitari . Tuttavia le tecniche usate a tal fine erano ancora basate su metodi standard di teoria degli operatori.
La situazione è cambiata con l'introduzione del calcolo stocastico quantistico da parte di Hudson e Parthasarathy [HuPa84] e con la loro dimostrazione del fatto che questa nuova tecnica, puramente di probabilità quantistica, permette di costruire cocicli di Markov unitari e quindi processi markoviani quantistici.
Il moto browniano quantistico, alla base del nuovo calcolo, era già stato utilizzato nella letteratura fisica, ma il processo di Poisson quantistico era un nuovo il contributo di questi autori e fornisce un nuovo importante strumento matematico per la descrizione dei sistemi fisici.
La generalità e flessibilità di nuovo metodo, le sue potenziali applicazioni alla fisica, i suoi profondi collegamenti con la probabilità classica, hanno motivato una attività intensa e si può dire che la parte preponderante dei lavori in probabilità quantistica nella decade 1980–1990 risulta in un modo o nell'altro collegata con il calcolo stocastico quantistico.
Una sintesi degli aspetti matematici del calcolo stocastico quantistico, fino ai primi anni 1990, è contenuta nella monografia [Par92] e materiale supplementare su argomenti specifici può essere trovato nella serie QP (v. la bibliografia), in alcuni volumi della serie Seminaire de Probabilites, nella monografia di P. A. Meyer [Mey93]. Infatti, con efficace sostegno di P.A. Meyer, le idee del calcolo stocastico quantistico e alcune idee della QP hanno cominciato a estendersi fra i probabilisti classici.

Il calcolo stocastico quantistico è un ingrediente di base di un altro successo importante di questa decade: la teoria del *filtraggio e della previsione quantistica* dovuta a Belavkin [Bel85].
Essa permette di sfruttare l'intere informazione sul processo stocastico, contenuta nel cociclo di Markov unitario, soluzione di una SDE, e non solo le informazioni parziali contenute nel generatore del semigruppo Markoviano (equazione master).
In concreti modelli fisici, per esempio atomi che interagiscono con un campo elettromagnetico di radiazione, questo fa una grande differenza perché il semigruppo Markoviano permette soltanto di valutare tempi di decadimento e shift di energia nei livelli atomici, mentre il processo contiene informazioni misurabili su quantità riguardanti il campo quali la statistica di conteggio dei fotoni, che è legata all'intensità della radiazione [Bar86].
Attualmente gli ingredienti di base del filtraggio quantistico sono, più o meno esplicitamente, presenti in tutti i modelli del processo di misura quantistico basati sul calcolo stocastico quantistico o classico.
Una descrizione dei flussi che possono essere ottenuti mediante la procedura di filtraggio si può trovare in [Bel97].

9.1 Calcolo stocastico Bosonico in rappresentazione di Fock

Le variabili casuali W_t del processo di Wiener standard a valori reali, agiscono per moltiplicazione sullo spazio–L^2 del processo dando luogo a operatori autoaggiunti (moltiplicazioni per funzioni) denotati Q_t ($Q_t f(\omega) = W_t(\omega) \cdot f(\omega) \quad ; \quad f \in L^2$). *Ruotando* il processo Q_t, considerato come un processo a valori operatoriali, mediante un operatore unitario U, si ottiene un nuovo processo $U^* Q_t U =: P_t$, unitariamente isomorfo al processo di Wiener originale. Se l'operatore unitario U è scelto come l'analogo infinito–dimensionale della trasformata di Gauss-Fourier, introdotta da Wiener e Segal, la coppia di processi Q_t, P_t soddisfa le relazioni di commutazione di Heisenberg $[Q_s, P_t] = is \wedge t$. Una coppia Q_s, P_t di processi a valori operatoriali con le proprietà dette sopra è chiamata un *moto browniano quantistico standard* . Questo processo quantistico è stato introdotto negli anni sessanta nello studio dei sistemi quantistici dissipativi e in ottica quantistica in connessione con la teoria del laser. Il calcolo stocastico classico è stato generalizzato a quasto processo da Hudson e Parthasarathy ed ha condotto a una serie di nuovi modelli e risultati nella teoria quantistica. Gli stessi autori hanno introdotto, sullo stesso spazio, il *processo numero (o gauge)* come una generalizzazione quantistica del consueto processo di Poisson.

9.2 Calcoli stocastici

Utilizzando il carattere funtoriale della realizzazione di una variabile casuale con legge del semi–cerchio in termini di operatori di creazione e annichilazione su un'appropriata algebra tensoriale (spazio Fock *pieno* (full) o boltzmaniano), Ḱummerer e Speicher hanno introdotto il *moto browniano libero* e sviluppata la corrispondente teoria di integrazione stocastica libera [K üSp92].
Motivato da questo risultato Fagnola ha mostrato, nella nota [Fag90], come questa nozione di integrazione stocastica può essere inclusa nella struttura generale proposta in [AcFaQu90] come tentativo di unificare le, ormai proliferanti, nozioni di integrale stocastico quantistico nello stesso senso in cui, nella probabilità classica, la nozione generale di semi–martingala permette di evitare la necessità di sviluppare *ex-novo* una teoria differente di integrazione stocastica per ogni nuova classe di semi–martingale.

10 Il limite stocastico della teoria quantistica

Poco dopo l'introduzione delle equazioni differenziali stocastiche quantistiche queste equazioni cominciarono ad essere usate per costruire modelli fenomenologici di concreti sistemi quantistici, per esempio in ottica, nella teoria della misura, nella teoria della conduttività, ...
Tuttavia le equazioni fondamentali della teoria quantistica non sono di tipo stocastico ma deterministico, come l'equazione di Schroedinger o quella di Heisenberg. Di conseguenza si é presentato naturalmente il problema di comprendere il significato fisico di questi modelli fenomenologici.
Il limite stocastico della teoria quantistica è stato sviluppato per spiegare l'emergere delle equazioni differenziali stocastiche quantistiche, in particolare nella descrizione dei fenomeni quantistici dissipativi e di trasporto, per identificare le origini fisiche, noché la struttura microscopica, di cosiddetti rumori quantistici (anche chiamati master fields), primi tra tutti il moto browniano

e il processo di Poisson bosonico.
Questo passo era necessario per rendere il calcolo stocastico quantistico uno strumento effettivamente applicabile alla fisica quantistica.
Infatti la definizione di questi processi coinvolge parecchie quantità, come la varianza, lo spazio degli stati lo spazio delle molteplicità e, nel caso del processo di Poisson, la scelta di un operatore unitario.
Il problema era di dedurre la struttura di queste quantità dalle leggi hamiltoniane di base della teoria quantistica in modo da superare il livello puramente fenomenologico dei modelli utilizzati nelle numerose applicazioni alla fisica del calcolo stocastico quantistico.
Il risultato principale di questi lavori è stata la spiegazione del meccanismo attraverso il quale le equazioni differenziali stocastiche quantistiche emergono dalle usuali equazioni di Schroedinger e di Heisenberg attraverso una procedura di limite che generalizza in modo non banale i teoremi centrali di limite descritti nella sezione (5).
Il problema è stato risolto inizialmente per le diffusioni quantistiche, cioè processi stocastici costruiti a partire dal solo moto browniano quantistico [AcFrLu87], [AcFrLu90]. Il problema, molto più difficile, della determinazione delle origini dinamiche del processo di Poisson quantistico è stato risolto successivamente [AcLu91a], [AcLu91b].
Il problema del limite stocastico, come molti problemi matematici, è facile da formulare e difficile da risolvere: il contesto di partenza è un sistema quantistico con infiniti gradi di libertà (tipicamente un campo quantistico o un gas a volume infinito) o auto–interagente o, più spesso, accoppiato con un reticolo atomico o di spin, nel cosiddetto schema dei sistemi aperti, mediante un parametro reale $\lambda > 0$ (per esempio un costante di accoppiamento o una densità).
Motivati sia da argomenti di natura matematica ispirati ai teoremi centrali di limite che di natura fisica risalenti a Friedrichs, Pauli van Hove, si ri–scala il tempo secondo il quadrato del parametro λ: $t \mapsto t/\lambda^2$. Ciò induce il ri–scalamento di alcune quantità fisiche interessanti (tipicamente i campi) e dà luogo ad un nuovo sistema dinamico del quale si studia il comportamento nel limite $\lambda \to 0$.
La nozione di convergenza di una famiglia a 1 parametro di sistemi dinamici quantistici a un altro sistema dinamico si può rendere precisa una versione quantistica della nozione probabilistica di convergenza in legge il cui significato fisico è che tutti i valori di attesa fisicamente interessanti convergono a un limite e la famiglia di questi limiti definisce univocamente un sistema

dinamico limite attraverso un teorema di ricostruzione.
La difficoltà è che non c'è spazio per introdurre ipotesi ulteriori, come si fà abitualmente nei modelli fenomenologici: L'unica cosa che si pone dall'esterno è il riscalamento del tempo: tutto il resto deve essere dedotto.
Inoltre i teoremi astratti di esistenza sono inutili: la forma del limite, in particolare delle costanti che compaiono in esso, deve essere abbastanza esplicita permettere applicazioni non banali alla fisica.
Il significato fisico del riscalamento temporale $t \mapsto t/\lambda^2$ è che esso separa i gradi di libertà veloci da quelli lenti.
Nei modelli più semplici nel limite $\lambda \to 0$ i primi rimangono invariati e gli altri danno luogo a un nuovo tipo di campo, denominato rumore quantistico nella terminologia dell'ottica quantistica e campo master, nella terminologia di teoria dei campi.
Nei modelli più complessi (il prototipo dei quali è la QED non relativistica senza approssimazione di dipolo) dopo il limite $\lambda \to 0$ i due tipi di gradi di libertà risultano intrecciati anche a un livello cinematico (per esempio nel caso della QED i gradi di libertà atomici sviluppano regole di commutazione non banali con i campi). In tutti i casi il problema consiste nella comprensione della struttura del rumore quantistico limite (che, nei modelli più semplici, è un moto browniano quantistico) e nel dimostrare che il limite dell'evoluzione di Heisenberg (o di Schroedinger) in rappresentazione d'interazione esiste, è un automorfismo (operatore unitario) e soddisfa un'equazione di Langevin (Schrödinger) stocastica quantistica determinata dal suddetto rumore quantistico.

10.1 Un esempio

Lo schema generale, descritto nella sezione precedente, si può sostanziare in molti modi, che dipendono dal tipo di campo o di gas, (bosonico, fermionico, scalare, vettoriale, ...), dal suo stato iniziale, dall'interazione, dal sistema con cui interagisce, dal significato del parametro λ (costante di accoppiamento, densità, ...), ... Nel seguito illustreremo tale schema nel caso di un campo scalare bosonico nello stato di Fock, interagente con un sistema S a spettro discreto e in questo caso il parametro λ è una costante di accoppiamento. Questo modello fisico è stato il primo per cui è stato possibile calcolare il limite stocastico e versioni semplificate di tale modello sono molto usate in ottica quantistica e in fisica dello stato solido.
Il punto di partenza è la usuale equazione di Schroedinger nella rappresen-

tazione di interazione

$$\partial_t U_t^{(\lambda)} = -i\lambda(DA^+(S_t g) - D^+ A(S_t g))U_t^{(\lambda)} \tag{59}$$

che descrive un sistema S, con spazio degli stati $\mathcal{H}_S$, interagente con un campo bosonico, con operatori di creazione e annichilazione dati da $A^+(g), A(g)$, dove g è una funzione test nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ e S_t è un gruppo unitario a 1–parametro su $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'interazione é definita da D, D^+, che sono operatori sullo spazio del sistema $\mathcal{H}_S$.
Il riscalamento del parametro temporale secondo la legge $t \hookrightarrow t/\lambda^2$ conduce ad un'equazione della forma:

$$\partial_t U_{t/\lambda^2}^{(\lambda)} = (Da_t^{(\lambda)+} - D^+ a_t^{(\lambda)})U_{t/\lambda^2}^{(\lambda)} \tag{60}$$

dove l'espressione degli operatori $a_t^{(\lambda)+}, a_t^{(\lambda)}$ dipende sia dalla Hamiltoniana di interazione che da quella libera. Poi si dimostra che, per $\lambda \to 0$, la soluzione di questa equazione, data dalla serie iterata (la cui convergenza non è essenziale al fine del risultato) converge, in un senso che è una naturale generalizzazione quantistica della nozione probabilistica di convergenza in legge, alla soluzione della equazione differenziale stocastica quantistica

$$dU_t = \left(DdB_t^+ - D^+ dB_t + \left(-\frac{\gamma}{2} D^+ D + iH\right) dt\right) U_t \tag{61}$$

dove $H = \kappa D^+ D$, $\gamma > 0$ e κ sono numeri reali la cui forma esplicita può essere data in termini del modello Hamiltoniano iniziale. Tale forma esplicita è molto importante dal punto di vista fisico poiché γ controlla le proprietà di dissipazione e trasporto e κ descrive una generalizzazione del famoso *Lamb shift* che, tramite il limite stocastico, può ora essere interpretato come una *correzione di Ito quantistica.*
Infine B_t^+, B_t é il moto browniano con varianza $\gamma > 0$ che agisce sullo spazio di Fock bosonico dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}$ dove $\mathcal{K}$ è uno spazio di Hilbert di cui la struttura esplicita è descritta in termini dell'evoluzione libera del sistema e della hamiltoniana d'interazione e che in termini fisici può essere interpretato come *spazio delle polarizzazioni.*

10.2 Strutture matematiche emerse dal limite stocastico della teoria quantistica

Probabilmente non è un caso che le tre nuove nozioni e tecniche su cui l'attuale programma di ricerca è basato, vale a dire:

(i) la nozione dello spazio di Fock interagente (IFS)
(ii) l'idea che interazioni non lineari estremamente complesse possono essere codificate in relazioni di commutazione relativamente semplici realizzate su un modulo (invece che uno spazio) di Hilbert
(iii) lo sviluppo del calcolo del rumore bianco quantistico come generalizzazione naturale del calcolo stocastico quantistico e classico
siano state scoperte in relazione ad uno dei più difficili modelli fisici per il quale è stato possibile determinare il limite stocastico: l'elettrodinamica quantistica non relativistica (QED) senza approssimazione di dipolo, cioè la teoria dell'interazione degli atomi con il campo elettro–magnetico.
Queste 3 nozioni sono matematicamente distinte e ciascuna di esse viene studiata separatamente dalle altre. Tuttavia, sin dalle loro origini, queste tre nozioni sono state profondamente correlate a livello di motivazione, di esemplificazione e di tecniche e, dal seguito di questa esposizione, risulterà chiaro che queste interrelazioni saranno ancora più forti in futuro.

10.3 Emergere dei moduli Hilbertiani nel limite stocastico della QED

La nozione di spazio di Fock interagente è collegata intimamente con un altra caratteristica innovativa emersa nel limite stocastico della QED:
lo spazio degli stati della QED (cioé del sistema composto *atomo + campo master*) è descritto, invece che da uno spazio di Hilbert, da un *modulo di Hilbert* sull'algebra generata dall'operatore momento (quantità di moto) delle variabili atomiche.
Questa è una delle controparti matematiche del fenomeno fisico per cui, a causa della non linearità, i gradi di libertà dell'atomo e del campo, dopo il limite stocastico, diventano *intrecciati (entangled)*.
Nella recente letteratura fisica il termine *entanglement* è usato semplicemente come sinonimo di *superposizione in un prodotto tensoriale di due spazi* (cfr. tuttavia una nuova formulazione matematica di questo concetto, dovuta a Belavkin e Ohya e associata ad una nuova nozione di entropia quantistica introdotta da questi autori [BeOh99]).
Ciò che intendiamo qui è differente, più precisamente: mentre prima del limite le osservabili del campo e dell'atomo commutano, dopo il limite si sviluppano relazioni di commutazione non banali (in effetti una generaliz-

zazione operatoriale dellerelazioni di commutazione libere).
Nel caso della QED Skeide [Ske96] ha dimostrato che la struttura di spazio di Fock interagente può essere dedotta dalla sola struttura di modulo di Hilbert. Non è chiaro se questo è un fenomeno generale o specifico del modulo Hilbertiano della QED.
Accade frequentemente che l'interesse di molti matematici si concentri, in un tempo relativamente breve, su determinati oggetti: in questi casi non è facile dimostrare relazioni di causa o effetto, ma almeno la cronologia degli eventi resta un fatto obiettivo. E' certamente obiettivamente verificabile che la quantità di lavori sui moduli Hilbertiani, dopo i primi risultati sull'emergenza di queste strutture nel limite stocastico [AcLu92a], [AcLu92b], [AcLu92c], ha subito un considerevole incremento.

10.4 Emergere delle relazioni di commutazione q–deformate sul modulo della QED

Le nozioni di spazio di Fock interagente (IFS) e delle relazioni di commutazione su un modulo di Hilbert hanno la loro origine nei primi 6 anni di sviluppo del limite stocastico della teoria quantistica (dal 1987 fino al 1993), ma soltanto con lo sviluppo del calcolo del rumore bianco quantistico è diventato possibile separare queste nozioni dai calcoli complessi da cui sono emerse e formularle in un modo intuitivo, adatto alle applicazioni fisiche.
L'approccio basato sul rumore bianco ha mostrato come le tre caratteristiche discusse sopra sono intrecciate in modo elegante ed intuitivo (mentre questo collegamento è molto più nascosto nell'approccio basato sulle funzioni test).
In termini qualitativi il quadro che emerge dal limite stocastico della QED è il seguente:
a causa della forte non linearità, le relazioni di commutazione (bosoniche) tra gli operatori di annichilazione e creazione, per effetto dell'evoluzione temporale, si trasformano in relazioni di commutazione q–deformate (del tipo (45)) con q dipendente dal tempo e dal parametro λ. Inoltre tali relazioni agiscono su un modulo Hilbertiano invece che su uno spazio di Hilbert.
Quando λ tende a 0 si dimostra che anche $q(\lambda, t)$ tende a 0 e gli operatori di annichilazione e creazione del rumore limite soddisfano una generalizzazione, ai moduli Hilbertiani, delle relazioni di commutazione libere, cioé le relazioni di commutazione q–deformate con $q = 0$.
Il meccanismo descritto sopra, di come le relazioni di commutazione q–

deformate con $q = 0$ su un modulo emergano canonicamente da un modello fisico concreto (in effetti da uno dei più importanti ed ampiamente studiati di tali modelli) sembra essere la prima deduzione di tali relazioni sia nella letteratura matematica che in quella fisica, anche se questo problema è stato studiato da illustri fisici e matematici.
Inoltre il fatto che q tenda a 0 per $\lambda \to 0$ spiega perché, nel limite stocastico della QED, solo le partizioni non crossing sopravvivano: è in un certo senso sorprendente che, nella immensa letteratura sulla QED il carattere dominante dei diagrammi non crossing sia rimasto inosservato prima di questo risultato.
La forte non linearità dell'interazione si manifesta infine in una relazione di commutazione non banale tra le variabili atomiche e gli operatori del campo limite che, al tempo $t = 0$ chiaramente commutano. Come dimostrato da M. Skeide queste relazioni di commutazione sono l'espressione della differenza fra la moltiplicazione destra e sinistra nel modulo di Hilbert ottenuto nel limite. Una conseguenza della struttura di modulo è che la distribuzione di vuoto dell'operatore del campo limite, condizionata sulle variabili atomiche non è la legge del semicerchio di Wigner, come nel caso semplice dello spazio di Hilbert, ma una deformazione complessa di questa, in cui ogni coppia di una partizione non crossing è pesata dalla sua profondità nella partizione stessa. La nozione di profondità nelle partizioni non crossing è stata successivamente studiata da M. Bozeiko e la sua scuola, ma la sua prima apparizione si è avuta con il limite stocastico della QED ed ha dato luogo ad una struttura altamente complessa che è stata poi assiomatizzata nella nozione di spazio di Fock interagente (v. il punto (ii) più sopra).

11 Analisi stocastica basata sul rumore bianco

Un altro sviluppo del limite stocastico, in una direzione completamente differente, cioè l'approccio basato sul *rumore bianco* al calcolo stocastico classico e quantistico, è probabilmente una delle frontiere più emozionanti della ricerca corrente sia nella probabilità quantistica che in quella classica.
L'idea è la seguente: i risultati ottenuti nei primi anni di sviluppo della teoria mostravano che, in una grnde varietà di modelli molto usati in fisica l'equazione di Schrödinger si trasforma, nel limite stocastico, in un'equazione

differenziale stocastica. D'altra parte nel 1993 il limite della stessa equazione fu considerato nel senso della teoria delle distribuzioni a valori operatoriali, [AcLuVo93] trovando equazioni hamiltoniane guidate dalla prima, o al più dalla seconda potenza normalmente ordinata del rumore bianco. A questo punto la congettura che le due equazioni coincidano diventava naturale.
La dimostrazione di questa congettura ha richiesto l'uso di tutti gli strumenti analitici sviluppati nella teoria del limite stocastico, in particolare *il principio dei tempi consecutivi* e lo sviluppo di tecniche quali la teoria delle distribuzioni sul simplesso standard.
Usando tale principio si può mettere l'equazione hamiltoniana di rumore bianco nel cosidetto *ordine normale causale* (che differisce in modo non banale dal consueto ordine normale usato in teoria dei campi). Si può dimostrare che questa equazione normalmente ordinata e l'equazione differenziale stocastica hanno gli stessi elementi di matrice (nei vettori numero e nei vettori esponenziali). Poiché sappiamo che l'equazione stocastica ha un'unica soluzione unitaria, segue che la stessa cosa vale per l'equazione di rumore bianco corrispondente e che le due soluzioni coincidono.
La non banalità del risultato può essere desunta dal fatto che le relazioni tra i coefficenti dei due tipi di equazioni sono non lineari, e in particolare coinvolgono la trasformazione di Cayley. Quanto detto sopra rimane vero anche nel caso delle equazioni stocastiche classiche ma anche in questo contesto più semplice, la equivalenza tra equazioni differenziali stocastiche e equazioni hamiltoniane guidate dal rumore bianco non era nota.

11.1 Radici del programma sul calcolo non lineare del rumore bianco: il problema della rinormalizzazione

Avendo dimostrato che tutta l'analisi stocastica classica equivale allo studio di equazioni hamiltoniane guidate dalle prime potenze del rumore bianco e dal numero, sorgeva naturale porsi il problema di cosa accadesse con le potenze superiori, cioé di generalizzare il calcolo stocastico (classico e quantistico) estendendolo alle potenze superiori del rumore bianco. Nel seguito ci riferiremo a questo programma come a: calcolo non lineare del rumore bianco.
Questo problema ha avuto una lunga storia nella teoria dei campi quantis-

tici ed era noto che, già per il quadrato del rumore bianco, la realizzazione di questo programma avrebbe richiesto una procedura di rinormalizzazione, conducendo in tal modo a una nozione di tavola di Ito rinormalizzata.
Alcuni tentativi euristici in questa direzione avevano condotto all'idea che, dato che tutte le tavole di Ito conosciute si deducono a partire da rappresentazioni delle relazioni di commutazione, un approccio naturale al problema sarebbe stato quello di rinormalizzare le relazioni di commutazione e di costruire una rappresentazione della struttura corrispondente.
Poiché il prototipo di questa costruzione è la rappresentazione di Fock delle relazioni di commutazione bosoniche, il caso non lineare più semplice era la generalizzazione quadratica di questa rappresentazione e, poiché la versione quadratica delle relazioni di commutazione bosoniche, euristicamente dedotta dalla versione lineare, coinvolge il quadrato della funzione delta, il primo passo del programma richiedeva una rinormalizzazione per dare un significato a tale quadrato.
Questo obiettivo è stato realizzato adottando una procedura suggerita da V.K. Ivanov nel 1979. Ciò ha condotto ad una caratteristica tipica degli spazi di Fock interagenti, cioè che le relazioni di commutazione su uno spazio di Hilbert si trasformano in in relazioni di commutazione su un modulo Hilbertiano sull'algebra dell'operatore di numero.
Il secondo, punto più difficile, consisteva nel definire e costruire l'analogo della rappresentazione di Fock per queste relazioni di commutazione. Poiché l'estensione naturale della prescrizione di Fock (cioè che ci sia un vettore ciclico (vuoto), che si annulla sotto l'azione degli annichilatori (quadratici) e degli operatori numero, determina unicamente il prodotto interno (se esistente) dello spazio della rappresentazione, il problema si riduceva alla dimostrazione della positività di questo candidato prodotto interno.
Tale dimostrazione è stata inizialmente ottenuta con una discussione induttiva complessa. Parecchi anni più successivamente, grazie ai risultati del P. Sniady, Yu. M. Berezansky, E. Lytvinov, A. Barhouni, H. Ouerdiane, A. Rihai, ... la forma esplicita di questo prodotto interno è stata trovata e da essa la positività segue a vista.
L'introduzione dei vettori esponenziali quadratici conduce al risultato che il prodotto scalare di due tali vettori coincide con il prodotto scalare di due vettori esponenziali associati alla rappresentazione di Fock dell'algebra delle differenze finite, che era stata introdotta e studiata più di 10 anni prima da A. Boukas e P. Feinsilver con una motivazione completamente differente. Questo collegamento apparentemente misterioso è stato spiegato nel lavoro

[AcFrSk00] che identifica l'algebra del quadrato rinormalizzato del rumore bianco (RSWN) con un'algebra di correnti di $sl(2, \mathbb{R})$ sulla retta reale.
La teoria dei processi quantistici a incrementi indipendenti, che estende la teoria descritta nelle monografie di K.R. Parthasarathy-K. Schmidt [PaSchmi72] e di A. Guichardet [Guich72] spiega perché queste algebre sono strettamente collegate con gli spazi di Fock e con i processi a incrementi indipendenti e stazionari (o di Lèvy). Con questa teoria il problema della costruzione delle rappresentazioni di un'algebra correnti di un'algebra di Lie data L è ridotto alla conoscenza delle rappresentazioni di L più la soluzione di un problema coomologico (la costruzione degli 1–cocicli per una rappresentazione data).
La costruzione della rappresentazione di Fock del rumore bianco quadratico è stata estesa, usando la stessa rinormalizzazione, dal caso bosonico a quello libero P. Sniady [Snia99].

11.2 Connessione con i processi di Meixner e nuovo tipo di teoremi no–go

Considerando la distribuzione di vuoto dei campi generalizzati associati alla rappresentazione di Fock dell'algebra del RSWN si ottengono, a meno di cambiamenti di parametri, 3 classi di processi di Lèvy: i processi Gamma, Meixner e Pascal (o binomiale negativo). Unendo questi con le 2 classi di processi canonicamente associate alla rappresentazione di Fock dell'algebra di Heisenberg usuale (Wiener e Poisson), si ottengono esattamente le 5 classi che compaiono in un lavoro di J. Meixner che risale al 1934 [Meix34], e che caratterizza le funzioni generarici dei polinomi ortogonali con speciali proprietà di olomorfia.
Queste 5 classi erano state ampiamente studiate nella probabilità classica in una grande molteplicità di contesti differenti, ma la loro origine unificata come distribuzioni di vuoto delle prime (Wiener e Poisson) e seconde (Gamma, Meixner e Pascal) potenze del rumore bianco è stata non solo una sorpresa, ma anche un forte stimolo a andare di là delle prime due potenze e studiare che cosa accade con quelle più alte (cioé maggiori o uguali di 3).
La non banalità di questa unificazione può essere meglio apprezzata avendo in mente i teoremi no–go, secondo i quali le rappresentazioni di Fock delle prime e seconde potenze del rumore bianco, dopo la rinormalizzazione, non possono essere unite insieme in modo naturale.

La situazione può essere descritta come segue. L'usuale algebra di Heisenberg a 1 grado di libertà $Heis(1)$, generata da 3 operatori (creatore, annichilatore e elemento centrale) e l'algebra $sl(2, \mathbb{R})$ (generata, a meno di isomorfismi, dal numero e dai quadrati del creatore e dell'annichilatore) sono entrambe sotto–algebre dell'algebra di Schroedinger (SA) (che in un certo senso è la più grande algebra di simmetria per la cinematica non relativistica quantistica). Pertanto, dalla restrizione della rappresentazione di Fock della SA si ottengono le rappresentazioni di Fock delle due sotto–algebre.
Tuttavia, se si usa per la SA la stessa rinormalizzazione usata per il quadrato del rumore bianco, una rappresentazione di Fock dell'algebra delle correnti della SA su uno spazio di misura (S, μ) esiste se e soltanto se (S, μ) è atomico e la misura di ciascuno degli atomi è più grande dell'inverso della costante di rinormalizzazione (che deve essere strettamente positiva, la rappresentazione di Fock dell'algebra di RSWN altrimenti tale rappresentazione si riduce a quella banale). Ciò esclude il caso di massimo interesse, cioè quando (S, μ) è la retta reale con la misura di Lebesgue.
Generalizzazioni di questo risultato alle sotto–algebre dell'algebra universale inviluppante dell'algebra di Heisenberg, contenenti potenze maggiori o uguali del terzo grado e a procedure differenti di rinormalizzazione hanno condotto ai teoremi no-go, che costituiscono una ostruzione al tentativo di costruire una teoria con le potenze superiori del rumore bianco.
Il risultato più generale in questa direzione afferma che, se una $*$–algebra di Lie di potenze superiori di un qualunque rumore bianco q–deformato con $-1 < q \leq 1$ contiene l'n–ma potenza dell'annichilatore e il suo quadrato, allora una rappresentazione di Fock dell'algebra delle correnti di tale algebra su uno spazio di misura (S, μ) esiste se e soltanto se (S, μ) è atomico e la misura di ciascuno degli atomi è più grande dell'inverso della costante di rinormalizzazione [AcBou05a]. Il fatto inatteso, in tale e la conclusione è che il limite inferiore, dato dall'inverso della costante di rinormalizzazione, è sempre lo stesso cioè indipendente dal q.

11.3 Interpretazione probabilistica dei teoremi no–go: connessioni con i processi di Levy

L'indipendenza del suddetto limite inferiore dalle relazioni di commutazione ha suggerito un significato universale per questo limite.

In effetti una simile ostruzione alla transizione dal discreto a continuo compare anche nella teoria delle misure di probabilità infinitamente divisibili: ogni misura di probabilità su $\mathbb{R}$ ammette potenze di convoluzione di ordine n per ogni intero naturale n, ma soltanto alcune misure di probabilità hanno radici di ordine n.
In generale, l'insieme dei numeri strettamente positivi r tali che una misura di probabilità data ammetta potenze di convoluzione di ordine r (definite mediante la trasformata di Fourier) ha un limite inferiore, che è zero se e soltanto se la misura di probabilità è infinitamente divisibile.
Poiché esistono misure non infinitamente divisibili, segue che per ogni misura siffatta il limite inferiore deve essere strettamente positivo.
Così anche in questo caso un'ostruzione nella transizione da discreto al continuo emerge naturalmente.
Questo fatto è strettamente collegato ai teoremi no–go, descritti nella sezione precedente, poiché è noto che l'esistenza di una rappresentazione di peso massimo non banale per le potenze superiori rinormalizzate del rumore bianco (RHPWN) è equivalente alla divisibilità infinita dei processi di vuoto associati alle sotto–algebre di Cartan della $*$–algebra di Lie ottenuta dalla rinormalizzazione data.

11.4 Una nuova rinormalizzazione e sue connessioni con la gerarchia di Virasoro–Zamolodchikov

L'impossibilità, descritta nella sezione (11.2), di applicare alle potenze superiori del WN la stessa rinormalizzazione che ha funzionato con successo nel caso quadratico ha motivato un'analisi dettagliata della struttura dei teoremi no–go. Il risultato di questa analisi è stata l'introduzione di un altro tipo di prescrizione per la rinormalizzazione delle potenze della funzione delta, diversa dalla condizione di Ivanov e che introduce l'ulteriore condizione che lo spazio di funzioni test consista di funzioni che si annullano nello zero.
Questa condizione al contorno conduce alla sparizione dei termini singolari nei commutatori e, cosa più importante, si può dimostrare che la struttura risultante è ancora una *–algebra di Lie, detta la *–algebra di Lie delle potenze superiori rinormalizzate del rumore bianco (RHPWN).
Questa non è più identificabile con un'algebra di correnti su $\mathbb{R}$ dell'algebra universale inviluppante dell'algebra di Heisenberg.
I tentativi di identificare questa nuova algebra di Lie hanno rivelato una

somiglianza notevole fra l'algebra del RHPWN con un'estensione dell'algebra Witt (la cui unica estensione centrale è l'algebra di Virasoro) emersa nella teoria di campo conforme e delle stringhe come limite euristico (per $N \to \infty$) di certe algebra di Lie finito dimensionali: la *–algebra di Lie w_∞ di Virasoro-Zamolodchikov .
Ciò ha motivato parecchi lavori al fine di dimostrare l'identità delle due algebre. Il risultato finale è che le due algebre non sono isomorfe ma le loro chiusure, in topologie appropriatamente definite, coincidono nel senso che i generatori naturali di ciascuna di queste algebre possono essere espressi esplicitamente come serie nei generatori dell'altra [AcBo08]. Ciò fornisce in particolare una rappresentazione di w_∞ in termini di operatori bosonici (rinormalizzati) che non era nota in letteratura.
L'idea di base per costruire questa identificazione, che è tutt'altro che banale, è emersa da un'analisi delle realizzazioni di queste due algebre in termini di algebre di Lie di funzioni con le parentesi di Poisson: una rappresentazione funzionale dell'algebra di Lie del RHPWN può essere espressa in termini di polinomi in due indeterminate e una rappresentazione funzionale dell'algebra w_∞ può essere espressa in termini di polinomi trigonometrici in due indeterminate.
Poiché le chiusure delle due algebra in molte topologie naturali sono le stesse, è naturale congetturare che una simile relazione potrebbe valere per le versioni astratte delle due algebra di Lie, definite unicamente in termini dei loro generatori e relazioni di commutazione.
Le speranze che la nuova rinormalizzazione sarebbe bastata per impedire i teoremi no–go sono state frustrate dala scoperta che una variante di questi teoremi si applica anche alla nuova algebra di Lie.
Ulteriori condizioni sulla definizione di stato di Fock riescono a dar luogo ad un prodotto scalare ben definito, ma lo spazio di Hilbert risultante si riduce ad una nuova parametrizzazione dello spazio di Fock quadratico, così non dà le statistiche corrette.
Gli operatori di campo, parametrizzati dalle funzioni caratteristiche degli intervalli di tipo $(s, t]$, sono una famiglia commutativa quindi la loro distribuzione congiunta nel vuoto definisce un processo stocastico classico che può essere identificato al processo binomiale continuo (o processo beta).
Il fatto che la formula postulata da Veneziano per l'ampiezza di dispersione di alcune interazioni forti sia anche stata definita in termini della funzione beta di Eulero può essere una pura coincidenza o può condurre ad un altro collegamento interessante con i modelli fisici: ciò sarà oggetto di futura ricer-

ca.
D'altra parte persino lo spazio quadratico contiene anche alcune informazioni su operatori di ordini superiori a 2. In effetti una costruzione analitica dello spazio di Fock quadratico, basata su un'estensione della teoria di Hida del calcolo di rumore bianco al processo binomiale negativo, è stata ottenuta da A. Barhoumi, H. Ouerdiane e A. Rihai: usando la formula di Accardi–Boukas, che fornisce una rappresentazione bosonica degli elementi di w_∞, come serie nei generatori della *–Lie–algebra del RHPWN, questi autori hanno calcolato i simboli, cioè gli elementi di matrice nei vettori esponenziali quadratici, degli elementi della sub–algebra di Virasoro ed hanno dimostrato che i nuclei corrispondenti soddisfanno la generalizzazione (al processo binomiale negativo) del teorema che caratterizza quei nuclei che sono simboli di operatori chiudibili.
Lo stesso risultato non vale per gli elementi della gerarchia delle sotto–algebre di w_∞ di grado superiore al più basso (che corrisponde al caso di Virasoro). Ciò conferma l'intuizione che i processi di ordine superiore sono *più singolari* di quelli associati all'algebra di Virasoro

11.5 Collegamenti fra estensioni centrali di unalgebra di Lie e problema di rinormalizzazione

L'analogia con l'algebra di Virasoro ha suggerito naturalmente una indagine sull'esistenza di rappresentazioni Hilbertiane non della $*$-Lie–algebra del RHPWN ma di eventuali sue estensioni centrali (non banali).
Poiché la $*$–Lie–algebra del RHPWN è una seconda quantizzazione rinormalizzata dell'algebra completa dell'oscillatore (FOA), un problema preliminare naturale era di costruire le estensioni centrali della FOA. Poiché, a sua volta, la FOA è l'algebra universale inviluppante dell'algebra di Heisenberg e poiché un'estensione centrale di un'algebra fornisce automaticamente un'estensione (anche se tipicamente non centrale) della relativa algebra universale inviluppante, questa ha condotto allo studio, come problema preliminare, delle estensioni centrali dell'algebra di Heisenberg.
Si dimostra che esiste un'estensione centrale non banale della $*$–Lie–algebra di Heisenberg (a un grado di libertà: $CHeis(1)$), che questa è unica (a meno di isomorphisms) e che essa ha una realizzazione bosonica all'interno dell'algebra di Schroedinger (in effetti ora sappiamo che è isomorfa all'algebra

di Galilei, ben nota nella letteratura fisica). Invece il secondo gruppo di coomologia sia della *–Lie–algebra del RHPWN che di w_∞ è ridotto all'identità quindi tutte le estensioni centrali di tali algebre sono banali [AcBou09]. Tale risultato non era noto per l'algebra di RHPWN mentre, nel contesto della teoria delle stringhe, Bakas aveva dimostrato un'affermazione più debole per w_∞, cioé che tutti i coefficenti dei termini centrali di una appropriata contrazione finito–dimensionale, denotata w_N, dell'algebra di Virasoro–Zamolodchikov, tendono a zero per $N \to \infty$ (ma non che tutti i cocicli di w_∞ provengno da quest'approssimazione finito–dimensionale).
La dimostrazione diretta, essendo basata su un'analisi puramente algebrica dei 2–cocycli di w_∞ è più generale perché non soggetta a questa limitazione. Inoltre lo stesso metodo permette di dimostrare che, nella famiglia delle sotto–algebre naturali di w_∞, soltanto l'algebra di Virasoro ammette estensioni centrali non banali.
Un risultato simile per le sotto–algebra di RHPWN non è disponibile al momento.

11.6 Seconda quantizzazione dell'estensione centrale non banale della *–Lie–algebra di Heisenberg

La realizzazione bosonica di $CHeis(1)$ è stata usata per calcolare la funzione caratteristica di vuoto degli operatori di campo generalizzati.
In un lavoro non pubblicato, LA, A. Boukas ed J. Misiewicz, hanno dimostrato che queste funzioni caratteristiche sono in effetti infinitamente divisibili e sappiamo che questo è equivalente all'esistenza della rappresentazione di Fock per l'algebra delle correnti di $CHeis(1)$ su $\mathbb{R}$. La prova utilizza l'approccio algebrico di Araki–Woods–Parthasarathy–Smidt alla formula classica di Levy-Khintchin.
Dato che la rappresentazione bosonica di $CHeis(1)$ coinvolge il quadrato della posizione, la realizzazione della corrispondente algebra delle correnti coinvolge il quadrato del rumore bianco, che non può essere definito senza rinormalizzazione. Di conseguenza il suddetto risultato di esistenza fornisce un appoggio importante all'idea che ci sia uno stretto collegamento fra rinormalizzazione e estensioni centrali - un fatto che sembra essere supposto vero nella letteratura fisica, anche se le radici profonde di questo collegamento devono ancora essere chiarite.

12 Conclusioni

Nell'indagine attuale abbiamo concentrato la nostra attenzione soltanto sui punti culminanti dello sviluppo di QP e una notevole parte di risultati, di interesse sia per matematica pura che per le sue applicazioni alla fisica, non ha potuto neppure essere menzionata.

Tuttavia persino una descrizione così generale potrebbe essere utile per trasmettere a un lettore non esperto in materia l'impressione di nuovo ramo della matematica che, durante i relativamente pochi anni della sua esistenza, è riuscita a produrre contributi non banali alla soluzione di problemi aperti emersi in una molteplicità di campi differenti, che variano dalle zone di confine fra la matematica e la filosofia, per esempio i fondamenti della probabilità o l'interpretazione della teoria quantistica, fino ad alcuni rami molto tecnici della matematica quali le algebre di operatori, l'integrazione funzionale, la teoria dei processi stocastici classici, ... fino ad arrivare alle applicazioni concrete a problemi fisici che non sono state limitate ad una nuova formulazione elegante di cose note ai fisici, o alla prova di affermazioni da essi congetturate, ma hanno messo in evidenza alcuni nuovi effetti o fenomeni che non erano neppure stati congetturati nella letteratura fisica quali, per esempio: il ruolo dominante dei diagrammi non–crossing nel limite stocastico dell'elettrodinamica quantistica o del modello di Anderson, la loro ri–sommazione in un operatore unitario, la rottura delle relazioni di commutazione standard dovuta alle interazioni non lineari e l' emergere delle relazioni di commutazione q–deformate in QED e di un nuovo tipo di relazioni di commutazione tra variabili atomiche e variabili del campo, le conseguenti nuove statistiche fotoniche (in regime di forte non linearità), il fenomeno di *bosonizzazione stocastica* a dimesioni superiori, e molti altri che per motivi di spazio non è possibile elencare. Il lettore interessato a queste applicazioni fisiche può esaminare il libro [AcLuVo99b]. Una fotografia sufficientemente fedele dello sviluppo della teoria fino all'inizio degli anni 90 può essere trovata nella serie di volumi QP–PQ elencata in bibiografia e, per gli sviluppi più recenti, ci si può riferire alla rivista: *analisi dimensionale infinita, probabilità quantistica e soggetti relativi* pubblicato da World Scientific.

13 Bibliography

[QP–0] Mathematical problems in the quantum theory of irreversible processes, ed.L.Accardi, V.Gorini, G.Parravicini, Arco Felice 1978.

[QP–I] Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, ed. L.Accardi, V.Gorini, A. Frigerio, Springer LNM n.1055 (1984)

[QP–II] Quantum Probability and applications II , L.Accardi , W.von Waldenfels (eds.) ; Springer LNM N. 1136 (1986)

[QP–III] Quantum Probability and Applications III, Springer LNM N. 1233 (1987)

[QP–IV] Quantum Probability and Applications IV, Springer LNM N. 1396(1989)

[QP–V] Quantum Probability and Applications V, Springer LNM 1442(1990)

[QP–VI] Quantum Probability and Related Topics VI, World Scientific (1991)

[QP–VII] Quantum Probability and Related Topics VII, World Scientific (1992)

[Prob2000] Probability Towards 2000; L. Accardi, Chris Heyde (eds.) Springer LN in Statistics 128 (1998) [Ac74] Accardi L.: Noncommutative

Markov chains. In: international School of Mathematical Physics, Camerino (1974) 268-295.

[Ac75] Accardi L.: On the noncommutative Markov property (in russian). Funkt. Anal. and its Appl. 9 (1975) 1-8.

[Ac76] Accardi L.: Non relativistic quantum mechanics as a noncommutative Markov process. Adv. in Math. 20 (1976) 329-366.

[Ac78a] Accardi L.: Noncommutative Markov chains with preassigned evolution: an application to the quantum theory measurement. Adv. in Math. 29 (1978) 226-243.

[Ac78b] Accardi L.: On the quantum Feynmann-Kac formula. Rendiconti del seminario Matematico e Fisico, Milano 48(1978) 135-180

[Ac81a] Accardi L.: Topics in Quantum Probability. Physics Reports, 77 (1981) 169-192

[AFL82] Accardi L., Frigerio A., Lewis J.: Quantum stochastic processes Publications of the Research institute for Mathematical Sciences Kyoto University 18 (1982) 97-133.

[AcFe82] Accardi L., Fedullo A.: On the statistical meaning of complex numbers in quantum theory. Lettere al Nuovo Cimento 34 (1982) 161-172.

[AcCe82] Accardi L., Cecchini C.: Conditional expectations in Von Neumann algebras and a theorem of Takesaki. Journ. of Funct. Anal. 45 (1982) 245-273

[Ac82] Accardi L.: Some trends and problems in quantum probability. In: Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, ed. L.Accardi et al., Springer LNM n.1055 (1984) 1-19

[AcBa85] L. Accardi and A. Bach: Quantum central limit theorems for strongly mixing random variables, Z. W. 68 (1985), 393–402

[AcFrLu87] Accardi L., Frigerio A., Lu Y.G.: On the weak coupling limit problem. in : Quantum Probability and Applications IV Springer LNM N. 1396(1987)20-58

[Ac90] Accardi L.: Noise and dissipation in quantum theory. Reviews in Math. Phys. 2(1990) 127-176

[AcFaQu90] Accardi L., Fagnola F., Quaegebeur A representation free Quantum Stochastic Calculus Journ. Funct. Anal. 104 (1992) 149–197 Volterra preprint N. 18 (1990)

[AcFrLu90] Accardi L., Frigerio A., Lu Y.G.: The weak coupling limit as a quantum functional central limit, Comm. Math. Phys. 131 (1990) 537-570

[AcLu91a] Accardi L., Lu Y.G.: The Number Process as Low Density Limit of Hamiltonian Models, Commun. Math. Phys. 637(1991)1–31

[AcLu91b] Accardi L., Lu Y.G.: The low density limit of quantum systems, Jour. Phys. A: 24 (1991) 3483–3512

[AcLu92] Accardi L., Lu Y.G.: The Wigner Semi–circle Law in Quantum Electro Dynamics. Commun. Math. Phys., 180 (1996), 605–632. Volterra preprint N.126 (1992)

[AcLu92a] Accardi L., Lu Y.G.: On the weak coupling limit for quantum electrodynamics, Proceeding Intern. Workshop of Math. Phys., SIENA F. Guerra, M. Loffredo (eds.) World Scientific (1992) 16–29 Volterra preprint N. 89 (1992)

[AcLu92c] Accardi L., Lu Y.G.: Quantum electrodynamics and semicircle noise, Invited contribution to the issue of Int. Journ. of Nonlinear Quantum Phys., dedicated to N. N. Bogoliubov 1992 Volterra preprint N. 107 (1992)

[AcLuVo93] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.: The Stochastic Sector of Quantum Field Theory, Matematicheskie Zametki (1994) Volterra Preprint N. 138 (1993)

[AcArKoVo95] Accardi L., Aref'eva I.Ya., Kozyrev S.V., Volovich I.V.: The master field for large N matrix models and quantum groups, Modern

Physics Letters A10 (1995) 2323–2334, Volterra Preprint N. 235 december (1995) hep-th/9503041 [abs, src, ps, other]

[AcLuVo95b] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I., Nonlinear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis, in: Probability Towards 2000; L. Accardi, Chris Heyde (eds.), Springer LN in Statistics 128 (1998) 1–33. Proceedings of the Symposium: Probability towards two thousand, Columbia University, New York, 2–6 October (1995).

[AcArVo96] L. Accardi, I.Ya. Arefeva, I.V. Volovich. Half-planar field theory as Boltzmann field theory, Proc. of Quarks'96, vol. 2 (1996) 31-38

[AcLuOb96] Accardi L., Lu Y.G., Obata N., Towards a non–linear extension of stochastic calculus, in: Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, RIMS Kokyuroku 957, N. Obata (ed.) (1996) 1–15.

[Ac97] Accardi L.: Urne e Camaleonti: Dialogo sulla realtà, le leggi del caso e la teoria quantistica. Il Saggiatore (1997). Japanese translation: Maruzen (1999)

[AcLuVo97a] L. Accardi, Yun Gang Lu, Igor Volovich: Nonlinear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis. in: Probability Towards 2000; L. Accardi, Chris Heyde (eds.) Springer LN in Statistics 128 (1998) 1–33

[AcLuVo97b] Accardi L., Lu Y.G., I. Volovich The QED Hilbert module and Interacting Fock spaces. Publications of IIAS (Kyoto) (1997)

[AcVo97] L. Accardi, I.V. Volovich: Quantum white noise with singular non-linear interaction. Volterra preprint N.278 (1997)

[Ac97] Accardi L.: URNE E CAMALEONTI: Dialogo sulla realtà, le leggi del caso e la teoria quantistica. Il Saggiatore (1997).

[AcVo97] Accardi L., Volovich I.V., Quantum white noise with singular non-linear interaction, in: Developments of Infinite–Dimensional Noncommutative Analysis, N. Obata (ed.) RIMS Kokyuroku 1099 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto (1999) 61–70.

[Aho98] Accardi L., Hashimoto Y. and Obata N.: Notions of Independence Related to the Free Group Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, 1, N. 2 (1998) 201–220 Volterra Preprint (1998) N. 311.

[AcBo98] L. Accardi and M. Bożejko: Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures, Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. 1 (1998), 663–670. V. Volterra Center Preprint No. 321, 1998.

[AcOb99] Accardi L., Obata N.: Elementary quantum probability (in japanese), Nagoya Mathematical Lectures, vol. 2 (1999)

[AcLuVo99a] L. Accardi, Y.G. Lu, and I.V. Volovich: White noise approach to classical and quantum stochastic calculi, Volterra Preprint, Rome (1999) To appear in the lecture notes of the Volterra International School of the same title, held in Trento. World Scientific (2.000)

[AcLuVo99b] Accardi L., Y.G. Lu, I. Volovich: Quantum Theory and its Stochastic Limit. to be published in the series Texts and monographs in Physics, Springer Verlag (2000);

[AcLuVo99] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I., White noise approach to classical and quantum stochastic calculi, Lecture Notes of the Volterra International School, Trento, Italy, 1999.

[AcSk99b] Accardi L., Skeide M., On the relation of the Square of White Noise and the Finite Difference Algebra, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 3 (2000) 185–189.

[AcFrSk00] Accardi L., Franz U., Skeide M., Renormalized squares of white noise and other non- Gaussian noises as Lévy processes on real Lie algebras, Comm. Math. Phys. 228 (2002) 123–150.

[AcGib00] Accardi L., Gibilisco P.: Matematica non commutativa, Enciclopedia Italiana, VI–a Appendice vol. II (2000) 132–139 Preprint Volterra N. 408 (2000)

[AcSk99] Luigi Accardi, Michael Skeide: On the Relation of the Square of White Noise and the Finite Difference Algebra, IDA–QP Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics 1 (2.000)

[Ac00c] Accardi L., Quantum Probability: An introduction to some basic ideas and trends, Aportaciones Matematicas 16 (2001) 1–128 Modelos Estocasticos II, D. Hernandez, J.A. Lopez–Mimbela, R. Quezada (eds.) (Course given at the: VI Symposium de probabilidad y Procesos Estocasticas, CIMAT, Guanajuato, 24–27 May 2000, Mexico).

[AcBou01d] Accardi L., Boukas A., The semi-martingale property of the square of white noise integrators, in: proceedings of the Conference: Stochastic differential equations, Levico, January 2000, G. Da Prato, L.Tubaro (eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics N. 227, M. Dekker (2002) 1–19, MR 1 919 499.

[AcBou01f] Accardi L., Boukas A., Kuo H.–H., On the unitarity of stochastic evolutions driven by the square of white noise, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 4 (4) (2001) 1-10, MR 2002m: 60122

[AcBou01e] Accardi L., Boukas A., Square of white noise unitary evolutions on Boson Fock space, in: Proceedings International conference on stochastic analysis in honor of Paul Kree, Hammamet, Tunisie, October 22-27, 2001, S. Albeverio, A. Boutet de Monvel, H. Ouerdiane (eds.), Kluwer (2004) 267–302.

[AcLuVo02] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I., Quantum Theory and its Stochastic Limit, Springer, New York, 2002.

[AcAmFr02] Accardi L., Amosov G., Franz U., Second quantized automorphisms of the renormalized square of white noise (RSWN) algebra Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 7 (2) (2004) 183–194

[AcBGOb03] Accardi L., Ben Ghorbal A., Obata N.: Monotone Independence, Comb Graphs and Bose–Einstein Condensation, IDA–QP (Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics) 7 (3) (2004) Preprint Volterra n. 568 (2004)

[AcBou03a] Accardi L., Boukas A., Unitarity conditions for the renormalized square of white noise, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 6 (2) (2003) 197-222, MR 1991 492

[AcKuSt04b] L. Accardi, H.-H. Kuo, and A. Stan: Characterization of probability measures through the canonically associated interacting Fock spaces; Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 7 (2004) 485-505 Preprint Volterra n. 570 (2004)

[AcBou04c] Accardi L.,Boukas A., White noise calculus and stochastic calculus Talk given at: International Conference on Stochastic analysis: classical and quantum, Perspectives of white noise theory, Meijo University, Nagoya, November 1-5, 2003 in: Quantum Information, T. Hida, K. Saito (eds.) World Scientific (2005) 260–300.

[AcBou05a] Accardi L., Boukas A., Higher Powers of q–Deformed White Noise, Methods of Functional Analysis and Topology, 12 (3) (2006) 205–219

[AcBou05g] Accardi L., Boukas A., Ito calculus and quantum white noise calculus, Proceedingsof "The 2005 Abel Symposium, Stochastic Analysis and Applications - A Symposium in Honor of Kyosi Ito" (on the occasion of his 90th birthday), Organized by the Norwegian Mathematical Society and the Center of Mathematics for Applications (CMA), Oslo Springer (2007), F.E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrom, B. Oksendal, T. Zhang (eds.)

[AcBou04c] Accardi L.,Boukas A., White noise calculus and stochastic calculus Talk given at: International Conference on Stochastic analysis: classical and quantum, Perspectives of white noise theory, Meijo University, Nagoya, November 1-5, 2003 in: Quantum Information, T. Hida, K. Saito (eds.) World Scientific (2005) 260–300.

[AcRo05] L. Accardi, R. Roschin, Renormalized squares of Boson fields, Infinite Dimensional Anal. Quantum Probab. Related Topics 8 (2) (2005) 307–326

[AcCrLu05] Accardi L., Crismale V., Lu Y.G.: Constructive universal central limit theorems based on interacting Fock spaces, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics (IDA–QP) 8 (4) (2005) 631-650 Preprint Volterra n. 591 (2005)

[AcBou06a] Accardi L., Boukas A., Recent advances in quantum white noise calculus, Quantum Information and Computing, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis, Volume XIX, (2006) 18-27, World Scientific

[AcBouFr06] Accardi L., Boukas A., Franz U., Renormalized powers of quantum white noise, Infinite Dimensional Anal. Quantum Probab. Related Topics 9 (1) (2006) 129–147 MR2214505.

[AcBou06] Accardi, L., Boukas, A., Renormalized higher powers of white noise (RHPWN) and conformal field theory, Infinite Dimensional Anal. Quantum Probab. Related Topics 9, No. 3, 353-360, (2006)

[AcBo06] Accardi, L., Boukas, A., The emergence of the Virasoro and w_∞ Lie algebras through the renormalized higher powers of quantum white noise , International Journal of Mathematics and Computer Science, 1 (3) (2006) 315–342

[AcBo07] Accardi, L., Boukas, A., Lie algebras associated with the renormalized higher powers of white noise, Communications on Stochastic Analysis 1 (1) (2007) 57-69

[AcLeSa07] Accardi L., Lenczewski R., Salapata R.: Decompositions of the free product of Graphs, IDA–QP (Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics) 10 (3) (2007) 303–334

[AcBo08] Accardi, L., Boukas, A., Renormalized Higher Powers of White Noise and the Virasoro–Zamolodchikov w_∞ Algebra, Reports on Mathematical Physics, 61 (1) (2008) 1-11

[AcBou08a] Accardi, L., Boukas, A., Fock representation of the renormalized higher powers of white noise and the centerless Virasoro (or Witt)–Zamolodchikov–w_∞ $*$–Lie algebra, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 304001.

AccBouCE Accardi, L., Boukas, A., Central extensions of white noise $*$–Lie algebras, submitted to Infinite Dimensional Anal. Quantum Probab. Related Topics, June (2008)

AccBouCEHeis Accardi, L., Boukas, A., Central extensions of the Heisenberg algebra, submitted to Infinite Dimensional Anal. Quantum Probab. Related Topics, November (2008)

[AcBou09] Accardi L., Boukas A.: Cohomology of the Virasoro-Zamolodchikov and Renormalized higher powers of white noise $*$-Lie algebras, IDA–QP (Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics) 12 (2) (2009) 193–212

[ArVo96] I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich, The Master Field for QCD and q-Deformed Quantum Field Theory, Nucl.Phys.B 462 (1996) 600.

[AspDR82] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger: Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers, Phys. Rev. Lett. 49 (1982), 1804–1807

[Bel85] Belavkin V.P.: Non-demolition measurement and control in quantum dynamical systems. Proc. of the conf. "Information complexity and control in quantum physics, Udine 1985, Springer-Verlag, (1985) 331-336.

[Bll64] J. S. Bell: On the Einstein Podolsky Rosen paradox, Physics 1 (1964), 195–200

[BAGu97] G. Ben Arous and A. Guionnet: Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy, Probab. Theory Related Fields 108 (1997), 517–542.

[BhP95] B.V.R. Bhat and K.R. Parthasarathy, Markov dilations of nonconservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory, Ann. Inst. Poincarè 31 (1995) 601-651.

[BoSp91] Bozejko M., Speicher R.: An Example of a Generalized Brownian Motion. Commun. Math. Phys. 137 (1991), 519-531

[Bou88] A. Boukas: Quantum stochastic analysis: a non-Brownian case, PhD thesis, Southern Illinois University (1988)

[Bou88] A. Boukas: An example of quantum exponential process, Mh. Math., 112 (1991) 209–215

[Bou88] A. Boukas: Stochastic calculus on the finite-difference Fock space, L. Accardi (ed.) Quantum Probability & Related Topics VI, World Scientific (1991)

[CabDuvIon97] Cabanal–Duvillard T., Ionescu V.: Un théorème central limite pour des variables aléatoires non–commutatives. Probabilités/Probability Theory, C.R.Acad. Sci. Paris, t. 325, Série 1, pp. 1117–1120 (1997)

[CheFa93] A.M. Chebotarev, F. Fagnola, Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups. Journal of Functional Analysis, 1993, v.3, N1, 131-153.

[Fag90] Fagnola F. Quantum stochastic integration with respect to free noises. Preprint Volterra N. 37 (1990) in: Quantum Probability and Related Topics, World Scientific, OP–PQ VI (1991)

[FNW92a] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R.F. Werner. Abundance of Translation Invariant Pure States on Quantum Spin Chains. Letters in Mathematical Physics, 25 (1992) 249 – 258

[FNW92b] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R.F. Werner. Finitely Correlated States on Quantum Spin Chains. Commun. Math. Phys., 144 (1992) 443 – 490

[[FNW94] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R.F. Werner. Finitely Correlated Pure States. J. Funct. Anal., 120 (1994) 511 – 534

[Fei87] P.J. Feinsilver: Discrete analogues of the Heisenberg-Weyl algebra, Mh. Math., 104 (1987) 89–108

Feynman R.P.: Lecture on Physics, vol. III Addison-Wesley 1966

[GivW78] von Waldenfels W., Giri N.: An Algebraic Version of the Central Limit Theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 42, 129–134 (1978).

[GKS76] Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G.: Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. Journal of Mathematical Physics 17 (1976) 821-825.

[Guich72] Guichardet, Alain
FSymmetric Hilbert spaces and related topics.
Infinitely divisible positive definite functions. Continuous products and tensor products. Gaussian and Poissonian stochastic processes.
Springer LNM n. 261 (1972)

A. Guichardet: Symmetric Hilbert spaces and related topics.

[Has97] Hashimoto Y.: Deformations of the semi–circle law derived from random walks on free groups. Prob. Math. Stat. 18 (1998) V. Volterra Center Preprint 1997

[HKPS93] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: "White Noise: An Infinite Dimensional Calculus, Kluwer Academic, 1993.

[HiPe98] F. Hiai and D. Petz: Eigenvalue density of the Wishart matrix and large deviations Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, 1, N. 4 (1998)

[HoOb06] Hora A., Obata N.: Quantum probability and spectral analysis of graphs, Springer (2006)

[HuPa84] Hudson R.L., Parthasarathy K.R. Quantum Ito' s formula and stochastic evolutions. Comm. Math. Phys. 93(1984)301-323

[KrystWoja05] Anna Dorota Krystek, Lukasz Jan Wojakowski: Convolution and central limit theorem arising from addition of field operators in one mode type Interacting Fock Spaces, Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, 8, (4) (2005) 651–657

[Kuo96] H.-H. Kuo: White Noise Distribution Theory, CRC Press, 1996.

[Liebs97] V. Liebscher: On a Central Limit Theorem for Monotone Noise, Preprint (1997), Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics. N 1 (1999)

[Li76] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups. Comm. Math. Phys. 48 (1976) 119-130

[Lo84] Longo R.: Solution of the Stone-Weierstrass conjecture. An application of the theory of standard split W*-inclusions. Invent. Math. 76(1984)145-155

[Lu89] Lu Y.G.: The Boson and Fermion quantum Brownian motions as quantum central limits of quantum Bernoulli processes. Bollettino U.M.I., (7) 6–B (1992), Volterra preprint (1989)

[LuDeG95] De Giosa M., Lu Y.G. : The free creation and annihilation operators as the central limit of quantum Bernoulli process. Preprint Dipartimento di Matematica Università di Bari 2 (1995), Random operators and Stoch. Eq. (1997)

[Lu95] Lu Y.G.: The interacting Free Fock Space and the Deformed Wigner Law. Preprint of Centro Volterra (1995), Nagoya J. of Math. vol.145, pp 1–29 (1997).

[Lu96] Lu Y.G.: An interacting free Fock space and the reciprocal Wigner law. Preprint of Centro Volterra (1996), Probability and mathematical statistics, vol. 17, fasc. 1 (1997)

[Lu97] Lu Y.G.: Interacting Fock spaces related to the Anderson model, Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, 1, N. 2 (1998) 247–283

[Ma76] Mackey G.W. Mathematical foundations of quantum mechanics. Addison-Wesley (1976)

[[Mat98] Taku Matsui: A Characterization of Pure Finitely Correlated States Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, 1, N. 4 (1998)

[Meix34] Meixner J., Orthogonale Polynomsysteme mit einen besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion, J.Lond. Math. Soc. 9 (1934) 6–13

[Mey93] P.-A. Meyer: "Quantum Probability for Probabilists," Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.

[Mur96a] Muraki N.: A new example of non commutative De Moivre–Laplace theorem, in: Quantum stochastic analysis and related fields, N.Obata (ed.), RIMS Kokyuroku 957, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto August (1996) 154–166

[Mur96b] N. Muraki: A new example of noncommutative "de Moivre–Laplace theorem, in "Probability Theory and Mathematical Statistics (S. Watanabe et al, eds.), pp. 353–362, World Scientific, 1996.

[Ob94] N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space, Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer–Verlag, 1994.

[Ob95] N. Obata: Generalized quantum stochastic processes on Fock space, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 31 (1995), 667–702

[Ob97a] N. Obata: Integral kernel operators on Fock space – Generalizations and applications to quantum dynamics, Acta Appl. Math. 47 (1997), 49–77

[Ob97b] N. Obata: Quantum stochastic differential equations in terms of quantum white noise, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 30 (1997), 279–290

[Ob99] N. Obata: Wick product of white noise operators and quantum stochastic differential equations, to appear in J. Math. Soc. Japan. 51

[OHT81] Ohya M., Hiai F., Tsukada M.: Sufficiency, KMS condition and relative entropy in von Neumann algebras. Pacific Journal of Mathematics, vol. 96, n. 1, 1981.

[Oh83] Ohya M.: On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Trans. Information Theory, 29 (1983) 770–777.

[OhWa85] Ohya M., Watanabe N.: Construction and analysis of a mathematical model in quantum communication processes, Scripta Thecnica, Inc., Elect. Commun. Japan., 68, pp. 29-34, 1985

[OhPe93] M. Ohya and Petz: "Quantum Entropy and Its Use, Springer–Verlag, 1993.

[PaSchmi72] Parthasarathy, K. R.; Schmidt, K.
Positive definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems of probability theory. Lecture Notes inMathematics,Vol. 272. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972

[Par92] Parthasarathy K.R.: An Introduction to Quantum Stochastic Calculus Birkhäuser, 1992.

[Pas85] Pashkiewicz A.: Measures on Projections in W^*–Factors. Journal of Functional Analysis 62 (1985) 87–117.

[Pe84] Petz D.: A dual in von Neumann algebras, Quart. J. Math. Oxford 35 (1984), 475–483.

[Pe88] Petz D.: Conditional expectation in quantum probability, Quantum Probability and Application III, ed. by L. Accardi and W. von Waldenfels Lecture Notes in Math. 1303, Springer, (1988) 251–260.

[Pir76] Piron C.: Foundations of quantum physics. Addison-Wesley 1976

[Schü93] Schürmann, M.: White noise on bialgebras. (Lect. Notes Math., vol. 1544). Berlin Heidelberg New York: Springer 1993

Schwinger J. Quantum kinematics and dynamics. Academic Press 1970

[Ske96] M. Skeide: Hilbert modules in quantum electro dynamics and quantum probability. Comm. Math. Phys. (1998) Volterra preprint N. 257 (1996).

[Snia99] Śniady P. , Quadratic bosonic and free white noises, Commun. Math. Phys. 211 (3) (2000) 615–628

[Sp90] Speicher R.: A new example of “independence” and “white niose”. Probab. Th. Rel. Fields, 84 (1990), 141–159

[Sp98] Speicher,R.: Combinatorial theory of the free product with amalgamation and
operator–valued free probability theory. Habilitationsschrift 1994 Memoirs Amer. Math. Soc., No. 627 (1998)

[Voic91] Voiculescu D.: Free noncommutative random variables, random matrices and the II_1 factors of free groups. in: Quantum Probability and Related Fields, 473–487, (1991).

[VoDyNi92] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, Free Random Variables, CRM Monograph Ser., Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1992.

[Ume54] Umegaki, H. (1954): Conditional expectation in an operator algebra. Tohoku Math. J. 6, 177-181.

[Voic94] D. Voiculescu: The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, II, Invent. Math. 118 (1994), 411–440.

[voN32] von Neumann J.: Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton University Press 1955, Die Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, 1932.

[vWa78] von Waldenfels, W.: An algebraic central limit theorem in the anticommuting case. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 42, 135–140 (1978).