

CAPITOLO IV

ANALISI NUMERICA

4.1. Modello

Obiettivo di questo capitolo è ricavare i valori limite dei carichi per gli esempi di parete analizzati nel capitolo precedente, a tal fine si è sviluppato un modello agli elementi finiti per riprodurre un legame costitutivo analogo a quello descritto nel *paragrafo 3.3.1*.

4.1.1. Materiale, superficie limite, legame costitutivo

Il criterio scelto per l'analisi di un elemento di calcestruzzo è del tipo Rankine, che è stato già discusso precedentemente. La crisi viene raggiunta solo quando una delle tensioni principali raggiunge il valore limite a trazione o a compressione. Con tale modello è dunque possibile, scegliendo diversi valori limite, simulare i modesti valori di resistenza a trazione caratteristici del calcestruzzo.

Il dominio nel piano delle tensioni principali è un quadrato espresso dalle relazioni:

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma^+ = 0; f_2 = \sigma_2 - \sigma^+; f_3 = -\sigma_1 + \sigma^-; f_4 = -\sigma_2 + \sigma^- \quad (4.1.)$$

dove σ^+ e σ^- indicano rispettivamente la resistenza ultima a trazione ed a compressione.

Sostituendo alle σ_1 e σ_2 le corrispondenti relazioni riferite alle componenti speciali $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, si ottiene una superficie chiusa formata dall'intersezione di due coni, che rappresentano le (4.1) nelle componenti speciali.

L'utilizzo di superfici di snervamento non-continue come ad esempio Mohr-Coulomb, Tresca e la superficie di Rankine stessa pone problemi nelle applicazioni numeriche [4.1]. Tali problemi sono stati risolti in letteratura in diversi modi:

- a. attraverso un arrotondamento degli spigoli a livello globale [4.2] e cioè con la modifica dell'intera superficie con un'altra simile ma senza singolarità,
- b. attraverso un arrotondamento degli spigoli a livello locale [4.3],
- c. incorporando la generalizzazione di Koiter [4.4,4.5] della teoria del flusso plastico a più superfici in schemi d'integrazione impliciti [4.6, 4.7, 4.8],

Dopo diversi tentativi, si è scelta la strada “a” sostituendo il dominio quadrato con quello definito da una curva; continua e differenziabile rispetto a qualsiasi valore delle tensioni,

appartenente ad una famiglia ad un parametro, che per opportuni valori di quest'ultimo si approssima alla forma quadrata. Il modello realizzato con questa nuova funzione è stato testato e messo a confronto con un precedente modello a più superfici precedentemente realizzato. Si sono ottenuti i medesimi risultati, presentando d'altro canto un velocità di convergenza nettamente superiore del modello a più superfici.

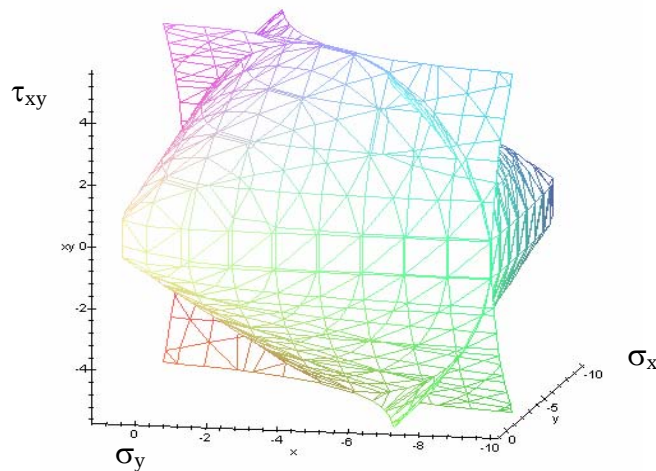


Figura 4.1: Il dominio di Rankine nel riferimento speciale.

La curva utilizzata come dominio di elasticità ha espressione, nel piano delle tensioni principali:

$$\left(\frac{\sigma_1 + w}{a}\right)^p + \left(\frac{\sigma_2 + w}{a}\right)^p = 1 \quad (4.2.)$$

La (4.2) è stata ottenuta per traslazione (w, w) da un'equazione del tipo:

$$\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^p + \left(\frac{\sigma_2}{b}\right)^p = 1 \quad (4.3.)$$

con $c, b > 0$ e $p = \frac{2}{m}$ con m dispari. Le curve definite nella (4.3) vanno con il nome di *super-ellissi* e sono introdotte da Besl in [4.9]; il parametro razionale p determina la forma della curva in modo tale che per $p = 2$ essa rappresenta un'ellisse con centro nell'origine e semiassi c e b mentre al crescere di p la forma della curva tende a divenire quella di un rettangolo di lati c e b .

Nel caso specifico della (4.2); il parametro p , indicato come *parametro di squadratura*, fa in modo che la curva che definisce il dominio di partenza possa essere approssimata con la precisione che si desidera. Gli altri parametri che intervengono:

$$w = -\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} \quad \text{e} \quad a = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2}$$

rappresentano rispettivamente il valore dell'ascissa del centro, e il raggio della circonferenza, che si otterrebbe per $c = b = a$ e per un valore di p pari a 2.

Sostituendo a σ_1 e σ_2 le corrispettive relazioni riferite alle componenti speciali σ_x , σ_y ed τ_{xy} :

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y + 4\tau_{xy}^2} - \sigma^- - \sigma^+}{\sigma^+ - \sigma^-} \right)^p + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y + 4\tau_{xy}^2} - \sigma^- - \sigma^+}{\sigma^+ - \sigma^-} \right)^p - 1$$

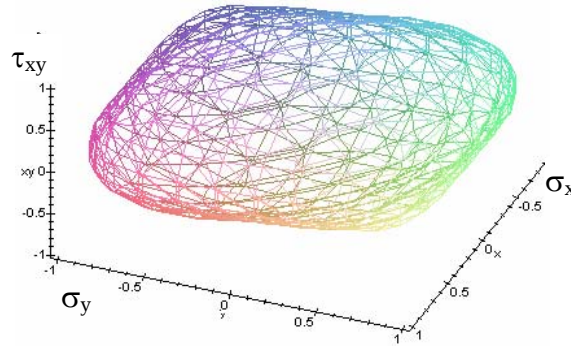


Figura 4.2: Il superellisse nel riferimento speciale.

si ottiene una superficie chiusa che è riportata nella *figura 4.2*.

Anche se con elevati valori del parametro p il dominio tende ad assumere la forma quadrata, per problemi connessi alla precisione aritmetica finita dell'elaboratore ed al forte raggio di curvatura nei vertici, l'algoritmo utilizzato tende a divenire numericamente instabile al crescere di p . Tale algoritmo ha mostrato una buona stabilità numerica per valori di p pari a 6 corrispondenti a una curvatura nello spigolo di circa 4 per un raggio pari a 1. Inoltre il confronto dei risultati ottenuti utilizzando questo dominio approssimato con i risultati ottenuti attraverso l'approccio teorico sviluppato al capitolo tre, che utilizza il dominio di Rankine, è risultato soddisfacente.

4.1.2. Il problema strutturale

La formulazione agli spostamenti di un problema strutturale nell'ambito del metodo degli elementi finiti è basata sulla suddivisione della struttura reale in un insieme di elementi in ciascuno dei quali i campi incogniti vengono discretizzati.

Per modellare le tipologie di pannello analizzate nel capitolo tre si è costruito un tipico elemento finito a quattro nodi definito dai nodi, e dalle linee di contorno.

Rimandando per una trattazione completa dell'analisi globale nel MEF in campo lineare ai numerosissimi testi sull'argomento disponibili in letteratura [4.10, 4.11] di seguito si richiameranno le relazioni fondamentali allo scopo di introdurre il problema elasto-plastico.

L'equazione di equilibrio cui perviene il MEF è del tipo:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{r}$$

con $\mathbf{K}$ matrice di rigidezza, $\mathbf{a}$ vettore degli spostamenti ed $\mathbf{r}$ vettore dei carichi esterni. La relazione tra il vettore di deformazioni e gli spostamenti è espressa dalla matrice B:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.4.)$$

Mentre la relazione tra deformazioni e spostamenti è espressa dalla matrice D:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$$

Utilizzando il MEF come metodo per la discretizzazione spaziale è necessario prima di tutto determinare l'equazione di equilibrio dell'elemento poi calcolare la matrice di rigidezza elasto-plastica ed infine esaminare i metodi di calcolo del sistema di equazioni di equilibrio non lineari ottenuto assemblando gli elementi. Non è necessaria quindi una riformulazione del processo di discretizzazione. La differenza fondamentale della formulazione di un problema elasto-plastico rispetto ad uno di natura lineare risiede nella non linearità delle relazioni costitutive, che a causa della natura incrementale delle leggi che regolano il flusso plastico, inducono una dipendenza dal percorso della soluzione.

Come ogni problema non lineare il problema elasto-plastico viene risolto in modo iterativo.

Il problema può essere formulato come soluzione della relazione di equilibrio non lineare:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{f}(t) = 0$$

essendo $\mathbf{r}(t)$ il vettore dei carichi esterni all'istante t ed $\mathbf{f}(t)$ il vettore delle forze nodali interne che è dato da

$$\mathbf{f}(t) = \int_V \mathbf{B}^T \sigma \, dv \quad (4.5.)$$

ed in generale σ non è noto all'istante t in cui si effettua il calcolo poiché dipende dagli spostamenti incogniti. Nel caso sia possibile conoscere la dipendenza di σ da ε e di ε da $\mathbf{u}$ in forma esplicita allora l'equazione d'equilibrio può essere messa in forma totale

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{a}) \mathbf{a} = \mathbf{r}$$

con $\mathbf{K}_s$ rigidezza secante.

Siccome le equazioni di equilibrio vengono di solito scritte in modo incrementale, per la natura stessa delle leggi costitutive tra tensioni e deformazioni, nei problemi di non linearità

del materiale si procede nel modo seguente: la soluzione incognita al tempo $(t + \Delta t)$ si ottiene dalla soluzione nota al tempo t con un procedimento incrementale. L'equazione al tempo $(t + \Delta t)$ è:

$$r(t + \Delta t) - f(t + \Delta t) = 0$$

ponendo

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta f$$

essendo $f(t)$ nota mentre Δf è l'incremento delle forze interne nodali che corrisponde all'incremento di deformazione e tensione nell'intervallo Δt ; dove con D si indicano gli incrementi finiti dei diversi parametri. Tale incremento si può porre nella forma approssimata

$$\Delta f = K_t \Delta a \quad (4.6.)$$

essendo K_t la matrice di rigidezza tangente e Δa l'incremento degli spostamenti nodali.

Si ottiene

$$K_t \Delta a = r(t + \Delta t) - f(t) \quad (4.7.)$$

che risolta porta a calcolare Δa , e quindi il vettore degli spostamenti incognito diventa

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta a$$

avendo calcolato un valore approssimato di $a(t + \Delta t)$, si possono calcolare le tensioni e le deformazioni al tempo $t + \Delta t$ e quindi passare al successivo incremento.

In pratica il valore dello spostamento $a(t + \Delta t)$ è affetto da un errore che può essere molto elevato, dipendendo dal passo di carico e di tempo scelto.

Si utilizza allora un procedimento iterativo, di tipo Newton-Raphson per la risoluzione di sistemi non lineari. Tale metodo consiste nel trovare una radice della $f(x)=0$ con un'approssimazione che parte dalla formula di Taylor

$$f(x^i) \equiv f(x^{i-1}) + f'(x^{i-1})(x^i - x^{i-1}) = 0$$

da cui

$$f'(x^{i-1})\delta x^i = -f(x^{i-1}) \quad (4.8.)$$

dove il simbolo δ indica una variazione arbitraria del parametro. Poiché in questo caso la funzione $f(x)$ è data dalla (4.6) il primo membro della (4.8) coincide con $K_t \Delta a$. Infine si ricava per l'iesima iterazione

$$K_t^{i-1}(t) \Delta a^i = (r(t + \Delta t) - f(t + \Delta t))^{i-1} \quad (4.9.)$$

$$a^i(t + \Delta t) = a^{i-1}(t + \Delta t) + \Delta a^i$$

con le condizioni iniziali

$$a^0(t + \Delta t) = a(t)$$

$$f^0(t + \Delta t) = f(t)$$

Nella prima iterazione, le relazioni di equilibrio corrispondono a quelle del passo incrementale; nelle iterazioni successive, i valori degli spostamenti nodali alla (i-1)-esima iterazione servono per calcolare le tensioni e le forze interne $f^{i-1}(t + \Delta t)$. Il vettore dei carichi residuo:

$$r(t + \Delta t) - f^{i-1}(t + \Delta t)$$

corrisponde al vettore che non è bilanciato dalle tensioni, e quindi viene richiesta una ulteriore iterazione con un incremento di spostamento. Questo aggiornamento degli spostamenti nodali durante il procedimento iterativo continua finché il vettore dei carichi non è bilanciato e l'incremento di spostamento è sufficientemente piccolo. Il problema principale sta nello stabilire il valore del carico $f(t + \Delta t)$ che si ottiene a partire dalla (4.5). Il significato delle operazioni è illustrato in *figura 4.3* per un caso monodimensionale.

Il metodo di Newton Raphson può essere molto dispendioso poiché richiede per ogni iterazione di valutare l'operatore K_t^i dal punto di vista computazionale ciò si traduce nella necessità di riassemblare ad ogni iterazione la matrice di rigidezza e di fattorizzarla. Questo inconveniente può essere superato ricorrendo ad una versione modificata del metodo che consiste nell'assumere indipendentemente dall'iterazione corrente:

$$K_t^i = K_t^0$$

La fase più onerosa del calcolo viene così eseguita una sola volta [4.13].

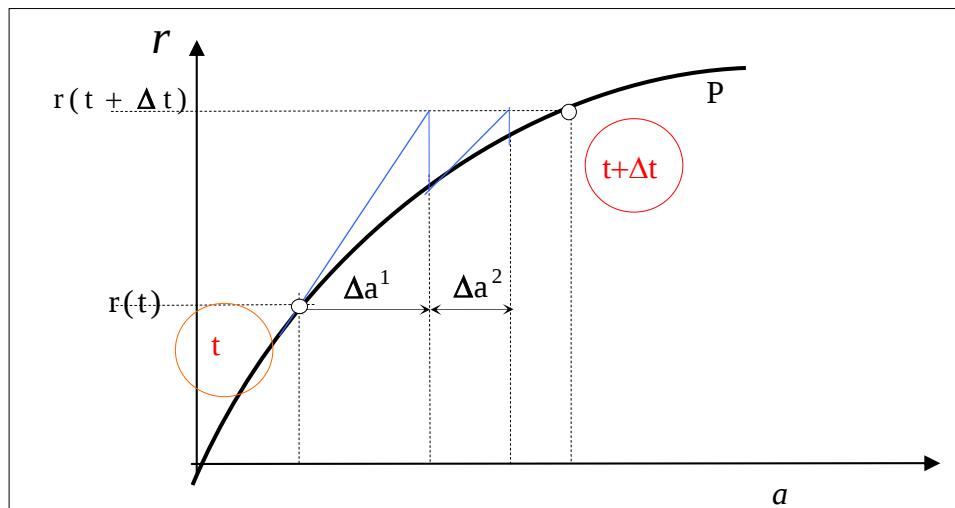


Figura 4.3.

La scelta del numero di passi di carico è di estrema importanza per poter soddisfare due esigenze contrapposte. Un elevato numero di passi di carico fa infatti aumentare i tempi di calcolo ma in questo modo si ottiene una soluzione più affidabile in termini di precisione; al tendere all'infinito di questo numero si otterrebbe infatti la soluzione esatta del problema elasto-plastico, il cui legame costitutivo, è espresso in termini di velocità e non in termini finiti come di fatto accade nella sua implementazione numerica.

Un numero troppo basso di passi di carico può invece comportare la non convergenza del procedimento di Newton-Raphson. Con il procedimento di Newton-Raphson, se correttamente applicato, si è in grado di risolvere un problema non lineare a partire da una soluzione di primo tentativo. Quest'ultima deve essere preventivamente valutata per poi procedere iterativamente alla ricerca della soluzione. L'algoritmo risolutivo completo si articola pertanto in due fasi distinte: una fase di predizione nella quale si stima una soluzione di primo tentativo ed il relativo residuo e una fase di correzione nella quale si risolve iterativamente il problema fino ad annullare il residuo che progressivamente si produce. La predizione viene effettuata utilizzando la rigidità all'origine. Non è infatti possibile conoscere a priori la natura della risposta del modello strutturale, in quanto anche per un processo di carico monotono crescente alcune parti di esso possono subire uno scarico elastico; la soluzione di primo tentativo viene pertanto stimata utilizzando la rigidità elastica K_t^0 lasciando poi al procedimento iterativo il compito di correggerla

L'equazione di equilibrio può ottenersi attraverso l'espressione dei lavori virtuali. Il lavoro delle forze interne è dato dall'azione delle tensioni di Cauchy $\sigma_{ij}(t+h)$ per la variazione di deformazione $\delta^{t+h}\epsilon_{ij}$ associata agli spostamenti virtuali δa . Mentre il lavoro virtuale delle forze esterne è il lavoro del carico esterno equivalente ai carichi concentrati. Si ha al tempo $t+h$:

$$\int_{V(t+h)} \sigma_{ij}(t+h) \delta^{t+h}\epsilon_{ij} dV = R(t+h) \delta a \quad (4.10.)$$

Per un materiale elasto-plastico vale la relazione costitutiva

$$d\sigma_{ij} = D_{ijrs}^{ep} d\epsilon_{rs} \quad (4.11.)$$

la decomposizione incrementale della tensione è data da

$$\sigma_{ij}(t+h) = \sigma_{ij}(t) + d\sigma_{ij} \quad (4.12.)$$

essendo rispettivamente

$$d\sigma_{ij} = D_{ijrs}^e (d\epsilon_{rs} - d\epsilon_{rs}^p)$$

$$d\varepsilon_{rs}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_p) = 0$$

sostituendo la (4.11) nella (4.12) e la (4.12) nella (4.10) si ricava

$$\int_V D_{ijrs}^{ep} d\varepsilon_{rs} \delta\varepsilon_{ij} dv + \int_V \sigma_{ij}(t) \delta\varepsilon_{ij} dv = R(t+h) \delta a \quad (4.13.)$$

la (4.13) è l'equazione di equilibrio linearizzata. Tenendo conto della (4.4) si ottiene dalla (4.13) in forma matriciale

$$\int_V B^T D_{ep}(t) B dv da = R(t+h) - \int_V B^T \sigma(t) dv \quad (4.14.)$$

essendo $da = a(t+h) - a(t)$. Tale relazione valida per l'elemento viene poi estesa direttamente alla struttura globale assemblando le matrici dei singoli elementi con lo stesso criterio del caso elastico; la struttura dell'equazione finale rimane comunque la stessa. La (4.30) è un'equazione di equilibrio incrementale del tipo (4.13)

$$K_t \delta a = \Delta f$$

con $\Delta f = r(t + \Delta t) - f(t)$ dove f è il vettore delle forze nodali interne ed $r(t + \Delta t)$ è il vettore dei carichi esterni all'istante $t + \Delta t$, con K_t la matrice di rigidezza tangente e da l'incremento degli spostamenti nodali. La risoluzione della (4.9) porta a calcolare δa , e il vettore degli spostamenti incognito diventa

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \delta a$$

La matrice elasto-plastica è data da

$$K_{ep}(t) = \int_V B^T D_{ep}(t) B dv$$

ed il vettore delle forze interne di natura elasto-plastica

$$f_i(t) = \int_V B^T \sigma(t) dv$$

l'errore del metodo incrementale è quello tipico dei metodi espliciti poiché si calcola la matrice K_{ep} all'istante t e questa rimane costante nell'intervallo h , perciò occorre usare anche un metodo iterativo come è stato descritto nel capitolo precedente. La (4.14) utilizzata nel calcolo iterativo è la (4.9) essendo per la i -esima iterazione:

$$f_i^{i-1}(t+h) = \int_V B^T \sigma^{i-1}(t+h) dv$$

4.2. Procedura numerica

4.2.1 Il codice di calcolo utilizzato

Il codice di calcolo utilizzato si chiama FEAP (acronimo di Finite Element Analysis Program), ed è stato creato dal professor R. L. Taylor dell'Università della California di Berkeley. La prima versione del programma originariamente implementato dall'autore è riportata nel testo: "The Finite Element Method", di O. C. Zienkiewicz [4.10]. Il programma fu scritto da R. Taylor allo scopo di realizzare uno strumento educativo e di ricerca che fosse dotato di quella flessibilità d'impiego che non è in genere disponibile nei programmi agli elementi finiti reperibili in commercio. L'autore lo ha poi via via migliorato ed integrato fino ad oggi. I moduli di programma sono integralmente accessibili e possono essere modificati ed ampliati a seconda delle esigenze, nuovi algoritmi risolutivi possono essere efficacemente implementati e sperimentati al fine di risolvere i più svariati problemi [4.11].

Il programma di calcolo qui sviluppato è stato ottenuto modificando la versione 6.2 del 1997 del FEAP, gli algoritmi sono stati elaborati e realizzati in FORTRAN ed inseriti nel preesistente codice.

Prima di descrivere le parti aggiunte è doveroso introdurre alcune caratteristiche del codice di base il quale effettua l'assemblaggio della matrice di rigidezza ed il calcolo del residuo complessivo; esegue quindi l'iterazione poi per ogni singolo step di carico fintanto che il residuo non viene annullato.

Il FEAP è costituito da due moduli base: uno nel quale avviene la lettura dei dati d'ingresso, e uno nel quale si procede alla soluzione del problema ed alla stampa e rappresentazione dei risultati. Ognuno dei due moduli si compone a sua volta di altri sub-moduli che interagiscono fra loro.

Il **modulo d'ingresso dati** del programma acquisisce da un file dati preventivamente preparato dall'utente tutte le informazioni necessarie per la modellazione della struttura: geometria vincoli, carichi applicati o cedimenti impressi, caratteristiche meccaniche dei materiali, il tipo di elementi che si intende utilizzare etc.. I dati relativi alla descrizione del modello strutturale vengono assemblati in un insieme di vettori automaticamente dimensionati. Il file dati è costituito da una serie di istruzioni; la sua preparazione richiede l'uso di un linguaggio di programmazione che consta di una serie di *macroistruzioni*, le quali assumono il significato di separatori dei singoli blocchi, tali separatori vengono elencati in un vettore i cui elementi sono stringhe di caratteri. Un file dati può apparire molto complesso, date le sue notevoli potenzialità: è possibile, attraverso la creazione di *macroelementi*, generare dei moduli base che assemblati ricostruiscono complicate geometrie. Si possono

inoltre inserire i dati in forma parametrica rendendo più spedite le indagini numeriche. La definizione del modello strutturale è completata assegnando le condizioni di vincolo, il valore dei cedimenti impressi e il tipo di elementi con relative caratteristiche meccaniche dei materiali. Sia le forze che i cedimenti nodali vengono specificati nello stesso blocco dati e il programma interpreta i valori assegnati ad ogni nodo come cedimenti o forze a seconda che i corrispondenti gradi di libertà siano vincolati o meno; nel seguito non si specificherà per i carichi se si tratta di forze o di cedimenti impressi.

I riquadri che seguono mostrano uno dei file di “input” utilizzato nelle analisi numeriche sviluppate di seguito.

Quadro 1: *Esempio file dati di ingresso del feap*

FEAP * * armatura(el02)-ced.asse mez. distribuito-app.vert

0,0,2,2,2,4

PARAMETER

a=30	!ampiezza appoggio
b=140	!ampiezza campata
c=3	!altezza copriferro
d=27	!altezza zona intermedia
e=70	!altezza zona superiore
f=2000000	!modulo di young acciaio
g=10	!area acciaio
h=0	!modulo per tau(non c'è)
k=1	!tau limite
i=260000	!modulo di young cemento
l=1	!carico distribuito
m=6	!numero di colonne di elementi per il PRIMO,QUARTO,SETTIMO blocco
n=2	!numero di righe di elementi per il PRIMO,TERZO e SECONDO blocco
o=14	!numero di colonne di elementi per il TERZO,QUINTO e OTTAVO blocco
p=3	!numero di righe di elementi per il QUARTO,QUINTO e SESTO blocco
q=7	!numero di righe di elementi per il settimo ottavo e nono blocco
r=6	!parametro squadratura dominio
s=20	!area di acciaio
t=10	!spessore della lastra
u=-0.4	!spostamento totale imposto
v=0.20	!coefficiente di poisson calcestruzzo
z=4000	!sigma limite acciaio
x=30	!sigma max trazione
y=-300	!sigma max compressione
w=0.3	!coefficiente di poisson acciaio

BLOCK 1 !descrizione della mesh

CARTESIAN,m,n,1,1,1

1 0.0 0.0

2 a 0.0

3 a c

4 0 c

BLOCK 2

CARTESIAN,m,n

1 a+b 0.0

2 2*a+b 0.0

3 2*a+b c

4 a+b c

BLOCK 3

CARTESIAN,o,n

1 a 0

2 a+b 0

3 a+b c

4 a c

BLOCK 4

CARTESIAN,m,p

1 0 c

2 a c

3 a c+d

4 0 c+d

BLOCK 5

CARTESIAN,o,p

1 a c

2 a+b c

3 a+b c+d

4 a c+d

BLOCK 6

CARTESIAN,m,p

1 a+b c

2 2*a+b c

3 2*a+b c+d

4 a+b c+d

BLOCK 7

CARTESIAN,m,q

1 0 c+d

2 a c+d

3 a c+d+e

4 0 c+d+e

BLOCK 8

CARTESIAN,o,q

1 a c+d

2 a+b c+d

3 a+b c+d+e

4 a c+d+e

BLOCK 9

CARTESIAN,m,q

1 a+b c+d

2 2*a+b c+d

3 2*a+b c+d+e

4 a+b c+d+e

BLOCK 10

CARTESIAN,m,,0,0,2

1 0 c

2 a c

BLOCK 11

CARTESIAN,o,,0,0,2

1 a c

2 a+b c

BLOCK 12

CARTESIAN,m,,0,0,2

1 a+b c

2 2*a+b c

CBOU !condizioni di vincolo

LINEAR,1,1

0,0, 0,c+d+e

CBOU

LINEAR,0,1

2*a+b,0, 2*a+b,c+d+e

CBOU

LINEAR,0,1

a+b/2,0,a+b/2,c+d+e

DISP !spostamenti imposti

50 0 0 u

65 0 0 u

80 0 0 u

138 0 0 u

153 0 0 u

168 0 0 u

282 0 0 u

297 0 0 u

312 0 0 u

327 0 0 u

342 0 0 u

357 0 0 u

372 0 0 u

MATERIAL,1 !richiama l'elemento n°24

USER,24

i,v

t,0,0,2,2,x,y,r

MATERIAL,2 !richiama l'elemento n°02

USER,02

f,0,w

g,z,0

0,0

END !fonde i nodi comuni

TIE

TIE,MATERIAL,1,2

END

INTE

MACRo !macro n°1 carico

PROP,,1 !carico proporzionale n°1

END !descrizione del carico proporzionale

2

0. 0.

1. 1.

END

MACRO !macro n°2 stampa dei risultati

TPLOT

END

REAC,50,2

REAC,65,2

REAC,80,2

```

REAC,138,2
REAC,153,2
REAC,168,2
REAC,282,2
REAC,297,2
REAC,312,2
REAC,327,2
REAC,342,2
REAC,357,2
REAC,372,2
SHOW
END

MACRo          !macro n°3 risoluzione del problema
dt,,0.001      !passo dt
LOOP carico 1000 !iterazioni sul carico
TIME          !avanza di un dt
LOOP newton 40 !cicli newton
TANG,,1       !risolve
NEXT NEWTON    !fine cicli newton
plot wipe
plot defo,200
plot mesh
plot stre,11
NEXT CARICO    !fine iterazioni sul carico
END

INTERACTIVE

STOP          !fine

```

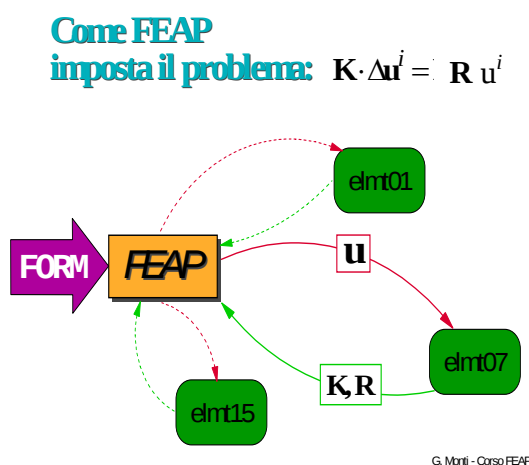
Per quanto riguarda la **procedura di soluzione** il programma consente di definire caso per caso la strategia di soluzione, mediante l'uso di un linguaggio di programmazione interno che consta di una serie di *macroistruzioni*. Ad ognuna di queste *macroistruzioni* è associato un insieme di sottoprogrammi ai quali è demandato il compito di svolgere una o solo alcune delle operazioni richieste durante il procedimento risolutivo. Qualora si vogliono esaminare diverse condizioni di carico relative ad uno stesso problema, la matrice di rigidezza strutturale non cambia, ed è dunque sufficiente assemblarla un'unica volta. Per ogni condizione di carico si rende allora necessario solo l'aggiornamento del termine noto ed il calcolo dei nuovi spostamenti.

L'esecuzione ripetuta di alcuni blocchi di istruzioni, necessità che si ha soprattutto nei problemi non lineari, viene controllata anch'essa mediante l'utilizzo di *macroistruzioni*. Come è noto in tali problemi il carico viene assegnato sotto forma di successivi passi di ampiezza limitata ed all'interno di ognuno di essi la soluzione si ricerca con un procedimento di tipo iterativo risolvendo una successione di problemi ottenuti dalla *linearizzazione* del problema assegnato. Il programma consente di definire una legge di variazione per il carico assegnato. A differenza del caso lineare l'algoritmo di soluzione in campo *non lineare* non è unico. Diverse scelte possono essere, infatti, compiute sia per quanto riguarda l'ampiezza dei singoli passi di carico che per la strategia di soluzione, ed entrambe influenzano il risultato.

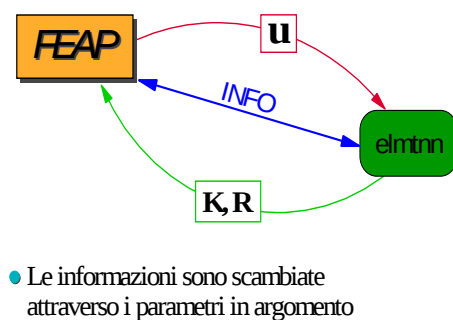
Per l'elenco completo delle *macroistruzioni* e le procedure cui esse sono collegate, per le specifiche relative alle variabili e alla sintassi delle *macroistruzioni*, ovvero per il *come*, si rimanda al testo di Zienkiewicz sopra citato, ed al manuale d'uso [4.10, 4.12].

Come detto il FEAP consente di aggiungere i propri elementi scrivendo delle "subroutine" che vengono "linkate" al programma e chiamate *elmtnn* con *nn* un numero da 01 a 50. I **Quadri 2 e 3** descrivono l'interazione del FEAP con le "routines" esterne; sono tratti da [4.13] e sono relativi alla risoluzione di problemi lineari.

Quadro 2. Interazione del Feap con le "routines" esterne



Come dialogano gli elementi con FEAP



G. Monti - Corso FEAP

Quadro 3. L'uso dei parametri

Aggiunta di elementi in FEAP

- Si possono aggiungere elementi scrivendo subroutines che poi vengoino linkate al programma
- La subroutine di elemento ha la forma

```
subroutine elmtnn (d,ul,xl,ix,tl,s,r,ndf,ndm,nst,isw)

  include 'vari files'

  operazioni determinate da isw

end subroutine elmtnn
```

G. Monti - Corso FEAP

I parametri in argomento (1/2)

- d Parametri fissi dell'elemento (moduli, ecc.)
- ul(ndf,nen,j) Valori nodali dell'elemento
 - ▶ j=1 Spostamenti totali
 - ▶ j=2 Incremento totale degli spostamenti
 - ▶ j=3 Ultimo incremento
 - ▶ j=4 Velocità
 - ▶ j=5 Accelerazione
 - ▶ j=6 Velocità precedente
- xl(ndf,nen) Coordinate nodali
- ix(nen) Numerazione nodi
- tl(nen) Temperature nodali

G. Monti - Corso FEAP

I parametri in argomento (2/2)

- s(nst,nst) Matrice dell'elemento
 - r(ndf,nen) Residui
 - ndf Massimo numero di incognite per nodo
 - ndm Dimensioni dello spazio della mesh
 - nst Dimensione di s ed r (nst=ndf * nen)
 - isw Parametro di controllo
- Il parametro isw determina il tipo di azione che si effettua all'interno dell'elemento

G. Monti - Corso FEAP

Il parametro isw

- | | | |
|----------|-----------------------------|-------------------|
| ● isw=1 | Input dei parametri in d(*) | MATE, n |
| ● isw=3 | Calcolo matrice/residui | TANG |
| ● isw=4 | Output delle variabili | STRE |
| ● isw=5 | Calcolo matrice massa | MASS |
| ● isw=6 | Calcolo residui | FORM, REAC |
| ● isw=20 | Plottaggio | PELM |

G. Monti - Corso FEAP

Esempio di subroutine

```
subroutine elmtnn(d,ul,xl,ix,tl,s,r,ndf,ndm,nst,isw)
  include 'vari files'

  select case (isw)
    case (1)
      legge dati fissi dell'elemento e li scrive in d(*)
    case (3)
      call legame_costitutivo_elemento(d,ul,xl,s,r)
    case (6)
      calcola solo il residuo r
  end select

end subroutine elmtnn
```

G. Monti - Corso FEAP

La programmazione qui effettuata è stata svolta su PC in linguaggio *Fortran*. Per la rappresentazione delle variabili si è utilizzata la doppia precisione. Le “routines” scritte sono cinque, due sono elementi: un elemento lastra a quattro nodi con comportamento elastoplastico con il legame descritto al *paragrafo 4.1*, un elemento *molla* in grado di simulare l’armatura e dotato di rigidezza tangenziale allo scopo di simulare il contatto tra fibra e matrice descritto al *paragrafo 4.3*. Lo schema di funzionamento del programma agli elementi finiti è riportato nel quadro che segue.

Quadro 4 *Schema programma*

```

Ciclo sulla condizione di carico (1)
  Ciclo sul Residuo (2)
    Ciclo sugli elementi (3)
      Calcola matrice di rigidezza tangente dell'elemento
      Calcola residuo dell'elemento
      Assembla matrice e residuo globale
    Chiudi ciclo (3)
  Chiudi ciclo (2) solo se Residuo  $\cong 0$ 
  Incremento di carico
Chiudi ciclo (1)

```

E’ stata usata una tecnica di “Return Mapping” per integrare il legame costitutivo applicata al dominio descritto sopra espresso nelle componenti speciali σ_x , σ_y , τ_{xy} che, viene descritta nel paragrafo successivo.

4.2.2. Integrazione del modello

L’analisi agli elementi finiti è usata ampiamente per analizzare la risposta elastoplastica delle strutture. L’accuratezza e l’efficienza computazionale di una soluzione elastoplastica dipende in larga misura dalla robustezza delle tecniche numeriche atte ad implementare le equazioni costitutive della plasticità [4.14, 4.15, 4.16]. Nei metodi di tipo implicito, ad esempio si possono utilizzare, per l’aggiornamento delle tensioni ad ogni passo di tempo (ossia carico), strategie dipendenti o indipendenti dal percorso. La strategia indipendente dal percorso che noi utilizzeremo elimina gli scarichi fittizi, che hanno luogo, durante il caricamento a controllo di spostamenti. Tuttavia l’utilizzo di queste strategie

richiede la definizione di un operatore tangente *consistente* ovvero per mantenere la convergenza delle soluzioni di tipo Newton-Raphson [4.17, 4.18].

Nell'analisi agli elementi finiti convenzionale le quantità costitutive sono note al tempo t_n e le deformazioni aggiornate sono note al tempo t_{n+1} , come accennato prima il tempo per l'analisi statica è interpretato come un parametro di carico: durante un incremento Δt un passo di carico è applicato alla struttura; la "routine" costitutiva integra le equazioni incrementali della plasticità sul passo di tempo per determinare l'aggiornamento delle tensioni e delle variabili di stato plastiche.

In quanto segue partendo dalla legge trapezoidale generalizzata come descritta da Ortiz e Popov [4.19] si svilupperà un algoritmo specifico, e si deriverà poi per esso l'operatore tangente *consistente*. La suddetta legge per l'integrazione delle equazioni incrementali della plasticità si esprime attraverso le due equazioni:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{C} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \boldsymbol{\sigma}_B - \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta \lambda [(1-\eta) \mathbf{a}_A + \eta \mathbf{a}_C]$$

dove **A** è il punto iniziale e **C** è il punto finale sulla superficie di snervamento e il punto **B** il punto corrispondente al *predittore* elastico o punto "trial". Il valore di η determina la stabilità e l'accuratezza dello schema di integrazione. Per $\eta > 0$ il metodo è implicito e richiede una soluzione iterativa. Per $\eta = 1$ si ha una procedura implicita di tipo Euleriano ("Backward-Euler") che noi adotteremo e per la quale, le equazioni precedenti diventano:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C$$

Il metodo implica la determinazione di un vettore $\mathbf{a}_C$ che è normale alla superficie di snervamento nella posizione finale **C**. Eccetto per determinate circostanze $\mathbf{a}_C$ non può essere computato direttamente dai dati che si hanno in **A** e **B** ed necessario cominciare da una prima stima della tensione in **C**.

In sintesi le operazioni a livello dei punti di Gauss saranno:

- 1 Si comincia con un vettore tensione elastico (*predittore iniziale*) portandosi con le tensioni nel punto **B**.
- 2 Si calcola quindi un valore di primo tentativo di $\Delta \lambda$ e da questo si aggiorna il vettore tensione elastico di tentativo $\boldsymbol{\sigma}_C$:

Data la relazione costitutiva in termini incrementali :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}$$

Uno sviluppo in serie di Taylor con punto di partenza in **B** della funzione di snervamento fornisce il valore di f :

$$f = f_B + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \sigma = f_B - \Delta \lambda \mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B \quad (4.15)$$

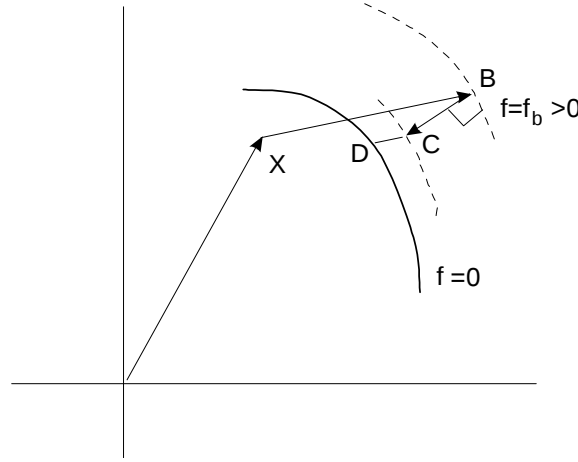


Figura 4.4: Lo schema di “return map”.

Nell’espressione (4.15) si è considerato $\Delta \varepsilon = 0$, poiché la deformazione totale $\Delta \varepsilon$ è stata già applicata dal punto X al punto B lungo il tentativo elastico (vedi figura 4.4 per la descrizione del metodo).

Le condizioni di consistenza forzano la funzione di snervamento espressa come sopra ad essere nulla; in questo modo è possibile ricavare una prima valutazione di $\Delta \lambda$:

$$\Delta \lambda = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B}$$

Il vettore $\mathbf{a}$ è computato in $\mathbf{B}$, le tensioni finali σ_C sono calcolate in prima istanza come segue:

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_B$$

In genere questa prima stima non soddisferà la funzione di snervamento poiché la normale alla posizione di tentativo $\mathbf{B}$ non coinciderà necessariamente con la normale al punto finale.

3. Si utilizza una procedura iterativa per portare il punto tensione sulla superficie di snervamento e quindi individuare la normale al punto finale effettivo.

Dato un vettore $\mathbf{r}$ che rappresenti la differenza tra lo stato di tensione corrente e quello “Backward-Euler” la procedura si arresta quando tale vettore diventa sufficientemente piccolo:

$$\mathbf{r} = \sigma - (\sigma_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C)$$

Tenendo fissa la tensione di tentativo, uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo termine può essere applicato all’equazione precedente per ottenere un nuovo residuo:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

dove $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ è la variazione di $\boldsymbol{\sigma}$ mentre $\dot{\lambda}$ è la variazione di $\Delta \lambda$. Ponendo $\mathbf{r}_n$ uguale a zero si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a}) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}$$

Un altro sviluppo in serie di Taylor troncato al primo termine rispetto alla funzione di snervamento da allo stesso modo:

$$f_{cn} = f_{c0} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = f_{c0} + \mathbf{a}_c^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

dalla quale tramite la legge di consistenza può ricavarsi $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{c0} - \mathbf{a}_c^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}_c^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}_c}$$

una volta trovato $\dot{\lambda}$ si può sostituirlo nella precedente per ricavare $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e aggiornare con esso il valore delle tensioni al punto finale.

Simo e Taylor e Runesson e Samuelsson hanno derivato una matrice tangente che conserva la convergenza quadratica nell'integrazione del tipo "Backward-Euler" [4.20]. Tale proprietà è stata definita come di *consistenza* con l'algoritmo di integrazione. Da ciò consegue che utilizzando una matrice consistente, invece che la normale matrice elasto-plastica, si ottiene un significativo miglioramento nelle caratteristiche di convergenza. Difatti l'uso di una qualsiasi altra matrice tangente, che non sia stata ottenuta tramite una linearizzazione consistente della funzione risultante dall'algoritmo di "Return Mapping", non assicura una convergenza quadratica del problema risolto mediante un metodo alla Newton-Raphson.

L'algoritmo "Backward-Euler" è basato sull'equazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}$$

dove il suffisso B indica il valore di *tentativo* elastico ($\boldsymbol{\sigma}_B = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$). Differenziando la precedente equazione si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a} - \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.16)$$

Ponendo in evidenza $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ la (4.16) diventa:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) = \mathbf{R} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (4.17)$$

Avendo posto $\mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1}$ ed $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}$. Inoltre dall'equazione di consistenza e

sostituendovi il valore ottenuto di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, si può ricavare $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}}$$

che sostituita nella (4.17) danno l'espressione della matrice tangente consistente alla formulazione "Backward-Euler":

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_{TC} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.18)$$

La differenza fra l'espressione della matrice tangente ottenuta dalla (4.18) rispetto quella della teoria continua è nel porre a zero il $\Delta\lambda$ nella (4.16). La procedura sin qui descritta è riassunta nel quadro che segue.

Quadro 5 "Return Mapping"

In ingresso $\rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\text{tentativo}}$

- $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{tentativo}}$
- Ciclo sul residuo $\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_{\text{tentativo}} - \Delta\lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C)$ finché si annulla

Calcola

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a}) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}$$

Calcola valore di $f(\boldsymbol{\sigma})$ come sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine

$$\mathbf{f}_{Cn} = \mathbf{f}_{C0} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{C0} + \mathbf{a}_C^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{f}_{C0} - \mathbf{a}_C^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}_C^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}_C}$$

Aggiorna $\Delta\lambda = \Delta\lambda + \dot{\lambda}$

Aggiorna $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}$

- Termine ciclo sul residuo
- Matrice tangente consistente

$$\mathbf{C}_{TC} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}} \right)$$

Con $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}$

4.3. Verifica del modello numerico

Allo scopo di testare il modello numerico è stato studiato un calcestruzzo fibro-rinforzato (FRC), dove si suppone che la matrice presenti un valore di resistenza a trazione molto basso rispetto il corrispettivo valore a compressione.

A. Grimaldi e R. Luciano in [4.29, 4.30] hanno studiato il problema dell'omogeneizzazione di un composito che abbia come matrice un materiale non resistente a trazione [4.31]. La legge costitutiva utilizzata nei lavori citati è caratterizzata da una deformazione elastica in direzione della tensione di compressione e da fratture in direzione delle tensioni nulle, assumendo per la matrice un valore limite di compressione, ed un comportamento rigido plastico all'interfaccia fibra matrice. Gli autori in [4.30] hanno valutato la resistenza limite del composito usando la formulazione dell'analisi limite per materiali non resistenti a trazione [4.32].

In quanto segue si analizzerà il comportamento non lineare del calcestruzzo fibro-rinforzato determinando i meccanismi di collasso per carichi di trazione. Si confronteranno i risultati numerici con quelli ottenuti dal modello teorico tratto dal lavoro [4.30] scelto come riferimento e che si esporrà brevemente nel *paragrafo 4.3.3.*

Il comportamento monoassiale del composito è usualmente schematizzato attraverso la relazione costitutiva rappresentata in *figura 4.5*. Questo comportamento è stato osservato in numerosi esperimenti ad esempio in [4.34].

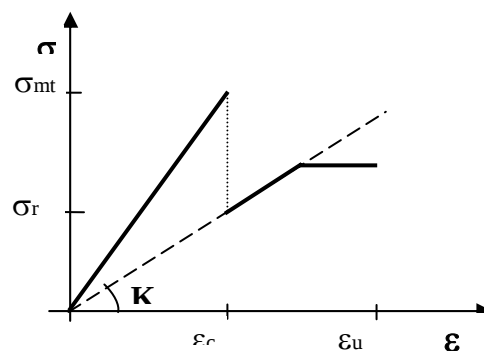


Figura 4.5: Comportamento a trazione dell'F.R.C..

Se il materiale è caricato con una deformazione assiale, si osservano le fasi caratteristiche del comportamento:

- a) Fase iniziale lineare elastica. Questa fase è caratterizzata da un modulo elastico e da un picco di resistenza del calcestruzzo σ_{mt} , in essa le fibre non incidono sulla totalità del materiale a causa del basso rapporto volumetrico, e la tensione è sopportata solo dalla matrice.

- b) Il composito cambia configurazione per valori della deformazione maggiori di quella limite della matrice ε_c . Le fratture si sviluppano nella matrice e la tensione risultante è sostenuta dal materiale composito, ossia dal calcestruzzo e dalle fibre.
- c) L'ultima fase coincide con quella di collasso del composito. Il valore della tensione σ_r in condizioni di materiale danneggiato rappresenta il valore minimo per le tensioni per deformazioni più grandi di ε_c . Incrementando ulteriormente la deformazione, possono aver luogo diversi fenomeni di danneggiamento, ovvero *slittamento tra le fibre e la matrice e deformazioni plastiche dovute alla compressione nella matrice*.

Per quanto riguarda le ipotesi adottate per confrontare il modello numerico e il comportamento teorico si tenga conto che:

- 1 - per modellare la **fase b** si è considerata una matrice con resistenza molto bassa ($\sigma_t^* \ll \sigma_t$, dove σ_t è la tensione limite di trazione del calcestruzzo da normativa e σ_t^* una opportuna tensione limite); in tal modo si è schematizzata la matrice di calcestruzzo come un materiale non resistente a trazione.
- 2 - Per modellare la **fase c** di collasso si è considerato che la matrice presenti una tensione limite σ_c a compressione e una τ_0 di scorrimento per il contatto fra fibra e matrice [4.30].

4.3.1. Materiali

Per la matrice di calcestruzzo è stato utilizzato il modello elasto-plastico descritto nei paragrafi 4.1 e 4.2. Le fibre di acciaio sono considerate indefinitivamente elastiche lineari e per esse si è utilizzato un elemento finito preesistente nel FEAP. Tale ipotesi bene si adatta al modello, poiché per le geometrie prese in analisi (fibre corte) le tensioni che nascono a seguito dei carichi non raggiungono mai i valori limite di plasticizzazione.

Per simulare il fenomeno di slittamento delle fibre dalla matrice si è modellato il contatto fra i due materiali tramite un legame elastico perfettamente plastico con incrudimento isotropo. La fibra di acciaio può scorrere quando al contatto con il calcestruzzo si raggiunge una prefissata τ limite. A tal fine si è sviluppato un elemento monodimensionale che simula il contatto. Tale elemento presenta sia una rigidità trasversale che assiale. Il *quadro* che segue descrive lo schema di programma per l'elemento di contatto [4.35].

Quadro 6: modello di plasticità monodimensionale

- 1) Relazioni di elasticità fra tensioni e deformazioni:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

- 2) Legge di flusso e di incrudimento isotropo:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_p &= \dot{\gamma} \operatorname{sign}(\sigma) \\ \dot{\alpha} &= \dot{\gamma}\end{aligned}$$

3) Condizione di snervamento:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + k \cdot \alpha) \leq 0$$

4) Condizioni complementari di Kuhn-Thucker:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \dot{\gamma} \cdot f(\sigma, \alpha) = 0$$

5) Condizioni di consistenza:

$$\dot{\gamma} \cdot \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

Dove E è il modulo elastico, $\dot{\gamma}$ il parametro di scorrimento plastico, f la superficie limite, α il parametro di accumulo plastico e k il modulo plastico.

4.3.2. Geometria

Il modello preso in analisi è un calcestruzzo rinforzato da fibre corte e tutte parallele alla direzione del carico applicato. Le fibre sono della stessa dimensione, e distribuite in modo periodico nella matrice. La disposizione delle fibre è definita dalla loro lunghezza, dalla distanza fra due di esse e dalla loro sovrapposizione. Queste assunzioni consentono di considerare un singolo elemento rappresentativo invece del composito con tutte le sue fibre. L'elemento rappresentativo è definito come una *cella* tale che il mezzo continuo può essere costruito come ripetizione di questo elemento. Si assume che il modello sia piano e cioè costituito da una matrice di spessore t rinforzata da fibre rettangolari di uguale spessore. La *figura 4.6* mostra in dettaglio il composito e la cella presa come elemento rappresentativo, essa è composta da due fibre di acciaio di raggio r e semilunghezza l . Le fibre sono disposte ad una distanza dai rispettivi bordi pari a d e sono sovrapposte per una lunghezza s .

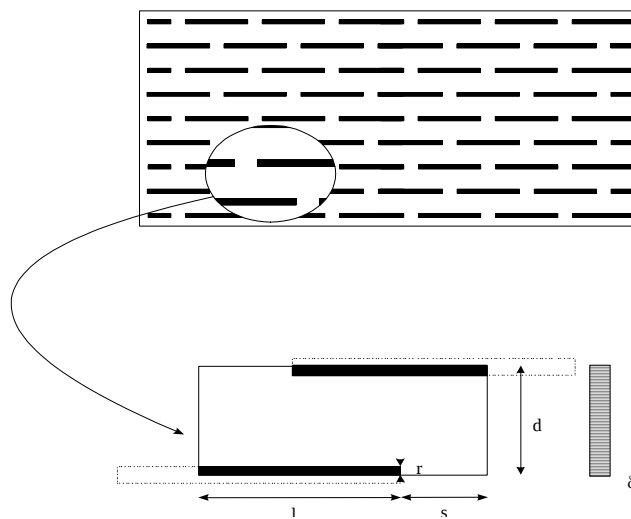


Figura 4.7: Rappresentazione del composito e schema del modello.

Le dimensioni della zona di contatto sono dell'ordine di 1/10 del raggio della fibra, per far sì che la presenza dell'elemento di contatto non influisca in modo significativo sulla distribuzione delle tensioni nella matrice (avendo supposto che il fenomeno di scorrimento sia localizzato in una zona molto prossima alla fibra di acciaio).

La cella è vincolata verticalmente lungo i bordi orizzontali e orizzontalmente lungo i due verticali; questi vincoli stanno a descrivere il materiale circostante e simulano la periodicità del materiale. Lungo uno dei lati verticali è imposto un cedimento nella direzione delle fibre stesse. La legge con cui viene incrementato tale spostamento è di tipo lineare ed è monotona. Sono stati investigati i valori delle tensioni medie limiti al variare della percentuale di fibra dal 2% al 14% avendo fissato la lunghezza l e la sovrapposizione s .

4.3.3. Il modello teorico

Al fine di confrontare il modello agli elementi finiti con i valori di resistenza limite calcolati tramite il modello teorico, vengono qui riportate le espressioni significative dell'analisi teorica di riferimento [4.29, 4.30].

Si considerano due meccanismi di collasso. Il primo è un micromeccanismo di scorrimento, per il quale si verificano deformazioni plastiche di compressione nella zona centrale, e per cui il limite superiore (con la simbologia ripresa da [4.29, 4.30]) è:

$$\Sigma_{11}^+ = \frac{\sigma_0 s}{2 d}$$

Il secondo è un micromeccanismo caratterizzato da slittamento tra fibre e matrice, e fornisce il limite superiore:

$$\Sigma_{11}^+ = \frac{\tau_0 s}{d}$$

Essendo di solito τ_0 inferiore a $\sigma_0/2$ la seconda espressione fornisce il limite superiore per la tensione media.

Il metodo statico fornisce il limite inferiore di resistenza per il modello espresso come:

$$\Sigma_{media}^- = \frac{\tau_0 s \sin(\beta)}{d \sin(\bar{\beta})} \cdot \left(1 - \frac{\tan(\beta/2)}{\tan(\beta)} \right)$$

essendo $\tan(\beta) = s/d$ mentre $\sin(\bar{\beta}) = 2 \tau_0 / \sigma_0$. Tale relazione è valida solamente nella situazione di $\beta \leq \bar{\beta}$, che rappresenta la situazione di collasso della matrice di calcestruzzo.

Nel caso di $\beta > \bar{\beta}$, ovvero collasso per slittamento delle fibre, vale la seguente relazione:

$$\Sigma_{media}^- = \frac{\tau_0 s}{d} \cdot \left(1 - \frac{\tan(\bar{\beta}/2)}{\tan(\beta)} \right)$$

Dalle espressioni delle Σ_{media}^- si nota che essa dipende dal rapporto tra la sovrapposizione fibra matrice e dall'interasse fra le fibre, e non risente dunque di effetti di scala.

4.3.4. L'analisi dei risultati

I parametri meccanici dei materiali costituenti il modello sono riportati in **tabella 4.1**.

Tabella 4.1

Materiali	Modulo elastico [Kg/cm ²]	ν	σ_{traz} [Kg/cm ²]	σ_{comp} [Kg/cm ²]	τ_{lim} [Kg/cm ²]
Acciaio	2.100.000	0.3	∞	∞	/
Calcestruzzo	311.770	0.1	8÷14	300	/
Contatto	300.000	0.1	∞	∞	30÷120

Il modulo elastico del calcestruzzo è stato scelto pari a quello ottenuto tramite normativa per una R_{BK} pari a 300. Per la σ di trazione del calcestruzzo si è scelta la più bassa possibile compatibilmente con il modello numerico. In tal modo si analizza il modello di calcestruzzo fibro-rinforzato partendo già dalla fase di matrice fessurata e quindi non resistente a trazione. Le rigidezze dell'elemento di contatto sono paragonabili a quelle del solo calcestruzzo. Al contrario si sono valutati diversi valori di τ limite.

Con riferimento a quanto ricavato dal modello teorico non è necessario far variare singolarmente tutti i parametri geometrici del modello, ma influiscono, nella valutazione della tensione media, solo i loro rapporti. Al fine di limitare il numero dei modelli presi in analisi, si sono fissate la lunghezza (2.00 cm), il raggio (0.1 cm) e la sovrapposizione (1.00 cm) delle fibre. Si è fatta variare la sola distanza fra i loro lembi. In base a tali considerazioni l'indagine numerica è stata estesa ad una serie di modelli che presentano, come riportato in **tabella 4.2**, diverse percentuali in fibra e quindi una certa variazione del parametro β .

Tabella 4.2

d [cm]	% fibra	beta	Areatot	N elementi
0.70	14.5	55	2.76	480
1.0	11	45	3.76	480
1.5	7	33.7	5.16	630
2	6	26.6	6.66	780
2.	5	21.8	8.16	980
3	4	18.4	9.66	1226
3.5	3.6	15.6	11.16	1450
4	3	14	12.66	1608
4.5	2.8	12.4	14.13	1978

Le geometrie riportate in **tabella 4.2** sono state valutate per due diversi valori di τ_0 (ovvero $\tau_0 = 30$, $\tau_0 = 120$) al fine di poter verificare quando abbia luogo il collasso del fibro-rinforzato per

compressione della matrice e quando per sfilamento delle fibre. Al valore di $\tau_0 = 30$ corrisponde un $\bar{\beta}$ pari ad 11.50° , mentre per un $\tau_0 = 120$ corrisponde un $\bar{\beta}$ pari a 53.13° .

La *figura 4.8* mostra il legame $\sigma_{\text{media}} - \varepsilon$ valutata nei casi $\bar{\beta} = 11.50^\circ$ e $\bar{\beta} = 53.13^\circ$ per una percentuale di fibra dell'11%, cioè pari ad un β di 45° .

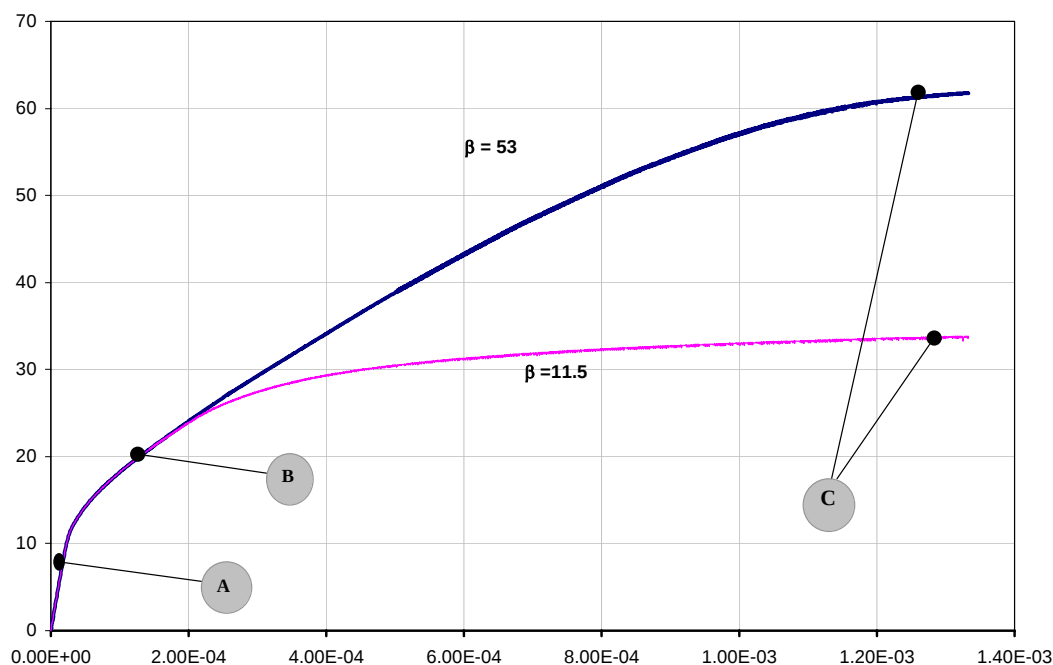


Figura 4.8.

L'andamento della curva ottenuta tramite analisi agli elementi finiti non rispecchia quella sperimentale mostrata in *figura 4.5*. Il motivo è da individuarsi nel fatto che si è studiato un mezzo che presenta valori di resistenza a trazione modesti, al fine di simulare solamente la fase **b** (ossia mezzo fessurato) e la fase **c** (ossia collasso).

Sulle curve riportate in *figura 4.8* sono stati indicati tre punti significativi (A, B, C) dello stato tensionale del composito. Essi individuano:

- (A) Stato elastico, legato alla presenza di una seppur piccola resistenza a trazione,
- (B) Stato fessurato,
- (C) Collasso.

Per individuare se il collasso, lungo i due andamenti, sia stato raggiunto per compressione o sfilamento sono state analizzate le tensioni di contatto calcestruzzo-acciaio. Tali tensioni, per gli elementi di contatto della fibra inferiore, sono riportati in *figura 4.9*. Nel caso di $\bar{\beta} = 53.13^\circ$, a conferma dei modelli teorici, le tensioni di contatto non raggiungono quelle di sfilamento (tranne che per alcuni elementi molto prossimi al termine della fibra). D'altro canto, per $\bar{\beta} = 11.5^\circ$, si

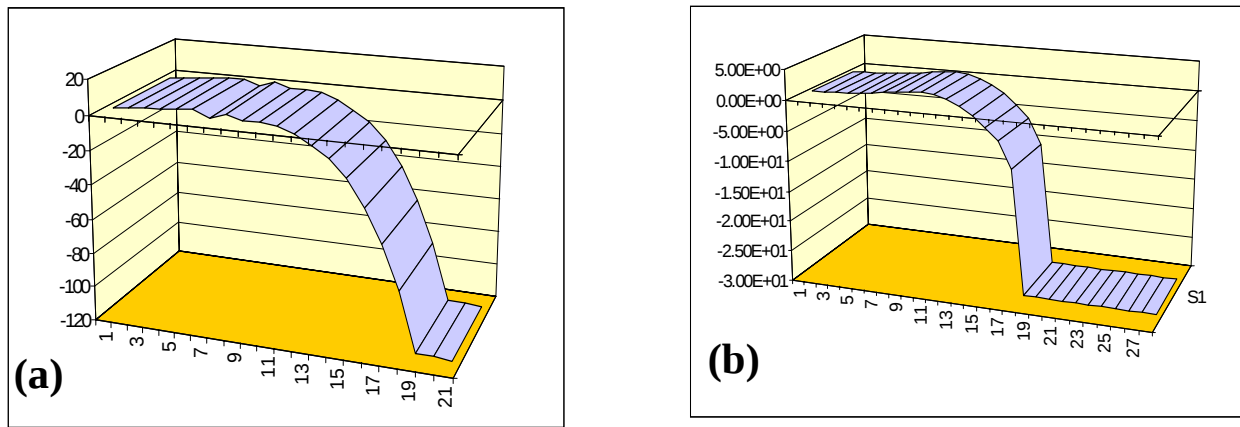


Figura 4.9: (a) tensioni di contatto $\bar{\beta} = 53.13$ (b) tensioni di contatto $\bar{\beta} = 11.5$.

forma lungo la fibra, nella zona di calcestruzzo compresso, una larga fascia ove le tensioni sono pari a quelle limite di scorrimento. In quest'ultimo caso è evidente che sia la fibra a scorrere. Nei rimanenti elementi di contatto le tensioni sono prossime allo zero, ciò è dovuto alla presenza di calcestruzzo fessurato che praticamente non esercita più ulteriori azioni.

Per $\bar{\beta} = 53.13^\circ$ in fase di collasso le tensioni lungo la biella compressa sono pari a quelle limite a compressione. Nella zona della biella si concentrano le deformazioni plastiche. Nel caso $\bar{\beta} = 11.5^\circ$ le tensioni presentano andamenti simili, solamente che non raggiungono i valori di collasso a compressione. Le deformazioni si concentrano nelle zone prossime alle fibre. Gli elementi che compongono la biella compressa di calcestruzzo presentano una inclinazione delle tensioni principali rispetto al riferimento locale pari a circa 32.8° . Tale angolo risulta superiore a quello teorico di 22.5° . Questo è dovuto alla presenza, nel modello agli elementi finiti, di una seppur piccola, resistenza a trazione, completamente assente nella schematizzazione teorica.

Nelle zone, esterne alla biella, le tensioni sono di trazione e pari a quelle limiti. Sono stati messi a confronto i valori della tensione media limite nel composito ottenuti per i modelli riportati in **tabella 4.2** con quelli teorici. Il grafico di *figura 4.10* ha sull'ascissa i valori di β corrispondenti a diverse percentuali di fibra, mentre in ordinata si riporta la tensione media limite corrispondente al carico cinematico, statico e a quello numerico. In entrambi i casi analizzati l'andamento numerico si posiziona intermedio a quelli teorici. Per il primo caso $\bar{\beta} = 11.5^\circ$ la curva numerica è quasi coincidente a quella corrispondente ai limiti cinematici. Mentre per il caso $\bar{\beta} = 53.13^\circ$ è prossima a quelli statici (*figura 4.11*).

Per l'elemento di contatto si notano, come ipotizzato, due situazioni limiti:

- la **prima**, quando ci si trova in una situazione di $\beta > \bar{\beta}$, valore per il quale si ha un collasso per sfilamento delle fibre dalla matrice, le tensioni di contatto fra fibra e matrice sono pari al

valore limite (nel nostro caso $\tau_{lim}=120 \text{ Kg/cm}^2$). Tali valori sono raggiunti solamente nella zona di sovrapposizione.

- la **seconda**, per $\beta < \bar{\beta}$, il valore limite si raggiunge per collasso della matrice. In tal caso le tensioni sulla superficie limite sono molto minori della tensione limite di sfilamento.

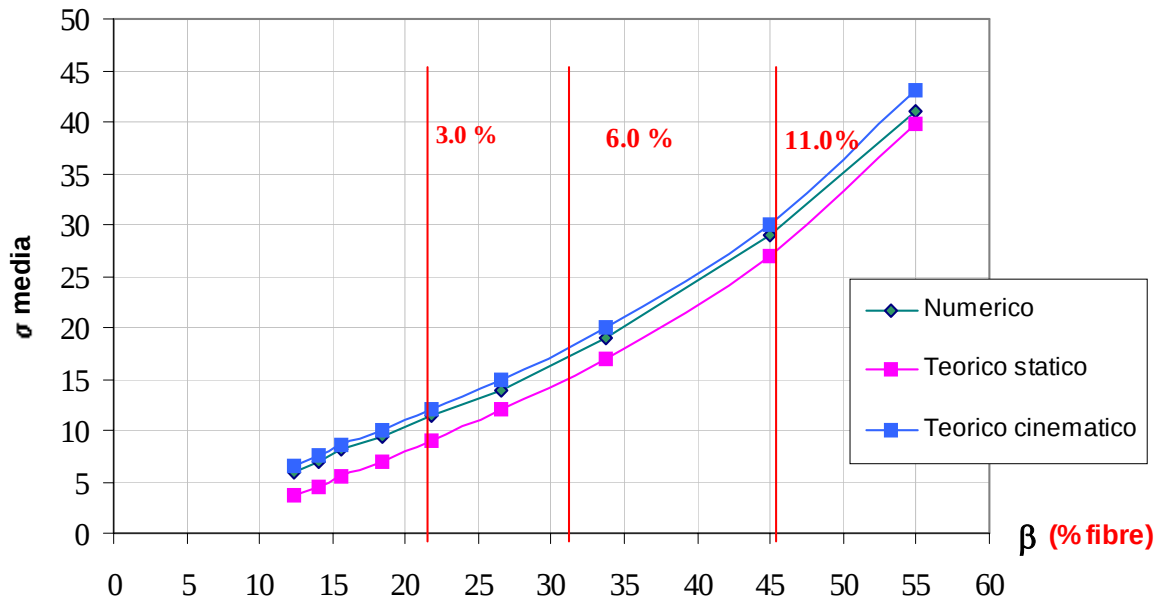


Figura 4.10: Confronto teorico numerico per $\bar{\beta} = 11.50$.

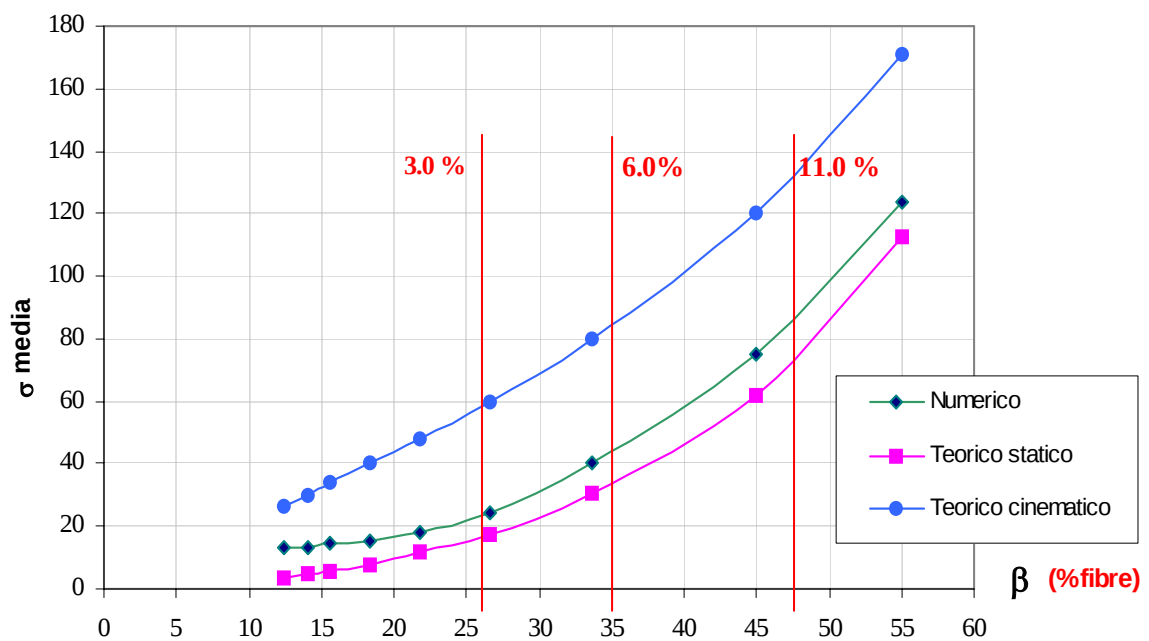


Figura 4.11: Confronto teorico numerico per $\bar{\beta} = 53.13$.

4.4. Applicazioni a pareti

4.4.1. Parete soggetta a carico tagliante

Questa analisi fa riferimento alla struttura analizzata nel capitolo 3 al paragrafo 3.3.1. Le condizioni di vincolo della struttura utilizzata nell'analisi numerica e il legame costitutivo adottati corrispondono alle ipotesi precedentemente considerate, e pertanto i risultati ottenuti forniscono informazioni più dettagliate sulla distribuzione di tensioni nella fase di resistenza ultima.

La “mesh” utilizzata è di 64 elementi rettangolari a quattro nodi. Si è scelto tale numero di elementi dopo un'indagine su più campioni. Tale densità mediava, infatti, tra accuratezza dei risultati ed oneri di calcolo.

La figura 4.13: mostra le curve limite corrispondenti a differenti discretizzazioni, a partire da una “mesh” ad un solo elemento sino a quella di 144 elementi. Si nota come a partire da quella di 64 elementi verso le successive più fitte, i valori del carico ultimo differiscono poco fra loro o sono addirittura coincidenti.

Le figure che seguono mostrano: lo schema di vincolo per il modello agli elementi finiti ed i parametri utilizzati (tali parametri sono quelli immessi attraverso il file di testo per il FEAP.

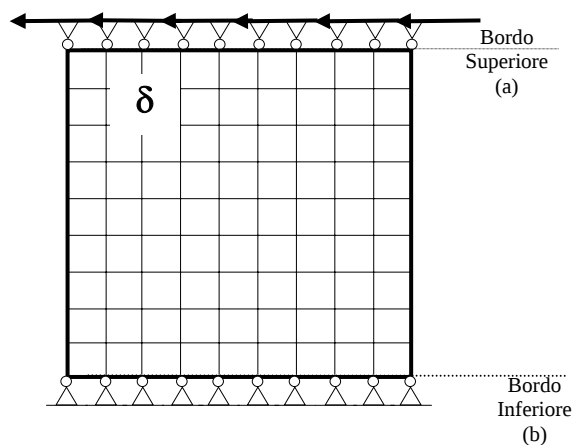


Figura 4.12: Schema di vincolo e carico.

Larghezza: $b = 1$
Altezza: $h = 1$
Divisioni orizzontali: m da 1 a 12
Divisioni verticali: n da 1 a 12
Cedimento imposto bordo (a): $u = 0.01$
Tensione max trazione: $x = 40 \text{ kg/cm}^2$
Tensione min compressione: $y = -400 \text{ kg/cm}^2$
Modulo di Young: $e = 250000 \text{ kg/cm}^2$
Coefficiente di Poisson: $p = 0.15$
Parametro squadratura: $s = 6$
Spessore della lastra: $t = 1.0$

Tabella 4.3: Parametri utilizzati.

L'area della lastra, avendo accettato l'ipotesi di indipendenza dei risultati dalla scala adottata (confronta i risultati ottenuti al paragrafo 3.3.1), viene considerata, per l'indagine successiva, unitaria e l'analisi si è compiuta facendo variare le proporzioni della struttura ovvero il rapporto H/L da 0.1 (trave) a 2.00 (lastra).

Il carico limite, come ci si aspetta, è inversamente proporzionale al rapporto H/L così come è diagrammato in figura 4.14 per valori fissati degli altri parametri.

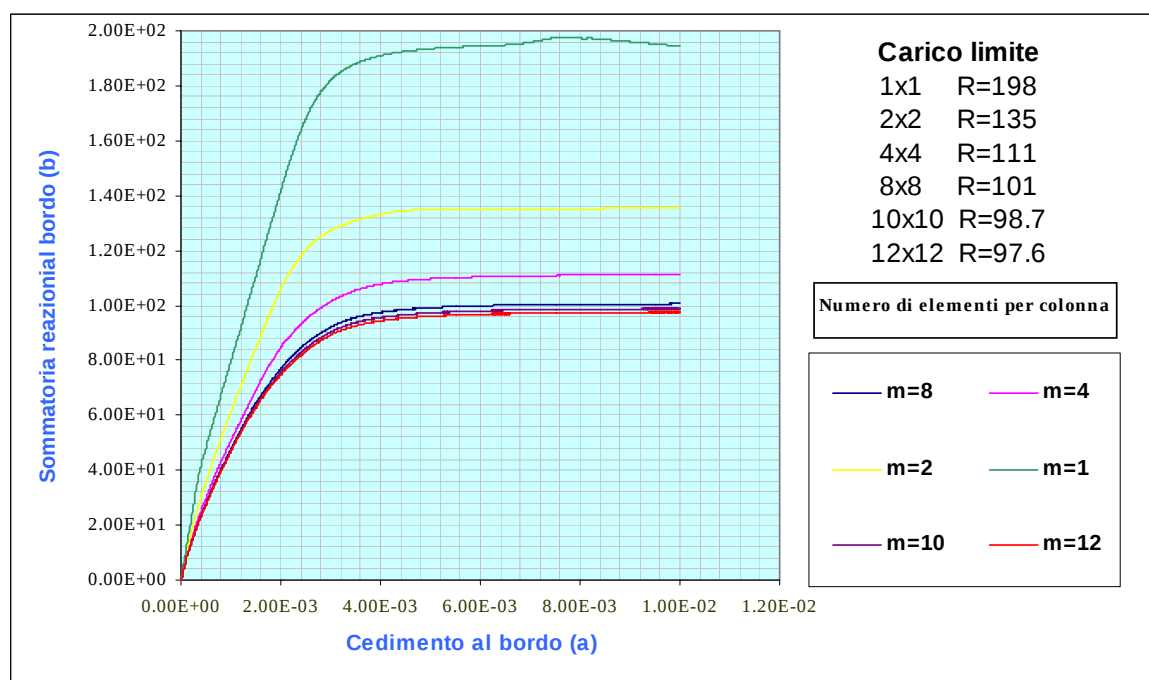


Figura 4.13: Andamenti cedimento-reazione al bordo superiore per diverse densità della “mesh”.

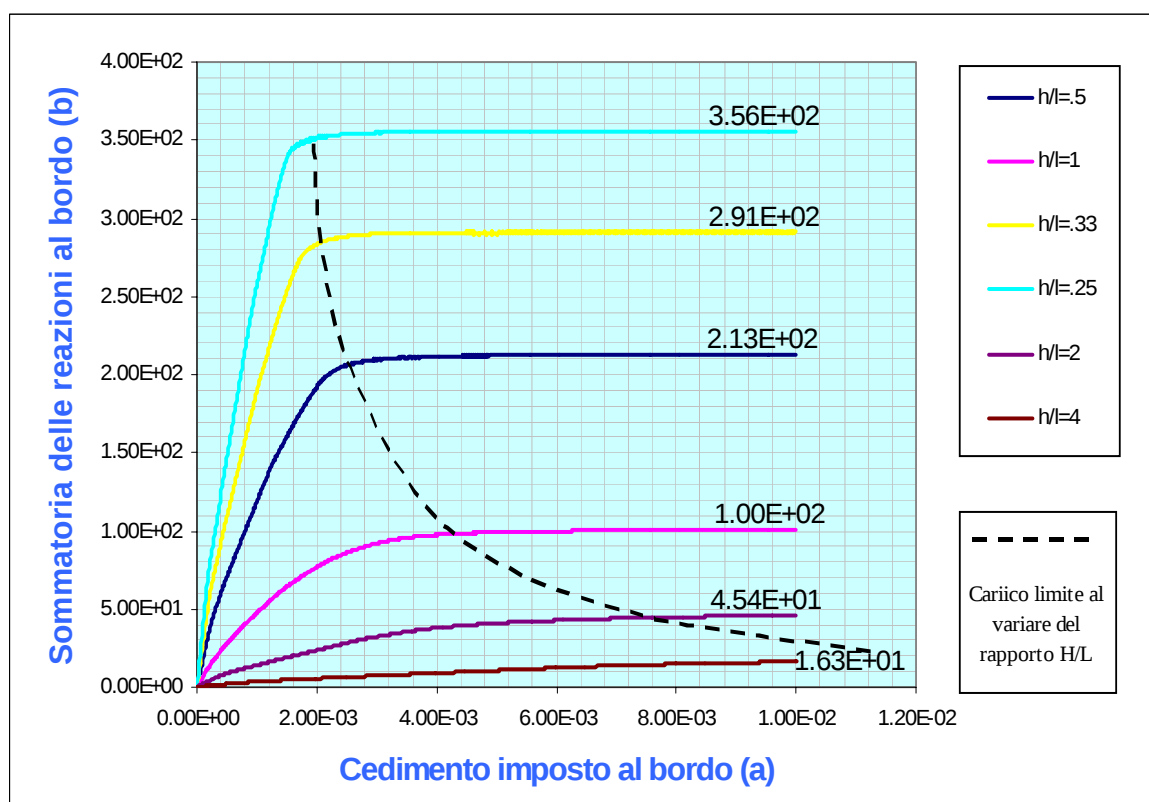


Figura 4.14: Variazione del carico limite in funzione del rapporto H/L.

L'indagine numerica come già detto è stata estesa a sei diversi rapporti H/L e per ciascuno di essi è stato valutato il carico limite al variare del rapporto σ^+/σ^- ; da questa indagine è emersa la scarsa influenza di tale rapporto sui valori della τ limite ^[4.1], *figura 4.15*.

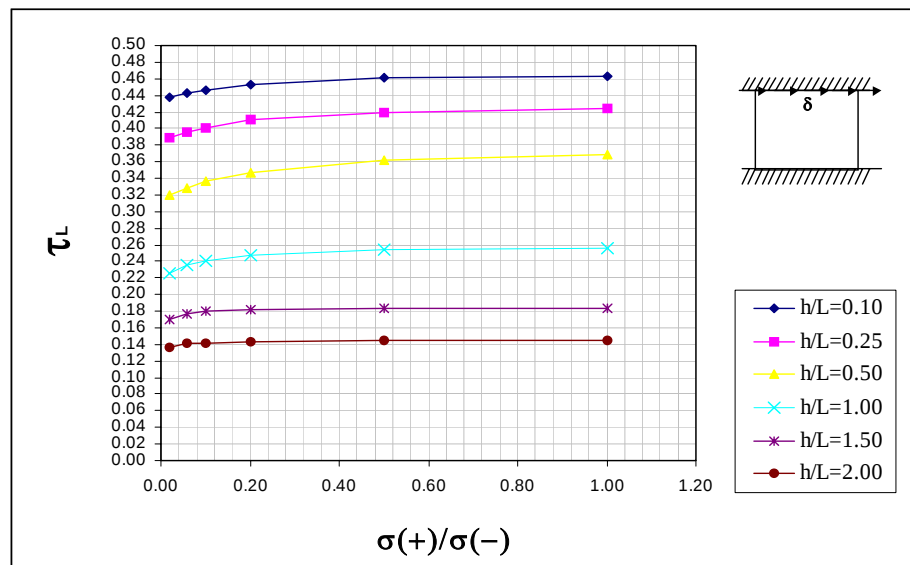


Figura 4.15: Andamento τ_l in funzione del rapporto $\sigma^{(+)}/\sigma^{(-)}$.

La deformata della lastra in calcestruzzo, relativa all'indagine numerica descritta è mostrata in *figura 4.16*. E' possibile notare l'effettiva rotazione delle fibre orizzontali^[4.2]. Nelle figure successive è illustrato l'andamento delle tensioni principali, ed in particolare l'andamento delle σ_2 . Tali immagini rivelano il formarsi della biella compressa in cui le tensioni sono pari a quella limite che per il caso illustrato è di 266 Kg/cm². Nella *figura 4.19* è riportato l'andamento delle direzioni principali: nella zona centrale, la prima direzione principale è inclinata di circa 40°.

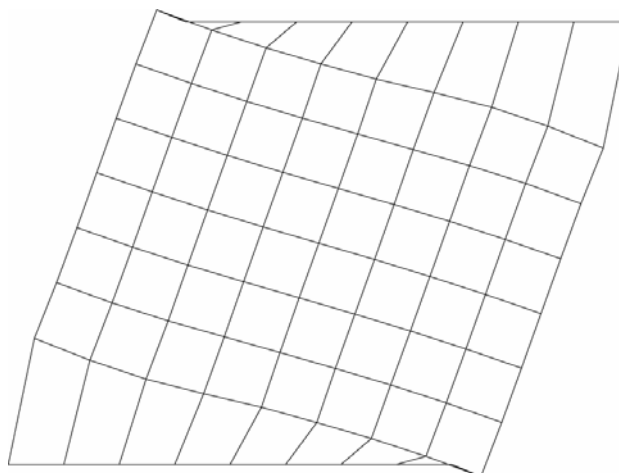


Figura 4.16: Deformata in corrispondenza del carico ultimo.

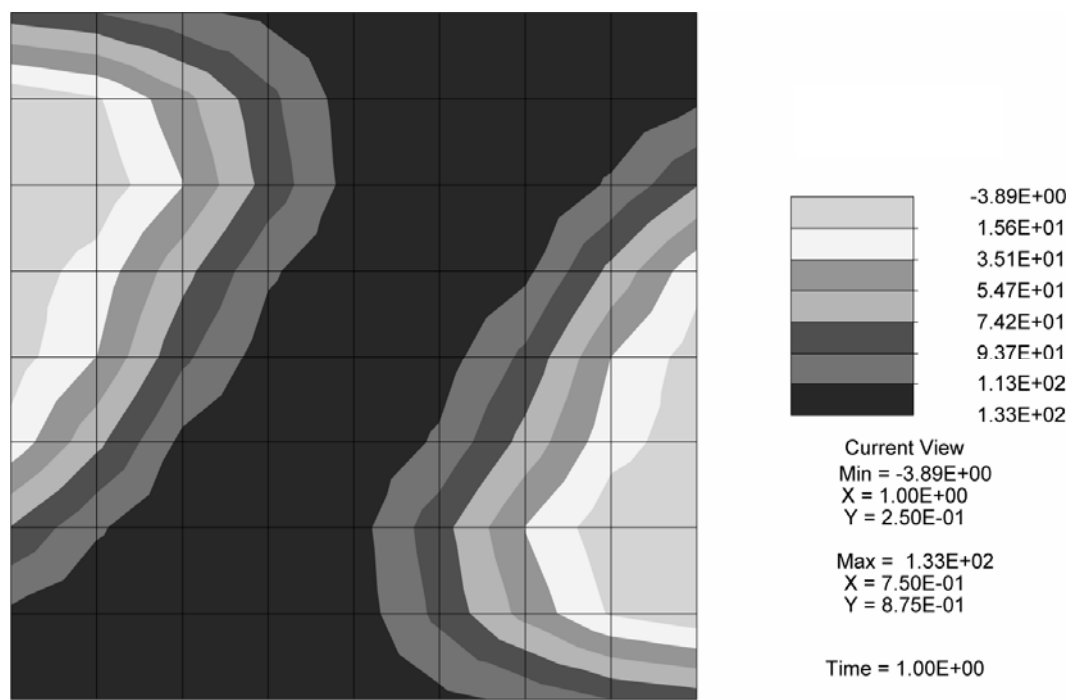


Figura 4.17: Andamento delle σ_1 .

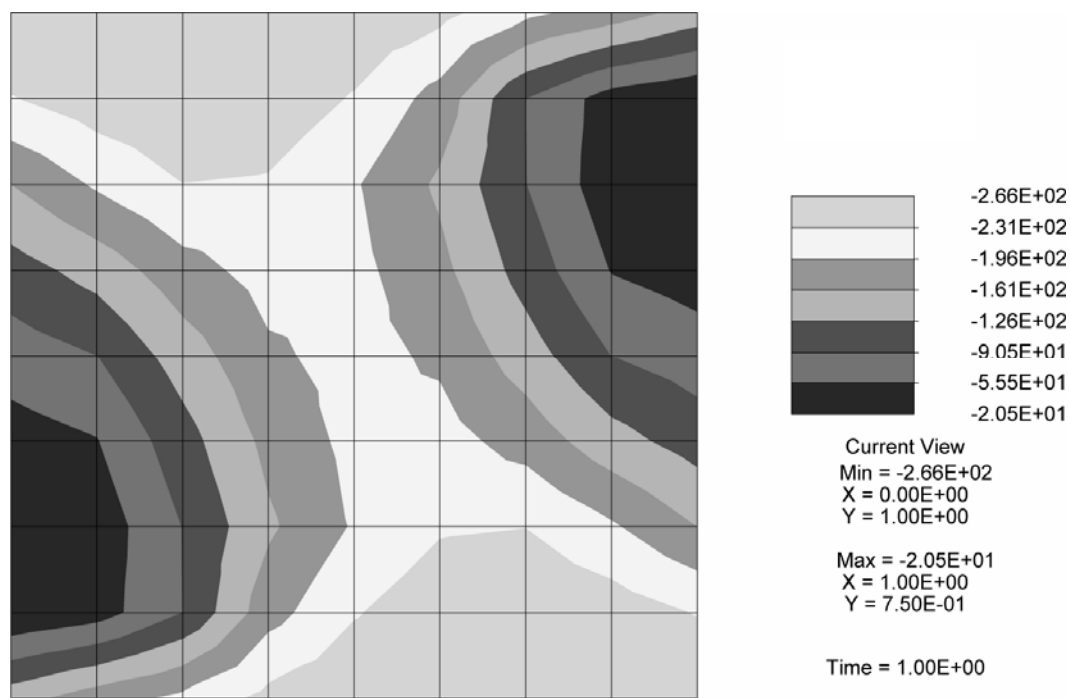


Figura 4.18: Andamento delle σ_2 .

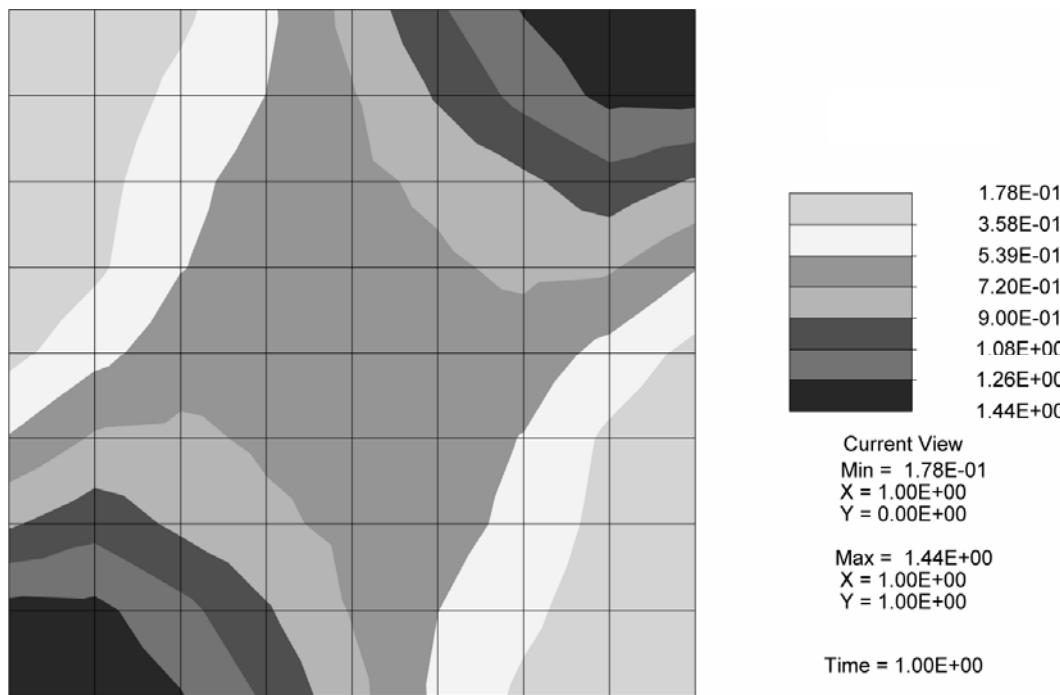


Figura 4.19: Andamento delle direzioni principali.

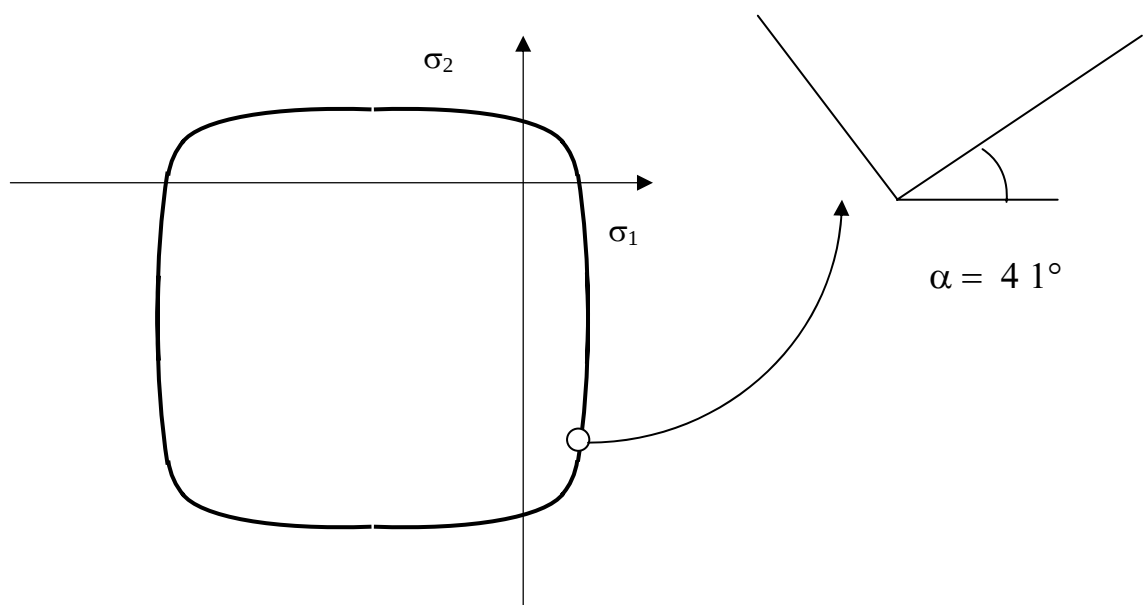


Figura 4.20: Stato tensionale di collasso nella zona centrale.

Test numerici al variare dei moduli di elasticità del materiale hanno mostrato l'indipendenza del carico limite *adimensionalizzato* da essi così come mostrato in *figura 4.21*.

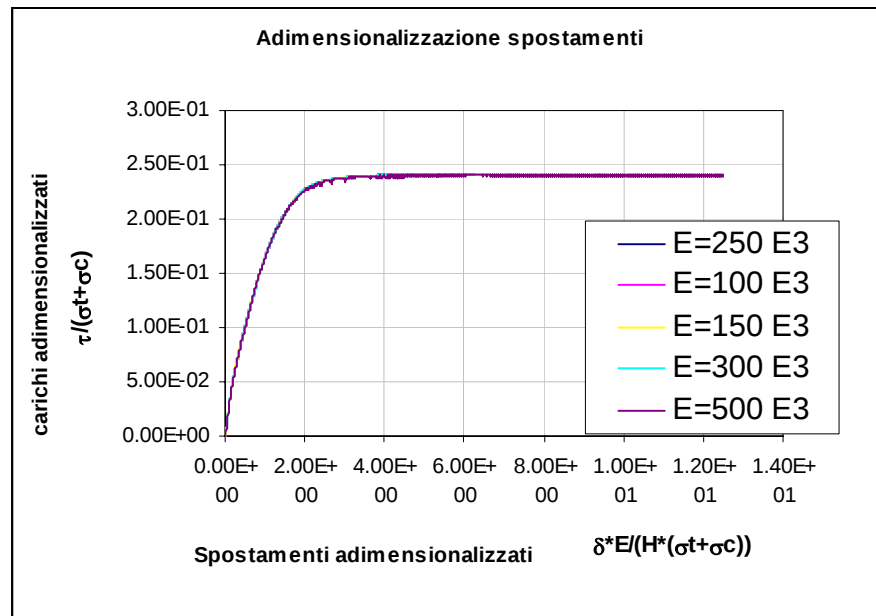


Figura 4.21: Curve coincidenti carico limite adimensionalizzato – spostamenti adimensionalizzati.

Il confronto tra i tre moltiplicatori statico, cinematico e numerico al variare di H/L , rispetto ad una tensione adimensionalizzata, è mostrato in figura 4.22. Avendo considerato la media tra i valori σ^+/σ^- si è riportata la barra di errore sulla curva rappresentante i risultati numerici.

Si vede come, per il caso analizzato, il moltiplicatore statico trovato analiticamente è più vicino di quello cinematico ai risultati ottenuti con la modellazione numerica; per valori di H/L piccoli le curve risultano addirittura coincidenti.

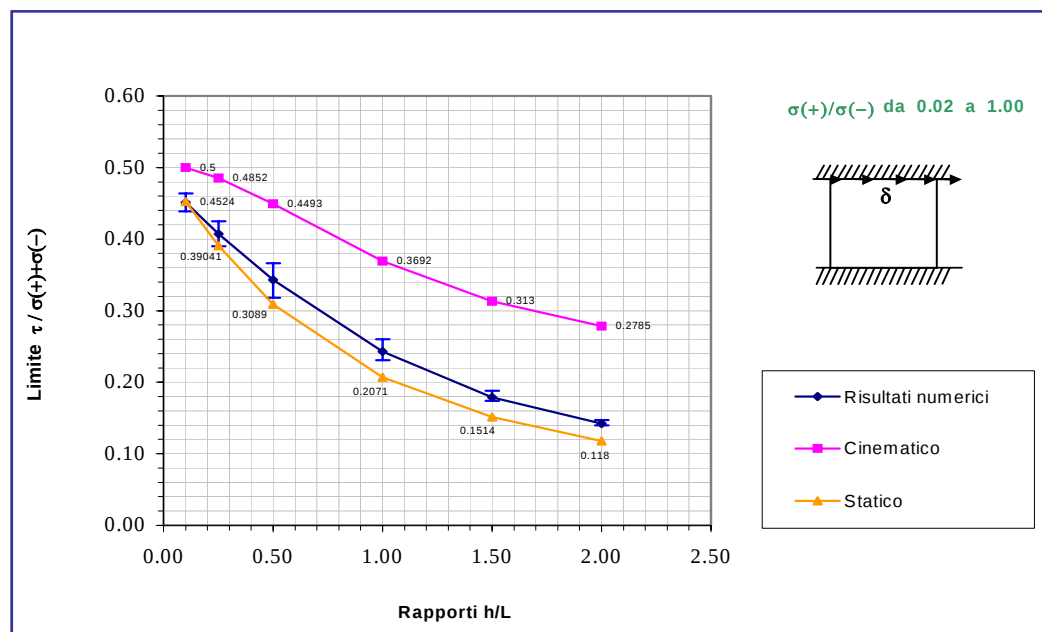
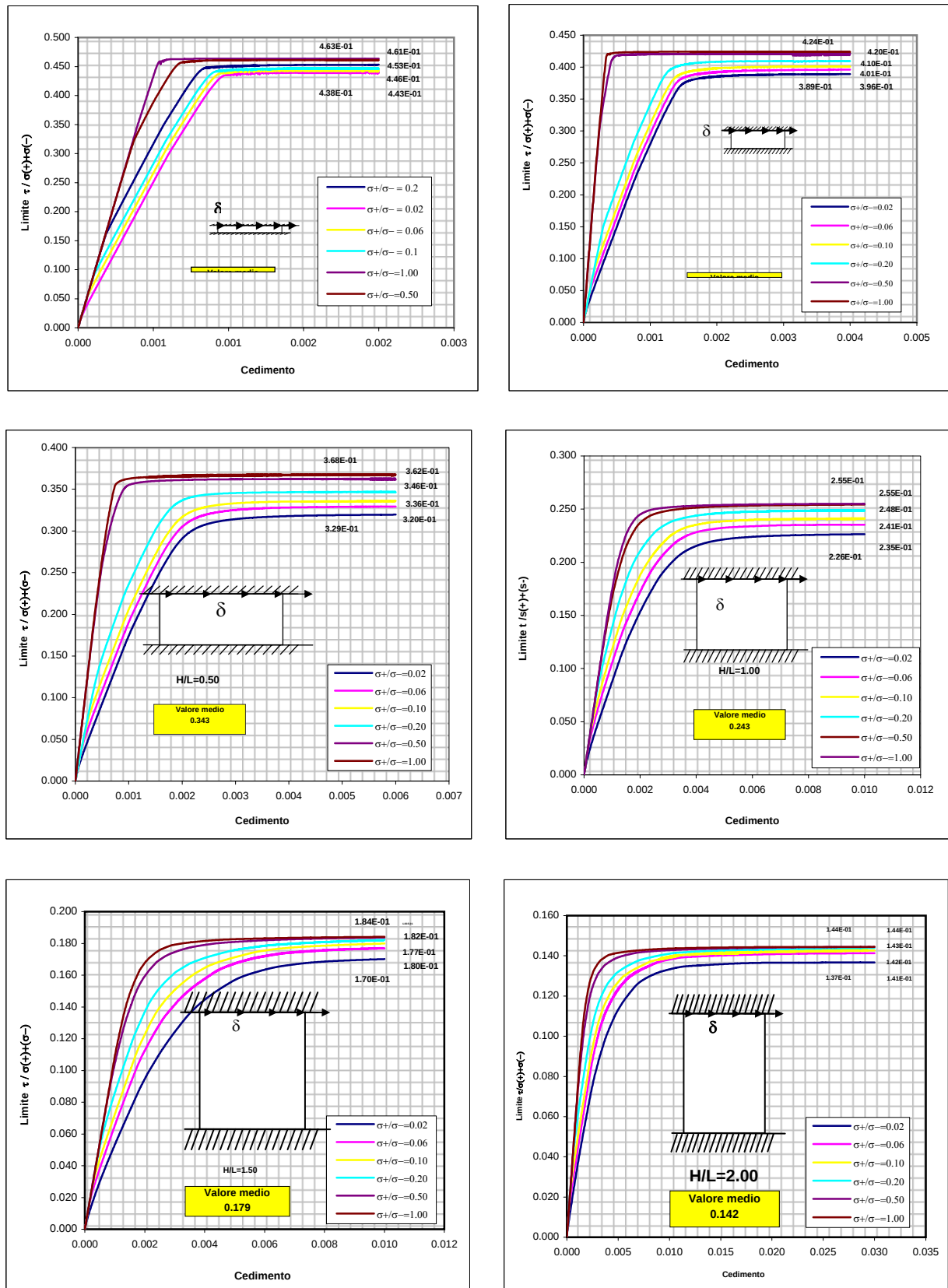


Figura 4.22: Confronto τ_L adimensionale (numerico–statico–cinematico).

Note

[4.1] – I diagrammi relativi alla tensione limite per diversi valori di H/L sono qui riportati.



[4.2] Gli andamenti delle deformazioni finali ε_x e γ_{xy} sono mostrati in *figura 4.23 a e b*.

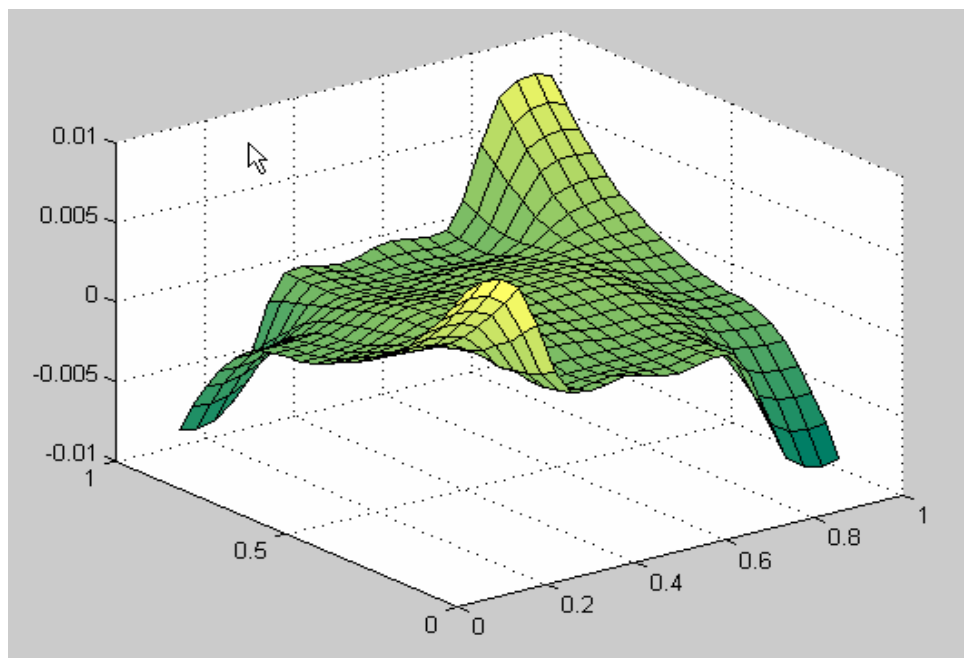
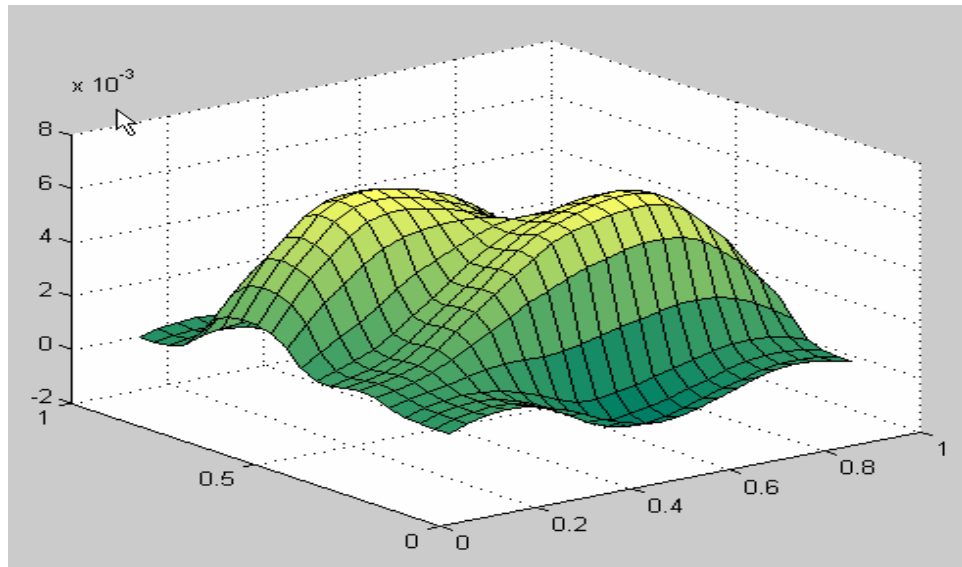


Figura 4.23.

4.4.2. Parete soggetta a taglio con carico superiore

Il problema trattato numericamente in questo paragrafo è stato sviluppato analiticamente al *paragrafo 3.3.2*. Si confronteranno i risultati ottenuti analiticamente con il modello numerico in analogia con quanto fatto al paragrafo precedente.

La “mesh” utilizzata è la stessa del *paragrafo 4.4*; la presenza del carico superiore, e quindi l’assenza di vincoli distribuiti in direzione verticale al bordo superiore, fanno la differenza tra i due casi analizzati (*figura 4.24*).

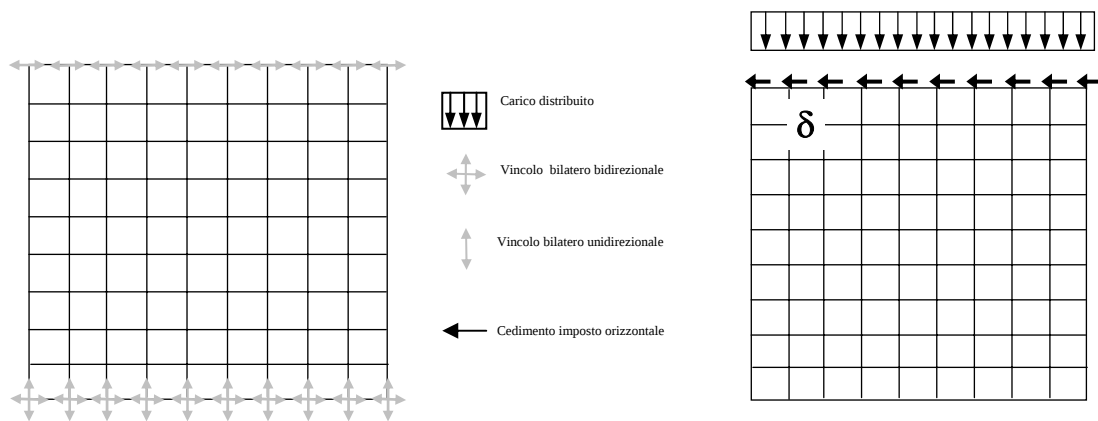


Figura 4.24: Schema di vincolo e carico.

Le caratteristiche del materiale sono quelle della **tabella 4.3**. Posto costante il valore $\sigma^+ + |\sigma^-| = 400$, e l’area unitaria, si è svolta l’indagine facendo variare i parametri così come in **tabella 4.4**.

La deformata della struttura presenta un fenomeno di localizzazione della deformazione alla base come mostrato in *figura 4.25*.

Nelle figure successive (*figura 4.27 e 4.28*) si mostra la distribuzione delle tensioni al collasso per $\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.1$. Nella zona in basso a destra lo stato tensionale risulta al limite per entrambe le tensioni principali σ_1 ed σ_2 , mentre nella zona centrale solo la σ_1 ha raggiunto il limite a trazione. Si tenga presente che il valore delle tensioni al collasso è leggermente inferiore al valore limite prefissato, questo a causa dell’arrotondamento degli spigoli del dominio di rottura (*figura 4.26*).

L’andamento della tensione limite per i diversi casi indicati nella tabella suddetta è riportato in nota ^[4.3].

Infine nella *figura 4.29* si riporta l’andamento delle direzioni principali, l’angolo varia da $28^\circ \div 50^\circ$ per la zona centrale.

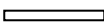
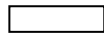
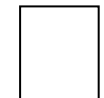
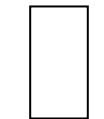
	H = 0.31623	H/L = 0.1	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 3.16228		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$
	H = 0.5	H/L = 0.25	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 2		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$
	H = 0.70711	H/L = 0.5	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 1.41421		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$
	H = 1	H/L = 1	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 1		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$
	H = 1.22474	H/L = 1.5	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 0.81649		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$
	H = 1.41421	H/L = 2	$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.02$	$\sigma^+ = 8.00$	$\sigma^- = 392$
	L = 0.70711		$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.60$	$\sigma^+ = 23.0$	$\sigma^- = 377$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.10$	$\sigma^+ = 37.0$	$\sigma^- = 363$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.20$	$\sigma^+ = 67.0$	$\sigma^- = 333$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 0.50$	$\sigma^+ = 134$	$\sigma^- = 166$
			$\beta = \sigma^+/\sigma^- = 1.00$	$\sigma^+ = 200$	$\sigma^- = 200$

Tabella 4.4.

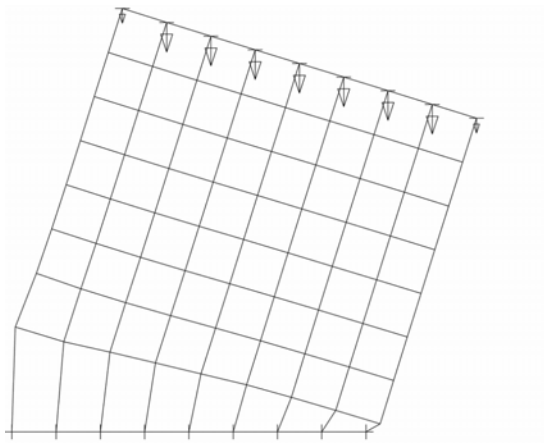


Figura 4.25: Deformata al collasso.

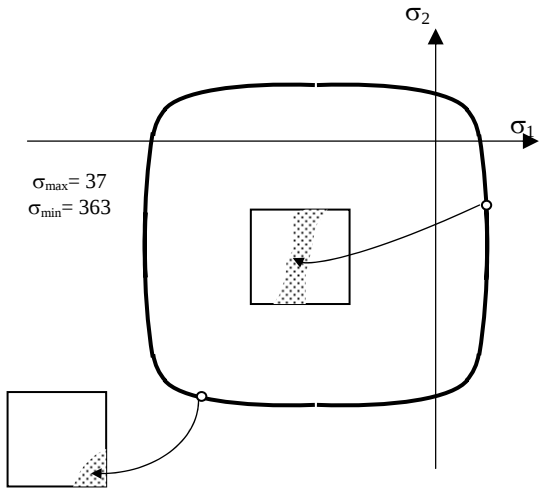


Figura 4.26: Stato tensionale in alcune zone.

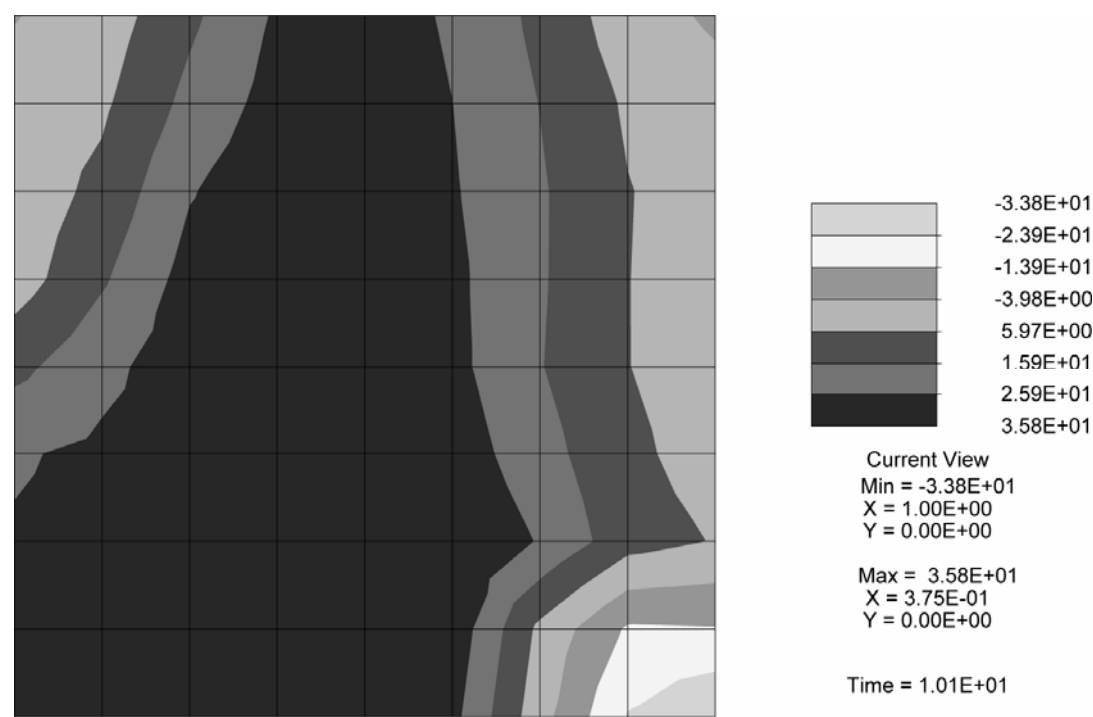


Figura 4.27: Tensioni principali σ_1 al collasso.

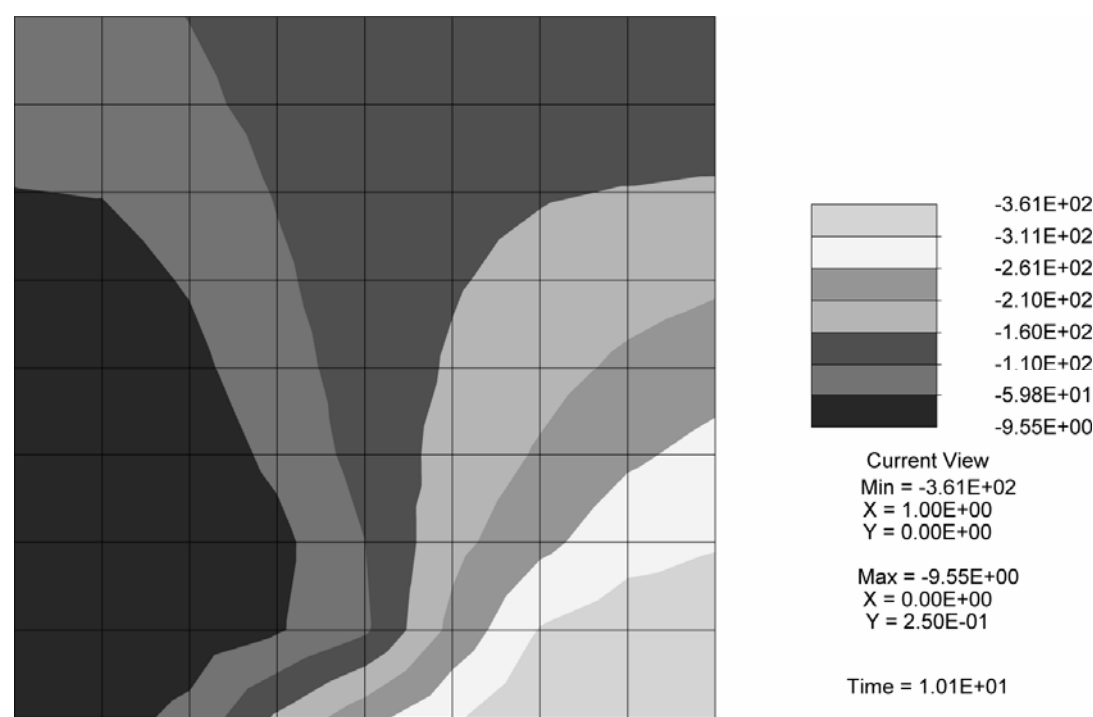


Figura 4.28: Tensioni principali σ_2 al collasso.

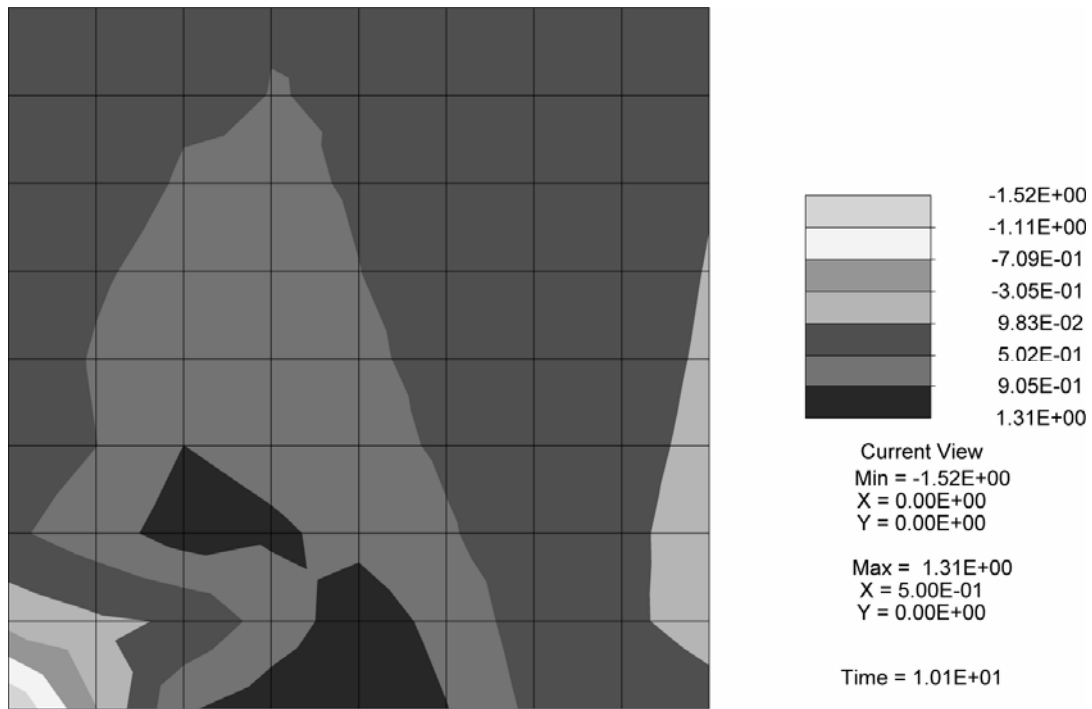


Figura 4.29: Prima direzione principale.

La medesima analisi svolta nel paragrafo precedente per la parete soggetta a taglio ha rivelato la scarsa influenza del rapporto σ^+/σ^- sulla τ_1 adimensionale, come mostrato in figura 4.30.

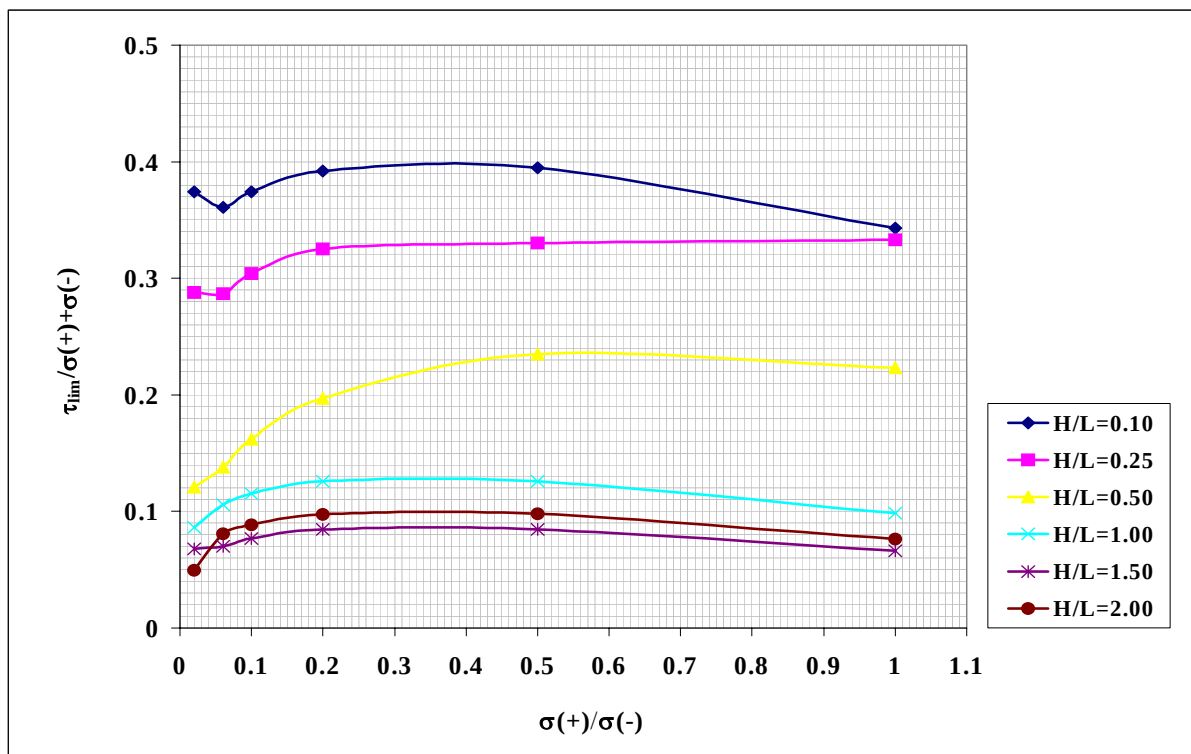


Figura 4.30: Andamento della τ_1 al variare di σ^+/σ^- .

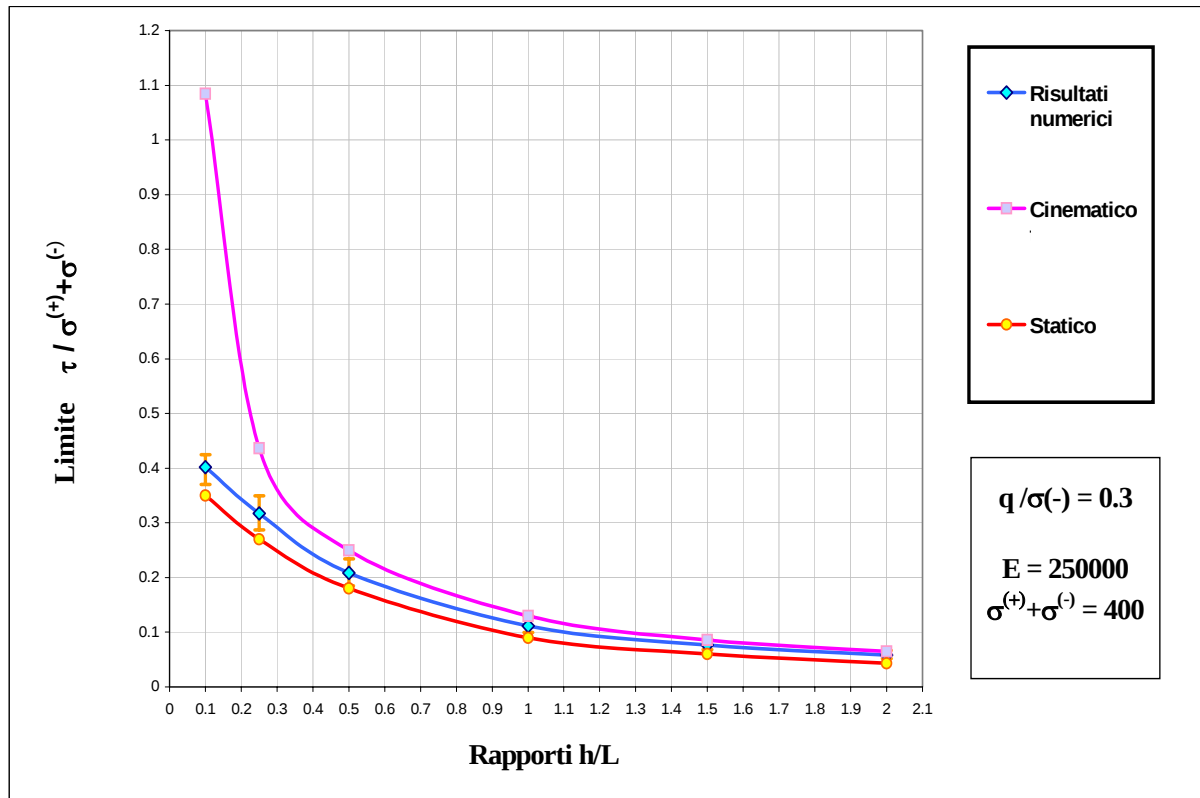
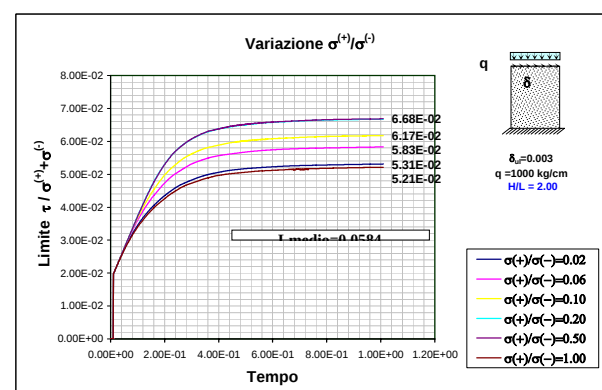
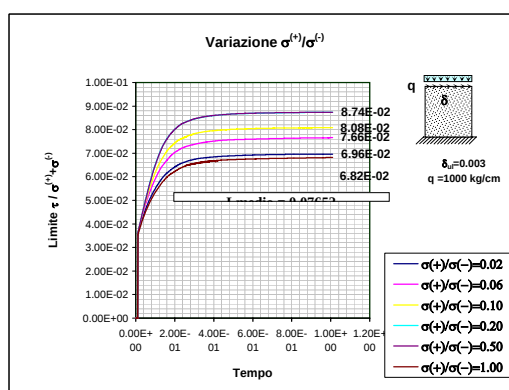
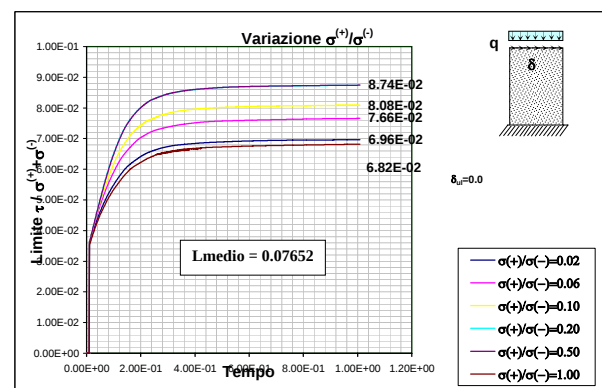
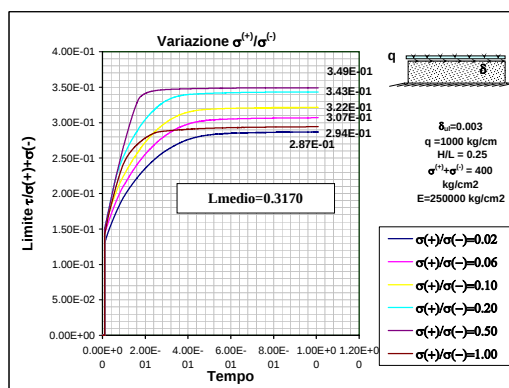
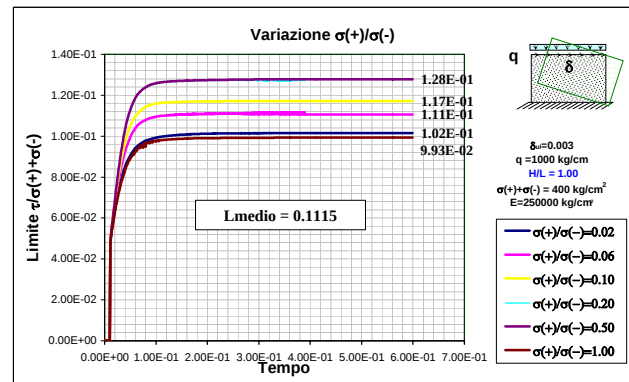
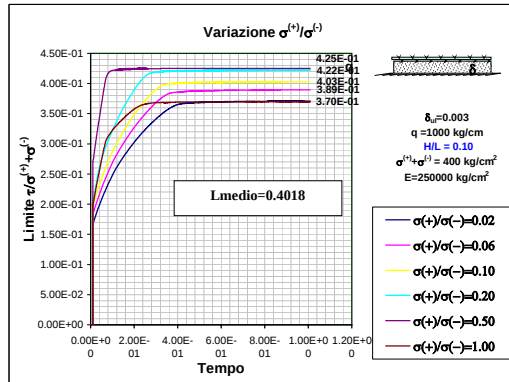


Figura 4.31: Confronto τ_L adimensionale (numerico–statico–cinematico).

L'andamento finale per i tre valori della tensione limite adimensionale sono riportati qui alla *figura 4.31*. Nel complesso si nota una buona aderenza fra risultati teorici e numerici a parte un notevole distacco della curva rappresentativa del moltiplicatore cinematico per h/l molto piccolo.

Note

[4.3]- Andamento della $\tau/\sigma^{(+)}_0$ adimensionale per diversi rapporti altezza larghezza (H/L) della parete al variare dei rapporti $\sigma^{(+)}_0/\sigma^{(-)}_0$



4.5. Lastra appoggiata con carico concentrato ed armatura inferiore

Per l'esempio analizzato al capitolo 3 *paragrafo 3.4* è stata sviluppata un indagine numerica. L'esempio tratta di una lastra con carico in mezzeria distribuito sull'altezza della sezione ed appoggi anch'essi distribuiti. Un'armatura d'acciaio corre lungo il lato inferiore.

La "mesh" utilizzata è di 1248 elementi rettangolari a quattro nodi ed il legame costitutivo per la matrice è quello già descritto all'inizio di questo capitolo, mentre per modellare l'armatura si è utilizzato il modello monodimensionale descritto al *quadro 6* del *paragrafo 4.3*, in cui si è posta nulla la rigidezza tagliante.

Gli schemi di vincolo e di carico per il modello agli elementi finiti sono schematizzati in *figura 4.32*; mentre i parametri utilizzati sono mostrati in **Tabella 4.5**.

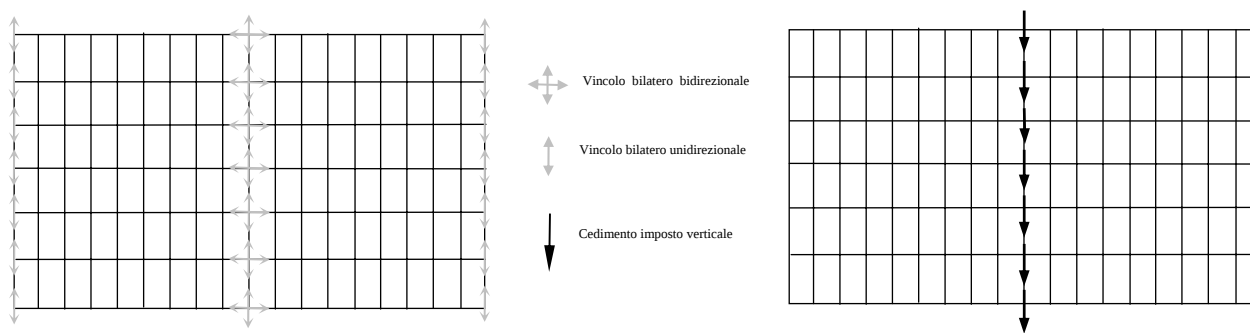


Figura 4.32: Schema di carico e di vincolo.

E_c kg/cm^2	E_a Kg/cm^2	σ_c^- Kg/cm^2	σ_f Kg/cm^2	Area cm^2	N°casi
311770	2100000	300	4400	$H*L=10000$	80

Tabella 4.5.

La **tabella 4.6**, qui di seguito riportata, descrive per ciascun caso i parametri utilizzati nel calcolo numerico. I risultati sono sinteticamente illustrati nei diagrammi delle *figure 4.33*, *4.37*.

Nelle *figure 4.31* e *4.32* si mostrano le tensioni principali al collasso per il caso evidenziato in grigio appunto nella **tabella 4.6**.

H (cm)	L (cm)	h	σ_c^+ (kg/cm ²)	β	μ	A_f (cm ²)
32	158	0.2	18	0.06	0.1	2.24
					0.3	6.72
					0.5	11.2
					0.7	15.7
			30	0.1	0.1	2.24
					0.3	6.7
					0.5	11.2
					0.7	15.7
			90	0.3	0.1	2.24
					0.3	6.72
					0.5	11.2
					0.7	15.7
			150	0.5	0.1	2.24
					0.3	6.72
					0.5	11.2
					0.7	15.7
50	100	0.5	18	0.06	0.1	3.5
					0.3	10.5
					0.5	17.5
					0.7	24.5
			30	0.1	0.1	3.5
					0.3	10.5
					0.5	17.5
					0.7	24.5
			90	0.3	0.1	3.5
					0.3	10.5
					0.5	17.5
					0.7	24.5
			150	0.5	0.1	3.5
					0.3	10.5
					0.5	17.5
					0.7	24.5
70.7	70.7	1	18	0.06	0.1	4.95
					0.3	14.8
					0.5	24.7
					0.7	34.6
			30	0.1	0.1	4.95
					0.3	14.8
					0.5	24.7
					0.7	34.6
			90	0.3	0.1	4.95
					0.3	14.8
					0.5	24.7
					0.7	34.6
			150	0.5	0.1	4.95
					0.3	14.8
					0.5	24.7
					0.7	34.6
100	50	2	18	0.06	0.1	7
					0.3	21
					0.5	35
					0.7	49
			30	0.1	0.1	7
					0.3	21
					0.5	35
					0.7	49
			90	0.3	0.1	7
					0.3	21
					0.5	35
					0.7	49
			150	0.5	0.1	7
					0.3	21
					0.5	35
					0.7	49

Tabella 4.6.

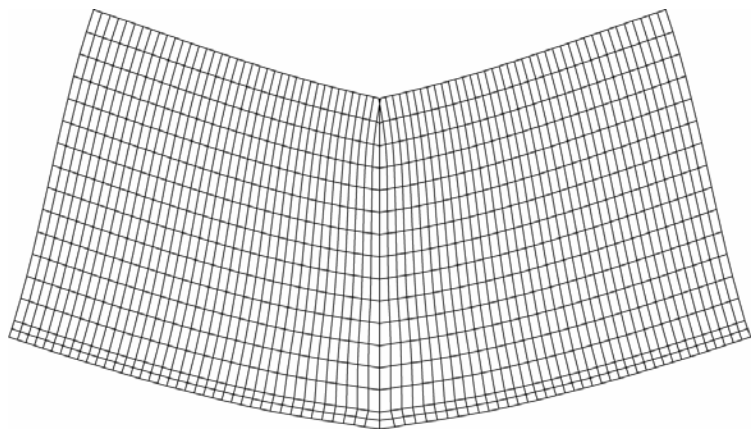


Figura 4.33: Deformata al collasso.

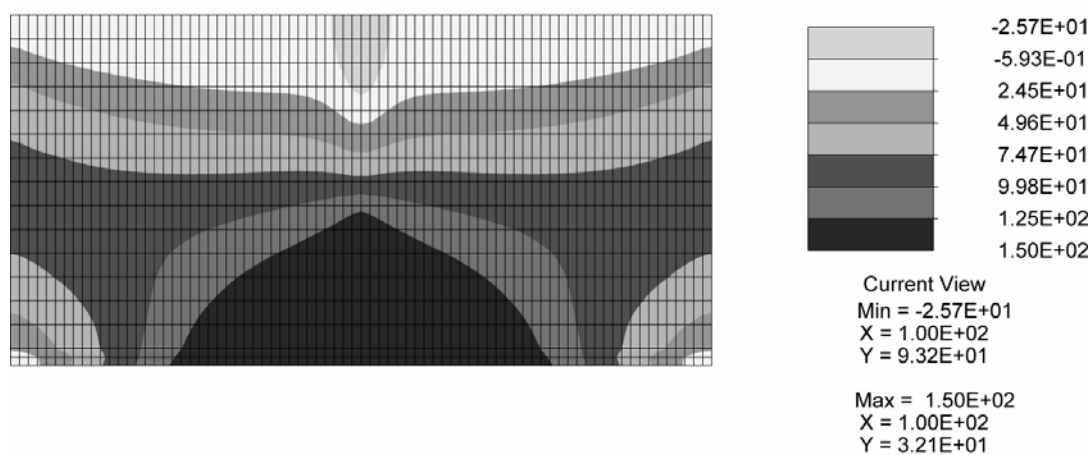


Figura 4.34: Andamento delle tensioni principali σ_1 .

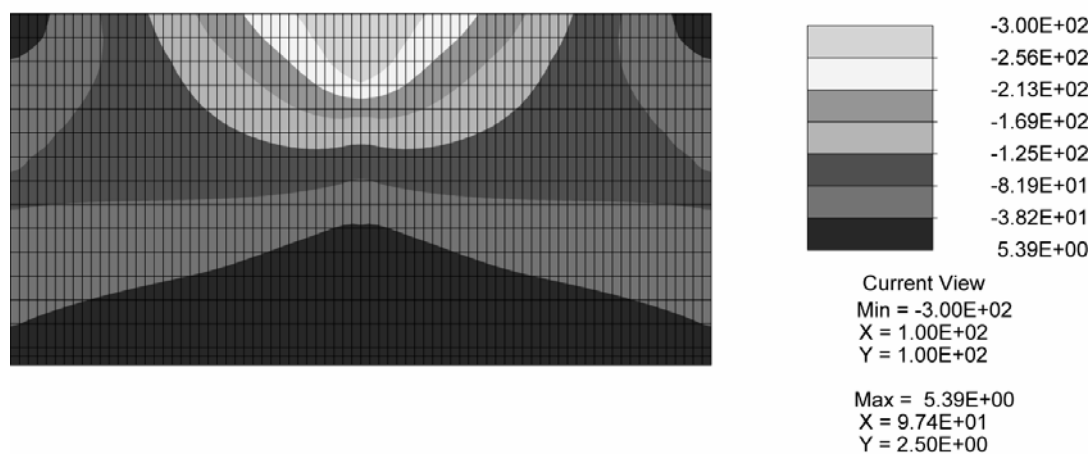


Figura 4.35: Andamento delle tensioni principali σ_2 .



Figura 4.36: Carico limite adimensionale per $\beta = 0.06$.

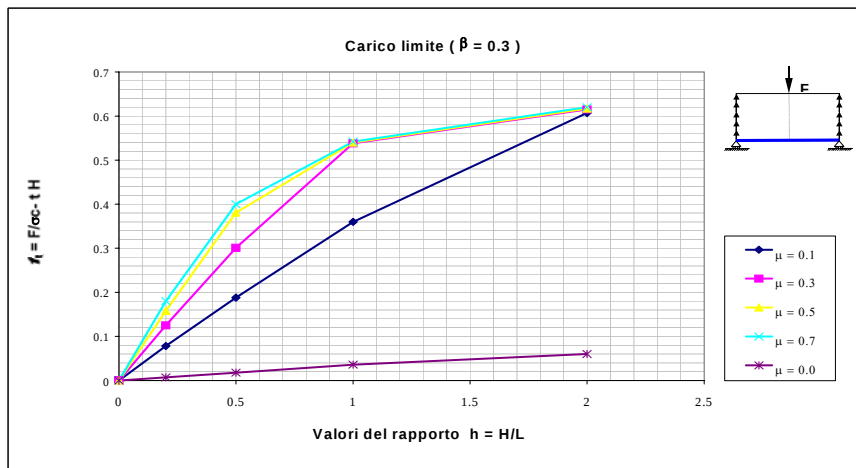


Figura 4.37: Carico limite adimensionalizzato per $\beta = 0.33$.

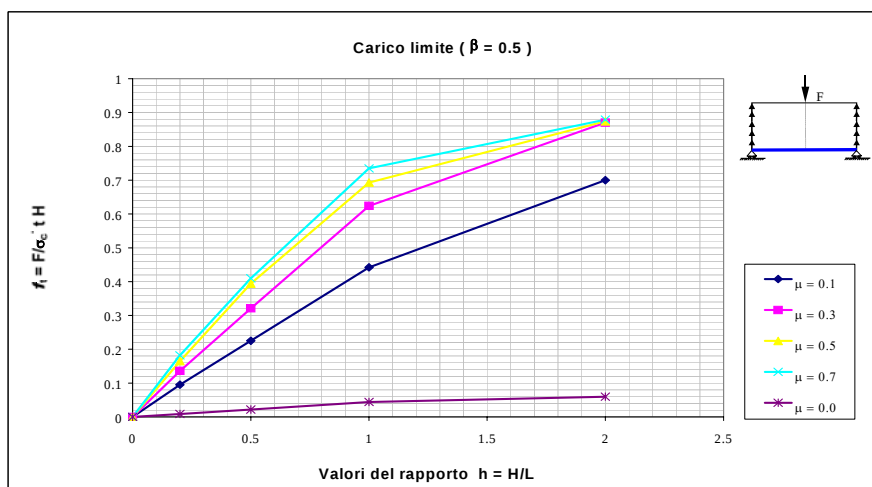


Figura 4.38: Carico limite adimensionale per $\beta = 0.5$.

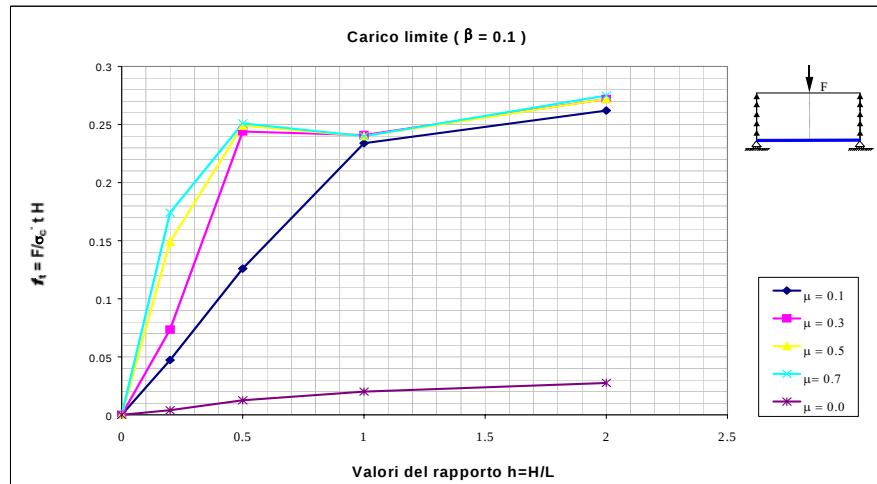


Figura 4.39: Carico limite adimensionale per $\beta = 0.1$.

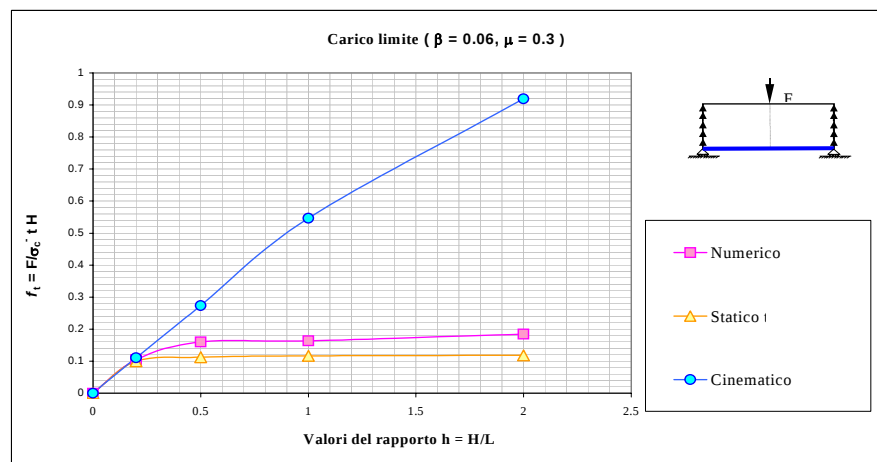


Figura 4.40: Confronto numerico, statico, cinematico per $\beta = 0.06$ e $\bar{\mu} = 0.3$.

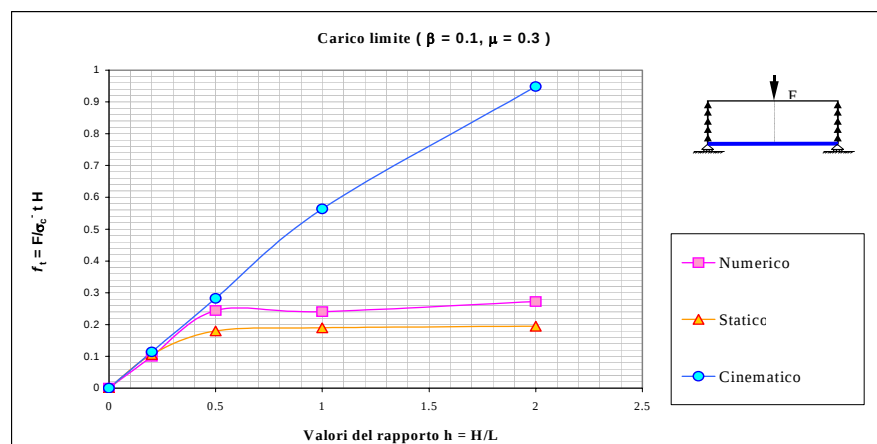


Figura 4.41: Confronto numerico, statico, cinematico per $\beta = 0.3$ e $\bar{\mu} = 0.1$.

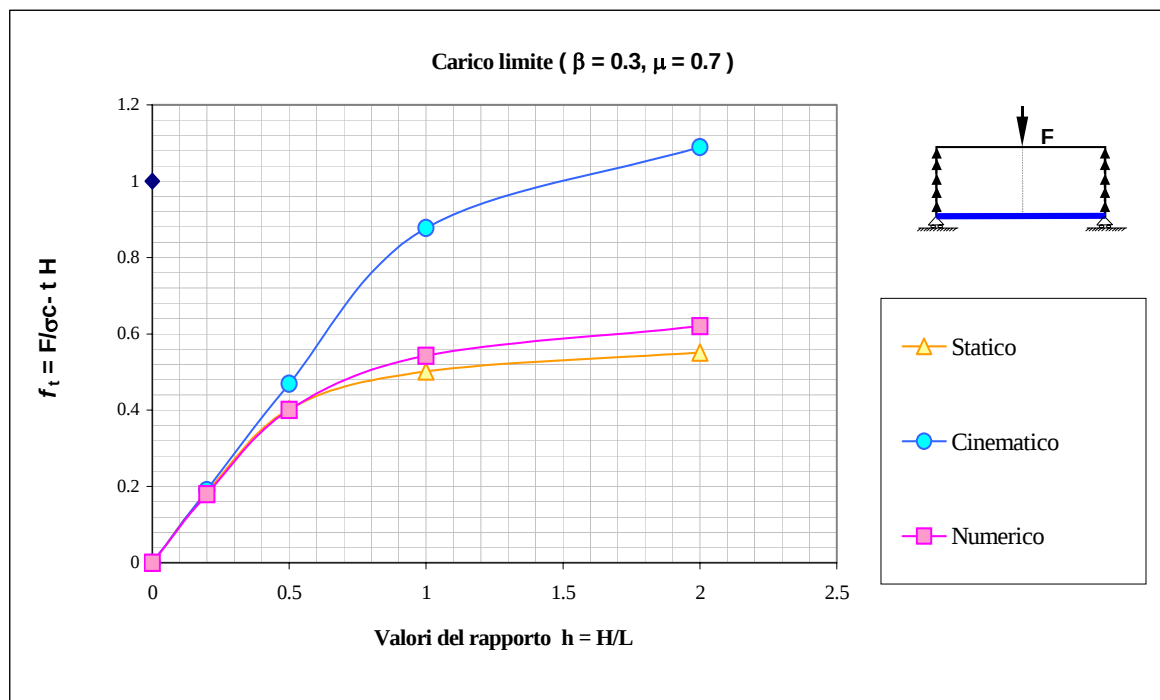


Figura 4.42: Confronto numerico, statico, cinematico per $\beta = 0.3$ e $\bar{\mu} = 0.7$.

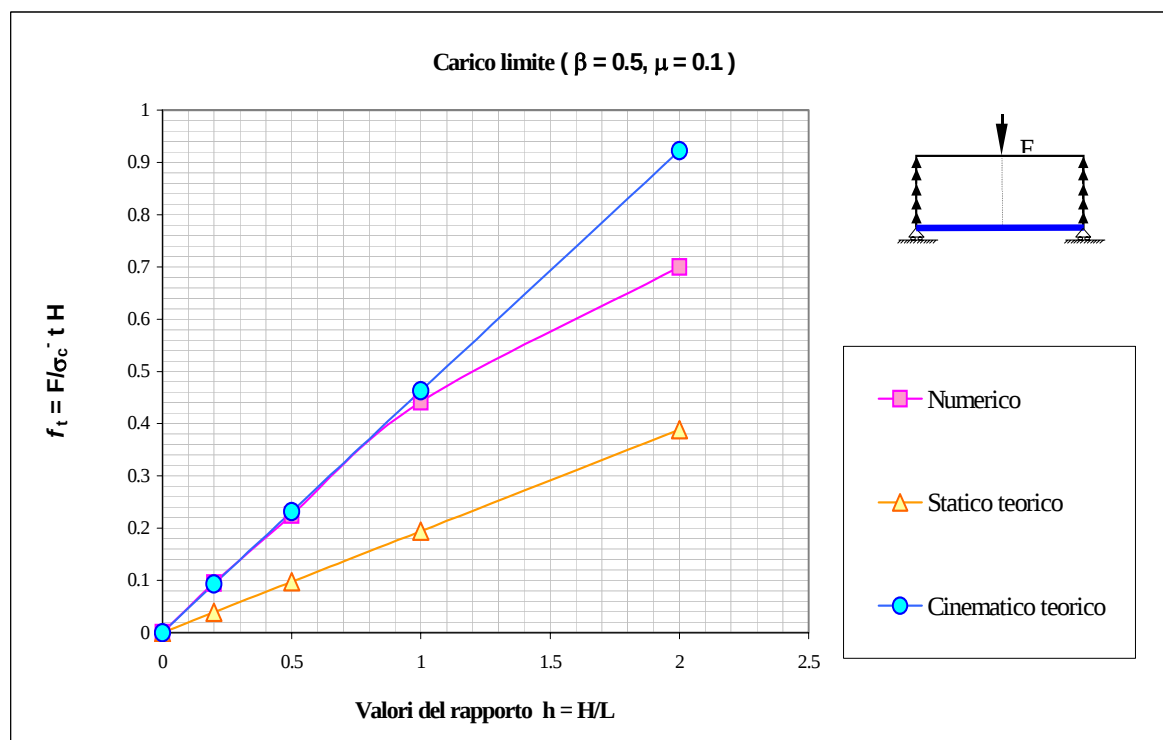


Figura 4.43: Confronto numerico, statico, cinematico per $\beta = 0.5$ e $\bar{\mu} = 0.1$.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO IV:

- [4.1] Crisfield M. A., *Non Linear finite Element Analysis of solids and structures*. Vol. 1, 1991.
- [4.2] Crisfield M. A., *Non Linear finite Element Analysis of solids and structures*. Vol. 2, 1991.
- [4.3] Sloan S.W., Booker J. R., *Removal of singularities in Tresca e Mohr-Coulomb yield functions*. Applied numerical methods, Vol. 2, 1986.
- [4.4] Koiter W.T., *Stress-Strain Relation, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Material with a Singular Yield Surface*. Q. Appl. Math., Vol. 11, 1953.
- [4.5] Zienkiewicz O. C., Pande G. N., *Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock mechanics*. Finite Elements in Geomechanics, Ed. G. Gudehus, Wiley Chichester, pp. 171-190, 1977.
- [4.6] Peter H. Feenstra and de Borst R., *A Plasticity Model and Algorithm for Mode-I Cracking in Concrete*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 1995.
- [4.7] Simo J. C., Kennedy J.g., Xgovindjee R., *No Smooth Multi Surface Plasticity and Viscoplasticity. Loadin/Anloading Conditions and Numerical Algorithms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988.
- [4.8] Pramono E., Willam K., *Implicit Integration of composite yield surfaces with corners*. Eng. Comput., Vol. 6, September 1989.
- [4.9] Besl P. J., *Geometric Modeling and Computer Vision*. Proceedings of the IEEE, vol.76, n° 8, agosto 1988.
- [4.10] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw-Hill, Vol. I, 1967.
- [4.11] Cesari F., *Introduzione al metodo degli elementi finiti*. Pitagora editrice Bologna, 1984.
- [4.12] Cesari F., *Comportamento non lineare delle strutture con il metodo degli elementi finiti*, Pitagora editrice Bologna, 1985.
- [4.13] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The finite element method in structural and continuum mechanics*. Mc Grow Hil, Vol. II, 1967.
- [4.14] Valoroso Nunziante, *Modelli computazionali in elasticità*. Tesi di laurea, Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, Relatore prof. G. Romano, 1996.
- [4.15] Taylor R. L., *FEAP: A finite element analysis program*. Department of Civil Engineering University of California at Berkeley – Berkeley, California 94720, Version 5.01 Manual, January 1996.
- [4.16] Monti G., Auricchio F., *Programmazione di elementi con FEAP*. Corso tenutosi all'Università la Sapienza di Roma, 1998.
- [4.17] Simo J. C., Hughes T. J. R., *Elastoplasticity and Viscoplasticity Computational Aspects*. 1988.
- [4.18] Robert H. Dodds, *Numerical Techniques for plasticity computations in Finite Element Analysis*. Computers & Structures, Vol. 26, 1987.

- [4.19] Armen H., *Assumptions, Models, and Computational Methodos for Plasticity*. Computers & Structures, Vol. 10, 1979.
- [4. 20] Hughes Thomas J. R., *Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures*. Computers & Structures, Vol. 8, 1978.
- [4. 21] Ortiz M., & Popov E. P., *Accuracy and Stability of integration algorithms for elastoplastic costitutive relations*. Int. J. Num. Meth. Engng., 21(9), 1561-1576, 1985.
- [4.22] Simo J. C., Taylor R. L., *Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity*. Comp. Meth. Applied Mechanics and Engng. n° 48, 1985.
- [4.23] Tvergaard V., (1993). *Model studies of fibre breakage and debonding in a metal reinforced by short fibres*. J. Mech. Phys Solids, n° 41, 1309-1326.
- [4.24] Talbot D., Willis J. R., *Variational principles for inhomogeneous non linear media*. IMA J. Appl. Math 35, 1985.
- [4.25] Willis J. R.,. *On methods for bounding the overall properties of non linear composites*. J. Mech. Phys. Solids n° 39, pp. 73-86, 1991.
- [4.26] Ponte Castaneda P., *New variational principles in plasticity and their application to composite materials*. J. Mech. Phys. Solids, n° 44, pp. 827-862, 1992.
- [4.27] Suquet P., *Overall potentials and flow stresses of ideally plastic or power law materials*. J. Mech. Phys. Solids n° 41, pp. 981-1002, 1993.
- [4.28] De Buhan P., Taliercio A., *A homogenization approach to the yield strenght of composites*. European J. Mechanics: A/Solids, n°10, pp. 129-154, 1991.
- [4.29] Grimaldi A., Luciano R., *Modellazione micromeccanica e valutazione della resistenza a rottura di calcestruzzi rinforzati con fibre*. XII Congresso AIMETA.
- [4.30] Grimaldi A., Luciano R., *Tensile stiffness and strength of fibre-reinforced concrete*.
- [4.31] Giaquinta M., Giusti E., *Researches on the equilibrium of masonry structures*. Arch. Rat. Mech. Anal. n° 88, pp. 359-392, 1985.
- [4.32] Como M., Grimaldi A., *A unilateral model for the limit analysis of masonry walls*. Unilateral Problems in Structural Analysis (Edited by G. Del Piero e F. Maceri), CISM Courses and Lectures, Vol. 288, pp. 25-45 Springer-Verlag, 1985.
- [4.33] Aboudi J., *Mechanics of Composites Materials*, Elsevier, 1991.
- [4.34] Lim T. Y., Paramasivam P., Lee S. L., *Analytical model for tensile behavior of steel-fiber concrete*. ACI Material Journal July/August, pp. 286-298, 1987.
- [4.35] Simo J. C., Hughes T. J. R., *Elastoplasticity Viscoplasticit, Computational Aspects*, 1988.
- [4.36] Sacco E., *Appunti dalle lezioni del corso di meccanica della frattura* tenuto all'Università di Roma Tor Vergata, ottobre-marzo, 1997.