

# Capitolo 7

## Modello di danno non locale e plasticità per FRC

Nel presente capitolo si sviluppa un modello di danno non locale e plasticità per lo studio del comportamento a trazione ed a compressione del calcestruzzo fibrorinforzato. I modelli micromeccanici proposti nei capitoli precedenti hanno fornito alcuni suggerimenti fondamentali per lo sviluppo del modello macroscopico in grado di cogliere la risposta meccanica del FRC.

### 7.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti si sono sviluppati dei modelli micromeccanici basati sui concetti della meccanica della frattura e sulle tecniche di omogeneizzazione per l'analisi del comportamento del calcestruzzo fibrorinforzato a trazione. Si è notato come, in accordo con i dati sperimentali, la presenza delle fibre migliora la risposta a trazione del materiale rendendolo più duttile. La risposta a compressione del FRC, come mostrato dai dati sperimentali, riportati al Capitolo 1, risulta simile a quella della sola matrice.

La meccanica del danno [9, 5] (vedi Capitolo 6) si è dimostrata negli ultimi decenni un mezzo valido ed efficiente per la formulazione di modelli costitutivi che riproducano il comportamento meccanico di softening di materiali fragili e quasi-fragili, come il calcestruzzo ed il calcestruzzo fibrorinforzato. La meccanica del danno è in grado di studiare i processi di degrado della rigidità e del carico limite legati all'elevata concentrazione di microdifetti, ed in particolare di microfessure, che si manifestano in questi materiali se sollecitati.

In questo capitolo si sviluppa un modello macromeccanico di danno e plasticità [1, 2] capace di cogliere il comportamento del FRC sia a trazione che a compressione.

Alcuni suggerimenti per lo sviluppo di tale modello si sono ottenuti proprio dai risultati delle analisi micromeccaniche di celle rappresentative del materiale compos-

ito, sviluppate nel Capitolo 4 e 5 [8, 7]. I risultati micromeccanici hanno mostrato come la presenza delle fibre influenza il comportamento post-picco a trazione del materiale, aumentando la duttilità e rendendo il ramo di softening più dolce. Inoltre, anche quando la fessurazione della matrice è completa, le fibre continuano ad agire, si sfilano ma non si danneggiano, e questo produce una risposta plastica in corrispondenza di elevati valori della deformazione. Un modello di danno può essere utilizzato per descrivere con successo il comportamento della sola matrice di calcestruzzo, mentre nel caso del FRC, la plasticità deve essere introdotta per tener conto della risposta anelastica del materiale durante il processo di sfilamento delle fibre, quando la matrice risulta quasi interamente fessurata.

Nel modello di danno non locale e plasticità sviluppato le evoluzioni dei processi di danneggiamento e di plasticità si considerano disaccoppiate. Per tener conto del processo di degrado del FRC si introduce una variabile continua scalare nella legge costitutiva del materiale. Il danneggiamento è isotropo, in quanto la variabile di danno agisce in ugual misura su tutte le componenti della matrice di rigidità. L'evoluzione del danneggiamento è controllata mediante una variabile che rappresenta una deformazione equivalente totale e che tiene conto del diverso comportamento a trazione e compressione dei materiali studiati.

I modelli di danno, così come tutti i modelli continui di softening, sono caratterizzati da problemi legati all'effetto di localizzazione delle deformazioni e del danno. Infatti, come è stato illustrato nel Capitolo 6, il progredire del danno a livello microstrutturale nei materiali quasi-fragili produce una risposta meccanica di softening. Gli elementi strutturali, realizzati con materiali caratterizzati da un comportamento di tipo softening, mostrano una localizzazione delle deformazioni e del danno in bande ristrette. I modelli costitutivi classici, basati sull'ipotesi di località, se utilizzati per lo studio del comportamento di questi materiali, presentano problemi legati alla perdita di unicità della soluzione e di stabilità del materiale, e la soluzione numerica agli elementi finiti è fortemente dipendente dalla forma e dimensione della discretizzazione. Per superare questi problemi occorre utilizzare una tecnica di regolarizzazione [12]. In questo capitolo si propone una tecnica di regolarizzazione basata sull'introduzione del laplaciano del danno nella funzione che definisce il dominio ammissibile degli stati danneggiati del materiale [3, 2].

Si introduce un modello di plasticità perfetta in cui l'evoluzione della deformazione plastica è controllata dal tensore delle tensioni efficaci ed è valutata tenendo in conto il diverso comportamento del materiale a trazione ed a compressione. A tale scopo si utilizza una funzione di snervamento che dipende dalle tensioni efficaci ed è caratterizzata da diverse soglie per i due stati di sollecitazione.

Entrambi i processi evolutivi sono governati da condizioni di carico e scarico di Kuhn Tucker.

L'algoritmo numerico proposto si basa sull'integrazione temporale al passo delle equazioni che governano l'evoluzione del danno e della plasticità mediante una pro-

cedura implicita 'backward-Euler'. Il problema non lineare relativo al singolo passo temporale è risolto utilizzando lo 'splitting method' con una tecnica iterativa del tipo 'predictor-corrector' [13, 14]. La fase di previsione è elasto-plastica e valuta l'evoluzione della deformazione plastica mediante un'ulteriore tecnica iterativa basata su un classico algoritmo di 'return mapping', tenendo fisso il danneggiamento. La fase di correzione calcola l'evoluzione del danno mediante la minimizzazione vincolata di un funzionale convesso, tenendo bloccati gli spostamenti.

La procedura numerica sviluppata per il modello di danno e plasticità è implementata nel codice agli elementi finiti FEAP [18].

In seguito viene presentato il modello di danno e plasticità proposto per FRC ed alcune applicazioni numeriche eseguite su semplici elementi strutturali realizzati con il materiale composito per controllare l'efficacia del modello e della procedura numerica proposta.

## 7.2 Modello non locale di danno e plasticità

Si è già sottolineato come l'introduzione di fibre corte d'acciaio in una matrice di calcestruzzo migliori principalmente il comportamento a trazione del materiale. Il calcestruzzo è caratterizzato infatti da un comportamento fragile con lo sviluppo di fessure, anche per bassi valori delle sollecitazioni. L'effetto benefico fornito dalla presenza delle fibre risulta chiaro sia dai dati sperimentali (vedi Capitolo 1), sia dagli studi micromeccanici (vedi Capitolo 4 e 5). I risultati delle analisi micromeccaniche insieme ai dati sperimentali forniscono dei validi suggerimenti per lo sviluppo di un modello macromeccanico per il calcestruzzo fibrorinforzato. La presenza delle fibre d'acciaio modifica principalmente il comportamento post picco del materiale rendendo più dolce il ramo di softening e fornendo una risposta plastica durante il processo di sfilamento delle fibre stesse. Per tener conto di questo effetto si propone un modello di danno e plasticità bidimensionale assumendo uno stato piano di tensioni. Le ipotesi alla base del modello sono:

- l'evoluzione del danno è controllata dalle deformazioni totali  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ;
- l'evoluzione della deformazione plastica è governata dalle tensioni efficaci  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ .

L'equazione costitutiva caratteristica del modello di danno e plasticità è:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)^2 \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \quad (7.1)$$

dove  $\mathbf{C}$  rappresenta il tensore del quarto ordine di rigidezza elastica,  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  rappresenta la deformazione plastica e  $D$  è la variabile di danno scalare utilizzata per misurare il progressivo degrado del materiale; tale variabile, nell'ipotesi di isotropia, dipende solo dal punto e non dalla direzione considerata (vedi Capitolo 6). Il valore di  $D$

può variare nell'intervallo  $[0, 1]$  dove  $D = 0$  corrisponde allo stato integro, mentre  $D = 1$  allo stato completamente danneggiato. Il fattore moltiplicativo  $(1 - D)^2$  tiene conto del degrado di rigidità dovuto all'evolversi del danneggiamento e agisce in ugual misura su tutte le componenti del tensore elastico  $\mathbf{C}$ ; in questo modo il legame costitutivo rimane isotropo. Il legame costitutivo fornito dalla (7.1) deriva dal principio di equivalenza dell'energia complementare proposto da Sidoroff [17] (vedi Capitolo 6). Sulla base di questo principio le tensioni efficaci  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  sono definite dall'espressione:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)^2} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \quad (7.2)$$

### 7.2.1 Modellazione del danneggiamento

Il modello di danno sviluppato è isotropo e bidimensionale e tiene conto del differente comportamento del materiale a trazione e a compressione. Le leggi evolutive che regolano la crescita del danneggiamento durante il processo di carico sono di tipo associato e sono governate dalle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (7.3)$$

$$F \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad F \dot{\lambda} = 0 \quad (7.4)$$

dove:

- $F$  è la funzione limite, o di carico e scarico, che definisce lo stato del materiale;
- $Y$  è la variabile associata al danno, che ne regola l'evoluzione;
- $\dot{\lambda}$  è il moltiplicatore anelastico, che fornisce l'intensità dell'incremento di danno ed è una grandezza sempre positiva.

Le condizioni di Kuhn Tucker (7.4) esprimono il fatto che i punti interni alla funzione limite  $F$ , per i quali risulta  $F < 0$ , rappresentano stati del materiale per i quali non si ha evoluzione del danno  $\dot{\lambda} = 0$ ; mentre i punti appartenenti alla frontiera, per i quali  $F = 0$ , costituiscono stati in cui il danneggiamento può progredire  $\dot{\lambda} \geq 0$ . In accordo con la seconda legge della termodinamica la variabile di danno potrà sia crescere sia rimanere costante ma mai diminuire in quanto il degrado di rigidità è un processo irreversibile. Sulla base della scelta della funzione limite  $F$ , riportata in dettaglio nel seguito, il termine  $\partial F / \partial Y$  risulta sempre positivo, e quindi  $\dot{\lambda}$  può essere sostituito da  $\dot{D}$  nelle condizioni di Kuhn-Tucker (7.4).

Come visto nel Capitolo 6, le leggi costitutive locali per materiali fragili e quasi fragili, caratterizzate da rami di softening generano problemi matematici e dipendenza dei risultati numerici dalla dimensione e forma della discretizzazione. In realtà,

qualora si verificano concentrazioni di deformazione e di danno appare ragionevole ritenere che la risposta in ciascun punto è influenzata dal comportamento meccanico dei punti in un suo intorno e rimuovere l'ipotesi di località. La dimensione dell'intorno non è una quantità facile da determinare ed è una grandezza caratteristica del materiale (vedi Capitolo 6).

Il modello di danno sviluppato è del tipo non locale con gradiente, in cui la regolarizzazione del legame locale avviene attraverso l'introduzione del laplaciano del danno nella funzione limite  $F$ , che è definita dalla seguente espressione:

$$F = (1 - a D) Y - K D - Y_0 + h \nabla^2 D \quad (7.5)$$

dove il simbolo  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \text{div} \nabla$  è l'operatore laplaciano e  $K$ ,  $Y_0$ ,  $a$  e  $h$  sono quattro parametri caratteristici del materiale. In particolare  $h$  governa la dimensione della zona di localizzazione che dipende strettamente dalla lunghezza caratteristica del materiale.

La funzione limite  $F$  risulta dipendente dalla variabile di danno  $D$ , dalla variabile ad essa associata  $Y$ , dal laplaciano del danno  $D$  e dai parametri  $K$ ,  $Y_0$ ,  $a$  e  $h$  che in questo modello si assumono costanti. La grandezza  $\lambda$  può essere determinata applicando la condizione di consistenza alla funzione non locale  $F$ , fornita dalla (7.5):

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 D} \nabla^2 \dot{D} = 0 \quad (7.6)$$

Sostituendo la (7.3) nella (7.6) si ottiene un'equazione alle derivate parziali nella variabile  $\lambda$ . Nei modelli locali la condizione di consistenza permette di determinare direttamente l'incremento della variabile di danno, come verrà descritto di seguito. Nei modelli non locali occorre invece risolvere un'ulteriore equazione differenziale. Si evidenzia che in un'analisi agli elementi finiti per risolvere il problema incrementale con valori al contorno è necessario introdurre una discretizzazione del campo di danno indipendente da quella adottata per il campo di spostamenti.

Se si considera la versione locale del modello, la funzione limite  $F$  è ottenuta dalla (7.5) ponendo  $h = 0$ :

$$F = (1 - a D) Y - K D - Y_0 \quad (7.7)$$

Dalla legge di consistenza:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{Y} = 0 \quad (7.8)$$

si può ricavare la legge evolutiva del danno in funzione della  $Y$ :

$$\dot{D} = \frac{(1 - aD)}{a Y + k} \dot{Y} \quad (7.9)$$

che integrata nel tempo, tenendo conto che per  $D = 0$   $Y = Y_0$ , fornisce la relazione tra la variabile di danno  $D$  e la variabile ad essa associata  $Y$  per il caso di evoluzione monotona:

$$D = \frac{Y - Y_0}{a Y + K} \quad (7.10)$$

Dalla (7.10) si può notare che:

- $K$  regola la velocità di evoluzione del danno, infatti per bassi valori di  $K$  l'evoluzione è più rapida;
- $Y_0$  controlla la soglia di innesco del danno, infatti per  $Y \leq Y_0$  risulta  $D = 0$ , mentre per  $Y > Y_0$ ,  $D > 0$ ;
- $a$  influenza l'andamento del ramo di softening.

In letteratura esistono varie proposte per la definizione della variabile  $Y$ . Infatti la variabile associata al danno può essere definita o in base alle deformazioni [13, 14, 10] o in base alle tensioni [13, 14, 6] o in funzione dell'energia di deformazione elastica [12, 3]. In particolare il modello di danno sviluppato definisce la variabile  $Y$  in funzione delle deformazioni.

### Danno a trazione

Nel modello di danno solo a trazione proposto, la variabile associata al danno  $Y$  risulta una deformazione equivalente, definita in base alle deformazioni principali di trazione [10]:

$$Y = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2} \quad (7.11)$$

dove il simbolo  $\langle \varepsilon_i \rangle_+$  indica la parte positiva della deformazione. Si può introdurre questa definizione per  $Y$  nel caso di materiali fragili, in quanto per tali materiali il processo di danneggiamento è legato principalmente alle deformazioni di dilatazione.

In figura 7.1 è rappresentata la forma della funzione limite ottenuta dall'espressione (7.7) sostituendo la variabile  $Y$  definita dalla (7.11) per  $\varepsilon_3 = 0$ , nel caso di materiale integro cioè per  $D = 0$ .

Per indagare sull'influenza che i parametri  $K$  ed  $a$  hanno sull'evoluzione del danno e sulla legge costitutiva si riportano di seguito alcuni diagrammi.

In figura 7.2 è rappresentata la legge di danno, fornita dall'espressione (7.10), con  $Y_0 = 0.8 \cdot 10^{-4}$  e  $K = 0.1 \cdot 10^{-4}$  per differenti valori del parametro  $a$ , mentre in figura 7.3 è diagrammata la stessa legge di evoluzione del danno per  $Y_0 = 0.8 \cdot 10^{-4}$  e  $a = 0.97$  per differenti valori di  $K$ . Si può vedere come entrambi i parametri  $a$  e  $K$

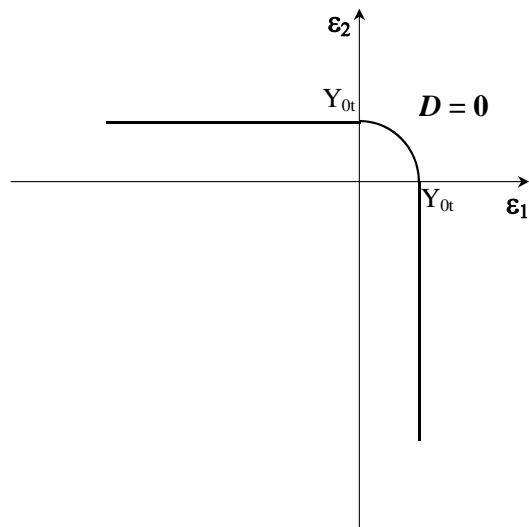
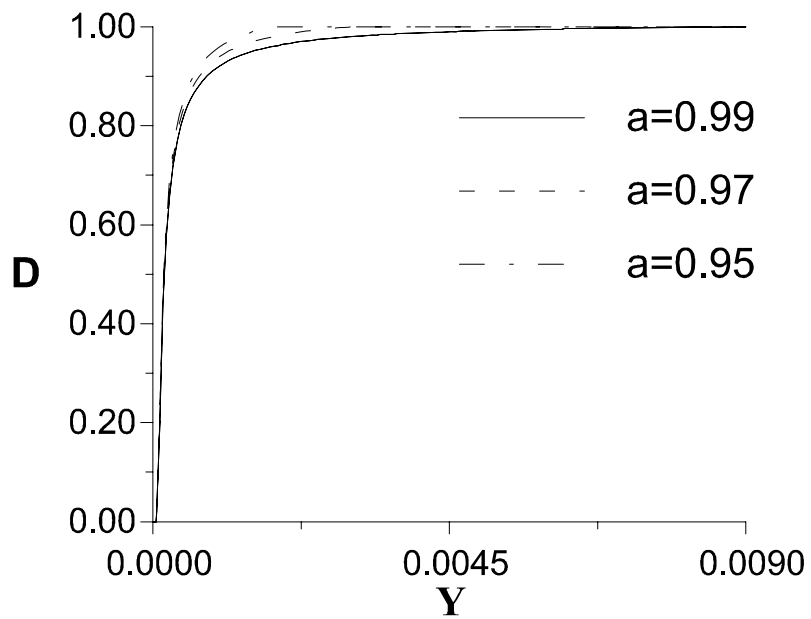


Figura 7.1: Funzione limite a trazione.

Figura 7.2: Legge di danno per diversi valori del parametro  $a$ .

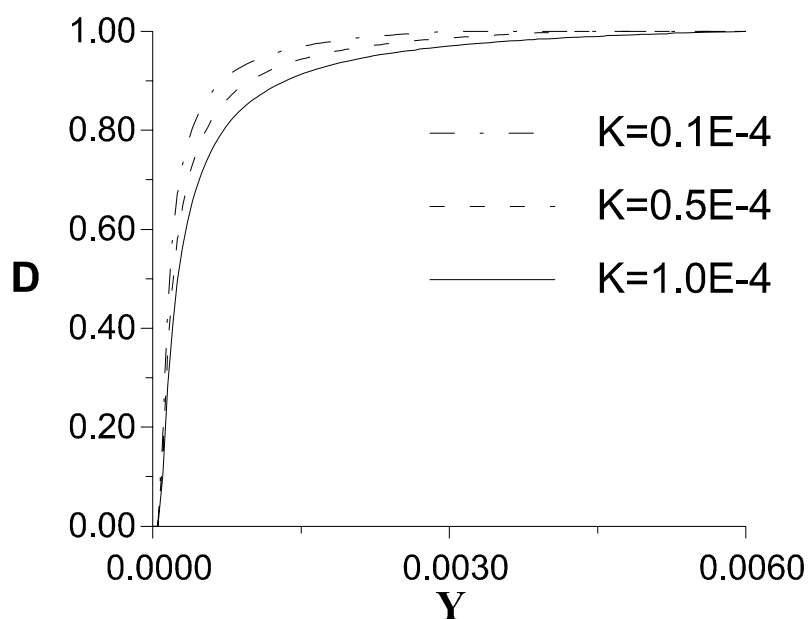


Figura 7.3: Legge di danno per diversi valori del parametro  $K$ .

influenzino la velocità del danneggiamento e quindi la pendenza del ramo di softening. Infine la legge costitutiva, che tiene conto del solo fenomeno di danneggiamento senza plasticità, si ottiene introducendo nella (7.1) l'espressione del danno, fornita dalla (7.10) ed assumendo  $\varepsilon_P = 0$ :

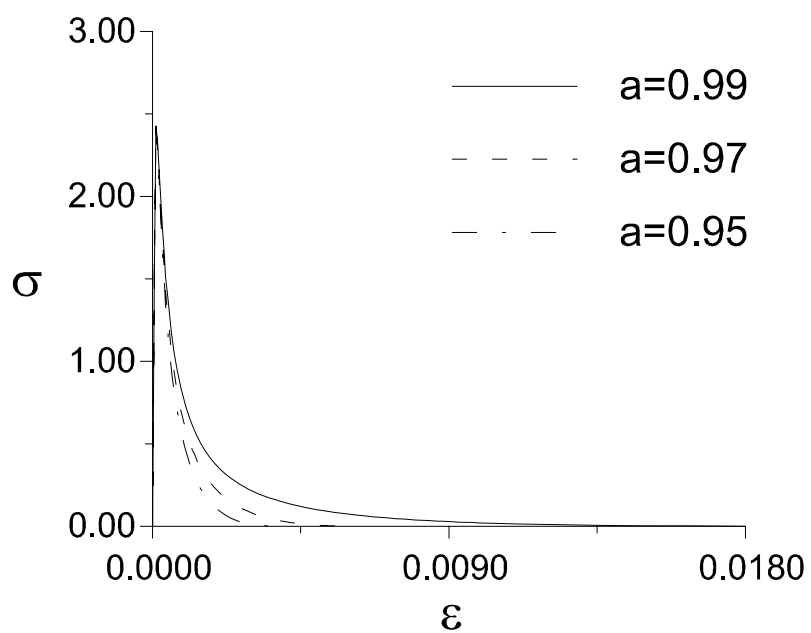
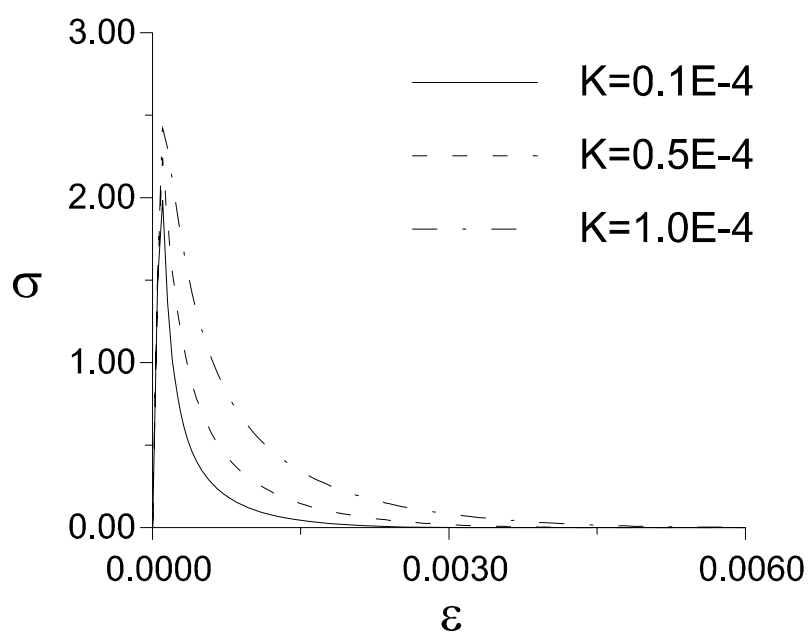
$$\sigma = \left(1 - \frac{Y - Y_0}{a Y + K}\right)^2 \mathbf{E} \varepsilon \quad (7.12)$$

Nelle figure 7.4 e 7.5 è rappresentato il legame tensione-deformazione (7.12), nel caso monodimensionale, per  $Y_0 = 0.8 \cdot 10^{-4}$  e rispettivamente per  $K = 0.1 \cdot 10^{-4}$  al variare del parametro  $a$  e per  $a = 0.97$  fissato al variare di  $K$ . Si può osservare come il parametro  $a$  influenzi principalmente la pendenza del ramo di softening, mentre il parametro  $K$  determina il valore della tensione e della deformazione di picco. Tali parametri del modello macroscopico  $Y_0$ ,  $a$  e  $K$  possono essere valutati dai dati sperimentali anche con l'aiuto dei risultati delle analisi micromeccaniche parametriche sviluppate nei capitoli precedenti, in quanto dipendono dall'energia di frattura  $G_f$  e dalla resistenza a trazione  $f_t$  del materiale.

### Danno a trazione e a compressione

Nel modello di danno a trazione e compressione proposto si lascia inalterata l'espressione della  $F$  e si definisce la variabile di controllo  $Y$  in modo da tener conto anche



Figura 7.4: Legame tensione-deformazione per diversi valori del parametro  $a$ .Figura 7.5: Legame tensione-deformazione per diversi valori del parametro  $K$ .

del danneggiamento del materiale a compressione. L'espressione della  $Y$  risulta:

$$Y = Y_{0c}Y_t + Y_{0t}Y_c \quad (7.13)$$

dove  $Y_{0t}$  e  $Y_{0c}$  rappresentano le soglie di innesco del danno rispettivamente a trazione ed a compressione e le grandezze  $Y_t$  e  $Y_c$  sono definite rispettivamente in base alle deformazioni principali positive e negative dalle seguenti espressioni:

$$Y_{t/c} = \sqrt{\sum_i^3 \langle \varepsilon_i \rangle_{\pm}^2} \quad \langle \varepsilon_i \rangle_{\pm} = \frac{\varepsilon_i \pm |\varepsilon_i|}{2} \quad (7.14)$$

Le costanti  $K$ ,  $Y_0$  e  $a$  sono espresse in funzione delle corrispondenti grandezze a trazione e compressione:

$$K = \alpha_t Y_{0c} K_t + \alpha_c Y_{0t} K_c \quad (7.15)$$

$$Y_0 = Y_{0c} Y_{0t} \quad (7.16)$$

$$a = \alpha_t a_t + \alpha_c a_c \quad (7.17)$$

dove  $K_t$  e  $K_c$  sono parametri che governano la velocità di evoluzione del danno a trazione ed a compressione,  $a_t$  e  $a_c$  sono i parametri che regolano la pendenza dei rami di softening ed  $\alpha_t$  e  $\alpha_c$  sono definiti come segue:

$$\alpha_t = \frac{|Y_t|}{|Y_t| + |Y_c|} \quad \alpha_c = \frac{|Y_c|}{|Y_t| + |Y_c|} \quad (7.18)$$

In figura 7.6 è rappresentata la funzione limite a trazione e compressione, nel piano delle deformazioni principali  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , ottenuta dall'espressione (7.7) sostituendo la variabile  $Y$  definita dalla (7.13) con  $\varepsilon_3 = 0$  ed i parametri  $K$ ,  $Y_0$  e  $a$  definiti rispettivamente dalle (7.15), (7.16) e (7.17), con  $Y_{0t} = 0.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_t = 0.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_t = 0.97$ ,  $Y_{0c} = 0.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_c = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_c = 0.85$ . La funzione limite è rappresentata con una linea punteggiata per il materiale non danneggiato e con linea continua nel caso di  $D = 0.3$ . Come si può osservare in figura 7.6 la funzione  $F$  assume la forma nel piano delle deformazioni positive e negative di archi di circonferenza caratterizzati rispettivamente dai raggi  $R_t$  ed  $R_c$  che all'aumentare del danno assumono i seguenti valori:

$$R_{t/c} = Y_{0t/c} \quad \text{per } D = 0$$

$$R_{t/c} = \frac{Y_{0t/c} + K_{t/c} D}{1 - a_{t/c}} \quad \text{per } 0 < D < 1$$

$$R_{t/c} = \frac{Y_{0t/c} + K_{t/c}}{1 - a_{t/c}} \quad \text{per } D = 1$$

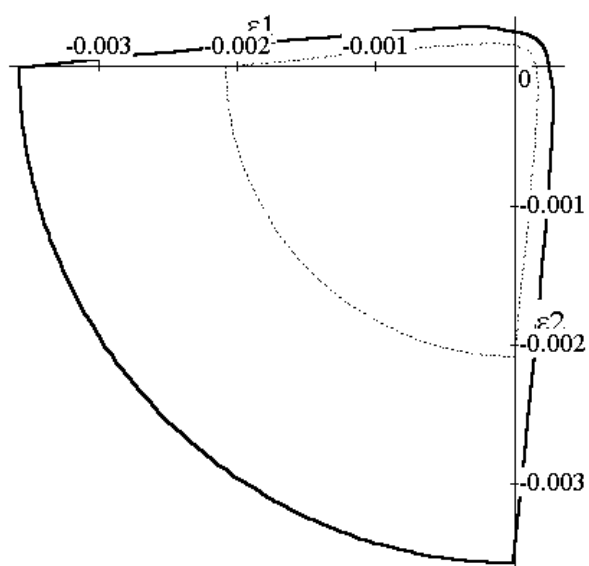


Figura 7.6: Funzione limite a trazione ed a compressione nel piano delle deformazioni principali.

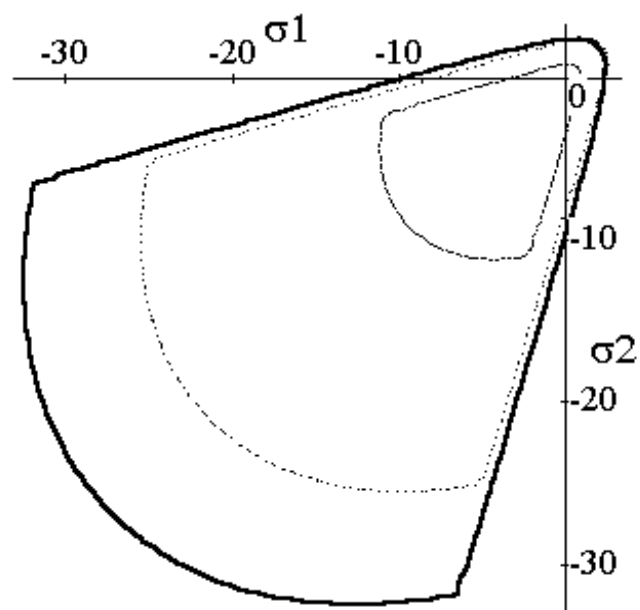


Figura 7.7: Funzione limite a trazione ed a compressione nel piano delle tensioni principali.

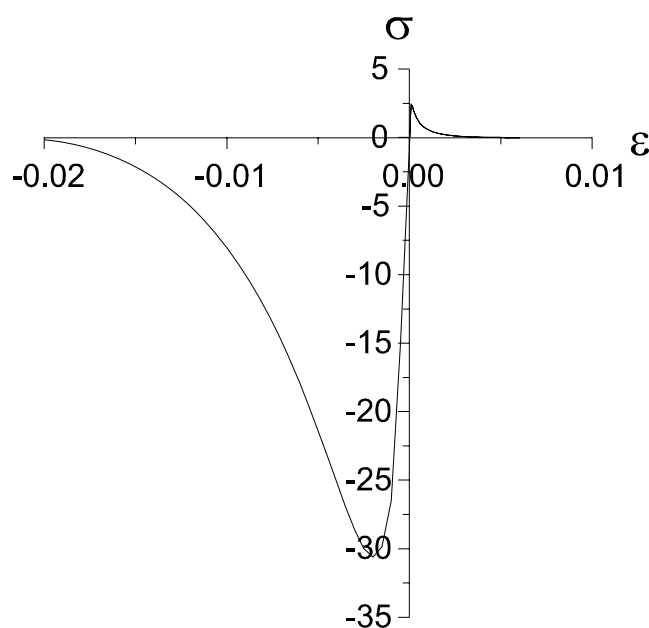


Figura 7.8: Legame tensioni deformazioni con la legge di danno proposta, nel caso di  $h = 0$ .

In figura 7.7 è rappresentata la funzione limite nel piano delle tensioni principali per gli stessi valori dei parametri. La curva con linea punteggiata si riferisce al caso  $D = 0$ , quella con linea continua a  $D = 0.3$  ed infine quella tratteggiata a  $D = 0.8$ . Dalla figura si può notare un iniziale incrudimento positivo del materiale per bassi valori del danno seguito da un comportamento di softening con il progredire del danneggiamento.

In figura 7.8 è rappresentato il legame costitutivo, ottenuto dall'espressione (7.12) nel caso di modello di danno a trazione e compressione, con i seguenti valori dei parametri:  $Y_{0t} = 0.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_t = 0.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_t = 0.97$ ,  $Y_{0c} = 0.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_c = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_t = 0.85$ .

Considerazioni analoghe a quelle fatte per il modello di solo danno a trazione riguardo l'influenza dei parametri  $K$  ed  $a$  sulla legge di danno e sul legame costitutivo, possono essere estese ai parametri  $K_{t/c}$  e  $a_{t/c}$  del modello di danno a trazione e a compressione.

La definizione della variabile di controllo a compressione  $Y_c$  può essere ulteriormente modificata per consentire la variazione della forma della funzione limite  $F$  a

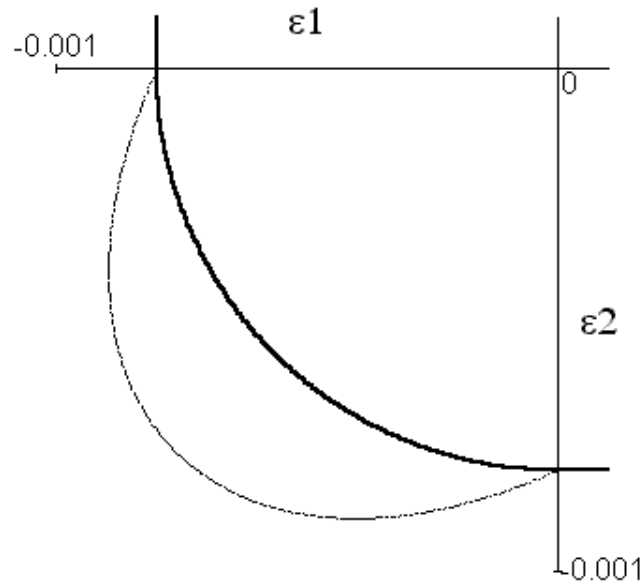


Figura 7.9: Influenza del fattore  $\beta$  sulla forma della funzione limite a compressione  
compressione:

$$Y_c = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \langle \varepsilon_i \rangle_-^2 + \beta \sum_{j=1/j \neq i}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_- \langle \varepsilon_j \rangle_- \right)} \quad (7.19)$$

In figura 7.9 è rappresentata la funzione limite a compressione nel piano delle deformazioni principali  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , con  $\varepsilon_3 = 0$ , per i seguenti valori del parametro  $\beta$ :  $\beta = 0$  (linea tratteggiata),  $\beta = -0.45$  (linea continua). Ovviamente per  $\beta = 0$  si ottiene di nuovo un arco di circonferenza.

Infine si sottolinea che nel modello non locale di danno a trazione e compressione il parametro  $h$  che governa la dimensione della zona di localizzazione è dato dalla seguente espressione:

$$h = (Y_{0c}\alpha_t + Y_{0t}\alpha_c)\bar{h} \quad (7.20)$$

dove  $\bar{h}$  è il valore di  $h$  che si utilizza nel modello di danno non locale solo a trazione o solo a compressione. La definizione di  $h$ , fornita dalla (7.20), fa sì che la funzione limite del modello non locale a trazione e compressione nei casi puri di sollecitazione coincida con la funzione limite definita nel modello di danno non locale di sola trazione ovvero di sola compressione. Infatti, nel caso di sollecitazione di trazione pura risulta:

$$\alpha_t = 1 \quad \alpha_c = 0 \quad \text{e} \quad Y_c = 0 \quad (7.21)$$

quindi la funzione limite del modello di danno a trazione e compressione non locale che è espressa dalla seguente equazione:

$$F = (1 - (\alpha_t a_t + \alpha_c a_c) D) (Y_{0c} Y_t + Y_{0t} Y_c) - (\alpha_t Y_{0c} K_t + \alpha_c Y_{0t} K_c) D - Y_{0c} Y_{0t} + (Y_{0c} \alpha_t + Y_{0t} \alpha_c) \bar{h} \nabla^2 D \quad (7.22)$$

diventa:

$$\begin{aligned} F &= (1 - a_t D) Y_{0c} Y_t - Y_{0c} K_t D - Y_{0c} Y_{0t} + Y_{0c} \bar{h} \nabla^2 D \\ &= Y_{0c} [(1 - a_t D) Y_t - K_t D - Y_{0t} + \bar{h} \nabla^2 D] \end{aligned} \quad (7.23)$$

Risultando il parametro  $Y_{0c}$  sempre positivo, le disuguaglianze sulla funzione, definita dalla (7.23), sono equivalenti a quelle sulla funzione limite del modello di danno di trazione, rappresentata dalla seguente espressione:

$$F = (1 - a_t D) Y_t - K_t D - Y_{0t} + \bar{h} \nabla^2 D \quad (7.24)$$

Analogamente, nel caso di sollecitazione di pura compressione, quando cioè  $\alpha_c = 1$ ,  $\alpha_t = 0$  e  $Y_t = 0$ , si ottiene:

$$F = Y_{0t} [(1 - a_c D) Y_c - K_c D - Y_{0c} + \bar{h} \nabla^2 D] \quad (7.25)$$

che è equivalente alla funzione limite definita per il modello di danno solo a compressione, risultando  $Y_{0t}$  sempre positivo.

### Operatore tangente

L'operatore tangente costitutivo  $\mathbf{C}_t^D$  relativo al problema dell'evoluzione solo del danno è definito dall'espressione:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_t^D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.26)$$

ed è determinato differenziando la relazione tra tensione e deformazione fornita dalla (7.1) nell'ipotesi di  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = 0$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)^2 \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2(1 - D) \dot{D} \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \quad (7.27)$$

La variazione del danno  $\dot{D}$  può essere espressa in funzione dell'incremento della variabile  $Y$  che, nel modello proposto, è funzione della deformazione totale:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dY} \dot{Y} = \frac{dD}{dY} \left( \frac{dY}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (7.28)$$

Sostituendo la (7.28) nella (7.27) si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ (1 - D)^2 \mathbf{C} - 2(1 - D) \frac{dD}{dY} \left( \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \otimes \frac{dY}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.29)$$

da cui l'operatore tangente di danno risulta:

$$\mathbf{C}_t^D = (1 - D)^2 \mathbf{C} - 2(1 - D) \frac{dD}{dY} \left( \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \otimes \frac{dY}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (7.30)$$

Il tensore  $\mathbf{C}_t^D$  nel modello sviluppato non soddisfa la simmetria maggiore per via della definizione assunta per la variabile  $Y$ . Nella procedura numerica presentata di seguito si utilizza per il problema dell'evoluzione del danno la matrice secante  $\mathbf{C}_s^D$ :

$$\mathbf{C}_s^D = (1 - D)^2 \mathbf{C} \quad (7.31)$$

che rende generalmente l'algoritmo più stabile anche se tende a ridurre la velocità di convergenza.

### 7.2.2 Modellazione della plasticità

Si introduce un modello di plasticità perfetta in cui si tiene conto del diverso comportamento del materiale a trazione ed a compressione.

L'evoluzione della deformazione plastica  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  è regolata dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P = \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (7.32)$$

$$F_P \leq 0 \quad \dot{\lambda}_P \geq 0 \quad F_P \dot{\lambda}_P = 0 \quad (7.33)$$

dove  $\dot{\lambda}_P$  è il moltiplicatore plastico e  $F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$  è la funzione limite caratterizzata da una diversa soglia di snervamento a trazione ed a compressione che dipende dalle tensioni efficaci  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  definite dalla (7.2).

L'operatore tangente costitutivo  $\mathbf{C}_t^P$  tale che  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_t^P \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  che caratterizza l'evoluzione plastica può essere determinato differenziando la relazione tra tensione e deformazione fornita dalla (7.1) nell'ipotesi di  $\dot{D} = 0$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)^2 \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P) = (1 - D)^2 \mathbf{C} \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (7.34)$$

Il moltiplicatore plastico  $\dot{\lambda}_P$  può essere valutato imponendo la condizione di consistenza:

$$\dot{F}_P = \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = 0 \quad (7.35)$$

Tenendo conto dell'espressione (7.2), si ottiene:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P) = \mathbf{C} \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (7.36)$$

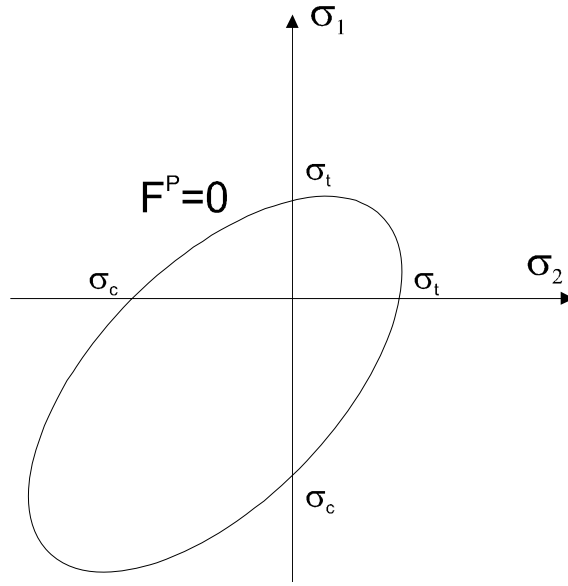


Figura 7.10: Funzione di snervamento adottata nel modello.

che sostituita nella (7.35) fornisce:

$$\frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{C} \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) = 0 \quad (7.37)$$

Ricavando il moltiplicatore plastico  $\dot{\lambda}_P$  dall'equazione (7.37):

$$\dot{\lambda}_P = \frac{\frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{C} \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (7.38)$$

e sostituendolo nella (7.34) si determina l'operatore tangente  $\mathbf{C}_t^P$ :

$$\mathbf{C}_t^P = (1 - D)^2 \mathbf{C} \left( \mathbf{I} - \frac{\frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{C}}{\frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{C} \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \right) \quad (7.39)$$

Il tensore del quarto ordine  $\mathbf{C}_t^P$  non è una funzione solo del tensore di elasticità  $\mathbf{C}$  ma anche, tramite  $\partial F_P / \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ , della tensione corrente efficace  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ .

Si propone nel presente modello la funzione  $F_P$  fornita dalla seguente espressione:

$$F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = 3J_2 + (\sigma_c - \sigma_t) I_1 - \sigma_c \sigma_t \quad (7.40)$$



dove  $\sigma_t$  e  $\sigma_c$  sono rispettivamente la tensione di snervamento a trazione ed a compressione e  $I_1$  e  $J_2$  sono l'invariante primo del tensore delle tensioni efficaci e l'invariante secondo del deviatore delle tensioni efficaci:

$$I_1 = \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} [(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)^2 + (\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_z)^2 + (\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_z)^2 + 6(\tilde{\tau}_{xy}^2 + \tilde{\tau}_{xz}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2)] \\ &= \frac{1}{6} [(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)^2 + (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)^2 + (\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3)^2] \end{aligned} \quad (7.42)$$

in cui  $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\tau}_{xz}$  e  $\tilde{\tau}_{yz}$  sono le componenti del tensore delle tensioni efficaci nel sistema di riferimento  $x, y$  e  $z$ , mentre  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$  e  $\tilde{\sigma}_3$  sono le tensioni principali efficaci.

Dalla (7.32) l'evoluzione delle componenti del tensore di deformazione plastica si può valutare con le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{Px} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_x} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_z + \sigma_c - \sigma_t) \\ \dot{\varepsilon}_{Py} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_y} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_z + \sigma_c - \sigma_t) \\ \dot{\varepsilon}_{Pz} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_z} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y + \sigma_c - \sigma_t) \\ \dot{\gamma}_{Pxy} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\tau}_{xy}} = \dot{\lambda}_P (6\tilde{\tau}_{xy}) \\ \dot{\gamma}_{Pxz} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\tau}_{xz}} = \dot{\lambda}_P (6\tilde{\tau}_{xz}) \\ \dot{\gamma}_{Pyz} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\tau}_{yz}} = \dot{\lambda}_P (6\tilde{\tau}_{yz}) \end{aligned} \quad (7.43)$$

mentre in termini di deformazioni principali risulta:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{P1} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_1} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3 + \sigma_c - \sigma_t) \\ \dot{\varepsilon}_{P2} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_2} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3 + \sigma_c - \sigma_t) \\ \dot{\varepsilon}_{P3} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_3} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_3 - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2 + \sigma_c - \sigma_t) \end{aligned} \quad (7.44)$$

Nel caso di tensioni piane, cioè quando  $\tilde{\sigma}_z = \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{yz} = 0$  ovvero  $\tilde{\sigma}_3 = 0$ , le (7.43)

diventano:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{Px} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_x} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y + \sigma_c - \sigma_t) \\
\dot{\varepsilon}_{Py} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_y} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_x + \sigma_c - \sigma_t) \\
\dot{\varepsilon}_{Pz} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_z} = \dot{\lambda}_P (-\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y + \sigma_c - \sigma_t) \\
\dot{\gamma}_{Pxy} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\tau}_{xy}} = \dot{\lambda}_P (6\tilde{\tau}_{xy})
\end{aligned} \tag{7.45}$$

e le (7.44) risultano:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{P1} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_1} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2 + \sigma_c - \sigma_t) \\
\dot{\varepsilon}_{P2} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_2} = \dot{\lambda}_P (2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 + \sigma_c - \sigma_t) \\
\dot{\varepsilon}_{P3} &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\sigma}_3} = \dot{\lambda}_P (-\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2 + \sigma_c - \sigma_t)
\end{aligned} \tag{7.46}$$

La funzione di snervamento adottata è schematicamente rappresentata in figura 7.10 nel piano delle tensioni principali  $\tilde{\sigma}_1$   $\tilde{\sigma}_2$  nel caso piano di tensioni.

### 7.3 Aspetti computazionali

Si adotta nel seguito la notazione vettoriale per il campo di tensioni e di deformazioni. Nel problema bidimensionale, il campo di spostamenti, di deformazione e di tensione sono rappresentati dai seguenti vettori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= [u_x, u_y] \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}] \\
\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]
\end{aligned} \tag{7.47}$$

nei quali ciascuna componente è funzione di  $(x, y)$ . Nell'ipotesi di tensioni piane adottata  $\sigma_z = 0$  e la deformazione  $\varepsilon_z$  può essere determinata dalla seguente formula:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{ez} + \varepsilon_{Pz} \tag{7.48}$$

dove la  $\varepsilon_{ez}$  è la parte elastica che può essere determinata dalle equazioni del legame costitutivo in funzione delle deformazioni elastiche  $\varepsilon_{ex}$  e  $\varepsilon_{ey}$ , mentre la  $\varepsilon_{Pz}$  è la parte plastica che viene valutata utilizzando le leggi di flusso (7.45).

Le equazioni che governano il problema incrementale di danno e plasticità con valori al contorno sono riportate di seguito:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{f}}^v &= 0 \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1 - D)^2 \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) - 2(1 - D) \dot{D} \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P) \\
\dot{D} &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} \\
F \leq 0 \quad \dot{D} &\geq 0 \quad F \dot{D} = 0 \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P &= \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
F_P \leq 0 \quad \dot{\lambda}_P &\geq 0 \quad F_P \dot{\lambda}_P = 0
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Tali equazioni sono valide nel volume  $V$  le condizioni al contorno risultano:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n &= \dot{\mathbf{F}}^s & \text{su } \partial_f V \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}^v & \text{su } \partial_v V
\end{aligned} \tag{7.50}$$

dove  $\partial_f V \cup \partial_v V = \partial V$  e  $\partial_f V \cap \partial_v V = \emptyset$  e  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n$  è la tensione nella direzione della normale  $\mathbf{n}$  al contorno. Nella (7.49)  $\mathbf{L}$  è una matrice simbolica di operatori differenziali definita come segue:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.51}$$

$\mathbf{f}^v$  e  $\mathbf{F}^s$  sono i vettori delle forze esterne di volume e di superficie, rispettivamente,  $\mathbf{u}^v$  è il vettore degli spostamenti imposti sul contorno e  $\mathbf{C}$  è la matrice costitutiva elastica.

Ponendo l'equazione di equilibrio (7.49<sub>1</sub>) e le condizioni di consistenza del danno in forma debole su tutto il volume  $V$  si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \left[ \mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{f}}^v \right] dV &= 0 \\
\int_V \delta \dot{D} \left( \dot{F} \right) dV &= 0 \quad \text{quando } \dot{D} > 0
\end{aligned} \tag{7.52}$$

dove  $\delta \dot{\mathbf{u}}$  e  $\delta \dot{D}$  indicano le variazioni del campo di spostamenti e del campo di danno. La formulazione agli elementi finiti delle equazioni precedenti richiede la discretizzazione indipendente del campo degli spostamenti e del campo del danno. Il problema evolutivo della deformazione plastica può essere risolto a livello locale in ogni singolo punto di integrazione in quanto l'equazione di consistenza della plasticità è locale e fornisce direttamente il moltiplicatore plastico  $\dot{\lambda}_P$  (vedi equazione (7.38)). Al contrario, come già sottolineato in precedenza, la presenza del laplaciano del danno nella funzione limite rende l'equazione di consistenza del danno un'equazione

differenziale che deve essere risolta a livello globale e richiede una discretizzazione del campo di danno indipendente da quella utilizzata per il campo di spostamenti. Quindi il sistema di equazioni a livello globale è costituito dalle equazioni di equilibrio e dall'equazione di consistenza del danno.

L'equazione di equilibrio in forma debole (7.52<sub>1</sub>) può essere riscritta utilizzando il teorema della divergenza e le equazioni di congruenza cinematica fornite dalla (7.49<sub>2</sub>):

$$\int_V \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int_{\partial V_f} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{F}}^s dV_f + \int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{f}}^v dV \quad (7.53)$$

dove  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  è data dalla (7.49<sub>3</sub>).

Il problema evolutivo del danno espresso in forma debole dalla (7.52<sub>2</sub>) viene formulato come il problema di minimo vincolato di un funzionale convesso [3, 1, 2] definito come segue:

$$\min \left\{ L(\dot{D}) \quad \left| \quad \dot{D} \geq 0 \right. \right\}$$

dove

$$L(\dot{D}) = \int_V \left[ (aY + K) \frac{\dot{D}^2}{2} - (1 - aD) \dot{D} \dot{Y} + \frac{h}{2} \nabla^T \dot{D} \nabla \dot{D} \right] dV \quad (7.54)$$

ottenuto introducendo le condizioni al contorno aggiuntive che emergono dalla formulazione variazionale [11] (vedi Capitolo 6):

$$\dot{D} (\nabla \dot{D} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad \text{su } \partial V \quad (7.55)$$

La soluzione di tale problema deve essere verificata imponendo l'ulteriore vincolo:

$$0 \leq D \leq 1 \quad \text{in } V$$

Dall'espressione (7.54) si può notare come la formulazione scelta per il problema evolutivo del processo di danneggiamento consente di utilizzare funzioni di forma di classe  $C^0$  anche per la discretizzazione del danno.

### 7.3.1 Algoritmo risolutivo

Si sviluppa una procedura numerica per integrare le equazioni evolutive del danno e della plasticità, basata su una tecnica al passo, che prevede l'applicazione del carico in una sequenza di passi temporali di ampiezza  $\Delta t$ . In ciascun intervallo temporale  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  si risolvono le equazioni evolutive mediante una tecnica predictor-corrector che si basa sullo 'splitting method'. Tale tecnica risolutiva è adottata in quanto il problema è governato dalle equazioni di equilibrio e dall'equazioni evolutive

della deformazione plastica e del danno; le equazioni di equilibrio e le equazioni che derivano dalla minimizzazione del funzionale  $L$  risultano accoppiate perchè gli operatori di equilibrio e del danno dipendono sia dagli spostamenti sia dal danno, mentre i due processi evolutivi della plasticità e del danno sono disaccoppiati. L'algoritmo si sviluppa nei seguenti due passi:

- fase di previsione elasto-plastica di tentativo risolta mantenendo il danno costante;
- fase di correzione di danno durante la quale si valuta l'evoluzione del danno risolvendo il problema di minimo vincolato, tenendo fissa la deformazione plastica.

Nella fase di previsione elasto-plastica oltre al calcolo dello spostamento e della deformazione totale, si valuta l'incremento della deformazione plastica mediante un algoritmo di return mapping. Dunque la fase di previsione elasto-plastico si articola a sua volta nei seguenti due passi:

- fase di previsione elastica di tentativo, durante la quale l'evoluzione della deformazione plastica rimane bloccata;
- fase di correzione, durante la quale si valuta l'evoluzione della deformazione plastica mediante un algoritmo di return mapping.

L'incremento di danno si determina invece nella fase di correzione di danno, tenendo bloccati sia gli spostamenti che l'evoluzione plastica.

Le due fasi di previsione e di correzione sono illustrate nelle seguenti tabelle:

Previsione elasto-plastica	
Previsione elastica	Correzione plastica
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P = \mathbf{0}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P = \begin{cases} \dot{\lambda}_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} & \text{se } F_P \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } F_P < 0 \end{cases}$ $F_P \leq 0 \quad \dot{\lambda}_P \geq 0 \quad F_P \dot{\lambda}_P = 0$
$\dot{D} = 0$	$\dot{D} = 0$
$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)^2 \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -(1 - D)^2 \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P$

Correzione di danno
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_P = \mathbf{0}$
$\dot{D} = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} & \text{se } F \geq 0 \\ 0 & \text{se } F < 0 \end{cases}$ $F \leq 0 \quad \dot{D} \geq 0 \quad F\dot{D} = 0$
$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -2(1 - D)\dot{D}\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P)$

Per semplificare la notazione nel seguito il pedice  $_n$  indica una quantità valutata al tempo  $t_n$  mentre nessun pedice indica una quantità valutata al tempo  $t_{n+1}$ .

In forma discretizzata le equazioni che definiscono le due fasi di previsione e correzione diventano:

<b>Previsione elasto-plastica</b>	
Previsione elastica	Correzione plastica
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}$	$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P = \mathbf{0}$	$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P = \begin{cases} \Delta \lambda_P \frac{\partial F_P}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} & \text{se } F^P \geq 0 \\ 0 & \text{se } F^P < 0 \end{cases}$ $F_P \leq 0 \quad \Delta \lambda_P \geq 0 \quad F_P \Delta \lambda_P = 0$
$\Delta D = 0$	$\Delta D = 0$
$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (1 - D)^2 \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -(1 - D)^2 \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P$

<b>Correzione di danno</b>
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P = \mathbf{0}$
$\Delta D = \begin{cases} \Delta \lambda (1 - D) & \text{se } F \geq 0 \\ 0 & \text{se } F < 0 \end{cases}$ $F \leq 0 \quad \Delta D \geq 0 \quad F \Delta D = 0$
$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -2(1 - D) \Delta D \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_P)$

dove il simbolo  $\Delta$  è utilizzato per indicare l'incremento della grandezza nel passo temporale  $\Delta t$ .

Nel seguito si descrive la procedura iterativa predictor-corrector utilizzando l'apice <sup>(i)</sup> per indicare una grandezza valutata all'iterazione  $i$ -esima e l'apice <sup>(i+1)</sup> una grandezza relativa all'iterazione corrente.

### Fase di previsione elasto-plastica

In questa fase non si fa evolvere il danno e con i valori del danno determinati all'iterazione precedente si risolve il problema elasto-plastico determinando il campo di spostamenti, il campo di deformazioni totali e plastiche. In particolare l'equazione di equilibrio fornita dalla (7.53) viene risolta.

L'equazione discretizzata del legame tensioni-deformazioni, risulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + (1 - D^{(i)})^2 \mathbf{C} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P) \quad (7.56)$$

dove  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P$  sono rispettivamente l'incremento della deformazione totale e della deformazione plastica nell'intervallo  $\Delta t$  e  $D^{(i)}$  il valore del danno all'iterazione precedente.

Per calcolare la  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}$  e quindi la variabile associata al danno  $Y^{(i+1)}$  si deve risolvere il problema elasto-plastico fornito dalle equazioni evolutive discretizzate riportate nelle tabelle precedenti. Il problema viene affrontato adottando, all'interno

di ogni iterazione della procedura predictor-corrector globale, una ulteriore tecnica predictor-corrector a livello locale ed in particolare in un'analisi agli elementi finiti in ogni punto di integrazione del singolo elemento finito. Tale tecnica è basata su un algoritmo risolutivo 'return mapping' [15, 4], che si sviluppa nei due passi seguenti:

- una previsione elastica di tentativo, detto 'trial',
- una correzione plastica che è eseguita mediante la proiezione dello stato 'trial' sulla superficie limite nel punto più vicino.

### Previsione elastica dell'algoritmo di return mapping

Considerando nota la deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}$  all'iterazione corrente, la previsione elastica è ottenuta mantenendo costante la deformazione plastica pari a quella dell'iterazione precedente e lo stato di tentativo è caratterizzato da:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.57)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i)} \quad (7.58)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} = \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} \right) \quad (7.59)$$

$$F_P^{(i+1)} = F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right) \quad (7.60)$$

Se  $F_P^{(i+1)} < 0$  allora la deformazione plastica non cresce e la soluzione di tentativo elastica è quella esatta. Se  $F_P^{(i+1)} \geq 0$  la funzione di snervamento è violata e l'incremento di deformazione è valutato nella fase di correzione plastica.

### Correzione plastica dell'algoritmo di return mapping

L'algoritmo utilizzato per determinare la deformazione plastica è del tipo backward-Euler e proietta lo stato trial sulla funzione di snervamento.

Il residuo del flusso plastico e la condizione di snervamento sono definiti dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{R}_P^{(i+1)} = -\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i)} + \Delta\lambda_P^{(i+1)} \frac{\partial F_P^{(i+1)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (7.61)$$

$$F_P^{(i+1)} = F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right) \quad (7.62)$$

dove  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} = \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} \right)$ . Il sistema di equazioni non lineari, dato dalla (7.61) e (7.62), risolto con il metodo di Newton-Raphson, fornisce la proiezione dello stato elastico trial sulla superficie di snervamento. Risultando la deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}$



costante durante l'algoritmo di return mapping si ottiene che  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} = -\mathbf{C}^{-1}\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}$ , dove  $\delta$  rappresenta la variazioni della generica grandezza del problema.

Di seguito si indicano con l'apice  $^{[k]}$  le grandezze relative all'iterazione  $k$ -esima dell'algoritmo di return mapping e con l'apice  $^{[k+1]}$  quelle relative all'iterazione corrente. Si linearizzano perciò le equazioni (7.61) e (7.62) che diventano:

$$0 = \mathbf{R}_P^{(i+1)[k+1]} = \mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} + (\mathbf{A}^{(i+1)[k]})^{-1} \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} + \delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (7.63)$$

$$0 = F_P^{(i+1)[k+1]} = F_P^{(i+1)[k]} + \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} \quad (7.64)$$

dove  $\mathbf{A} = (\mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda_P \partial^2 F_P / \partial^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^{-1}$  ed il simbolo  $\cdot$  indica il prodotto scalare. Le equazioni (7.63) e (7.64) esprimono l'annullamento del residuo e della funzione di snervamento all'iterazione  $k+1$ . Tutte le grandezze all'iterazione  $k$  sono note, quindi il sistema costituito dalle (7.63) e (7.64) può essere risolto ottenendo  $\delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]}$  e  $\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]}$ .

$$\delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} = \frac{F_P^{(i+1)[k]} - \mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} \cdot \left( \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)}{\frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left( \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)} \quad (7.65)$$

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} = \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \left( -\mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} - \delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (7.66)$$

Noto  $\delta\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]}$  si calcola la variazione della deformazione plastica  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]}$ :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} = -\mathbf{C}^{-1}\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} \quad (7.67)$$

A questo punto è possibile aggiornare la deformazione plastica  $\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]}$ , il moltiplicatore plastico  $\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]}$  e la tensione  $\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)[k+1]}$  e determinare la funzione limite  $F_P^{(i+1)[k+1]}$  ed il residuo  $\mathbf{R}_P^{(i+1)[k+1]}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} = \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k]} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} \quad (7.68)$$

$$\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} = \Delta\lambda_P^{(i+1)[k]} + \delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} \quad (7.69)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k]} + \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} \quad (7.70)$$

$$F_P^{(i+1)[k+1]} = F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} \right) \quad (7.71)$$

$$\mathbf{R}_P^{(i+1)[k+1]} = -\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} + \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i)} + \Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k+1]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (7.72)$$

Si ricomincia la procedura iterativa introducendo nelle equazioni (7.63) e (7.64) i nuovi valori calcolati per la deformazione plastica, la tensione, il moltiplicatore plastico, la funzione limite ed il residuo e risolvendo il sistema linearizzato così ottenuto. La procedura iterativa termina quando la convergenza viene raggiunta, cioè quando il residuo  $\mathbf{R}_P^{(i+1)[k+1]}$  e la funzione limite  $F_P^{(i+1)[k+1]}$  dell'iterazione corrente risultano in norma minori di una prefissata tolleranza.

### Matrice tangente consistente

Simo e Taylor [15] hanno definito il concetto di matrice tangente consistente con l'algoritmo di return mapping. Essi hanno inoltre dimostrato che l'utilizzo della matrice tangente consistente al posto della tangente costitutiva, fornita dalla (7.39), nel calcolo dell'operatore di rigidezza della struttura migliora in modo significativo la convergenza delle iterazioni di Newton-Raphson sulle equazioni di equilibrio globali, preservando la convergenza quadratica che altrimenti potrebbe essere persa.

Di seguito viene determinata la matrice tangente consistente, detta anche tangente algoritmica, per il particolare problema di plasticità considerato. Differenziando la relazione tensione-deformazione e la legge di flusso discretizzate si ottiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} &= (1 - D^{(i)})^2 \mathbf{C} \left( d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - d\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} \right) \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} &= \Delta\lambda_P^{(i+1)} \frac{\partial^2 F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2} d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} + d\Delta\lambda_P^{(i+1)} \frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \end{aligned} \quad (7.73)$$

Sostituendo la (7.73<sub>2</sub>) nella (7.73<sub>1</sub>) si ricava la relazione algoritmica:

$$d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}}{(1 - D^{(i)})^2} = \mathbf{A}^{(i+1)} \left( d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - d\Delta\lambda_P^{(i+1)} \frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (7.74)$$

dove  $\mathbf{A}^{(i+1)} = \left( \mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda_P^{(i+1)} \partial^2 F_P^{(i+1)} / \partial^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1}$ . Inoltre differenziando la condizione di consistenza discretizzata  $F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$ , si ottiene:

$$\frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} = 0 \quad (7.75)$$

Sostituendo la (7.74) nella (7.75) si determina l'espressione di  $d\Delta\lambda_P^{(i+1)}$ :

$$d\Delta\lambda_P^{(i+1)} = \frac{\frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot [\mathbf{A}^{(i+1)} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}]}{\frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left[ \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \right)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right]} \quad (7.76)$$

Infine sostituendo la (7.76) nella (7.74) si ottiene la tangente consistente algoritmica  $\widehat{\mathbf{C}}_t$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{C}}_t^{(i+1)} &= (1 - D^{(i)})^2 \mathbf{A}^{(i+1)} \left( \mathbf{I} - \frac{\left( \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \mathbf{A}^{(i+1)}}{\frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left[ \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right]} \right) \quad (7.77) \\ &= (1 - D^{(i)})^2 \left[ \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\left( \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \otimes \left( \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)}{\frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left[ \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right]} \right] \end{aligned}$$

### Fase di correzione di danno

In questa fase viene risolto il problema del danno e la deformazione plastica è mantenuta costante. Si determina la variabile associata al danno  $Y^{(i+1)}$  funzione delle deformazioni totali; la funzione limite risulta allora:

$$F^{(i+1)} = (1 - a D^{(i+1)}) Y^{(i+1)} - K D^{(i+1)} - Y_0 + h \nabla^2 (D^{(i+1)}) \quad (7.78)$$

dove

$$D^{(i+1)} = D_n + \Delta D^{(i)} \quad (7.79)$$

Se  $F^{(i+1)} < 0$  allora il danno non cresce e la soluzione di tentativo trovata nella fase predictor coincide con quella esatta. Mentre se  $F^{(i+1)} \geq 0$  la funzione limite è violata e l'incremento di danno deve essere valutato in base alle condizioni di Kuhn-Tucker.

Nella procedura proposta il problema evolutivo del danno viene riformulato come il problema di minimo vincolato del funzionale convesso  $L$ , in base all'equazione di consistenza discretizzata, risulta:

$$\min \{ L(\Delta D^{i+1}) \quad | \quad 0 \leq \Delta D^{i+1} \leq (1 - D_n) \} \quad (7.80)$$

dove

$$\begin{aligned} L = \int_V \left[ \frac{1}{2} (a Y^{(i+1)} + K) (D_n + \Delta D^{(i+1)})^2 - (Y^{(i+1)} - Y_0) (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \nabla^T (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \nabla (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \right] dV \quad (7.81) \end{aligned}$$

Per la risoluzione del problema di minimo soggetto a vincoli non lineari (7.80) si utilizza la routine L-BFGS-B, basata su un algoritmo per problemi di ottimizzazione in grande scala [17].

### Schema dell'algoritmo risolutivo

In definitiva, lo schema dell'algoritmo risolutivo del problema evolutivo di plasticità e danno non locale è il seguente.

1. Inizializzazione:  $i = 0$ ,  $D^{(0)} = D_n$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{Pn}$ .

#### 2. Previsione elasto-plastica

(a) Calcolo spostamenti:  $\Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = [\mathbf{K}_u(\mathbf{u}^{(i)}, D^{(i)})]^{-1} \mathbf{R}^{(i)}$

(b) Calcolo deformazioni totali:  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}$

(c) Calcolo variabile associata:  $Y^{(i+1)} = Y(\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)})$

(d) Calcolo evoluzione plastica

i. Inizializzazione:  $k = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[0]} = \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i)}$ .

##### ii. Previsione elastica

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k]} &= \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k]} \right) \\ F_P^{(i+1)[k]} &= F^P \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{[k]} \right) \\ \mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} &= -\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k]} + \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i)} + \Delta \lambda_P^{(i+1)[k]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\end{aligned}$$

Se  $F_P^{TR[k]} < TOL_1$ , e  $\left\| \mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} \right\| < TOL_2$ , allora

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k]} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k]} \\ \Delta \lambda_P^{(i+1)} &= \Delta \lambda_P^{(i+1)[k]} \\ \mathbf{A}^{(i+1)} &= \mathbf{A}^{(i+1)[k]}\end{aligned}$$

vai al punto v.,  
altrimenti

##### iii. Correzione plastica

A. Calcolo dei moduli tangenti consistenti:

$$\mathbf{A}^{(i+1)[k]} = \left( \mathbf{C}^{-1} + \Delta \lambda_P^{(i+1)[k]} \frac{\partial^2 F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right)^{-1}$$

B. Calcolo incrementi della deformazione plastica e della tensione:

$$\delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} = \frac{F_P^{(i+1)[k]} - \mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} \cdot \left( \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)}{\frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left( \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)}$$

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]} = \mathbf{A}^{(i+1)[k]} \left( -\mathbf{R}_P^{(i+1)[k]} - \delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} \frac{\partial F_P^{(i+1)[k]}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)$$

Noto  $\delta\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]}$  si calcola la variazione della deformazione plastica  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]}$ :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} = -\mathbf{C}^{-1} \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)[k+1]}$$

C. Aggiornamento del parametro di consistenza e della deformazione plastica:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]} = \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k]} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)[k+1]}$$

$$\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]} = \Delta\lambda_P^{(i+1)[k]} + \delta\Delta\lambda_P^{(i+1)[k+1]}$$

iv. Aggiorna  $k = k + 1$  e vai a ii..

v. Calcolo operatore tangente consistente:

$$\hat{\mathbf{C}}_t = (1 - D^{(i)})^2 \mathbf{A}^{(i+1)} \left( \mathbf{I} - \frac{\left( \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \mathbf{A}^{(i+1)}}{\frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left[ \mathbf{A}^{(i+1)} \frac{\partial F_P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right]} \right)$$

### 3. Correzione del danno

(a) Risoluzione del problema di minimo vincolato:

$$\min \{ L(\Delta D^{i+1}) \quad | \quad 0 \leq \Delta D^{i+1} \leq (1 - D_n) \}$$

dove

$$L = \int_V \left[ \frac{1}{2} (a Y^{(i+1)} + K) (D_n + \Delta D^{(i+1)})^2 - (Y^{(i+1)} - Y_0) (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \nabla^T (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \nabla (D_n + \Delta D^{(i+1)}) \right] dV$$

(b) Aggiornamento del danno e delle tensioni

$$\begin{aligned} D^{i+1} &= D_n + \Delta D^i \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} &= \boldsymbol{\sigma}_n + (1 - D^{(i+1)})^2 \mathbf{C} \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P^{(i+1)} \right) \end{aligned}$$

(c) Calcolo della matrice tangente consistente plastica e secante nel danno  $\mathbf{K}_u(\mathbf{u}^{(i+1)}, D^{(i+1)})$  e del residuo  $\mathbf{R}^{(i+1)}$

4. Test di convergenza energetico: se soddisfatto, esci, altrimenti vai a 2.

### 7.3.2 Formulazione agli elementi finiti

Il modello di danno e plasticità proposto è implementato in elementi finiti piani a tre e a quattro nodi, nel codice di calcolo FEAP [18]. Sia per il campo di spostamenti che per quello del danno è sufficiente utilizzare funzioni di forma di classe  $C^0$ .

Per quel che riguarda la discretizzazione agli elementi finiti delle equazioni di equilibrio che governano la fase predictor elasto-plastica si adotta la formulazione agli spostamenti. Il campo di spostamento è interpolato con funzioni di forma lineari:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L} \mathbf{N} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (7.82)$$

dove  $\Delta \mathbf{a}$  è il vettore che contiene i valori nodali dell'incremento di spostamento nell'intervallo temporale  $\Delta t$  ed  $\mathbf{N}$  è la matrice delle funzioni di forma. Le equazioni di equilibrio (7.53) risultano:

$$\left\{ \int_V (\mathbf{B}^T \widehat{\mathbf{C}}_t \mathbf{B}) dV \right\} \Delta \mathbf{a} - \left\{ \int_{\partial V_f} (\mathbf{N}^T \Delta \mathbf{F}^s) dV_f \right\} - \left\{ \int_V (\mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f}^v) dV \right\} = \mathbf{0} \quad (7.83)$$

cioè in forma compatta:

$$\mathbf{K}_u \Delta \mathbf{a} = \mathbf{F}_u \quad (7.84)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_u &= \int_V (\mathbf{B}^T \widehat{\mathbf{C}}_t \mathbf{B}) dV \\ \mathbf{F}_u &= \int_{\partial V_f} (\mathbf{N}^T \Delta \mathbf{F}^s) dV_f + \int_V (\mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f}^v) dV \end{aligned}$$

in cui  $\Delta \mathbf{F}^s$  e  $\Delta \mathbf{f}^v$  sono i vettori delle forze nodali.

Si evidenzia che nella versione dell'algoritmo implementato nel codice FEAP si utilizza la matrice tangente consistente con  $\widehat{\mathbf{C}}_t$  fornita dalla (7.77) al posto della tangente costitutiva  $\mathbf{C}_t^P$  (7.39).

Per quanto riguarda la fase corrector anche il campo del danno è discretizzato per mezzo di funzioni di forma lineari:

$$D = \mathbf{N}_D^T (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}) \quad (7.85)$$

$$\Delta D = \mathbf{N}_D^T \Delta\widehat{\mathbf{D}} \quad (7.86)$$

$$\nabla D = \nabla (\mathbf{N}_D^T) (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}) \quad (7.87)$$

dove  $\widehat{\mathbf{D}}_n$  è il vettore che contiene i valori nodali del danno al passo temporale  $n$ ,  $\Delta\widehat{\mathbf{D}}$  è il vettore degli incrementi di danno nodali al passo corrente ed  $\mathbf{N}_D$  è il vettore delle funzioni di forma. Utilizzando le espressioni (7.85), (7.86) e (7.87) la formulazione agli elementi finiti del funzionale convesso (7.81) risulta:

$$\begin{aligned} L(\Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) = \int_{vol} \left[ \frac{1}{2} (a Y^{i+1} + K) \left( \mathbf{N}_D^T (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) \right)^T \left( \mathbf{N}_D^T (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) \right) - \right. \\ \left. (Y^{i+1} - Y_0) \left( \mathbf{N}_D^T (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) \right) + \right. \\ \left. \frac{h}{2} \left( \nabla (\mathbf{N}_D^T) (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) \right)^T \left( \nabla (\mathbf{N}_D^T) (\widehat{\mathbf{D}}_n + \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) \right) \right] dV \end{aligned} \quad (7.88)$$

che in forma compatta può essere riscritto:

$$L(\Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) = \frac{1}{2} (\Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1})^T \mathbf{K} (\Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1}) + \mathbf{F} \Delta\widehat{\mathbf{D}}^{i+1} \quad (7.89)$$

dove  $\mathbf{K}$  ed  $\mathbf{F}$  sono forniti dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{K} = (a Y^{i+1} + K) \mathbf{N}_D \otimes \mathbf{N}_D + \frac{h}{2} \nabla \mathbf{N}_D \otimes \nabla \mathbf{N}_D \quad (7.90)$$

$$\mathbf{F} = (Y^{i+1} - Y_0) \mathbf{N}_D - (\mathbf{a} \mathbf{Y}^{i+1} + \mathbf{K}) \widehat{\mathbf{D}}_n + h \nabla (\mathbf{N}_D^T) \widehat{\mathbf{D}}_n \quad (7.91)$$

## 7.4 Applicazioni numeriche

Nelle applicazioni numeriche svolte si è adottato il modello di danno e plasticità bloccando l'evoluzione del danneggiamento quando il danno raggiunge un fissato valore limite  $D_s$ . Quando  $D = D_s$  il danno rimane costante mentre continua ad evolversi la deformazione plastica. Da un punto di vista fisico questa soglia di danneggiamento per FRC rappresenta il momento in cui la matrice si è interamente danneggiata mentre le fibre non si danneggiano ma iniziano a sfilarsi. Quindi in questa fase la risposta del materiale è puramente plastica.

Per quanto riguarda l'algoritmo descritto nel paragrafo 7.3.1 nella fase corrector bisogna solo tener conto del fatto che il danno varia nell'intervallo  $[0, D_s]$  e quindi il problema di minimo del funzionale convesso  $L$  viene ridefinito come segue:

$$\min \{ L(\Delta D^{i+1}) \quad | \quad 0 \leq \Delta D^{i+1} \leq (D_s - D_n) \} \quad (7.92)$$

### Risultati analisi macromeccaniche

Sono presentati due esempi in cui si studia la risposta meccanica del calcestruzzo fibrorinforzato utilizzando il modello di danno e plasticità, descritto nei paragrafi precedenti, e trascurando la deformazione ortogonale al piano dell'analisi. La risposta del FRC è inoltre confrontata con quella del solo calcestruzzo determinata mediante un modello di solo danno non locale. I valori utilizzati nel modello di solo danno sono riportati di seguito:

$$\begin{array}{ll} E_m = 3.0 \cdot 10^4 N/mm^2 & \nu_m = 0.2 \\ Y_{0t} = 0.8 \cdot 10^{-4} & Y_{0c} = 0.8 \cdot 10^{-3} \\ K_t = 1.0 \cdot 10^{-4} & K_c = 2.5 \cdot 10^{-3} \\ a_t = 0.97 & a_c = 0.85 \\ \bar{h} = 2.0 mm^2 & \end{array}$$

I valori adottati nel modello macroscopico di danno e plasticità sono:

$$\begin{array}{ll} E_m = 3.0 \cdot 10^4 N/mm^2 & \nu_m = 0.2 \\ Y_{0t} = 0.9 \cdot 10^{-4} & Y_{0c} = 0.9 \cdot 10^{-3} \\ K_t = 1.5 \cdot 10^{-4} & K_c = 2.5 \cdot 10^{-3} \\ a_t = 0.99 & a_c = 0.90 \\ \bar{h} = 2.0 mm^2 & D_s = 0.9 \\ \sigma_t = 100 N/mm^2 & \sigma_c = 200 N/mm^2 \end{array}$$

Si può notare che sono stati assunti dei valori più elevati per parametri  $K_t$ ,  $a_t$  e  $a_c$  nel modello di danno e plasticità per tener conto della presenza delle fibre che migliora la risposta post-picco del materiale composito rispetto al comportamento della sola matrice.

Il primo esempio riguarda una prova di trazione mentre il secondo una prova a flessione. Per la discretizzazione si utilizzano elementi quadrilateri a 4 nodi e triangolari a 3 nodi.

**Prova a trazione** Si analizza il comportamento a trazione della trave rappresentata in figura 7.11. Poiché la trave è a sezione variabile si verifica la localizzazione del danno e della deformazione. I parametri geometrici che caratterizzano la trave analizzata sono:

$$L = 500 \text{ mm} \quad w = 100 \text{ mm}$$

In figura 7.12 è rappresentata la distribuzione del danno a diversi passi dell'analisi ed in particolare, in figura 7.12(a) per uno spostamento imposto pari a  $u = 0.04 mm$ , in figura 7.12(b) per  $u = 0.06 mm$  ed in figura 7.12(c) per  $u = 0.2 mm$ . Si può notare come l'introduzione del laplaciano del danno nella funzione limite del danno  $F$  impedisce la localizzazione del danno in una striscia ristretta all'estremità della trave e come quando il danno raggiunge il valore limite  $D_s$  rimane costante.



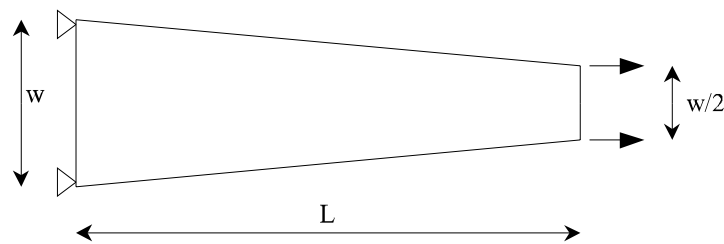


Figura 7.11: Trave a sezione variabile: geometria e condizioni al contorno.

In figura 7.13, sono rappresentate le curve carico-spostamento ottenute mediante il modello di danno e plasticità considerando due diverse discretizzazioni agli elementi finiti e la risposta del solo calcestruzzo determinata mediante il modello di puro danno. Si può sottolineare come il modello proposto sia in grado di riprodurre la risposta a trazione tipica del FRC (vedi risultati prove sperimentali Capitolo 1). Nella fase post-picco, infatti, in corrispondenza del processo di sfilamento delle fibre, il ramo di softening è più dolce rispetto a quello del solo calcestruzzo, inoltre l'introduzione della plasticità perfetta fa sì che il carico totale sopportato dalla trave tenda ad un valore limite legato all'azione di richiusura delle fibre.

Infine si può notare come i risultati ottenuti con il modello sviluppato sono indipendenti dalla dimensione della discretizzazione.

**Prova a flessione** Si analizza la trave mostrata in figura 7.14 sottoposta ad una prova di flessione su tre punti.

La trave è soggetta ad uno spostamento imposto all'estremità superiore della sezione di mezzeria. I parametri geometrici che caratterizzano la trave analizzata sono:

$$L = 800 \text{ mm} \quad w = 250 \text{ mm}$$

In figura 7.15 è rappresentata la distribuzione del danno per differenti valori dello spostamento imposto  $v$ . Il danno nella trave inizia all'estremità inferiore della sezione di mezzeria (vedi figura 7.15(a)) dove si concentrano le massime deformazioni di trazione, e si propaga verso l'estremità superiore della sezione di mezzeria (vedi figura 7.15(b)) dove le deformazioni di compressione sono significative. In figura 7.15(c) si può notare come il danno rimane costante una volta raggiunto il valore limite  $D_s$ . Il modello di danno e plasticità proposto permette di cogliere il classico meccanismo di collasso di una trave soggetta a flessione in tre punti.

In figura 7.16 è rappresentata la curva carico-spostamento per FRC determinata mediante il modello di danno e plasticità e la risposta del solo calcestruzzo valutata mediante il modello di puro danno. Anche in questo caso il modello proposto è in

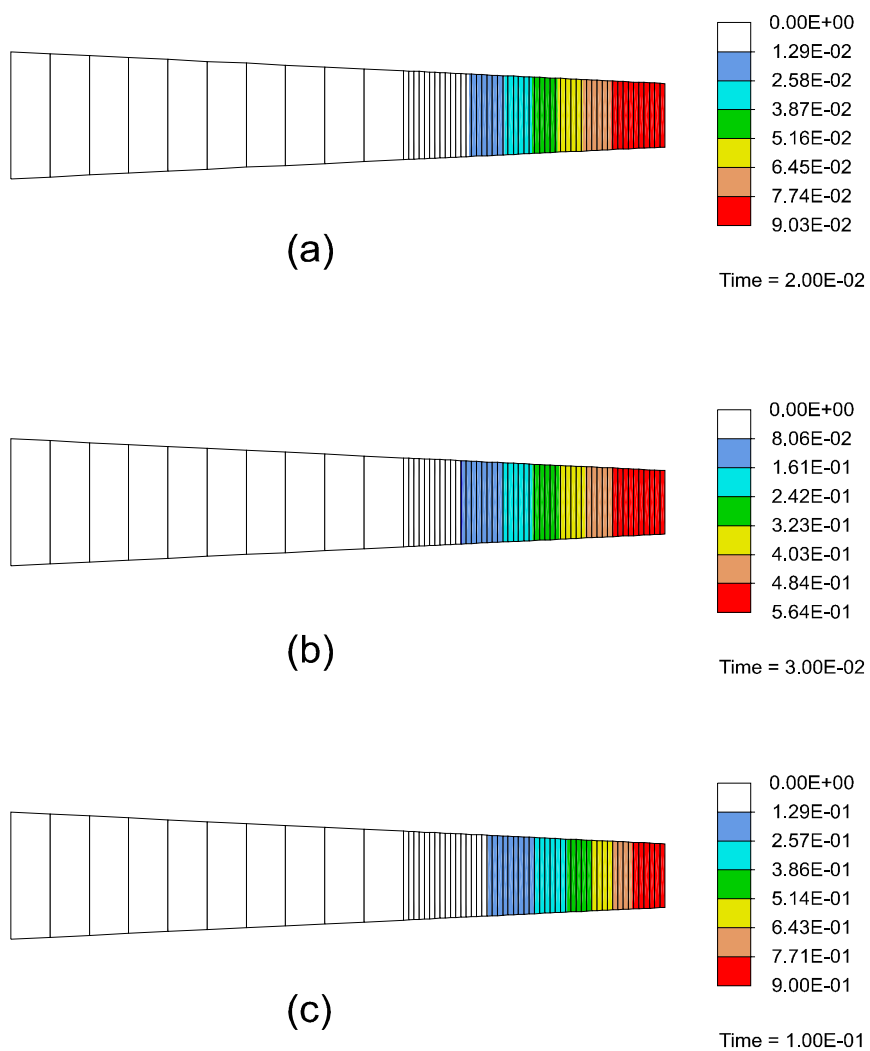


Figura 7.12: Evoluzione del danno: a)  $u = 0.04 \text{ mm}$ , b)  $u = 0.06 \text{ mm}$ , c)  $u = 0.2 \text{ mm}$ .

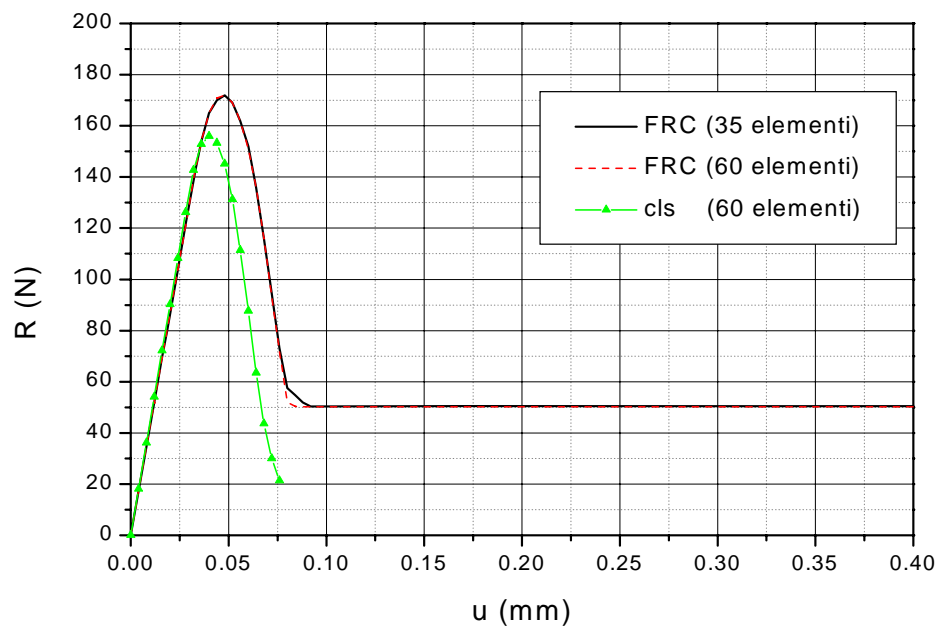


Figura 7.13: Curva carico-spostamento per FRC e per il calcestruzzo.

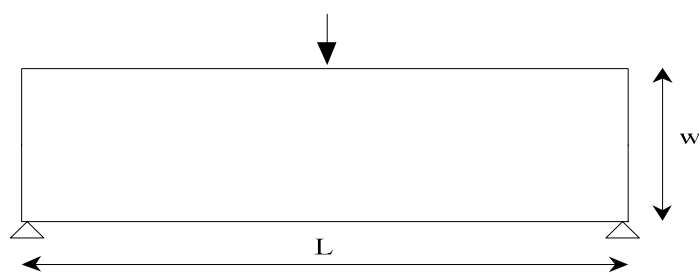


Figura 7.14: Test a flessione su tre punti: geometria e condizioni al contorno.

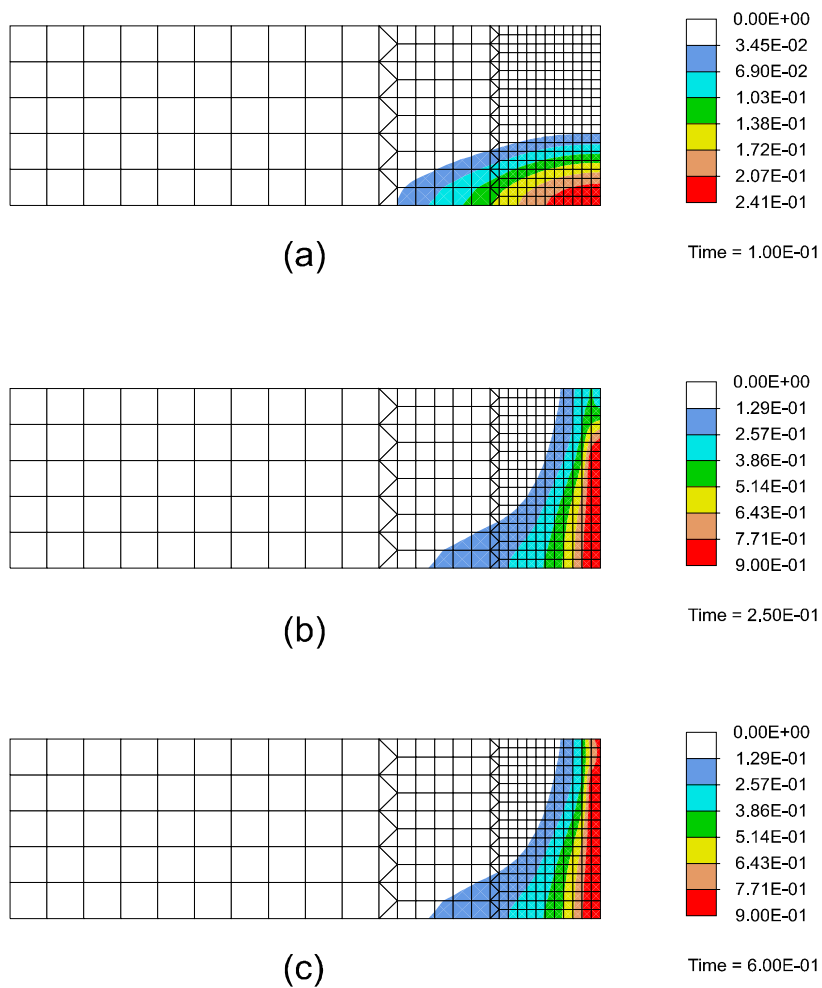


Figura 7.15: Evoluzione del danno: a)  $v = 0.2 \text{ mm}$ , b)  $v = 0.5 \text{ mm}$ , c)  $v = 1.2 \text{ mm}$ .

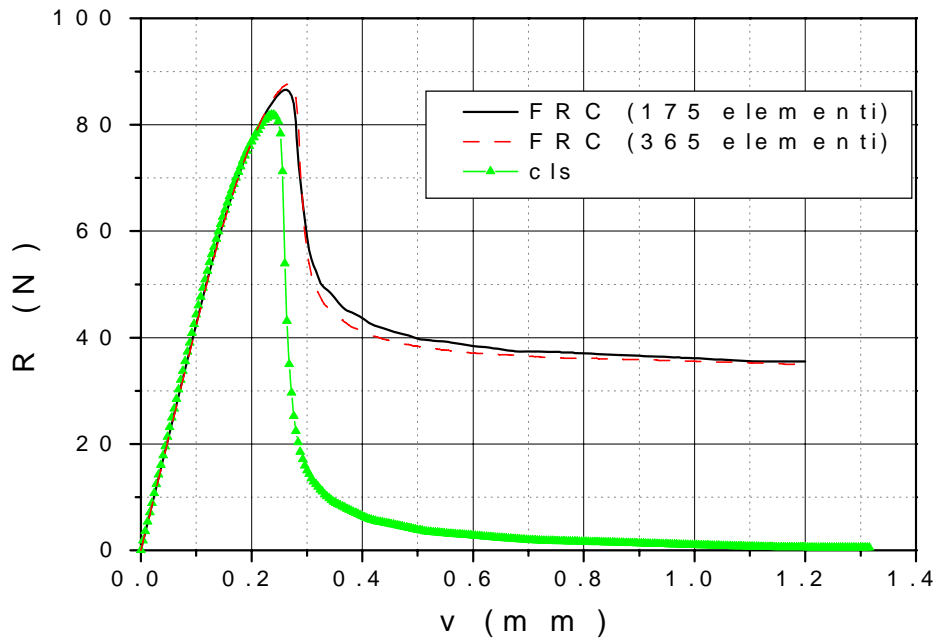


Figura 7.16: Curva carico-spostamento per FRC e per il calcestruzzo.

grado di cogliere la risposta post picco tipica del calcestruzzo fibrorinforzato ed i risultati sono indipendenti dalla dimensione della discretizzazione.

## 7.5 Conclusioni

Nel presente capitolo è stato sviluppato un modello di danno non locale e plasticità per il calcestruzzo fibrorinforzato. Le ipotesi alla base del modello sono che l'evoluzione del danno dipenda dalla deformazione totale e che l'evoluzione della deformazione plastica sia governata dalle tensioni effettive. Per quanto riguarda l'evoluzione del danno si tiene conto del diverso danneggiamento del materiale a trazione ed a compressione. Per evitare i problemi connessi al comportamento di tipo softening dei materiali fragili e quasi fragili, il modello è stato regolarizzato introducendo il laplaciano del danno nella funzione limite del danno.

E' stato presentato un modello di plasticità perfetta in cui si tiene conto del diverso comportamento a trazione ed a compressione del materiale utilizzando una funzione di snervamento con diverse soglie a trazione ed a compressione. Per le analisi numeriche si è utilizzata una tecnica di tipo predictor-corrector per determinare la soluzione ad ogni passo temporale. La fase di previsione è elasto-plastica, mentre la fase di correzione, dove si determina l'evoluzione del danno, è stata formu-

lata come un problema di minimo vincolato di un funzionale convesso. L'algoritmo sviluppato è stato implementato in un codice agli elementi finiti. Le applicazioni numeriche hanno mostrato come il modello presentato è in grado di descrivere la risposta meccanica ed i meccanismi di danneggiamento di elementi strutturali realizzati in FRC. I problemi analitici e numerici legati al fenomeno di localizzazione delle deformazione e del danno sono superati grazie alla tecnica di regolarizzazione scelta. L'algoritmo risolutivo adottato si è dimostrato stabile ed efficiente anche nel caso di analisi con discretizzazioni molto fitte, mostrando buone proprietà di convergenza.

# Bibliografia

- [1] Addessi D., Marfia S., Sacco E., Nonlocal damage model for fiber-reinforced concrete, *Atti del European Conference on Computational Mechanics, ECCM '99*, Monaco, 31 Agosto-3 Settembre, 1999.
- [2] Addessi D., Sacco E., Modelli regolarizzati nella meccanica del danno, *Atti del XIV Congresso Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, AIMETA '99*, Como, 6-9 Ottobre 1999.
- [3] Comi C., Driemeier L., On gradient regularization for numerical analyses in the presence of damage, *Proc. IUTAM Symposium*, Delft, 1997.
- [4] Crisfield M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Volume 1, John Wiley & Sons, England, 1991.
- [5] Lemaitre J., *A Course on damage mechanics*, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [6] Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E., A plastic-damage model for concrete, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23(25), pp. 299-326, 1989.
- [7] Marfia S. Stang H., Sacco E., Modellazione micromeccanica del calcestruzzo fibrorinforzato, *Atti del XIV Congresso Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, AIMETA '99*, Como, 6-9 Ottobre 1999.
- [8] Marfia S. Stang H., Sacco E., Micromechanical damage of FRC: modelling and parametric analysis, in via di pubblicazione sulla rivista *Concrete Science and Engineering*, 1999.
- [9] Mazars J., *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*, Tesi di Dottorato, Università di Parigi, Francia, 1984.
- [10] Mazars J., Pijaudier-Cabot, Continuum damage theory-application to concrete, *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 115(2), pp. 345-365, 1989.

- [11] Muhlhaus H. B., Aifantis E. C., A variational principle for gradient plasticity, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 28, pp. 845-857, 1991.
- [12] Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P., Non local damage theory, *J. of Eng. Mech ASCE*, Vol. 113(10), pp 1512-1533, 1987.
- [13] Simo J. C., Ju J., Strain and stress based continuum damage models-part I: formulation, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23(7), pp 821-840, 1987.
- [14] Simo J. C., Ju J., Strain and stress based continuum damage models-part I: computational aspect, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23(7), pp. 841-869, 1987.
- [15] Simo J. C., Hughes T. J. R., *Elastoplasticity and Viscoplasticity, Computational Aspects*, 1998.
- [16] Zheng Q. S., Betten J., On damage effective stress and equivalence hypothesis, *Int. J. Dam. Mech.*, Vol. 5, pp. 219-230, 1996.
- [17] Zhu C., Byrd R. H., Lu P., Nocedal J., L-BFGS-B: Fortran subroutine for large-scale bound constrained optimization, *ACM Trans. Math. Software* 23, Vol. 4, pp. 550-560, 1997.
- [18] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The finite element method*, 4th edition, Mc GRAW-HILL, London, 1991.