

5

Modello numerico per la simulazione del comportamento aerodinamico ed il calcolo delle derivate di flutter per le sezioni da ponte

5.1 Premesse

La corretta comprensione ingegneristica degli aspetti costitutivi e del comportamento dei ponti di grande luce, in riferimento agli effetti prodotti dal vento su di essi incidente, consente di sviluppare, come fatto nelle pagine precedenti, modelli di risposta ai carichi aerodinamici e quindi criteri analitici di stabilità nei riguardi di fenomeni dinamici o statici quali il *flutter* o la divergenza.

In particolare, a partire dalla corretta caratterizzazione dei parametri meccanici che governano la risposta della struttura, è possibile individuare in modo analitico espressioni che forniscono le condizioni di velocità critica del vento incidente, cioè che inducono condizioni al limite di stabilità. D'altra parte, però, detti modelli per essere effettivamente applicabili richiedono la valutazione di una serie di parametri aerodinamici dipendenti, tra l'altro, dalle caratteristiche del flusso incidente e dalla geometria della struttura.

Le forze che il vento esercita sull'impalcato sono infatti determinate se, note le condizioni di velocità e di turbolenza della corrente incidente, sono noti: i coefficienti aerodinamici medi (*cf.* eq. (2.12)) e la loro variabilità con l'angolo di incidenza del flusso (ciò consente di caratterizzare le azioni stazionarie e (*cf.* eq. (2.37-2.39)) le

azioni di *buffeting*); l'eventuale frequenza di distacco di vortici dalla struttura, *i.e.* il numero di Strouhal St (*cf.* eq. (2.2)) oltre che l'ampiezza delle corrispondenti azioni aerodinamiche variabili nel tempo; le *flutter derivatives*, le quali consentono di caratterizzare le azioni aeroelastiche, *i.e.* le azioni dipendenti dal moto della struttura e che si originano dall'interazione vento-struttura.

Al fine di determinare detti parametri e di validare l'effettiva consistenza dei modelli teorici di riferimento, si procede generalmente per via sperimentale. In particolare, utili informazioni sul comportamento aerodinamico della struttura possono ricavarsi attraverso indagini sperimentali in galleria del vento su un modello in scala della sezione del ponte, oppure su un modello in scala dell'intero impalcato, o ancora dalla risposta al vento di un modello nastriforme (*taut-strip modelling*).

Va però sottolineato che, la corretta interpretazione dei dati così ottenuti e la precisa caratterizzazione dell'effettiva risposta della struttura non possono prescindere comunque dai rilievi sperimentali direttamente condotti sull'opera-prototipo reale.

D'altra parte, i tempi ed i costi connessi alla realizzazione di dette prove possono risultare in generale proibitivi qualora si intenda procedere ad una analisi parametrica durante la fase di progettazione della struttura.

Grazie allo sviluppo di tecnologie informatiche avanzate che hanno portato alla larga commercializzazione e diffusione di computer dalle prestazioni sino allo scorso decennio impensabili se non su sistemi dedicati, e grazie alla caratterizzazione sempre più efficace di modelli fisici *ad hoc* per i problemi di interesse, il settore dell'ingegneria del vento ha mostrato la tendenza allo sviluppo di approcci computazionali atti a supportare e/o sostituire alcune delle prove sperimentali condotte in galleria del vento.

Tali considerazioni, unite al fatto che i flussi turbolenti in gioco nei problemi in esame sono caratterizzati generalmente da alti numeri di Reynolds, giustificano lo sviluppo di uno strumento numerico, basato sulla considerazione di un fluido comprimibile, in grado di fornire risultati significativi con tempi di calcolo concretamente accettabili anche utilizzando piattaforme computazionali di larga diffusione e dalle prestazioni medio-alte.

Numerosi sono i modelli numerici proposti in letteratura (*e.g.* [5.13], [5.16], [5.28]) che consentono la caratterizzazione del comportamento aerodinamico stazionario dell'impalcato e delle azioni da *vortex-shedding* sotto l'ipotesi di flusso incidente bidimensionale, *i.e.* considerando una sezione trasversale rappresentativa della struttura. Questi però non consentono generalmente l'estrazione delle derivate di *flutter* e quindi la caratterizzazione numerica delle azioni aeroelastiche.

Recentemente Larsen e Walther ([5.14], [5.15], [5.34]), afferenti al COWI¹, hanno proposto, mostrando apprezzabili risultati, uno strumento numerico basato su tecniche di simulazione non convenzionali (*discrete vortex method*) ed applicabile nell'ambito dell'analisi aeroelastica di sezioni da ponte. Il modello detto, però, comporta l'utilizzo di piattaforme computazionali dedicate basate su tecnologia parallela ad elevate prestazioni.

Sempre di recente pubblicazione sono inoltre lavori riguardanti la simulazione numerica di fenomeni accoppiati di interazione fluido-struttura (*e.g.* [5.7], [5.29], [5.33]) che però, nonostante l'uso di sistemi di calcolo parallelo dedicati, risultano attualmente proibitivi nell'ottica di una loro applicabilità per la simulazione tridimensionale globale nel caso di strutture quali i ponti di grande luce. La necessità di un livello di discretizzazione molto dettagliato per il dominio fluido nelle zone circostanti il modello della struttura, risulta infatti tuttora computazionalmente inaccettabile.

Nel seguito si presenta un modello numerico basato su una formulazione bidimensionale ai volumi finiti del problema fluido relativo alla zona circostante una sezione da ponte, che consente di caratterizzare gli aspetti aerodinamici essenziali del profilo e di valutarne le derivate di *flutter*. Il modello, implementato tramite una tecnica computazionale relativamente efficiente, utilizza un approccio di tipo A.L.E. (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) mediante il quale il dominio solido investito dalla corrente può spostarsi in modo arbitrario all'interno di essa.

5.2 La descrizione A.L.E.

I problemi di fluidodinamica computazionale non-stazionari multidimensionali sono generalmente descritti attraverso due differenti approcci di tipo classico.

Il primo è l'approccio materiale, secondo il quale il volume di controllo usato per caratterizzare le equazioni di governo del problema fluido si sposta solidalmente con il flusso e conseguentemente non sono presenti effetti di natura convettiva. Ciò, da un punto di vista computazionale semplifica considerevolmente il calcolo numerico in quanto, per ciascuna cella computazionale considerata alla stessa stregua di una particella fluida, sono presenti solo effetti di natura diffusiva. Va però detto che la descrizione materiale non consente in generale di gestire in modo soddisfacente le distorsioni della griglia di calcolo conseguenti allo spostamento delle celle computazionali in modo solidale con il campo di moto materiale del fluido. Tali distorsioni possono essere tali, infatti, da indurre un'inversione topologica dei volumi di calcolo durante la computazione.

¹ *Consulting Engineers and Planners* - Danimarca.

Il secondo approccio classico è concreto nella descrizione spaziale. In questo caso il volume di controllo è fisso in un riferimento assoluto ed il fluido passa attraverso esso dando origine, nelle equazioni di governo del problema, a termini di natura convettiva dipendenti dalla velocità del fluido rispetto al riferimento fisso, *i.e.* dalla velocità con cui il fluido attraversa il volume di controllo detto.

Da un punto di vista computazionale tale descrizione consente di gestire distorsioni del magliaggio di discretizzazione del dominio fluido senza grossi problemi, in quanto ora le celle computazionali sono fisse nel tempo e nello spazio. D'altra parte, però, è necessario tenere conto di due difficoltà essenziali. La comparsa dei termini convettivi introduce dei problemi di natura numerica associati al moto relativo tra la griglia e le particelle fluide, ed inoltre è necessario fare ricorso a complessi modelli matematici che gestiscano eventualmente la presenza di contorni mobili del dominio di calcolo.

La descrizione A.L.E. (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) rappresenta invece un approccio alternativo ai precedenti due e fu originariamente sviluppato nell'ambito del metodo delle differenze finite [5.10] trovando successivamente applicazione anche con metodologie agli elementi finiti (*e.g.* [5.11]).

In dettaglio, si procede introducendo un dominio arbitrario di riferimento in aggiunta ai classici domini spaziale e materiale. Tale dominio di riferimento può muoversi in modo indipendente sia dalle posizioni materiali che da quelle spaziali. In altri termini, il volume di controllo ad esso relativo si sposta arbitrariamente rispetto ad un riferimento assoluto, *i.e.* in modo generalmente non dipendente dal moto delle particelle fluide. Assumendo che le posizioni del magliaggio computazionale coincidano con punti di tale dominio di riferimento, da quanto detto è evidente la possibilità di considerare moti arbitrari della griglia di calcolo. Da un punto di vista computazionale, le posizioni di griglia sono spostate con continuità (*rezoning*) al fine di ottenere una precisa descrizione delle interfacce mobili tra il fluido e la struttura ed assicurare sempre una forma accettabile per le celle di calcolo. I termini convettivi sono comunque presenti nella descrizione A.L.E., ma in questo caso la prescrizione di spostamenti opportuni per la griglia di calcolo può portare ad una loro conveniente riduzione.

Al fine di caratterizzare la generica derivata materiale in termini di grandezze riferite al dominio arbitrario A.L.E., si consideri la seguente notazione. Il dominio materiale e le coordinate di un punto ad esso riferito si indichino rispettivamente con Ω_z e $\mathbf{z}$; il dominio spaziale e le relative coordinate siano rappresentate da Ω_x e $\mathbf{x}$ ed infine il dominio arbitrario di riferimento e le coordinate dei corrispondenti punti siano Ω_r e $\mathbf{r}$. Inoltre, si introducano le funzioni X e Z che mettono in relazione punti di Ω_r con quelli di Ω_x e Ω_z (figura 5.1):

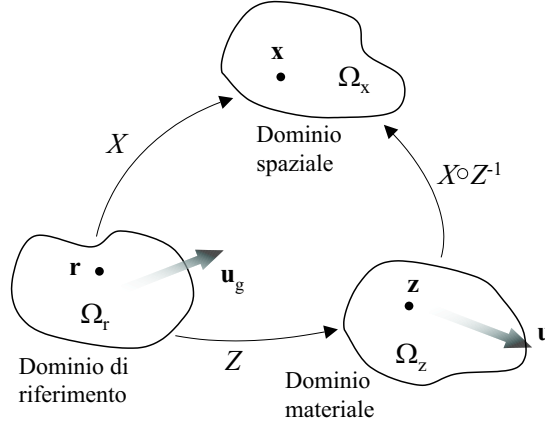


Fig. 5.1: Descrizione schematica dei domini e delle funzioni che definiscono l'approccio A.L.E. (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*).

$$(\mathbf{r}, t) \mapsto X(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x} \quad (\mathbf{r}, t) \mapsto Z(\mathbf{r}, t) = \mathbf{z} \quad (5.1)$$

Pertanto, considerata la generica proprietà fisica $f(\mathbf{x}, t)$ espressa secondo una rappresentazione spaziale, valgono le seguenti relazioni:

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \bar{f}(\mathbf{z}, t) \quad (5.2)$$

$$\tilde{f} = f \circ X \quad \bar{f} = f \circ X \circ Z^{-1} \quad (5.3)$$

essendo i simboli $(\tilde{\cdot})$ e $(\bar{\cdot})$ riferiti rispettivamente a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{z}$ mentre $(\circ)$ indica l'operatore di composizione tra funzioni.

La derivata di $f(\mathbf{x}, t)$ rispetto al tempo t , mantenendo fisso $\mathbf{z}$ ed utilizzando la regola di derivazione di funzioni composte, risulta allora

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \Big|_{\mathbf{z}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}} + w_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r_i}(\mathbf{r}, t) \quad (5.4)$$

essendo $\mathbf{w}$ la velocità della generica particella fluida rispetto alle coordinate del dominio arbitrario, *i.e.* $w_i = \frac{\partial r_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}}$.

Si assume che indici ripetuti indichino sommatoria sugli stessi indici e nell'opportuno intervallo di valori.

Introdotta il vettore della velocità convettiva A.L.E. c_i , definito come differenza tra la velocità materiale u_i e quella del dominio di riferimento u_{gi} , *i.e.*

$$c_i = u_i - u_{gi} = w_j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial r_j} \quad (5.5)$$

$$u_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t} (\mathbf{z}, t)|_{\mathbf{z}} \quad u_{gi} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} (\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}} \quad (5.6)$$

si ricava, sostituendo la (5.5) nella (5.4) ed applicando la regola di derivazione di funzioni composte, la seguente relazione fra la derivata materiale e la derivata temporale nel dominio arbitrario di riferimento:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} (\mathbf{z}, t) \Big|_{\mathbf{z}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} (\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (\mathbf{x}, t) \quad (5.7)$$

Al fine di facilitarne l'implementazione numerica, è utile esprimere le classiche leggi di conservazione che regolano un problema fluido secondo una formulazione A.L.E. scritta in termini di coordinate spaziali $\mathbf{x}$ ma con le derivate nel tempo riferite alle coordinate del riferimento arbitrario, *i.e.* riferite a $\mathbf{r}$.

Note allora le leggi di conservazione scritte in forma spaziale, è immediato passare a quelle in forma A.L.E. utilizzando la (5.7).

Si consideri ad esempio l'equazione di conservazione della massa in termini spaziali [5.1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.8)$$

essendo al solito ρ la densità del fluido. Osservando che

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (5.9)$$

e risultando

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (5.10)$$

sfruttando la (5.7), dalla (5.8) si ricava banalmente l'equazione di continuità in forma A.L.E.:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (5.11)$$

5.3 Equazioni di governo

Il moto di un fluido comprimibile, viscoso e con legge costitutiva di un gas ideale a comportamento Newtoniano è descritto, nel dominio fluido Ω_f circostante il dominio solido Ω_b , dalle classiche leggi di conservazione della massa, della quantità di moto

e dell'energia. Queste, considerando ciascuna grandezza in gioco come somma di una aliquota media e di una parte fluttuante, possono scriversi in termini di moto medio, operando una media temporale alla Reynolds per la pressione e la densità ed una media alla Favre per le altre variabili termofluidodinamiche (*cf.* appendice A). Seguendo allora quanto precedentemente riportato, le equazioni del moto medio alla Reynolds possono scriversi in formulazione A.L.E. come ([5.25], [5.18]-[5.19], [5.39]-[5.42]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_f \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + c_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + \rho u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{in } \Omega_f \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho e}{\partial x_i} + (\rho e + p) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = S_{ij}^\ell \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho \epsilon \quad \text{in } \Omega_f \quad (5.14)$$

essendo x_i le coordinate spaziali, p la pressione del fluido, T la sua temperatura, $\Lambda = \Lambda_\ell + \Lambda_T$ la conduttività termica totale (laminare più turbolenta) dell'aria², e l'energia specifica interna³ e S_{ij} il tensore degli sforzi viscosi ottenuto considerando le ipotesi di Stokes

$$S_{ij} = S_{ij}^\ell + S_{ij}^T = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (5.15)$$

avendo indicato con $\mu = \mu_\ell + \mu_T$ la viscosità totale dell'aria (laminare più turbolenta) e δ_{ij} il simbolo di Kronecker.

Si vuole far notare che nelle relazioni (5.13) e (5.14) compaiono rispettivamente i termini $\frac{\partial(2/3\rho k)}{\partial x_i}$ e $\rho\epsilon$ il cui significato è concreto nella variazione della quantità di moto e nella dissipazione energetica per effetto del carattere turbolento del flusso e la cui caratterizzazione formale deriva dal modello di turbolenza successivamente discusso.

²Si assume che la conduzione del calore nel fluido avvenga secondo una legge isotropa alla Fourier. Inoltre, si pone

$$\Lambda = \Lambda_\ell + \Lambda_T = \frac{\mu_\ell c_p}{Pr} + \frac{\mu_T c_p}{Pr_T}$$

essendo Pr e Pr_T i numeri di Prandtl laminare e turbolento per l'aria e c_p il calore specifico a pressione costante. Nel seguito si assume comunque valida l'approssimazione $\Lambda \cong (\mu_\ell + \mu_T)c_p/Pr$.

³Assumendo l'aria un gas a comportamento ideale, l'energia specifica interna e la temperatura sono legate dalla relazione differenziale [5.1]:

$$de = c_v dT$$

essendo c_v il calore specifico a volume costante dell'aria.

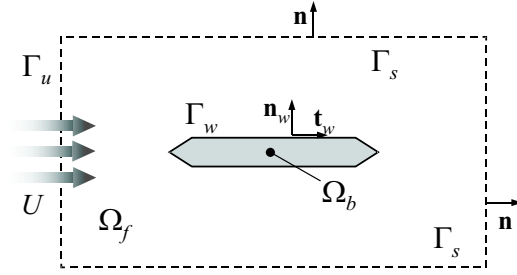


Fig. 5.2: Dominio computazionale: notazione.

L'intero sistema di equazioni è definito nell'intervallo di tempo $(0, t^*)$ e sul dominio fluido Ω_f di contorno $\partial\Omega_f$, che può pensarsi costituito dalle porzioni complementari Γ e Γ_w (figura 5.2). La prima, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_s$, rappresenta il contorno esterno suddiviso a sua volta nel contorno alla Dirichlet Γ_u e nel contorno alla Neumann Γ_s . L'altra, Γ_w , rappresenta l'interfaccia fluido-struttura. Inoltre, si assumano le seguenti condizioni di bordo ed iniziali per le equazioni alle derivate parziali (5.12-5.14):

$$u_i = U_i \quad \text{su } \Gamma_u \times (0, t^*) \quad -pn_i + S_{ij}n_j = s_i \quad \text{su } \Gamma_s \times (0, t^*) \quad (5.16)$$

$$u_i = u_{oi} \quad \text{in } \overset{\circ}{\Omega}_f \text{ for } t = 0 \quad u_i = u_{bi} \quad \text{su } \Gamma_w \times (0, t^*) \quad (5.17)$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale uscente da Γ_s , $\mathbf{U}$ la velocità del fluido sul bordo di ingresso al dominio, $\mathbf{u}_o$ il campo di velocità all'istante iniziale in Ω_f ed $\mathbf{u}_b$ il campo di moto rigido del dominio solido Ω_b .

Inoltre, al fine di cogliere, in termini di moto medio, gli effetti di dissipazione energetica dovuti al carattere turbolento del flusso, si utilizza un modello di turbolenza a due equazioni di tipo $k - \epsilon$ RNG (*Renormalization Group*) ([5.37], [5.38]) (cf. appendice A).

In dettaglio, l'evoluzione temporale e spaziale dell'energia cinetica turbolenta k e della sua velocità di dissipazione ϵ si assumono governate dalle seguenti equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho k}{\partial x_i} + \frac{5}{3} \rho k \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = S_{ij}^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) - \rho \epsilon \quad \text{in } \Omega_f \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial x_i} + (1 + a_{\epsilon 13}) \rho \epsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\epsilon}{k} \left[(a_{\epsilon 1} - \lambda^*) S_{ij}^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - a_{\epsilon 2} \rho \epsilon \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu}{Pr_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } \Omega_f \quad (5.19) \end{aligned}$$

dove le espressioni di chiusura ed i valori dei coefficienti di calibrazione del modello sono ([5.37], [5.38]) (*cf.* appendice A):

$$\begin{aligned}
 a_{\epsilon 1} &= 1.42 & a_{\epsilon 2} &= 1.68 & Pr_k &= Pr_\epsilon = 0.72 & c_\mu &= 0.085 & \lambda_o &= 4.38 \\
 \beta^* &= 0.012 & \tilde{a}_{\epsilon 3} &= 0.4133 & a_{\epsilon 3}^* &= 0.0689 & \mu_T &= c_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \\
 a_{\epsilon 3} &= \tilde{a}_{\epsilon 3} + \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) a_{\epsilon 3}^* \lambda \lambda^* & a_{\epsilon 13} &= \frac{2}{3} a_{\epsilon 1} - a_{\epsilon 3} + \frac{2}{3} \frac{k}{\epsilon} c_\mu \lambda^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
 \lambda^* &= \lambda \frac{(1 - \lambda/\lambda_o)}{(1 + \lambda \beta^{*3})} & \lambda &= \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2 D_{ij} D_{ji}}
 \end{aligned}$$

5.4 Lo schema numerico

Nell'ottica di un approccio semplificato del problema aeroelastico relativo ai ponti di grande luce, si assume che il flusso incidente abbia caratteristiche bidimensionali e ci si riferisce, quindi, ad una sezione trasversale rappresentativa della struttura.

L'insieme delle equazioni di governo (5.12-5.14) e (5.18-5.19) è discretizzato attraverso un approccio bidimensionale ai volumi finiti secondo uno schema transitorio di tipo *time marching*.

In particolare, le condizioni differenziali di governo dette possono risciversi in forma compatta come:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot [F(\mathbf{W}) - N(\mathbf{W})] = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

dove $\mathbf{W} = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho e, \rho k, \rho \epsilon)^T$ è il vettore delle variabili conservate, mentre F e N sono rispettivamente gli operatori differenziali di convezione e di diffusione. Pertanto, una forma debole dell'equazione (5.20) risulta:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dV + \int_{S(t)} [F(\mathbf{W}) - N(\mathbf{W})] \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

essendo $V(t)$ il generico volume di controllo (bidimensionale), in generale funzione del tempo, $S(t)$ il suo contorno (monodimensionale), con $\mathbf{n}$ il versore ad esso normale ed orientato uscente da $V(t)$.

L'approssimazione delle equazioni di governo è allora compiuta attraverso una partizione del dominio computazionale in tanti volumi (bidimensionali) elementari su ciascuno dei quali si impone la condizione di conservazione integrale (5.21). Detta condizione è esplicitata per il tramite di approssimazioni alle differenze finite sia nel tempo che nello spazio.

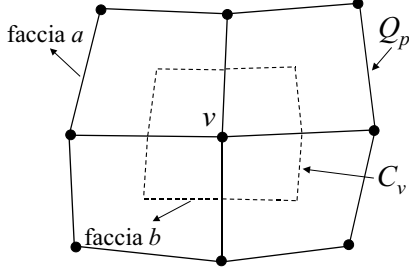


Fig. 5.3: Definizione delle celle computazionali.

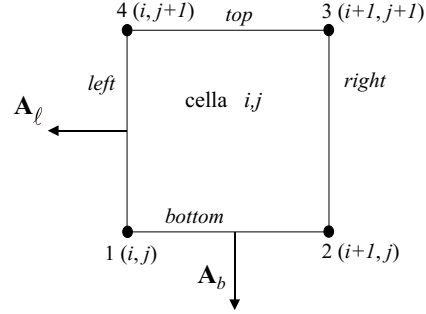


Fig. 5.4: Logica di numerazione dei nodi sulle celle di tipo Q_p ed identificazione delle facce.

5.4.1 La griglia di calcolo

Sia $\Omega_h = \cup_p Q_p \cong \Omega_f$ una partizione di Ω_f attraverso volumi quadrangolari disposti secondo una topologia di tipo strutturato ed i cui vertici siano i nodi di calcolo. Sia inoltre $\Omega_h = \cup_v C_v$ una partizione addizionale di Ω_f ottenuta tramite celle centrate nei nodi, costruite a partire dai centroidi delle celle Q_p che hanno in comune il nodo v -esimo ed i punti medi delle facce in esso convergenti (*cf.* figura 5.3). In questo modo il volume (bidimensionale) di sovrapposizione fra C_v e Q_p corrisponde ad un quarto di quello di Q_p . Si osservi che, mentre le facce di tipo a per le celle Q_p sono facce regolari, quelle di tipo b per C_v risultano ottenute per composizione ciascuna di due differenti porzioni, *i.e.* sono delle facce per così dire composite.

Come detto, la partizione principale tramite le celle di tipo Q_p è topologicamente strutturata nel senso che ciascun nodo interno al dominio deve appartenere a quattro celle di tipo Q_p in esso convergenti. In altri termini, dato un nodo v interno al dominio esso deve essere contornato da 4 nodi 'primi vicini' o, equivalentemente, data una cella interna Q_p essa deve essere a contatto con con altre quattro celle attraverso le sue facce.

In questo modo si ha il vantaggio, fondamentale per una semplice gestione dei dati, di avere una connettività implicita che permette a priori di conoscere i nodi vicini ad un dato vertice e le celle circostanti ad un dato volume computazionale.

Ciascuna cella di tipo Q_p è allora individuata in modo univoco dalla coppia di indici interi (i, j) i quali possono riguardarsi come coordinate nello spazio topologico. Inoltre, gli indici (i, j) contraddistinguono i nodi, con la convenzione che il vertice (i, j) corrisponde al nodo di tipo 1 per la cella (i, j) (*cf.* figura 5.4). In definitiva, considerata la generica cella Q_p , i quattro nodi che la caratterizzano e le corrispondenti quattro facce sono identificate in modo univoco fissata un'orientazione logica come in figura 5.4.

Le coordinate cartesiane del nodo (i, j) sono indicate come $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ e quindi la posizione del centro della generica cella (i, j) di tipo Q_p si pone pari a:

$$\bar{\mathbf{x}}_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \mathbf{x}_s \quad (5.22)$$

essendo $\mathbf{x}_s$ il vettore delle coordinate del nodo s per la cella (i, j) .

Ai fini della risoluzione numerica delle equazioni di governo scritte in forma discreta, è poi necessario conoscere le proiezioni lungo gli assi coordinati x ed y del vettore area $\mathbf{A}_a$ della generica faccia a relativa ad una data cella Q_p . Poichè ogni faccia interna al dominio è comune a due celle principali contigue, ciascuna cella Q_p ha globalmente due facce indipendenti. Convenzionalmente si assume che per ogni cella di tipo Q_p le facce indipendenti siano la faccia *left* e quella *bottom* (cf. figura 5.4) e si assume che il vettore area ad esse associato sia uscente dalla cella cui esse si riferiscono.

Pertanto, considerata ad esempio la faccia *left* per la cella (i, j) di tipo Q_p , dal punto di vista della cella (i, j) il vettore $\mathbf{A}_a$ per questa faccia ha componenti A_{ax}^ℓ , A_{ay}^ℓ , mentre per la cella $(i-1, j)$ il vettore $\mathbf{A}_a$ è corrispondentemente relativo ad una faccia *right* e quindi ha componenti $-A_{ax}^\ell$, $-A_{ay}^\ell$, essendo l'apice ' ℓ ' riferito alla faccia di tipo *left*. Analoghe considerazioni possono svolgersi per le facce di tipo *bottom* e *top*.

Identiche convenzioni si adottano poi per i vettori area $\mathbf{A}_b^*$ delle facce composite di tipo b per le celle C_v . Tali vettori possono facilmente ottenersi a partire dai vettori di area relativi alle facce delle celle Q_p concorrenti in C_v .

La necessità della doppia partizione del dominio computazionale deriva dal fatto che il campo di velocità è discretizzato assumendo come valori incogniti i valori che esso assume in corrispondenza dei vertici delle celle Q_p , *i.e.* in modo approssimato, in corrispondenza dei centri delle celle C_v . In questo senso si può asserire che le velocità sono definite sui nodi cosicchè $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij})$. Le altre grandezze termofluidodinamiche sono invece definite in corrispondenza delle posizioni centrali per le celle Q_p , *i.e.* $f_p = f(\bar{\mathbf{x}}_p)$, essendo $f = p, \rho, T, e, k, \epsilon$.

I valori delle quantità dette in corrispondenza di punti dove esse non sono naturalmente definite sono ottenuti attraverso una interpolazione lineare dei valori corrispondenti ai primi punti vicini di definizione.

Conseguentemente, per l'equazione del tipo (5.21) relativa alla quantità di moto vengono considerati come volumi computazionali i volumi relativi alle celle di tipo C_v centrate nei nodi, mentre per le altre condizioni integrali di governo si considerano come volumi computazionali le celle principali di tipo Q_p .

5.4.2 La discretizzazione nel tempo

L'evoluzione nel tempo della soluzione numerica è effettuata attraverso la considerazione di istanti discreti t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$). L'intervallo di tempo $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ è il cosiddetto *timestep* di calcolo e l'intero n è il numero identificativo del ciclo computazionale corrispondente. Inoltre, indicando con f^n l'approssimazione della quantità f al tempo t^n , la discretizzazione della derivata $\partial f / \partial t$ è effettuata tramite uno sviluppo al primo ordine del tipo $\partial f / \partial t \cong (f^{n+1} - f^n) / \Delta t$.

La risoluzione temporale delle condizioni integrali di governo è effettuata in modo tale che per ciascun *timestep* si possano individuare due fasi salienti [5.10]. La prima fase rappresenta la fase materiale del calcolo e consiste nell'assumere che la griglia computazionale si sposti solidalmente con il fluido. Pertanto, ciascun volume di controllo elementare è considerato alla stessa stregua di una particella fluida che non scambia massa con le altre ad essa circostanti. In questa fase, quindi, i soli effetti considerati sono gli effetti di natura diffusiva. Nel seguito si indicherà con f^z l'approssimazione della generica grandezza f al termine della fase materiale relativa al ciclo di calcolo n -esimo. In particolare, a fase materiale ultimata, il generico nodo v può pensarsi assumere la posizione:

$$\mathbf{x}_v^z = \mathbf{x}_v^n + \mathbf{u}_v^z \Delta t^n \quad (5.23)$$

essendo $\mathbf{x}_v^n$ la posizione del nodo al ciclo di calcolo precedente e $\mathbf{u}_v^z$ il suo vettore velocità aggiornato dopo la fase materiale del ciclo computazionale n -esimo.

Nella seconda fase, la fase convettiva, il campo di moto è congelato ed è rimappato su una nuova griglia computazionale, in generale arbitraria. Attraverso la valutazione dei volumi spazzati dalle facce delle celle principali di tipo Q_p , quando i nodi sono spostati dalla loro posizione materiale a quella finale per il ciclo di calcolo n -esimo, *i.e.* alla posizione $\mathbf{x}_v^{n+1}$, si valutano le variazioni alla soluzione dovute ai termini convettivi di massa, di quantità di moto, di energia e delle grandezze turbolente (fase di *rezoning*, figura 5.5).

É il caso di rimarcare che le posizioni del tipo $\mathbf{x}_v^{n+1}$ possono essere assunte in modo arbitrario. In altri termini, se $x_v^{n+1} = x_v^z$ l'approccio risulterà totalmente materiale; se $x_v^{n+1} = x_v^n$ l'approccio risulta spaziale, altrimenti si ha una descrizione mista di tipo A.L.E..

In dettaglio, nella prima fase, la fase materiale, lo schema di avanzamento della soluzione nel tempo è di tipo semi-implicito. I termini accoppiati diffusivi ed acustici (*i.e.* connessi al termine di gradiente di pressione nell'equazione della quantità di moto ed ai termini di divergenza del campo di velocità nell'equazione dell'energia e di continuità) sono risolti attraverso il metodo iterativo dei residui coniugati. In particolare, il metodo si presenta, in analogia con le metodologie di tipo SIMPLE

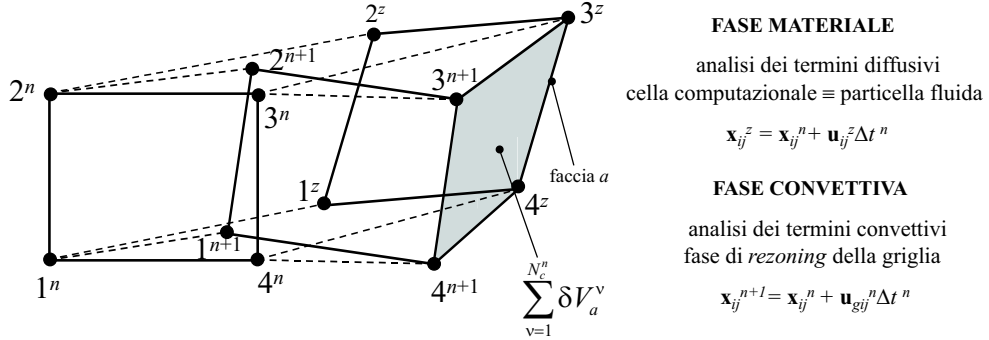


Fig. 5.5: Schema di soluzione a due fasi.

(*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) [5.1], costituito da una iterazione a due passi. Dapprima si fissa un campo di pressione di tentativo per ciascuna cella Q_p sulla base del quale, lasciandolo congelato, si risolvono i termini diffusivi utilizzando le equazioni che li discretizzano in modo implicito. Successivamente, si congelano i termini diffusivi ottenuti al precedente passo e si risolvono, sfruttando l'equazione di stato, i termini impliciti di pressione, ottenendo un campo di pressione 'corretto'. Il campo di tentativo e quello corretto sono allora confrontati e, se la differenza per qualche volume di calcolo supera un certo valore di tolleranza, si assume il campo corretto di pressione come nuovo campo di tentativo e si itera il processo fino a convergenza.

I termini convettivi sono invece valutati nella fase di *rezoning* in modo esplicito. Per evitare però che il passo di integrazione numerica sia limitato dalla ben nota condizione di stabilità alla Courant [5.1], il calcolo di detti termini è effettuato su una serie arbitraria di sotto-cicli nei quali si suddivide il ciclo computazionale principale.

È il caso di osservare che la definizione delle velocità sui vertici delle celle Q_p , nell'ottica di un approccio numerico di tipo A.L.E., fa sì che non sia necessaria alcuna operazione di interpolazione per determinare lo spostamento dei nodi. D'altro canto, tale modo di procedere presenta un inconveniente. In particolare, definendo le velocità sui nodi e le altre grandezze, tra le quali la pressione, in corrispondenza del centro delle celle Q_p , si ha la tendenza alla comparsa di modi parassiti nel campo di velocità che possono rendere instabile la soluzione numerica o comunque non accurata. La causa di ciò è fondamentalmente da ricercare nel fatto che le onde di pressione tendono a propagarsi lungo la diagonale delle celle di calcolo piuttosto che attraverso celle adiacenti [5.10]. Si crea quindi nel campo di pressione un effetto a 'scacchiera' che genera conseguentemente delle irregolarità nel campo di moto e che generalmente può essere eliminato ricorrendo a tecniche numeriche di smorza-

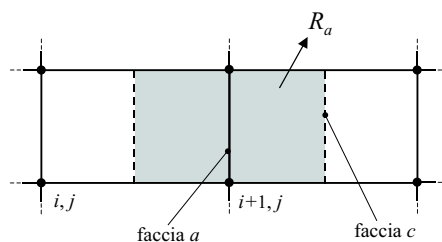


Fig. 5.6: Definizione dei volumi di controllo R_a per le facce di tipo a .

mento [5.10]. Queste ultime, però, introducono effetti di diffusività numerica i quali alterano l'accuratezza della soluzione.

Al fine di limitare questa sensibilità a modi parassiti ed al fine di ottenere comunque una soluzione accurata, si introducono nella fase materiale delle velocità cosiddette di faccia ([5.4], [5.25]), *i.e.* delle velocità definite in corrispondenza del centro di ciascuna faccia delle celle del tipo Q_p . Tali velocità di faccia vengono utilizzate per valutare la variazione di volume che si produce nella generica cella computazionale a seguito della fase materiale e per determinare i flussi spazzati dalla singole facce nella fase convettiva.

Le velocità di faccia sono ottenute dalla considerazione di condizioni integrali aggiuntive a quelle di conservazione della quantità di moto, integrate su volumi di controllo R_a relativi a ciascuna faccia di tipo a . In particolare, tali volumi di controllo consentono di introdurre una terza partizione del dominio Ω_f ottenuta come: $\Omega_h = \cup_a R_a \cong \Omega_f$. Le regioni di tipo R_a sono definite in modo tale da contenere la faccia a cui si riferiscono. In particolare, esse si individuano a partire dai punti medi dei lati per le celle Q_p che hanno in comune la faccia a e che contengono un solo vertice di a stessa (figura 5.6). Il contorno di tali volumi è caratterizzato da facce che si dicono di tipo c ed i cui vettori area $\mathbf{A}_c^{**}$ sono definiti con le medesime convenzioni di quelli $\mathbf{A}_a$ e $\mathbf{A}_b^*$.

5.4.3 La discretizzazione nello spazio

La discretizzazione nello spazio delle equazioni di governo è effettuata attraverso la considerazione delle condizioni integrali di conservazione espresse, in forma compatta, dalla (5.21), *i.e.* attraverso la considerazione di termini differenziali integrali sulle diverse tipologie di volumi di controllo introdotti in precedenza.

In dettaglio, gli integrali di volume di termini in cui compaiono operatori differenziali del tipo gradiente o divergenza sono convertiti in integrali di superficie sfruttando il teorema della divergenza. Inoltre, gli integrali delle derivate nel tempo

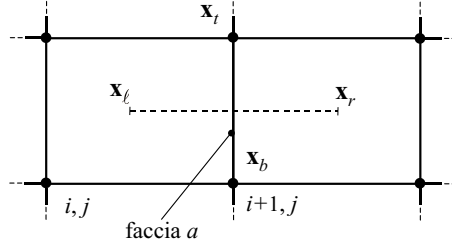


Fig. 5.7: Punti usati per l'approssimazione del gradiente di f sulla faccia a essendo f una grandezza definita sulle celle di tipo Q_p .

sono rifrasiati come derivate temporali degli integrali per il tramite del teorema del trasporto di Reynolds [5.36].

Gli integrali di volume e di superficie sono effettuati generalmente assumendo che le funzioni integrande siano uniformi all'interno del volume o della superficie in questione. Pertanto

$$\int_{V_{ij}} \mathbf{f} dV \cong \mathbf{f}_{ij} V_{ij} \quad \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS \cong \sum_a \mathbf{f}_a \cdot \mathbf{A}_a \quad (5.24)$$

essendo $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{f}_{ij}$ i valori della generica quantità $\mathbf{f}$ rispettivamente al centro del volume V_{ij} e della faccia a costituente il bordo S .

L'approssimazione poi dei termini diffusivi relativi a grandezze f definite sulle posizioni centrali delle celle di tipo Q_p richiede la valutazione di termini del tipo $(\nabla f)_a \cdot \mathbf{A}_a$, essendo $(\nabla f)_a$ il valore assunto dal gradiente di f sulla faccia a . Siano allora $\mathbf{x}_\ell$ e $\mathbf{x}_r$ le posizioni dei centri per le celle che contengono la faccia a e che sono rispettivamente a sinistra e destra rispetto ad essa. Siano inoltre $\mathbf{x}_t$ e $\mathbf{x}_b$ le posizioni dei nodi superiore ed inferiore che individuano la faccia a (figura 5.7).

Allora, è possibile imporre la seguente uguaglianza

$$c_{\ell r}(\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_r) + c_{tb}(\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_b) = \mathbf{A}_a \quad (5.25)$$

e, noto il vettore $\mathbf{A}_a$, ricavare i coefficienti $c_{\ell r}$ e c_{tb} .

Poichè risulta

$$f_\ell - f_r = (\nabla f)_a \cdot (\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_r) + O(|\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_r|^2) \quad (5.26)$$

$$f_t - f_b = (\nabla f)_a \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b) + O(|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b|^2) \quad (5.27)$$

trascurando i termini di ordine superiore o uguale al secondo nelle dimensioni di cella, si ricava:

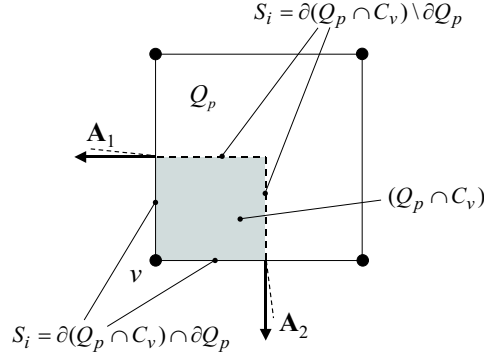


Fig. 5.8: Volume (bidimensionale) di sovrapposizione fra una cella di tipo Q_p ed una di tipo C_v riferita ad uno suo vertice v : notazione.

$$(\nabla f)_a \cdot \mathbf{A}_a \cong c_{\ell r}(f_\ell - f_r) + c_{tb}(f_t - f_b) \quad (5.28)$$

dove le quantità f_ℓ ed f_r sono valori di cella noti, mentre f_t e f_b sono ottenuti ciascuno come media delle quattro celle contenenti rispettivamente i nodi t e b .

Per ciò che concerne gli integrali di superficie sul contorno delle celle di tipo C_v , questi sono trasformati in integrali sulle facce delle celle di tipo Q_p attraverso la seguente procedura. Sia f al solito la generica grandezza definita sulle celle di tipo Q_p ed assunta uniforme su ciascuna di esse. Si consideri il volume (bidimensionale) di intersezione fra la cella principale Q_p e la cella C_v associata ad uno dei suoi vertici. Il contorno di tale volume di sovrapposizione esso è in parte interno a Q_p ed in parte appartenente al contorno di Q_p stessa. Sfruttando il teorema della divergenza e considerando la notazione riportata in figura 5.8 è allora immediato ricavare

$$\int_{S_i} f \mathbf{n} dS \cong f \int_{S_i} \mathbf{n} dS = -f \int_{S_e} \mathbf{n} dS = -\frac{f}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \quad (5.29)$$

dove il contorno interno S_i e quello esterno S_e rispetto a Q_p sono definiti come:

$$S_i = \partial(Q_p \cap C_v) \setminus \partial Q_p \quad S_e = \partial(Q_p \cap C_v) \cap \partial Q_p \quad (5.30)$$

Infine, si definisce la massa per la cella (i, j) di tipo Q_p come $M_{ij} = \rho_{ij} V_{ij}$ essendo ρ_{ij} e V_{ij} rispettivamente i relativi valori di densità e volume. La massa per la cella di tipo C_v relativa al nodo (i, j) è allora ottenuta come

$$M_{ij}^* = \frac{1}{4}(M_{i-1,j-1} + M_{i,j-1} + M_{ij} + M_{i-1,j}) \quad (5.31)$$

mentre la massa corrispondente al volume di controllo di faccia R_a , *i.e.* M_a^{**} , è definita come la media della massa delle celle Q_p che contengono la faccia a cui R_a si riferisce.

5.5 La fase materiale

Si riportano dapprima le equazioni discretizzate risolte nella fase materiale, ottenute in virtù delle considerazioni precedentemente svolte, e successivamente gli aspetti salienti della metodologia di soluzione implicita delle stesse.

5.5.1 Equazione della quantità di moto

L'equazione risolutiva delle velocità materiali di nodo è l'equazione discretizzata ottenuta considerando, a meno dei termini convettivi, la forma integrale del tipo (5.21) ed utilizzando come volumi di controllo le celle di tipo C_v .

Pertanto, detta equazione si scrive, per il generico nodo (i, j) , come

$$\begin{aligned} \frac{M_{ij}^{*n}(\mathbf{u}_{ij}^z - \mathbf{u}_{ij}^n)}{\Delta t^n} = & - \sum_{b_{ij}} \left[\Phi_p p_{bij}^z + (1 - \Phi_p) p_{bij}^n + \frac{2}{3} \rho_{bij}^n k_{bij}^n \right] \mathbf{A}_{bij}^{*n} \\ & + \sum_{b_{ij}} \left[\Phi_D \mathbf{S}_{bij}^z + (1 - \Phi_D) \mathbf{S}_{bij}^n \right] \mathbf{A}_{bij}^{*n} \end{aligned} \quad (5.32)$$

avendo indicato con b_{ij} la generica faccia di tipo b della cella C_v relativa al nodo ad indici (i, j) ed essendo Φ_p e Φ_D parametri, variabili nel tempo e nello spazio, che caratterizzano il grado di implicitezza del calcolo rispettivamente per il termine di pressione e per quello diffusivo. La loro determinazione sarà discussa nel seguito (cf. sezione 5.7.2).

Inoltre, le grandezze contrassegnate dall'apice 'z' sono relative alla fase materiale (quindi incognite) e quelle contrassegnate dall'apice 'n' sono quelle relative al ciclo di calcolo precedente.

La valutazione della generica componente del tensore degli sforzi viscosi $\mathbf{S}_{ij}$, *i.e.* relativo alla cella Q_p ad indici (i, j) , può compiersi attraverso le velocità di nodo sulla base delle seguenti considerazioni.

Dovendo risultare valida la seguente identità relativa alla derivata della componente ℓ -esima del campo di velocità rispetto alla direzione m -esima

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial x_m} = \nabla \cdot (u_\ell \mathbf{e}_m) \quad (5.33)$$

essendo $\mathbf{e}_m$ il versore che caratterizza la direzione m , si ottiene l'equazione integrale sulla generica cella Q_p ad indici (i, j)

$$\int_{Q_p} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_m} dV = \int_{Q_p} \nabla \cdot (u_\ell \mathbf{e}_m) dV = \int_{\partial Q_p} u_\ell \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n} dS = \sum_a (u_\ell \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{A}_a \quad (5.34)$$

Pertanto, assumendo costante il termine $\partial u_\ell / \partial x_m$ su Q_p , risulta

$$\left. \frac{\partial u_\ell}{\partial x_m} \right|_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_a (u_\ell \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{A}_a \quad (5.35)$$

essendo V_{ij} il volume della cella di tipo Q_p in considerazione. La generica componente di $\mathbf{S}_{ij}$ è allora valutabile come:

$$(S_{\ell m})_{ij} = \mu_{ij} \left[\left. \frac{\partial u_\ell}{\partial x_m} \right|_{ij} + \left. \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} \right|_{ij} \right] - \frac{2}{3} \left. \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right|_{ij} \delta_{\ell m} \quad (5.36)$$

In aggiunta alle velocità materiali di nodo, come precedentemente evidenziato, si considerano anche velocità di faccia, *i.e.* relative alla posizione centrale delle facce di tipo a . Tali velocità sono utilizzate, al fine di ridurre la sensibilità della soluzione numerica a modi parassiti, per valutare i flussi convettivi e la variazione di volume delle celle Q_p nella fase materiale.

La determinazione delle velocità di faccia avviene considerando come incognite le portate di faccia $(uA)_a = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{A}_a$ e ricavando le equazioni risolutive in forma discreta dall'equazione della quantità di moto scritta sui volumi di controllo R_a (*cf.* sezione 5.4.2; figura 5.6).

In particolare, l'equazione di bilancio della quantità di moto scritta in termini materiali ed in forma integrale sul generico volume R_a si può porre nella forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R_a} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (5.37)$$

essendo $\mathbf{F}$ la somma delle forze agenti su R_a . Moltiplicando a destra e sinistra scalarmente per l'area $\mathbf{A}_a$ si ottiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R_a} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_a dV = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_a + \frac{D\mathbf{A}_a}{Dt} \cdot \int_{R_a} \rho \mathbf{u} dV \quad (5.38)$$

L'equazione (5.38) si discretizza come di seguito indicato. Si inizializza il campo delle portate di faccia $(uA)_a$ per il tramite delle velocità nodali $\mathbf{u}_{ij}^s$, ottenute a partire da quelle al tempo n attraverso la considerazione dei soli contributi viscosi, *i.e.* risolvendo la condizione discreta:

$$\frac{M_{ij}^{*n} (\mathbf{u}_{ij}^s - \mathbf{u}_{ij}^n)}{\Delta t^n} = \sum_{bij} \left[\Phi_D \mathbf{S}_{bij}^z + (1 - \Phi_D) \mathbf{S}_{bij}^n \right] \mathbf{A}_{bij}^{*n} \quad (5.39)$$

e quindi

$$(uA)_a^s = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{v_1^a}^s + \mathbf{u}_{v_2^a}^s) \cdot \mathbf{A}_a^n \quad (5.40)$$

essendo v_1^a e v_2^a i nodi che costituiscono la faccia a in considerazione.

Pertanto, la forma discreta della (5.38) risulta

$$\begin{aligned}
M_a^{**n} \frac{(uA)_a^z - (uA)_a^s}{\Delta t^n} &= - \sum_{c_a} \left[\Phi_p p_{c_a}^z + (1 - \Phi_p) p_{c_a}^s + \frac{2}{3} \rho_{c_a}^n k_{c_a}^n \right] \mathbf{A}_{c_a}^n \cdot \mathbf{A}_a \\
&\quad + \frac{\mathbf{A}_a^s - \mathbf{A}_a^n}{\Delta t^n} \cdot \frac{\mathbf{u}_{v_1^a}^n + \mathbf{u}_{v_2^a}^n}{2} M_a^{**n}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

dove il pedice ' c_a ' si riferisce alla faccia di tipo c per il volume R_a ed avendo utilizzato per l'approssimazione del termine $D\mathbf{A}/Dt$ l'area $\mathbf{A}_a^s$ ottenuta considerando i nodi nella posizione $\mathbf{x}_{ij}^n + \mathbf{u}_{ij}^n \Delta t^n$.

Attraverso le portate di faccia $(uA)_a$ è possibile caratterizzare banalmente la variazione di volume relativa alla fase materiale delle celle di tipo Q_p :

$$V_{ij}^z = V_{ij}^n + \Delta t^n \sum_{a_{ij}} (uA)_{a_{ij}}^z \tag{5.42}$$

La precedente relazione approssima per la cella ij la legge di variazione del volume materiale, derivante dal teorema del trasporto di Reynolds [5.1]

$$\frac{DV}{Dt} = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \tag{5.43}$$

5.5.2 Equazione dell'energia interna

La forma discreta dell'equazione di conservazione dell'energia interna adottata nella fase materiale è:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^n \frac{e^z - e^n}{\Delta t^n} &= - \frac{p_{ij}^n + p_{ij}^z}{2} \frac{V_{ij}^z - V_{ij}^n}{\Delta t^n} + \left[\Phi_D \mathbf{S}^{\ell z} \cdot \nabla \mathbf{u}^z + (1 - \Phi_D) \mathbf{S}^{\ell n} \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right]_{ij} \\
&\quad + \sum_{a_{ij}} \Lambda_{a_{ij}}^n (\nabla T^n)_{a_{ij}} \cdot \mathbf{A}_{a_{ij}}^n + M_{ij} \epsilon_{ij}^n
\end{aligned} \tag{5.44}$$

essendo $\mathbf{S}^\ell$ il tensore degli sforzi viscosi laminari definito a partire dalla (5.15) e potendo esplicitare i contributi $(\mathbf{S}^\ell \cdot \nabla \mathbf{u})_{ij}$ come indicato nella sezione 5.5.1.

Si osservi che il contributo diffusivo alla Fourier è considerato in modo esplicito in quanto, nei casi di interesse, si ritiene non eccessivamente significativa la variazione di temperatura dell'aria. La temperatura T del fluido, nelle ipotesi assunte, si esprime in funzione dell'energia specifica interna per il tramite della relazione differenziale: $de = c_v dT$, essendo c_v il calore specifico a volume costante dell'aria.

5.5.3 Equazioni del modello di turbolenza

La forma discreta delle equazioni del modello di turbolenza RNG $k-\epsilon$ adottate nella fase materiale sono, per l'energia cinetica turbolenta:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^n \frac{k_{ij}^z - k_{ij}^n}{\Delta t^n} = & -\frac{2}{3} \rho_{ij}^z \frac{V_{ij}^z - V_{ij}^n}{\Delta t^n} [k_{ij}^n (1 - s_{d_{ij}}) + s_{d_{ij}} k_{ij}^z] \\
& + V_{ij}^n \left[\Phi_D \mathbf{S}^{T^z} \cdot \nabla \mathbf{u}^z + (1 - \Phi_D) \mathbf{S}^{T^n} \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right]_{ij} \\
& + \sum_{a_{ij}} \frac{\mu_{a_{ij}}}{Pr_k} \nabla [\Phi_D k^z + (1 - \Phi_D) k^n]_{a_{ij}} \cdot \mathbf{A}_{a_{ij}} - M_{ij}^n \epsilon_{ij}^n \quad (5.45)
\end{aligned}$$

e per la velocità di dissipazione:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^n \frac{\epsilon_{ij}^z - \epsilon_{ij}^n}{\Delta t^n} = & -\rho_{ij}^z \frac{V_{ij}^z - V_{ij}^n}{\Delta t^n} [a_{\epsilon 13} \epsilon_{ij}^n (1 - s_{d_{ij}}) + a_{\epsilon 13}^z \epsilon_{ij}^z s_{d_{ij}}] \\
& + V_{ij}^n \frac{\epsilon_{ij}^n}{k_{ij}^n} (a_{\epsilon 1} - \lambda^*) V_{ij}^n \left[\Phi_D \mathbf{S}^{T^z} \cdot \nabla \mathbf{u}^z + (1 - \Phi_D) \mathbf{S}^{T^n} \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right]_{ij} \\
& + \sum_{a_{ij}} \frac{\mu_{a_{ij}}}{Pr_\epsilon} \nabla [\Phi_D \epsilon^z + (1 - \Phi_D) \epsilon^n]_{a_{ij}} \cdot \mathbf{A}_{a_{ij}} - a_{\epsilon 2} M_{ij}^n \frac{\epsilon_{ij}^n}{k_{ij}^n} \epsilon_{ij}^z \quad (5.46)
\end{aligned}$$

dove la quantità $s_{d_{ij}}$ è stata introdotta [5.35] per evitare l'insorgere di valori negativi non fisici nel campo di ϵ e k e vale zero o uno a seconda del segno della divergenza del campo di velocità, *i.e.*

$$s_{d_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{se } V_{ij}^z - V_{ij}^n > 0 \\ 0 & \text{se } V_{ij}^z - V_{ij}^n < 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

Inoltre, $\mathbf{S}^T$ rappresenta il tensore degli sforzi viscosi turbolenti ottenuto a partire dalla (5.15).

Si vuole rimarcare come l'equazione di momento e dell'energia siano state discretizzate considerando i termini turbolenti in modo esplicito, *i.e.* relativi al passo di calcolo n -esimo. In questo modo si ha l'evidente vantaggio di disaccoppiare l'iterazione dei termini impliciti nelle equazioni classiche di conservazione da quella relativa alle equazioni del modello di turbolenza.

5.5.4 Algoritmo di soluzione per le equazioni materiali implicite

L'algoritmo di soluzione per i termini impliciti presenti nelle equazioni di governo discretizzate in termini materiali si basa su una metodologia simile al SIMPLE classico [5.1] e cioè su un processo iterativo nella variabile pressione. Mentre però nella metodologia SIMPLE classica si considerano contemporaneamente sia i contributi diffusivi che quelli convettivi, nell'algoritmo utilizzato vengono risolti implicitamente i soli termini diffusivi.

In dettaglio, utilizzando la pressione come grandezza di tentativo, si risolvono le equazioni di governo con un processo in cascata nel quale l'ultimo *step* fornisce una

pressione di confronto. La soluzione è considerata giunta a convergenza quando il campo di pressione di tentativo e quello di confronto si discostano al più entro un dato limite di tolleranza.

All'interno di questo processo di iterazione principale vi è poi una iterazione per ciascuna equazione di governo che presenta termini impliciti. Tali sotto-iterazioni sono implementate tramite il metodo dei residui coniugati ([5.8], [5.25]) il quale consiste nella risoluzione delle equazioni attraverso un processo iterativo⁴ di tipo *sotto-rilassato*. Il rilassamento del processo è attuato attraverso i parametri di implicitezza Φ_D per i termini diffusivi e Φ_p per quelli di pressione, la cui determinazione sarà nel seguito puntualizzata (cf. sezione 5.7.2).

Per ciò che concerne il ciclo iterativo principale, si fissa un campo di pressione di tentativo p^p e si risolve dapprima campo di velocità a mezzo dell'equazione (5.32) e successivamente il campo di energia specifica interna e quindi di temperatura dalla (5.44). Inoltre, dalla (5.41) si ricavano le portate di faccia $(uA)_a$. A questo punto, utilizzando l'equazione di stato di un gas ideale, si valutano per le celle di tipo Q_p ad indici (i, j) i volumi di tentativo⁵:

$$V_{ij}^p = \frac{M_{ij}^n}{p_{ij}^p} RT_{ij}^p \quad (5.48)$$

essendo R la costante universale dei gas.

La correzione del campo di pressione, *i.e.* l'ottenimento del campo corretto p^c si effettua valutando i volumi di cella corretti V_{ij}^c attraverso una trasformazione isentropica a partire da quelli predetti V_{ij}^p . Tale trasformazione si caratterizza a partire

⁴Tanto per fissare le idee, considerato un sistema di n equazioni lineari in n incognite del tipo

$$A_{ij}x_j = b_i \quad i, j = 1, \dots, n$$

ed indicato con $\hat{\mathbf{x}}$ il vettore soluzione e con $\tilde{\mathbf{x}}$ una soluzione di tentativo, si può definire l' i -esimo residuo come:

$$R_i(\tilde{\mathbf{x}}) = A_{ij}\tilde{x}_j - b_i$$

La soluzione viene quindi cercata iterativamente per successive approssimazioni fino a quando tutti i residui non risulteranno nulli o comunque prossimi a zero. L'approssimazione della soluzione, *i.e.* l'aggiornamento del vettore di tentativo $\tilde{\mathbf{x}}$ viene fatto attraverso la considerazione delle derivate dei residui rispetto al precedente vettore soluzione di tentativo, *i.e.*

$$\frac{dR_i}{d\tilde{x}_i} = A_{ii}$$

⁵Si ricordi che in questa fase ciascuna cella di calcolo è vista alla stessa stregua di una particella fluida e quindi non scambia massa con le celle circostanti. In altri termini, la massa di ciascuna cella Q_p è pari alla massa che essa aveva al termine del ciclo di calcolo precedente.

dall'equazione dell'energia, trascurando in essa i termini diffusivi e di dissipazione e linearizzando rispetto a volume e pressione:

$$V_{ij}^c = V_{ij}^p - \frac{1}{\gamma_{ij}^n} \frac{V_{ij}^p}{p_{ij}^p} (p_{ij}^c - p_{ij}^p) \quad (5.49)$$

essendo

$$\frac{1}{\gamma_{ij}^n} = \frac{2c_v + R \left(1 - \frac{V_{ij}^n}{V_{ij}^p} \right)}{2c_v + \frac{p_{ij}^n + p_{ij}^p}{p_{ij}^p} R} \quad (5.50)$$

Utilizzando allora la (5.42) e la (5.49) si ottiene banalmente la condizione:

$$V_{ij}^n + \Delta t^n \sum_{a_{ij}} (uA)_{a_{ij}} = V_{ij}^p - \frac{1}{\gamma_{ij}^n} \frac{V_{ij}^p}{p_{ij}^p} (p_{ij}^c - p_{ij}^p) \quad (5.51)$$

da cui si può esplicitare il campo di pressione corretto.

Se allora risulta

$$|p_{ij}^c - p_{ij}^p| < \epsilon_0 \quad (5.52)$$

dove ϵ_0 è una data tolleranza di convergenza, si pone il campo p^z pari a p^c , altrimenti si assegna $p^p = p^c$ e si esegue un nuovo passo iterativo.

Al fine di ridurre il numero di iterazioni principali per ciclo di calcolo, la pressione di primo tentativo viene scelta attraverso una interpolazione lineare eseguita sui valori delle pressioni relative agli ultimi due cicli di calcolo, *i.e.*

$$p_{ij}^p = p_{ij}^{n-1} + \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} [p_{ij}^{n-1} - p_{ij}^{n-2}] \quad (5.53)$$

5.6 La fase convettiva

Come precedentemente accennato, la valutazione dei termini convettivi è effettuata attraverso uno schema di soluzione nel tempo di tipo esplicito, concreto nella valutazione dei flussi attraverso le facce delle celle computazionali quando, a partire dal campo di moto materiale pensato in questa fase congelato, i nodi di calcolo sono rimappati (fase di *rezoning*) in una nuova posizione arbitraria topologica. In particolare, la posizione del generico nodo ij aggiornata al tempo $n + 1$ è definita come:

$$\mathbf{x}_{ij}^{n+1} = \mathbf{x}_{ij}^n + \mathbf{u}_{g_{ij}}^n \Delta t^n \quad (5.54)$$

essendo $\mathbf{u}_{g_{ij}}^n$ la velocità di griglia per il nodo ij relativa al ciclo n -esimo.

Nella fase convettiva dell'algoritmo, partendo dal campo di moto relativo alla fase materiale, si valutano allora le grandezze al tempo $n + 1$ attraverso la valutazione di termini convettivi del tipo:

$$\frac{\rho_{Q_p}^{n+1} V_{Q_p}^{n+1} - \rho_{Q_p}^z V_{Q_p}^z}{\Delta t^n} = - \int_{(\partial Q_p)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.55)$$

$$\frac{\rho_{C_v}^{n+1} \mathbf{u}_{C_v}^{n+1} V_{C_v}^{n+1} - \rho_{C_v}^z \mathbf{u}_{C_v}^z V_{C_v}^z}{\Delta t^n} = - \int_{(\partial C_v)} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.56)$$

$$\frac{\rho_{Q_p}^{n+1} e_{Q_p}^{n+1} V_{Q_p}^{n+1} - \rho_{Q_p}^z e_{Q_p}^z V_{Q_p}^z}{\Delta t^n} = - \int_{(\partial Q_p)} \rho e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.57)$$

$$\frac{\rho_{Q_p}^{n+1} k_{Q_p}^{n+1} V_{Q_p}^{n+1} - \rho_{Q_p}^z k_{Q_p}^z V_{Q_p}^z}{\Delta t^n} = - \int_{(\partial Q_p)} \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.58)$$

$$\frac{\rho_{Q_p}^{n+1} \epsilon_{Q_p}^{n+1} V_{Q_p}^{n+1} - \rho_{Q_p}^z \epsilon_{Q_p}^z V_{Q_p}^z}{\Delta t^n} = - \int_{(\partial Q_p)} \rho \epsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.59)$$

essendo V^{n+1} i volumi delle celle di calcolo valutati a partire dalla (5.54).

La valutazione degli integrali presenti al membro di destra delle precedenti uguaglianze e definiti sul contorno delle celle di tipo Q_p e di tipo C_v , si effettua tramite un'approssimazione del tipo quella riportata nella seconda delle (5.24). È quindi necessaria la valutazione, in corrispondenza delle facce di tipo a , delle grandezze termodinamiche definite sulle celle di tipo Q_p oltre che, in corrispondenza delle facce di tipo b , delle velocità definite sui nodi.

Inoltre, al fine di non limitare il passo temporale di calcolo per effetto della ben nota relazione di stabilità alla Courant [5.1], la valutazione esplicita dei termini convettivi è effettuata attraverso una serie di sotto-cicli corrispondenti ad un sotto-passo temporale sottomultiplo del Δt principale [5.25]. In particolare, detto Δt_c^n il passo temporale di ciascun sotto-ciclo e noto il Δt^n del ciclo di calcolo principale, il numero N_c^n di sotto-cicli convettivi risulta banalmente pari a:

$$N_c^n = \frac{\Delta t^n}{\Delta t_c^n} \quad (5.60)$$

Pertanto, per il ciclo di calcolo n -esimo ed al sotto-ciclo di convezione ν -esimo la posizione del generico nodo ij risulta:

$$\mathbf{x}_{ij}^\nu = \mathbf{x}_{ij}^{\nu-1} + \mathbf{u}_{g_{ij}}^n \Delta t_c^n \quad (5.61)$$

e, corrispondentemente, il volume della generica cella di calcolo (sia di tipo Q_p che C_v) è definito dall'interpolazione lineare:

$$V^\nu = [\nu V^{n+1} + (N_c^n - \nu) V^z] / N_c^n \quad (5.62)$$

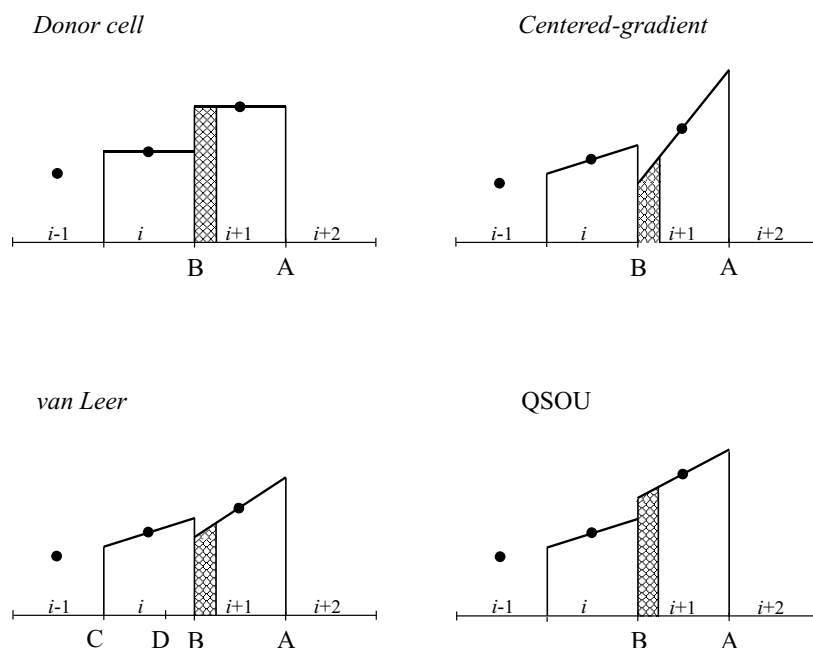


Fig. 5.9: Profili di cella della generica proprietà f per tipici schemi espliciti convettivi.

5.6.1 Schema di convezione: quasi second order upwind (QSOU)

I termini convettivi (5.55-5.59) sono valutati attraverso uno schema di tipo *quasi second order upwind* (QSOU), implementato sull'assunzione che i flussi in ciascuna direzione coordinata dipendano solo dai gradienti in quella data direzione.

Il QSOU è uno schema fortemente monotono che prevede una approssimazione al secondo ordine (o quasi) dei termini di trasporto convettivo e si può considerare come una modifica [5.23] del metodo proposto da Van Leer [5.32]. La forte monotonicità detta, che si illustrerà nel seguito in un caso semplice monodimensionale, fa sì che lo schema non introduca oscillazioni numeriche non fisiche nella soluzione, come invece accade in altri schemi convettivi di ordine superiore [5.23].

[5.23] Si considerino, per un problema di convezione monodimensionale con partizione uniforme del dominio di interesse, gli schemi espliciti convettivi alle differenze finite rappresentati in figura 5.9. In ciascuno di tali schemi si assume che la proprietà da convettere f abbia una variazione lineare all'interno della generica cella e sia tale che il valore al centro corrisponda con il valore f^n calcolato per quella cella al passo temporale precedente. Tali valori sono riportati in figura con punti posizionati in corrispondenza della mezzeria delle celle $i-1$, i , $i+1$, $i+2$. I profili di f per ciascuna cella sono invece riportati con tratto continuo. Pertanto, è evidente che i quattro schemi illustrati differiscono per la pendenza dei profili detti. Inoltre, è banale osservare che l'area sottesa al profilo di f per ciascuna cella rappresenta l'ammontare di proprietà all'interno della cella stessa.

Ora, ragionando in esplicito, se il contorno di una cella, ad esempio il contorno destro della cella

$i+1$, è spostato dalla sua posizione originaria A ad una nuova posizione B , a questo movimento sarà associato un flusso convettivo pari all'area che è sottesa al profilo di f_{i+1} e che contemporaneamente è stata *spazzata* dal contorno stesso durante lo spostamento. La differenza fra l'area totale sottesa al profilo di f_{i+1} prima dello spostamento e quella spazzata, rappresenta ciò che resta di f all'interno della cella $i+1$ ed è campita in figura 5.9. Detta area è quindi l'area sottesa al profilo di f_{i+1} al tempo n quando i contorni della cella sono quelli relativi al tempo $n+1$.

È il caso di introdurre, per il problema in esame, alcune definizioni.

Uno schema di convezione esplicito alle differenze finite si dice debolmente monotono se esso gode della seguente proprietà:

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & f_i^n \leq f_{i+1}^n \leq f_{i+2}^n \quad \text{con} \quad x_i^n \leq x_{i+1}^{n+1} \leq x_{i+2}^n \\ & (f_i^n \geq f_{i+1}^n \geq f_{i+2}^n) \\ \Rightarrow \quad & f_i^n \leq f_{i+1}^{n+1} \leq f_{i+2}^n \quad (f_i^n \geq f_{i+1}^{n+1} \geq f_{i+2}^n) \end{aligned} \quad (5.63)$$

essendo x_i il centro della cella i -esima.

Uno schema di convezione esplicito alle differenze finite si dice invece strettamente monotono se verifica la condizione:

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & f_i^n \leq f_{i+1}^n \leq f_{i+2}^n \leq f_{i+3}^n \quad \text{per} \quad x_i^n \leq x_{i+1}^{n+1} \leq x_{i+2}^{n+1} \leq x_{i+3}^n \\ & (f_i^n \geq f_{i+1}^n \geq f_{i+2}^n \geq f_{i+3}^n) \\ \Rightarrow \quad & f_i^n \leq f_{i+1}^{n+1} \leq f_{i+2}^{n+1} \leq f_{i+3}^n \quad (f_i^n \geq f_{i+1}^{n+1} \geq f_{i+2}^{n+1} \geq f_{i+3}^n) \end{aligned} \quad (5.64)$$

È possibile dimostrare che per i quattro schemi riportati in figura 5.9 una condizione sufficiente alla stretta monotonicità è rappresentata dalla condizione detta di profilo monotono: se $f_j^n \leq f_{j+1}^n \leq f_{j+2}^n$ (o $f_j^n \geq f_{j+1}^n \geq f_{j+2}^n$) allora i profili di f per le celle $i, i+1, i+2$, presi nel complesso, formano una funzione monotona.

Lo schema di tipo *donor cell*, il primo riportato in figura 5.9, è caratterizzato dal fatto che la generica proprietà f viene assunta costante in ogni cella. È chiaro quindi che è soddisfatta la condizione di profilo monotono e pertanto lo schema risulta esso stesso strettamente monotono. D'altro canto, lo schema *donor cell* soffre di eccessiva diffusività numerica e per i casi di interesse condurrebbe a soluzioni poco accurate.

Si potrebbe pensare di adottare allora una approssimazione centrata al secondo ordine per la pendenza del profilo di f (*centered-gradient scheme*):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (5.65)$$

In questo caso, tuttavia, sebbene lo schema risulti stabile ed accurato al secondo ordine, la stretta monotonicità viene a mancare e, nelle zone ad elevata variazione di pendenza del profilo di f si possono avere delle brusche oscillazioni non fisiche della soluzione. È evidente dalla figura 5.9 che il valore di f_{i+1}^{n+1} , ottenuto come valore medio della zona campita, risulta inferiore a f_i^n non verificando quindi la (5.64).

Imponendo, come suggerito da van Leer [5.32], una limitazione alla pendenza dei profili di f , tale tipo di problema viene corretto. Infatti, se risulta $f_{i-1}^n \leq f_i^n \leq f_{i+1}^n$, si limita superiormente il valore di $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n$ di modo che il profilo di f che ne deriva per la cella i risulti compreso fra f_{i-1}^n e f_{i+1}^n . Se, viceversa, f_i^n non è compreso tra f_{i-1}^n e f_{i+1}^n , il valore della pendenza $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n$ è assunto nullo.

Si può dimostrare che lo schema di van Leer è debolmente monotono. Infatti, se il bordo sinistro della cella i è spostato dal punto C al punto D (cf. figura 5.9) si ha $f_i^{n+1} > f_{i+1}^{n+1}$ pur essendo

verificata la condizione $f_{i-1}^n \leq f_i^n \leq f_{i+1}^n \leq f_{i+2}^n$. Inoltre, tale schema risulta accurato al secondo ordine quando il limite sulla pendenza del profilo di ciascuna cella non si attiva.

Nel caso dello schema QSOU si rafforza la condizione di monotonicità rispetto allo schema di van Leer. In particolare, se $f_i^n \in [f_{i-1}^n, f_{i+1}^n]$ la pendenza $\frac{\partial f}{\partial x}|_i^n$ si pone pari a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_i^n = \frac{\text{sgn}(f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x} \min(|f_i^n - f_{i-1}^n|, |f_{i+1}^n - f_i^n|) \quad (5.66)$$

altrimenti, come nello schema di van Leer, se $f_i^n \notin [f_{i-1}^n, f_{i+1}^n]$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_i^n = 0$.

Si dimostra che tale schema rispetta la condizione di stretta monotonicità. Infatti, supponendo che $f_{i-1}^n \leq f_i^n \leq f_{i+1}^n$, utilizzando la relazione (5.66), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}|_j^n &= \min\left(\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}, \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}\right) \\ 0 &\leq \frac{\partial f}{\partial x}|_{i-1}^n \leq \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \\ 0 &\leq \frac{\partial f}{\partial x}|_{i+1}^n \leq \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Dalle relazioni precedenti si evince quindi che i profili di f crescono in modo monotono e che il profilo complessivo è esso stesso monotono risultando banalmente soddisfatte le condizioni:

$$\begin{aligned} f_{i-1}^n + \frac{\partial f}{\partial x}|_{i-1}^n \frac{\Delta x}{2} &\leq f_i^n - \frac{\partial f}{\partial x}|_i^n \frac{\Delta x}{2} \\ f_i^n + \frac{\partial f}{\partial x}|_i^n \frac{\Delta x}{2} &\leq f_{i+1}^n - \frac{\partial f}{\partial x}|_{i+1}^n \frac{\Delta x}{2} \end{aligned} \quad (5.68)$$

È immediato rendersi conto che lo schema QSOU è accurato al secondo ordine solo quando il termine $\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}$ è indipendente da i . Comunque, lo schema presenta una approssimazione prossima al secondo ordine quando la variazione di detto termine è debole rispetto alla scala di griglia.

Nel caso in esame di un problema convettivo monodimensionale, ma con una partizione non uniforme del dominio di interesse, si pone per la cella i :

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_i = \begin{cases} \text{sgn}(\Delta f_i) \min\left(\frac{|\Delta f_i|}{\Delta x_i}, \frac{|\Delta f_{i-1}|}{\Delta x_{i-1}}\right) & \text{se } \Delta f_i \Delta f_{i-1} > 0 \\ 0 & \text{se } \Delta f_i \Delta f_{i-1} < 0 \end{cases} \quad (5.69)$$

Il valore della proprietà f in corrispondenza della faccia di separazione a tra la cella i e quella $i+1$ si pone poi

$$f_a = \begin{cases} f_i + \frac{\partial f}{\partial x}|_i (x_a - x_i) \left(1 - \frac{\delta V_a}{V_i}\right) & \text{se } \delta V_a > 0 \\ f_{i+1} - \frac{\partial f}{\partial x}|_{i+1} (x_{i+1} - x_a) \left(1 + \frac{\delta V_a}{V_{i+1}}\right) & \text{se } \delta V_a < 0 \end{cases} \quad (5.70)$$

essendo V_i il volume della cella i -esima, x_a la coordinata della faccia a e δV_a il volume spazzato da detta faccia, assunto positivo se è aggiunto volume alla cella $i+1$ per effetto del movimento della faccia a , *i.e.* se la cella i è una cella di tipo *upwind*.

Si indichi con f_a^ν il valore della generica proprietà f , definita sulle celle di tipo Q_p e che deve essere trasportata per convezione (*i.e.* $\rho, \rho e, \rho k, \rho \epsilon$), in corrispondenza della faccia a ed al sotto-ciclo ν . La faccia a si assuma separare le celle di tipo Q_p ad

indici, ad esempio, (i, j) e $(i + 1, j)$, *i.e.* due celle disposte lungo la direzione topologica i . Le considerazioni che si vanno a svolgere sono evidentemente le medesime per la direzione topologica j .

In corrispondenza della cella (i, j) la derivata al sotto-ciclo ν di f rispetto all'ascissa s nella direzione della coordinata i -esima, si scrive, generalizzando la (5.69), come [5.25]:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{ij}^{\nu} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\Delta f_i^{\nu}) \min \left(\frac{|\Delta f_i^{\nu}|}{|\Delta \mathbf{x}_i|}, \frac{|\Delta f_{i-1}^{\nu}|}{|\Delta \mathbf{x}_{i-1}|} \right) & \text{se } \Delta f_i^{\nu} \Delta f_{i-1}^{\nu} > 0 \\ 0 & \text{se } \Delta f_i^{\nu} \Delta f_{i-1}^{\nu} < 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

essendo $\Delta f_i^{\nu} = f_{i+1,j}^{\nu} - f_{ij}^{\nu}$ e $\Delta \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_{i+1,j} - \bar{\mathbf{x}}_{ij}$, con f_{ij}^{ν} il valore di f per la cella (i, j) in corrispondenza del sotto-ciclo convettivo ν .

Pertanto, una generalizzazione della (5.70) è [5.25]

$$f_a^{\nu} = \begin{cases} f_{ij}^{\nu} + \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{ij}^{\nu} |\mathbf{x}_a - \bar{\mathbf{x}}_{ij}| \left(1 - \frac{\delta V_a^{\nu}}{V_{ij}^{\nu}} \right) & \text{se } \delta V_a^{\nu} > 0 \\ f_{i+1,j}^{\nu} - \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{i+1,j}^{\nu} |\mathbf{x}_a - \bar{\mathbf{x}}_{i+1,j}| \left(1 + \frac{\delta V_a^{\nu}}{V_{i+1,j}^{\nu}} \right) & \text{se } \delta V_a^{\nu} < 0 \end{cases} \quad (5.72)$$

dove $\mathbf{x}_a$ è la posizione del centro della faccia a , V_{ij}^{ν} è il volume della cella ij dopo ν sotto-cicli convettivi e δV_a^{ν} rappresenta il volume spazzato dalla faccia a al sotto-ciclo di convezione ν . Tale volume è fornito dalla relazione:

$$\delta V_a^{\nu} = \frac{\delta V_a^G}{N_c^n} - (uA)_a^z \Delta t_c^n \quad (5.73)$$

essendo δV_a^G il volume spazzato dalla faccia a al ciclo n -esimo quando i suoi due vertici sono spostati dalla loro posizione relativa al tempo n alla posizione caratteristica del tempo $n + 1$ (*cf.* eq. (5.54)). Esso è assunto positivo se il volume della generica cella ij di tipo Q_p è incrementato dal movimento della griglia.

Analogamente, il volume δV_a^{ν} è definito positivo se il movimento della faccia a al sotto-ciclo di convezione ν aggiunge volume alla cella $(i + 1, j)$, nel qual caso la cella (i, j) è detta cella *upwind* o cella donatrice, mentre quella $(i + 1, j)$ è detta *downwind cell* o cella ricevente. Per converso, δV_a^{ν} è negativo se la cella $(i + 1, j)$ perde volume, nel qual caso $(i + 1, j)$ è la *upwind cell* mentre (i, j) è la *downstream cell*.

Qualora le celle di tipo Q_p abbiano facce di tipo a che costituiscono una porzione della discretizzazione dei contorni del dominio computazionale, si impongono prescrizioni particolari alle relazioni appena introdotte. In dettaglio, se la faccia a giace sul contorno Γ_w o Γ_s (*cf.* figura 5.2) la derivata rispetto all'ascissa valutata in direzione ortogonale alla porzione di contorno è imposta nulla. Inoltre, se a giace su Γ_u la derivata di f rispetto alla direzione ortogonale alla porzione di contorno, è

ottenuta attraverso una condizione del tipo (5.71) in cui la proprietà f e la posizione del centro cella dal lato esterno al dominio di calcolo, *i.e.* dal lato non discretizzato, sono assunti rispettivamente pari al valore assegnato della proprietà in ingresso al dominio ed al centro $\mathbf{x}_a$ di faccia.

Se la faccia a giace sul contorno Γ_u o Γ_s , la condizione (5.72) è inoltre sostituita con una condizione di tipo *upwind* puro ([5.1], [5.8], [5.10]). In altre parole, se la cella ij , che possiede la faccia a su uno dei contorni detti, è una cella donatrice attraverso a allora f_a^ν è posta uguale a f_{ij}^ν , altrimenti f_a^ν è posta pari al valore esterno assegnato.

Al fine di caratterizzare i termini convettivi del tipo (5.56) (*i.e.* relativi alla quantità di moto) è necessario valutare le velocità $\mathbf{u}_b^\nu$, *i.e.* le velocità in corrispondenza delle facce composite di tipo b , costituenti il contorno delle celle di tipo C_v .

In particolare, in modo analogo a quanto fatto per la generica proprietà f definita su Q_p si introduce, per il generico volume computazionale C_v relativo al nodo ij , la derivata della componente ℓ -esima della velocità al sotto-ciclo convettivo ν come

$$\left. \frac{\partial u_\ell}{\partial s} \right|_{ij}^\nu = \begin{cases} \text{sgn}(\Delta(u_\ell)_i^\nu) \min \left(\frac{|\Delta(u_\ell)_i^\nu|}{|\Delta \mathbf{x}_i|}, \frac{|\Delta(u_\ell)_{i-1}^\nu|}{|\Delta \mathbf{x}_{i-1}|} \right) & \text{se } \Delta(u_\ell)_i^\nu \Delta(u_\ell)_{i-1}^\nu > 0 \\ 0 & \text{se } \Delta(u_\ell)_i^\nu \Delta(u_\ell)_{i-1}^\nu < 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

dove $\Delta(u_\ell)_i^\nu = (u_\ell)_{i+1,j}^\nu - (u_\ell)_{ij}^\nu$ e $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1,j}^{n+1} - \mathbf{x}_{ij}^{n+1}$, essendo gli indici $(i+1, j)$ e $(i-1, j)$ corrispondenti ai nodi adiacenti al nodo i lungo la direzione topologica i , lungo la quale è valutata la distanza s .

Inoltre, se $M_{ij}^{*\nu}$ rappresenta la massa della cella C_v relativa al nodo ij dopo ν sotto-cicli convettivi e se si indica con $\delta M_b^{*\nu}$ il flusso di massa associato alla faccia composita di tipo b per il sotto-ciclo ν -esimo, valutata per il tramite del campo di densità relativo al passo $\nu-1$, è possibile porre:

$$(u_\ell)_b^\nu = \begin{cases} (u_\ell)_{ij}^\nu + \left. \frac{\partial(u_\ell)}{\partial s} \right|_{ij}^\nu \frac{|\Delta \mathbf{x}_i|}{2} \left(1 - \frac{\delta M_b^{*\nu}}{M_{ij}^{*\nu}} \right) & \text{se } \delta M_b^{*\nu} > 0 \\ (u_\ell)_{i+1,j}^\nu - \left. \frac{\partial(u_\ell)}{\partial s} \right|_{i+1,j}^\nu \frac{|\Delta \mathbf{x}_i|}{2} \left(1 + \frac{\delta M_b^{*\nu}}{M_{i+1}^{*\nu}} \right) & \text{se } \delta M_b^{*\nu} < 0 \end{cases} \quad (5.75)$$

Per δM_b^* si adotta la stessa convenzione di segno introdotta per δV_a . Inoltre, se un dato nodo ij giace su contorno del dominio computazionale, la derivata (5.74), fatta lungo la direzione ortogonale al contorno, è assunta nulla.

Effettuati allora gli N_c^n sotto-cicli convettivi e valutate tramite le (5.55-5.59) le relative grandezze al tempo $n+1$, il campo di pressione finale, *i.e.* p^{n+1} , è ottenuto utilizzando l'equazione di stato

$$p_{ij}^{n+1} = \rho_{ij}^{n+1} R T_{ij}^{n+1} \quad (5.76)$$

5.6.2 Algoritmo di spostamento della griglia di calcolo

Lo spostamento della griglia di calcolo, che consente di gestire uno spostamento arbitrario del dominio solido Ω_b all'interno del dominio fluido Ω_f , è effettuato attraverso un algoritmo in grado di conservare il carattere convesso delle celle principali di calcolo. Tale condizione, in relazione alle tecniche alle differenze finite adottate per discretizzare nello spazio le equazioni di governo e relativamente allo schema convettivo utilizzato, è fondamentale al fine di ottenere soluzioni numeriche sufficientemente accurate.

In dettaglio, le condizioni arbitrarie di spostamento del dominio solido, *i.e.* della struttura immersa nella corrente, sono assegnate come condizioni di moto rigido ai nodi fluidi che si trovano nella regione Ω_c immediatamente prossima a Ω_b , *i.e.* tale che $\overset{\circ}{\Omega}_f \supset \Omega_c \supset \Omega_b$. Per i nodi fluidi esterni, *i.e.* per quei nodi che si trovano nella regione $\overset{\circ}{\Omega}_f \setminus \Omega_c$ si assegna una legge di propagazione lineare delle condizioni di spostamento della struttura. In altre parole, se O è un polo di rotazione per Ω_b , $\mathbf{u}_O$ è la sua velocità di traslazione e $\hat{\omega}$ il vettore di rotazione ortogonale al piano di rappresentazione del dominio computazionale, il campo di velocità di griglia $\mathbf{u}_g$ per i diversi nodi ij è definito come

$$\mathbf{u}_{g_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{u}_O + \hat{\omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_O) & \text{se } ij \in \Omega_c \\ [\mathbf{u}_O + \hat{\omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_O)] \left(1 - \frac{|\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_O|}{\tilde{R}}\right) & \text{se } ij \in \Omega_f \setminus \Omega_c \text{ e } |\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_O| < \tilde{R} \\ \mathbf{0} & \text{se } ij \in \Omega_f \setminus \Omega_c \text{ e } |\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_O| \geq \tilde{R} \end{cases} \quad (5.77)$$

essendo $\tilde{R}$ una distanza di propagazione fissata in funzione delle dimensioni caratteristiche del dominio di interesse.

In questo modo non è necessario ricorrere a modifiche della topologia della griglia, *i.e.* all'aggiunta o all'eliminazione di nodi e/o celle computazionali. Inoltre, sono automaticamente conservate durante il calcolo le condizioni di infittimento del magliaggio, le quali tipicamente interessano la regione prossima al dominio strutturale.

Un esempio delle prestazioni dell'algoritmo di movimento della griglia di calcolo qui descritto ed implementato è riportato in figura 5.10 per un moto di pura rotazione del dominio rigido Ω_b .

5.7 Condizioni di accuratezza e stabilità del modello

La stabilità numerica del modello e la sua accuratezza è assicurata attraverso una opportuna scelta del passo temporale di integrazione e dei parametri di implicitezza

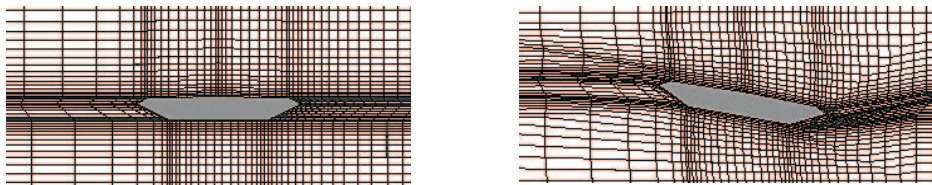


Fig. 5.10: Esempio di applicazione dell'algoritmo di movimento della griglia di calcolo per un moto di pura rotazione del dominio solido Ω_b .

Φ_D e Φ_p . Questi ultimi fissano rispettivamente, ad ogni passo temporale, il contenuto implicito del calcolo sui termini diffusivi e di pressione e consentono di rilassare la procedura di soluzione numerica iterativa.

5.7.1 Determinazione del timestep

All'inizio di ogni ciclo computazionale principale viene effettuato il calcolo sia del *timestep* Δt_c , necessario per i sotto-cicli espliciti di convezione, che del *timestep* principale Δt .

In particolare, la determinazione del sotto-*timestep* Δt_c è basata sulla ben nota [5.1] condizione di Courant che è espressa, nel caso di una griglia rettangolare regolare, come:

$$\Delta t_c \leq \min_i \left\{ \frac{\Delta x_i}{|c_i|} \right\} \quad (5.78)$$

essendo Δx_i e c_i rispettivamente la dimensione delle celle computazionali e la componente della velocità convettiva A.L.E. lungo la direzione topologica i -esima. Il vincolo (5.78) è equivalente a limitare l'intensità del flusso volumico in ciascuna direzione, con il volume di ciascuna cella di calcolo. Al fine di generalizzare tale condizione ad una griglia arbitraria si considera la relazione:

$$\Delta \tilde{t}_c^n = f_c \Delta t_c^{n-1} \min_{ij,a} \frac{V_{ij}^{n-1}}{|\delta V_{ij,a}^{n-1}|} \quad (5.79)$$

dove $\delta V_{ij,a}^{n-1}$ è il volume spazzato dalla faccia a della cella di tipo Q_p ad indici (i, j) , valutato tramite il *timestep* Δt_c^{n-1} , e f_c è un coefficiente di sicurezza assunto positivo ed inferiore all'unità.

Il numero N_c^n di sotto-cicli convettivi è definito semplicemente a partire dal *timestep* principale come $N_c^n = \text{int} \left\{ \frac{\Delta t^n}{\Delta \tilde{t}_c^n} \right\} + 1$ e pertanto l'effettivo sotto-*timestep* convettivo risulta per il ciclo di calcolo n -esimo: $\Delta t_c^n = \Delta t^n / N_c^n$.

Per quanto riguarda il passo di tempo principale Δt , questo è vincolato al soddisfacimento di una serie di condizioni di accuratezza. La prima di queste si esprime come:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\Delta t^2 < f_a\Delta x \quad (5.80)$$

intendendo con Δx una dimensione media di cella ed avendo indicato con f_a un coefficiente positivo dell'ordine dell'unità. La condizione (5.80) deriva dal fatto che nella relazione (5.23) si sono trascurati i termini di ordine superiore a Δt . La restrizione (5.80) è implementata valutando

$$\Delta t_a^n = f_a \min_{ij} \frac{\Delta x_{ij}}{|\mathbf{u}_{ij}^z - \mathbf{u}_{ij}^{n-1}|} \quad (5.81)$$

dove gli indici ij si riferiscono alla generica cella di calcolo di tipo C_v relativa al nodo ij ed il campo di velocità $\mathbf{u}^z$ è riferito alla fase materiale del ciclo di calcolo $n - 1$.

La seconda condizione di accuratezza sul *timestep* principale si esprime come:

$$|\hat{\lambda}| \Delta t < f_r \quad (5.82)$$

essendo f_r un parametro positivo dell'ordine dell'unità e $\hat{\lambda}$ un autovalore del tensore di velocità di deformazione. Tale condizione ha lo scopo di limitare la distorsione che le celle possono subire nella fase materiale del calcolo. In virtù delle condizioni di approssimazione precedentemente discusse in relazione ai termini diffusivi, si comprende come la presenza di volumi computazionali particolarmente distorti può produrre una perdita sostanziale di accuratezza nel calcolo delle derivate spaziali. La restrizione (5.82) è implementata valutando

$$\Delta t_r^n = \min_{ij} \frac{f_r}{2\sqrt{a_{ij}/3}} \quad (5.83)$$

dove ora gli indici ij si riferiscono alla generica cella di tipo Q_p e

$$a_{ij} = \frac{1}{3} [(D_{\ell\ell})^2 + \epsilon_{1\ell m} D_{2\ell} D_{3m} + \epsilon_{\ell 2m} D_{1\ell} D_{3m} + \epsilon_{\ell m 3} D_{1\ell} D_{2m}]_{ij}^{n-1} \quad (5.84)$$

essendo $D_{\ell m}$ il tensore di velocità di deformazione già introdotto nella (5.15) ed $\epsilon_{\ell mn}$ il tensore di alternanza di Ricci⁶.

⁶Il tensore del terzo ordine di alternanza di Ricci $\epsilon_{\ell mn}$ è definito come [5.20]:

$$\epsilon_{\ell mn} = \begin{cases} 1 & \text{se i valori di } \ell, m, n \text{ sono una permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se i valori di } \ell, m, n \text{ sono una permutazione dispari di } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{se i valori di } \ell, m, n \text{ non sono una permutazione di } 1, 2, 3 \end{cases}$$

Al fine di ottenere soddisfacenti condizioni di accuratezza e stabilità della soluzione numerica, tipici valori adottati per i parametri f_c , f_a e f_r precedentemente introdotti, sono ([5.8], [5.10], [5.25]):

$$f_c = 0.2 \quad f_a = 0.5 \quad f_r = 0.57 \quad (5.85)$$

Il passo principale di tempo utilizzato per il ciclo di calcolo n -esimo è allora fornito dalla relazione

$$\Delta t^n = \min(\Delta t_a^n, \Delta t_r^n, \Delta t_{gr}^n) \quad (5.86)$$

essendo Δt_{gr}^n un *timestep* di test che ha la funzione di evitare brusche variazioni della soluzione numerica che possono indurre la sua instabilità. In dettaglio, Δt_{gr}^n limita la variazione del Δt principale rispetto al passo di calcolo precedente ed è posto pari a $\Delta t_{gr}^n = 1.025\Delta t^{n-1}$, come suggerito in letteratura ([5.1], [5.10], [5.25]).

5.7.2 Determinazione dei parametri di implicitezza

La scelta dei valori di ottimo per i parametri di implicitezza Φ_p e Φ_D , i quali caratterizzano il peso dei contributi impliciti per i termini di pressione e diffusivi, scaturisce da considerazioni di efficienza e di stabilità della soluzione numerica.

Determinazione di Φ_p

Si consideri il caso semplificato di un flusso monodimensionale di sezione A , inviscido, con densità e pressione praticamente uniformi nel dominio di interesse ed a valore $\rho^n = \rho_0$ e $p^n = p_0$, rispettivamente. Si consideri, per il problema in esame, un approccio materiale ed una discretizzazione uniforme nella direzione del flusso costituita da celle di dimensione Δx . Pertanto, l'equazione discretizzata della quantità di moto in forma semi-implicita si scrive, per il nodo v che separa le celle j e $j+1$, come:

$$\rho_0 \frac{u_v^{n+1} - u_v^n}{\Delta t^n} + (1 - \Phi_p) \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} + \Phi_p \frac{p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.87)$$

Ipotizzando, come già precedentemente fatto, che la variazione di pressione all'interno di ciascuna cella avvenga per il tramite di una trasformazione isoentropica, valgono le condizioni:

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \Delta t^n A (u_v^{n+1} - u_{v-1}^{n+1}) \quad (5.88)$$

$$p_j^{n+1} - p_j^n = -\gamma \frac{p_0}{V_j^n (V_j^{n+1} - V_j^n)} \quad (5.89)$$

dove il rapporto $\gamma = c_p/c_v$ è supposto costante. Combinando le precedenti e tenendo presente che $V_j^n = A\Delta x$ si ottiene:

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t^n} + \gamma p_0 \frac{u_v^{n+1} - u_{v-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.90)$$

Introdotte le funzioni di errore per il campo di pressione e quello di velocità, *i.e.* le funzioni del tempo e dello spazio che quantificano lo scarto tra la soluzione reale e quella numerica, si assuma che esse varino con legge esponenziale nel tempo e che siano esprimibili tramite serie di Fourier in x , *i.e.*

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(t, x) &= e^{at} \gamma p_0 \sum_m e^{ik_m x} \\ \varepsilon_u(t, x) &= e^{bt} c_0 \sum_m e^{ik_m x} \end{aligned} \quad (5.91)$$

essendo i l'unità immaginaria, c_0 la velocità del suono, *i.e.* $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, ed a e b opportune costanti. Al tempo t^n le (5.91) si pongono allora nella forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^n(x) &= A^n \gamma p_0 \sum_m e^{ik_m x} \\ \varepsilon_u^n(x) &= B^n c_0 \sum_m e^{ik_m x} \end{aligned} \quad (5.92)$$

avendo posto $A^n = e^{at^n}$ e $B^n = e^{bt^n}$.

Sostituendo il singolo termine delle (5.92) nelle (5.87) e (5.90), tenendo presente che $x_v = x_j + \Delta x/2$, essendo x_j la coordinata del centro della cella j , si ricava il sistema:

$$\begin{pmatrix} A^{n+1} \\ B^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\tilde{a}^2(1-\Phi_p)}{1-\tilde{a}^2\Phi_p} & \frac{\tilde{a}}{1-\tilde{a}^2\Phi_p} \\ \frac{\tilde{a}}{1-\tilde{a}^2\Phi_p} & \frac{1}{1-\tilde{a}^2\Phi_p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ B^n \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

dove $C_s = \frac{c_0 \Delta t^n}{\Delta x}$ ed $\tilde{a} = -2iC_s \sin(k_m \frac{\Delta x}{2})$.

È allora evidente che la soluzione numerica risulta stabile se e solo se gli autovalori $\hat{\lambda}_n$ ($n = 1, 2$) della matrice del sistema (5.93) (che esistono reali vista la simmetria della stessa) risultano tali che $|\hat{\lambda}_n| \leq 1$ ($n = 1, 2$). In particolare, si ricava:

$$\hat{\lambda}_{1,2} = \frac{1}{1 + \Phi_p \tilde{a}^2} \left[1 - (1 - \Phi_p) \frac{\tilde{a}^2}{2} \pm \frac{\tilde{a}}{i} \sqrt{(1 - \Phi_p)^2 \frac{\tilde{a}^2}{4} - 1} \right] \quad (5.94)$$

Se risulta $(1 - \Phi_p)C_s \leq 1$ allora i due autovalori sono complessi coniugati e conseguentemente la soluzione numerica è certamente stabile. In altri termini, la condizione sufficiente di stabilità per il problema semplificato in esame si esprime come:

$$\Phi_p \geq 1 - \frac{1}{C_s} \quad (5.95)$$

e la sua implementazione viene effettuata attraverso la caratterizzazione di un numero di Courant locale

$$(C_s)_{ij}^n = \sqrt{\frac{\gamma_{ij}^n p_{ij}^n}{\rho_{ij}^n}} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{ij}^n} \quad (5.96)$$

funzione della minima dimensione di cella ij , *i.e.* funzione di Δx_{ij} . Pertanto, ad ogni passo di tempo e per ogni cella ij si pone:

$$(\Phi_p)_{ij}^n = \begin{cases} 0 & \text{se } (C_s)_{ij}^n \leq \frac{1}{f_{\Phi_p}} \\ 1 - \frac{1}{f_{\Phi_p} C_{s\,ij}^n} & \text{se } (C_s)_{ij}^n > \frac{1}{f_{\Phi_p}} \end{cases} \quad (5.97)$$

essendo f_{Φ_p} un fattore di sicurezza che tiene conto della diversità dei casi concreti dal caso semplificato considerato. Nelle prove numeriche effettuate, utilizzando $f_{\Phi_p} = 2.5$ si è sempre verificata una condizione di stabilità.

Determinazione di Φ_D

Per ciò che concerne il calcolo del parametro Φ_D il modo di procedere è del tutto analogo al caso di Φ_p . In particolare, si consideri ora il problema semplificato monodimensionale diffusivo per la generica grandezza f . La corrispondente equazione di governo scritta in forma discreta semi-implicita per la cella j di una partizione uniforme, risulta:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t^n} = K_f \left[(1 - \Phi_D) \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \Phi_D \frac{f_{j+1}^{n+1} - 2f_j^{n+1} + f_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (5.98)$$

avendo assunto il coefficiente di diffusione K_f costante.

Scrivendo, analogamente alle (5.92), la funzione di errore numerico per f come:

$$\varepsilon_f^n(x) = A^n \sum_m e^{ik_m x} \quad (5.99)$$

allora la variazione nel tempo dell'amplificazione dell'errore, considerando un solo termine della serie precedente, soddisfa la condizione:

$$\frac{A^{n+1}}{A^n} = \frac{1 - 4(1 - \Phi_D)C_D \sin^2(k_m \frac{\Delta x}{2})}{1 + 4\Phi_D C_D \sin^2(k_m \frac{\Delta x}{2})} \quad (5.100)$$

avendo posto $C_D = \frac{K_f \Delta t}{\Delta x^2}$.

Nel caso in esame, al fine di minimizzare le oscillazioni della soluzione a seguito delle condizioni di diffusione, oltre ad imporre la stabilità si prescrive che il fattore di amplificazione non cambi segno [5.35], *i.e.* si impone

$$0 \leq \frac{A^{n+1}}{A^n} \leq 1 \quad (5.101)$$

La disuguaglianza a destra della (5.101) è banalmente verificata, mentre quella di sinistra è verificata a patto che risulti:

$$\Phi_D \geq 1 - \frac{1}{4C_D} \quad (5.102)$$

Si vuole far notare che imponendo la sola condizione di stabilità numerica, la (5.101) deve sostituirsi con $\left| \frac{A^{n+1}}{A^n} \right| \leq 1$. Questa condizione è verificata se $\Phi_D \geq \frac{1}{2}(1 - 1/(2C_D))$ o anche se $\Phi_D = 1/2$. Quest'ultima condizione equivale a considerare il ben noto schema alla Crank-Nicolson che è accurato al secondo ordine nel tempo, ma per grandi valori di C_D può indurre forti oscillazioni della soluzione.

L'implementazione della relazione (5.102), ricavata su un caso semplificato, è effettuata considerando un coefficiente $(C_D)_{ij}^n$ locale valutato in modo tale che il corrispondente coefficiente Φ_D soddisfi una condizione simile alla (5.102) relativamente a tutti i fenomeni diffusivi soggetti a calcolo semi-implicito.

In dettaglio, si pone

$$(C_D)_{ij}^n = \max \left(2 - \frac{2}{3}, \frac{1}{Pr_k}, \frac{1}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\mu_{ij}^n}{\rho_{ij}^n} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{ij}^n} \quad (5.103)$$

essendo Δx_{ij} la minima dimensione della cella ij . Pertanto, si assume

$$(\Phi_D)_{ij}^n = \begin{cases} 0 & \text{se } (C_D)_{ij}^n \leq \frac{1}{4f_{\Phi_D}} \\ 1 - \frac{1}{4f_{\Phi_D}(C_D)_{ij}^n} & \text{se } (C_D)_{ij}^n > \frac{1}{4f_{\Phi_D}} \end{cases} \quad (5.104)$$

essendo f_{Φ_d} , al solito, un coefficiente di sicurezza che nelle prove numeriche condotte, è stato assunto pari a f_{Φ_p} .

5.8 Implementazione delle condizioni al contorno

Al fine di caratterizzare correttamente il problema aerodinamico di un corpo immerso in una corrente esterna, come si può ritenere il vento nello strato limite atmosferico, l'implementazione delle condizioni al contorno fisiche deve rispettare determinate condizioni numeriche.

L'implementazione diretta, *i.e.* senza alcun accorgimento numerico, delle condizioni al contorno fisiche sui bordi di ingresso e di uscita del flusso (Γ_u e Γ_s , *cf.* figura

5.2), come generalmente accade nel caso di problemi di efflussi interni (*i.e.* confinati all'interno di pareti solide) condurrebbe all'introduzione nella soluzione di onde acustiche spurie a carattere numerico, quindi non fisiche, a seguito di una condizione di riflessione in corrispondenza dei *boundaries* computazionali, compromettendo quindi l'accuratezza dell'intera soluzione.

Numerose sono le strategie proposte in letteratura per eliminare tali inconvenienti ([5.3], [5.6], [5.44]). Ad esempio, un possibile metodo per limitare gli effetti di natura riflettente delle condizioni al contorno in un problema di aerodinamica esterna, consiste nel considerare un dominio fluido computazionale molto grande rispetto alla regione solida Ω_b in esso contenuta. In questo modo, però, a fronte dell'utilizzo di una griglia a topologia strutturata si induce una inevitabile crescita del tempo computazionale necessario alla risoluzione del problema. D'altra parte, una alternativa consiste nel ricercare particolari condizioni al contorno di natura non riflessiva, la cui implementazione numerica comunque può risultare in generale non banale.

Sulle base di queste considerazioni, le condizioni al contorno di tipo fisico alla Dirichlet ed alla Neumann sul contorno fluido $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_s$ (*cf.* eq. (5.16)) sono implementate utilizzando un dominio fluido computazionale comunque esteso rispetto al dominio solido ed imponendo delle prescrizioni numeriche di natura non riflessiva in aggiunta alle condizioni già discusse per l'approssimazione dei termini convettivi di bordo.

Inoltre, poichè il rapporto tra l'ammontare dei termini convettivi e quelli diffusivi (quantificato attraverso il cosiddetto numero di Peclet ([5.36], [5.44])) è generalmente maggiore di uno nei problemi di interesse, si assumono nulli i contributi diffusivi sia sul bordo Γ_u che su quello Γ_s .

5.8.1 Condizioni al contorno su Γ_u

La condizione al contorno alla Dirichlet, espressa dalla prima delle (5.16), è implementata attraverso la considerazione di celle computazionali *pseudo-infinite* su Γ_u di modo che la condizione di velocità in ingresso al dominio sia imposta ad una grande distanza dal dominio strutturale. In dettaglio, la condizione di velocità attribuita ad ogni passo temporale di calcolo ai nodi fluidi che poggiano sul contorno Γ_u , è ottenuta dalla considerazione dell'equazione della quantità di moto scritta attraverso una formulazione spaziale⁷ ed in forma semplificata, trascurando i termini di dissipazione viscosa e di comprimibilità:

⁷È lecito adottare una formulazione spaziale in quanto i nodi presenti su Γ_u non subiscono spostamento durante la fase di calcolo e quindi non sono soggetti al trattamento di tipo A.L.E..

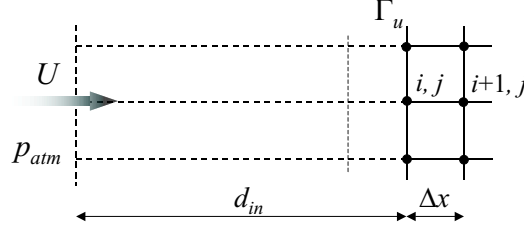


Fig. 5.11: Celle computazionali *pseudo-infinite* sul bordo alla Dirichlet Γ_u .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.105)$$

In riferimento alla figura 5.11, l'equazione (5.105) è integrata in modo discreto per ciascun nodo su Γ_u considerando volumi di controllo costruiti in modo analogo al caso delle celle di tipo C_v interne ad Ω_f . Le condizioni di flusso indisturbato, *i.e.* la condizione di velocità della corrente di ingresso, assunta ortogonale al bordo Γ_u nella direzione topologica i e pari ad U , e la pressione atmosferica p_{atm} , sono pertanto imposte ad una distanza d_{in} dal bordo computazionale effettivo assunta dell'ordine di $5 \div 10\Delta x$, essendo Δx una dimensione media nella direzione del flusso delle celle fluide che poggiano su Γ_u . Detto (i, j) il generico nodo su Γ_u (e la corrispondente cella di tipo Q_p) ed $(i+1, j)$ il nodo contiguo interno al dominio fluido (*cf.* figura 5.11), la velocità lungo la direzione topologica i assegnata al vertice (i, j) per il nuovo passo temporale di calcolo si ricava dalla condizione discreta esplicita:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t^n} + \frac{1}{\rho_{in} \Delta x} \left[p_{ij}^n - \frac{2p_{atm} \Delta x + p_{ij}^n (2d_{in} - \Delta x)}{2d_{in} + \Delta x} \right] \\ + \frac{1}{2\Delta x} \left[(u_{i+1,j}^n)^2 - \left(\frac{2U \Delta x + u_{i+1,j}^n (d_{in} - \Delta x)}{d_{in} + \Delta x} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.106)$$

essendo ρ_{in} la densità nota del fluido in ingresso.

Inoltre, al fine di caratterizzare i termini convettivi connessi al modello di turbolenza, si assegnano le condizioni di turbolenza esterne, esplicitate nel valore di energia cinetica turbolenta k_{amb} e della lunghezza scala L_{Tamb} ($\sim k^{3/2}/\epsilon$, *cf.* appendice A).

5.8.2 Condizioni al contorno su Γ_s

La condizione di bordo alla Neumann, espressa dalla seconda delle (5.16), è implementata imponendo nullo il gradiente della trazione su Γ_s , *i.e.* imponendo una condizione al contorno cosiddetta di *outflow* continuativo.

In altri termini, per il passo di calcolo n -esimo, una volta valutate le tensioni tangenziali viscosi $\mathbf{S}_{ij}$ per le celle ij di tipo Q_p che poggiano su Γ_s , queste sono iterativamente assegnate all'esterno del dominio fino ad annullare il contributo viscoso del gradiente della trazione in direzione normale al bordo.

Inoltre, per ciascun volume ij su Γ_s la pressione esterna agente sulla parte di contorno alla Neumann, *i.e.* p_{ij}^{out} , è ottenuta attraverso una interpolazione lineare tra il valore della pressione interna p_{ij} e la pressione atmosferica esterna p_{atm} supposta agente alla distanza d_{atm} . Detta distanza si assume grande rispetto alla dimensione caratteristica Δx della cella ($d_{atm} = 5 \div 10\Delta x$), di modo che risulti $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \cong 0$, essendo $\mathbf{n}$ la normale locale a Γ_s . In particolare, si ricava:

$$p_{ij}^{out} = \frac{\Delta x p_{atm} + 2d_{atm} p_{ij}}{\Delta x + 2d_{atm}} \quad (5.107)$$

In questo modo, la scia pulsante che generalmente si forma, a seguito dell'instabilizzazione viscosa o geometrica del flusso, a valle del dominio solido Ω_b investito dalla corrente, non è sostanzialmente riflessa dai bordi esterni del dominio fluido e gli effetti connessi alla possibile produzione di onde acustiche numeriche sono confinati in modo da non avere sostanziale influenza sulla soluzione numerica.

5.8.3 La legge di parete

Con l'obiettivo di cogliere numericamente in modo opportuno gli effetti di dissipazione connessi al carattere turbolento dello strato limite in prossimità della struttura si considerano generalmente, in corrispondenza dell'interfaccia fluido-struttura Γ_w , particolari prescrizioni che vanno sotto il nome di leggi di parete.

Le leggi di parete rappresentano soluzioni analitiche di condizioni di governo semplificate del flusso turbolento, tramite le quali si caratterizzano le tensioni tangenziali all'interfaccia solida e la corrispondente dissipazione energetica senza ricorrere alla soluzione numerica diretta delle condizioni di governo complete⁸. Da un punto di vista numerico, ad ogni passo di integrazione nel tempo il campo di moto ed energetico del flusso vengono dapprima aggiornati senza tenere conto degli effetti di parete e successivamente, per i nodi e le celle fluide in corrispondenza di Γ_w , vengono modificati attraverso dette condizioni analitiche.

Comunque, vista la natura locale delle correnti atmosferiche ad alto numero di Reynolds in corrispondenza delle strutture da esse investite, la caratterizzazione di

⁸Va osservato che la soluzione numerica delle equazioni complete del modello di turbolenza in corrispondenza di Γ_w è in linea di principio possibile, ma è generalmente impraticabile in quanto richiederebbe una risoluzione di griglia molto elevata in corrispondenza del dominio solido, a tutto svantaggio dell'efficienza computazionale (*cf.* appendice A).

condizioni analitiche di parete utilizzabili nell'ambito delle usuali applicazioni dell'ingegneria del vento deve compiersi portando in conto gli effetti di natura convettiva in corrispondenza di Γ_w .

Nell'ipotesi di considerare Γ_w come una parete adiabatica, *i.e.* che non scambia calore con l'esterno, le equazioni di conservazione del momento della quantità di moto e dell'energia, scritte nella forma debole (5.21), sono caratterizzate dai seguenti termini integrali:

$$\int_{\Gamma_w} S_{ij} n_{wj} d\Gamma \quad \int_{\Gamma_w} u_{ri} S_{ij}^\ell n_{wj} d\Gamma \quad (5.108)$$

essendo $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_b$ il vettore velocità relativa del fluido su Γ_w rispetto a Ω_b e

$$S_{ij} n_{wj} = (n_{wi} S_{ij} n_{wj}) n_{wi} + (t_{wi} S_{ij} n_{wj}) t_{wi} \quad (5.109)$$

dove $\mathbf{n}_w$ e $\mathbf{t}_w$ rappresentano rispettivamente i versori locali normale e tangente in corrispondenza del generico nodo di parete.

Il primo termine nel membro di destra della (5.109) è valutato attraverso lo schema di diffusione, mentre le altre quantità sono calcolate imponendo le seguenti condizioni alla parete [5.21]:

$$u_{ri} n_{wi} = 0 \quad (5.110)$$

$$(t_{wi} S_{ij} n_{wj}) t_{wi} = -\rho u^{*2} t_{wi} \quad (5.111)$$

$$u_{ri} S_{ij}^\ell n_{wj} = -\rho u^{*2} u_{ri} t_{wi} \quad (5.112)$$

dove u^* rappresenta la cosiddetta velocità di attrito, la quale risulta soluzione di una equazione del tipo: $u_{ri} t_{wi} = u^* f_w(u^*)$.

Al fine di determinare la funzione $f_w(u^*)$ si assume che in prossimità della parete Γ_w valgano le seguenti ipotesi semplificatrici:

- il flusso sia quasi stazionario cosicchè si possano trascurare tutte le derivate temporali;
- la velocità del flusso entro lo strato limite sia sostanzialmente diretta parallelamente alla parete;
- la componente di velocità del fluido $\tilde{u}_r = u_{ri} t_{wi}$ e le quantità ρ , k e ϵ varino praticamente con la sola la coordinata locale y valutata lungo la direzione $\mathbf{n}_w$;
- si assuma, per il momento, che non vi siano gradienti di pressione significativi nè effetti di natura convettiva nella direzione del flusso alla parete;
- il numero di Reynolds sia sufficientemente elevato in modo da poter attribuire gli effetti di natura viscosa e diffusiva al solo carattere turbolento del flusso (*i.e.* $\mu = \mu_\ell + \mu_T \cong \mu_T$ e $\Lambda = \Lambda_\ell + \Lambda_T \cong \Lambda_T$).

Sotto tali ipotesi, le equazioni di conservazione del momento della quantità di moto e del modello di turbolenza $k - \epsilon$ *standard* (cf. appendice A) si scrivono in modo semplificato, in prossimità della parete, come:

$$\mu \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial y} = \rho u^{*2} = \text{cost.} \quad (5.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial y} \right)^2 - \rho \epsilon = 0 \quad (5.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + a_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial y} \right)^2 - a_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (5.115)$$

dove la viscosità dell'aria μ si pone pari a:

$$\mu \cong \mu_T = c_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.116)$$

Pertanto, sfruttando le condizioni (5.113-5.115) e procedendo attraverso considerazioni di carattere dimensionale, le funzioni di parete per k , ϵ ed $\tilde{u}_r$ divengono [5.37]:

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}} \quad (5.117)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\kappa} \frac{u^{*3}}{y} \quad (5.118)$$

$$\frac{\tilde{u}_r}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^* y}{\nu_\ell} \right) + \hat{B} \quad (5.119)$$

essendo ν_ℓ la viscosità cinematica laminare dell'aria, $\hat{B}$ una costante da determinare sperimentalmente ed il cui valore è di circa 5.5 nel caso di pareti con basso valore di rugosità [5.37] e κ la costante di Kármán, esprimibile attraverso le costanti del modello $k - \epsilon$ *standard* come: $\kappa = [c_\mu^{1/2} (a_{\epsilon 2} - a_{\epsilon 1}) Pr_\epsilon]^{1/2} \cong 0.43$, in accordo con il valore 0.4 riportato solitamente in letteratura ([5.21], [5.36], [5.37]).

Dalla (5.117) si ricava immediatamente la condizione di bordo su Γ_w per il campo k , *i.e.* $\nabla k \cdot \mathbf{n}_w = 0$.

Al fine di evitare la soluzione iterativa della funzione di parete (5.119) per ottenere la velocità di attrito incognita u^* , detta funzione di parete per la velocità può approssimarsi per il tramite della condizione [5.25]:

$$\frac{u^* y}{\nu_\ell} = c_{lw} \left(\frac{\tilde{u}_r y}{\nu_\ell} \right)^{7/8} \quad (5.120)$$

dove un valore ottimo di *fitting* per la costante c_{lw} è 0.15 [5.37].

È il caso di osservare che la condizione (5.119) può ritenersi valida solo nella regione di strato limite turbolento di tipo logaritmico dove risulta $\frac{u^*y}{\nu_\ell} \gg 1$. Nello strato limite laminare è necessario considerare una relazione differente. Sebbene il carattere del flusso in tale regione non è perfettamente laminare, si adotta comunque la condizione [5.36]

$$\frac{u}{u^*} = \left(\frac{\tilde{u}_r y}{\nu_\ell} \right)^{1/2} \quad (5.121)$$

La transizione tra le condizioni (5.119) e (5.121) è effettuata in corrispondenza del valore critico Re_c del numero di Reynolds locale definito come: $Re = \frac{\tilde{u}_r y}{\nu_\ell}$. In corrispondenza di $Re = Re_c$ le due relazioni devono fornire il medesimo valore per u^* e pertanto, imponendo tale condizione, si ricava $Re_c \cong 113$.

In definitiva, la condizione di parete sulla velocità risulta:

$$\frac{\tilde{u}_r}{u^*} = \begin{cases} Re_c^{1/2} + \frac{7}{8} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{Re}{Re_c} \right) & \text{se } Re > Re_c \\ Re^{1/2} & \text{se } Re < Re_c \end{cases} \quad (5.122)$$

Per tenere in conto gli effetti connessi al gradiente di pressione ed ai contributi convettivi nella direzione del flusso alla parete, la condizione (5.119), valida nella regione turbolenta logaritmica, è modificata considerando, in corrispondenza di Γ_w , la seguente equazione semplificata di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + c_x \frac{\partial \rho \tilde{u}_r}{\partial x} \quad (5.123)$$

essendo c_x la velocità convettiva A.L.E. nella direzione della coordinata tangenziale locale x alla parete.

Si assuma, inoltre, che i valori di k ed ϵ non siano influenzati dai termini convettivi e di gradiente di pressione, *i.e.* che le condizioni di parete per k ed ϵ rimangano rispettivamente le (5.117) e (5.118).

Pertanto, sfruttando la (5.116) e la (5.117), la viscosità turbolenta può riscriversi nella forma:

$$\mu_T = \kappa \rho y u^* \quad (5.124)$$

Se il membro di destra della (5.123) è assunto noto e costante in corrispondenza della parete, *i.e.*

$$C = \frac{\partial p}{\partial x} + c_x \frac{\partial \rho \tilde{u}_r}{\partial x} = \text{cost.} \quad (5.125)$$

integrando la (5.123) in y e tenendo conto dell'approssimazione (5.120), la condizione di parete per la velocità nella regione turbolenta logaritmica si pone pari a:

$$\frac{\tilde{u}_r}{u^*} = +Re_c^{1/2} + \frac{7}{8} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{Re}{Re_c} \right) + \frac{C}{\kappa C_{lw}^2} \left(\frac{y^5}{\rho^2 \nu_\ell \tilde{u}_r^7} \right)^{1/4} \quad \text{se } Re > Re_c \quad (5.126)$$

Naturalmente, ora il valore critico del numero di Reynolds locale è funzione delle condizioni locali del flusso in prossimità di Γ_w e quindi Re_c deve essere valutato di volta in volta per ciascun volume computazionale che poggia sulla parete solida, attraverso la condizione di uguaglianza dei valori di u^* ottenuti dalla (5.121) e dalla (5.126).

L'implementazione di tali condizioni è effettuata come descritto nel seguito.

Al termine della fase materiale e della fase convettiva di ciascun ciclo temporale di calcolo, noto il versore normale alla parete in corrispondenza di ciascun nodo su di essa, *i.e.* $\mathbf{n}_{wij}$, si impone la condizione (5.110), rappresentativa della impenetrabilità fisica del flusso in Ω_b .

Al termine poi del passo di integrazione n -esimo, si considera la generica cella Q_p avente almeno una faccia su Γ_w e si valuta la velocità relativa $\tilde{u}_r$ alla distanza y dalla parete. Ciò, visto il carattere topologicamente strutturato della griglia di calcolo, è effettuato attraverso la considerazione del campo di velocità medio per i nodi di Q_p immediatamente sopra Γ_w . In questo modo si può valutare, per la cella in esame, un numero di Reynolds locale posto che sia $y = \Delta x$, essendo Δx una dimensione media della cella nella direzione locale $\mathbf{n}_w$. Inoltre, valutata per la cella in considerazione la costante C di pressione-convezione attraverso la discretizzazione alle differenze finite della (5.125), è possibile determinare il numero di Reynolds critico e quindi, corrispondentemente, dalla (5.121) o dalla (5.126) la velocità di attrito u^* per Q_p .

Calcolata allora, attraverso la relazione (5.111), la tensione tangenziale τ_w di cella sulla faccia di parete di area $|\mathbf{A}|$, è possibile valutare la corrispondente variazione della quantità di moto come $\tau_w |\mathbf{A}| \Delta t^n$, la quale è ripartita su ciascun nodo di parete di Q_p .

Infine, nota la velocità di attrito u^* , si valuta il contributo di dissipazione aggiuntivo (5.112), da considerare nell'equazione di bilancio dell'energia.

5.8.4 Determinazione delle normali di nodo sull'interfaccia fluido-struttura. Condizioni di velocità no-slip.

La caratterizzazione e l'implementazione della condizione di bordo (5.110) richiede la conoscenza del versore normale $\mathbf{n}_w$ a Γ_w per ciascun nodo i su detto contorno.

La determinazione di tali normali non è in generale una operazione banale in quanto l'interfaccia fluido-struttura può presentare punti di singolarità geometrica. Anche per una interfaccia fisica a geometria regolare la partizione del do-

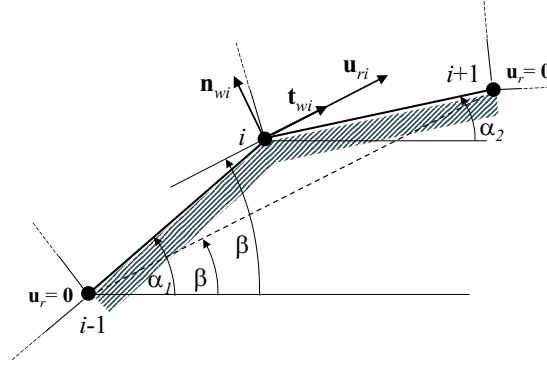


Fig. 5.12: Versore di nodo normale alla parete per il generico tratto di interfaccia fluido-struttura.

minio computazionale attraverso volumi discreti Q_p introduce punti di spigolo in corrispondenza dei vertici della griglia fluida giacenti su Ω_b .

Si consideri una generica porzione discreta dell'interfaccia fluido-struttura, come mostrato in figura 5.12. Essa è costituita da due segmenti rettilinei di lunghezza rispettivamente $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|$ e $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}|$ che si congiungono nel nodo i . Al fine di caratterizzare, come indicato in [5.5], una condizione che rispetti la legge di conservazione della massa in corrispondenza dei nodi, la velocità del fluido relativa a Ω_b è assunta nulla per i nodi $i-1$ ed $i+1$. Se $\mathbf{u}_{ri}$ indica il vettore di velocità relativa per il nodo i , la direzione di $\mathbf{u}_{ri}$ tale che sia soddisfatta la condizione di impenetrabilità (5.110) ed allo stesso tempo tale che il flusso che passa attraverso il segmento tra $i-1$ ed i , ad esempio entrandovi, sia lo stesso di quello che esce attraverso la congiungente i ed $i+1$, risulta individuata dall'angolo β definito tramite la relazione:

$$|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) \times \mathbf{u}_{ri}| = |(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \times \mathbf{u}_{ri}| \quad (5.127)$$

dove il simbolo $\times$ indica l'operazione di prodotto vettoriale.

Pertanto, utilizzando la notazione introdotta nella figura 5.12, la condizione (5.127) si può rifrappare come:

$$\tan \beta = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| \sin \alpha_1 + |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| \sin \alpha_2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| \cos \alpha_1 + |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| \cos \alpha_2} \quad (5.128)$$

In altri termini, la direzione del vettore di velocità relativa compatibile con la condizione di bordo di impenetrabilità e soddisfacente la condizione di conservazione della massa in corrispondenza dei nodi di parete, è individuata dalla pendenza della congiungente i nodi $i-1$ ed $i+1$ (figura 5.12).

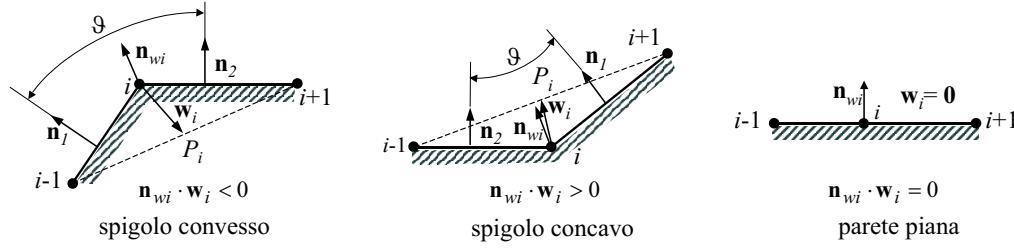


Fig. 5.13: Identificazione del tipo di spigolo.

È il caso di osservare che qualora risulti $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| = |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|$, la relazione (5.128) si riduce alla condizione $\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.

In definitiva, il versore normale $\mathbf{n}_{wi}$ per il nodo di parete i è definito come:

$$\mathbf{n}_{wi} = \mathbf{k} \times \mathbf{t}_{wi} \quad (5.129)$$

essendo $\mathbf{k}$ il versore ortogonale al piano di rappresentazione e da esso uscente e

$$\mathbf{t}_{wi} = \frac{(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1})}{|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}|} \quad (5.130)$$

Inoltre, sempre in merito all'implementazione della (5.110), è necessario considerare la differenza che, in relazione al diverso comportamento fisico indotto sul fluido, occorre tra il caso di uno spigolo di tipo *smooth* ed uno di tipo *sharp* e ancora tra il caso di uno spigolo concavo e quello di uno convesso.

In particolare, se la normale $\mathbf{n}_w$ a Γ_w è considerata sempre uscente da Ω_b e se il vettore $\mathbf{w}_i$ (figura 5.13) è orientato dal nodo i a P_i , essendo P_i il punto di mezzzeria del segmento tra i nodi $i-1$ e $i+1$, si possono distinguere i seguenti casi:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{wi} \cdot \mathbf{w}_i < 0 &\Rightarrow \text{spigolo convesso} \\ \mathbf{n}_{wi} \cdot \mathbf{w}_i > 0 &\Rightarrow \text{spigolo concavo} \\ \mathbf{n}_{wi} \cdot \mathbf{w}_i = 0 &\Rightarrow \text{parete piana nell'intorno di } i. \end{aligned} \quad (5.131)$$

D'altro canto, se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ sono rispettivamente i versori normali alle facce di parete che connettono il nodo $i-1$ a i e quello i a $i+1$, uno spigolo è definito *smooth* se l'angolo ϑ tra $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ risulta tale che $\vartheta \leq \vartheta_o$, altrimenti esso è definito uno spigolo di tipo *sharp*.

L'angolo di test ϑ_o può assumere in generale valori differenti a seconda che lo spigolo sia concavo o convesso. L'implementazione proposta adotta $\vartheta_o = 60^\circ$ per gli spigoli convessi e 45° per quelli concavi, come suggerito in [5.5]. Nel caso di uno spigolo di tipo *sharp* la condizione (5.110) è sostituita dalla condizione *no-slip* $\mathbf{u}_r = 0$, *i.e.* spigoli di tipo *sharp* sono trattati numericamente come punti di ristagno.

5.9 Procedura di valutazione dei parametri aerodinamici ed aeroelastici

Le forze aerodinamiche agenti su Ω_b sono ottenute integrando la distribuzione di pressione termodinamica (p) e le tensioni tangenziali di parete (τ_w) sul contorno rigido Γ_w per ciascun passo temporale. In questo modo si caratterizzano i valori medi dei carichi del vento ed i corrispondenti andamenti nel tempo.

D'altro canto, la previsione numerica delle azioni non stazionarie aeroelastiche su sezioni da ponte può effettuarsi attraverso le seguenti considerazioni.

Se si trascurano i contributi di *buffeting* e di resistenza aeroelastica e se si considera un modello a due gradi di libertà per rappresentare il moto della sezione trasversale, le equazioni (2.93-2.95) sono caratterizzate solo dai termini L_{ae} , M_{ae} coinvolgendo solo otto derivate di *flutter* (H_i^* , A_i^* con $i = 1, \dots, 4$).

Nello spirito della teoria quasi-stazionaria alla Scanlan, la sezione trasversale la si assume animata da moti armonici nel tempo del tipo:

$$v(t) = v_o e^{i\omega^{(v)}t} \quad \theta(t) = \bar{\theta} + \theta_o e^{i\omega^{(\theta)}t} \quad (5.132)$$

essendo i l'unità immaginaria, $\omega^{(v)}$ e $\omega^{(\theta)}$ le pulsazioni del moto, v lo spostamento della sezione nella direzione ortogonale alla corrente media e θ la sua rotazione. La quantità $\bar{\theta}$ rappresenta inoltre la rotazione media del profilo.

È il caso di ricordare, come già precedentemente fatto, che in generale, nella letteratura classica riferita all'aerodinamica di ponti di grande luce ed in relazione alle procedure sperimentali utilizzate per le prove in galleria del vento, le forze aerodinamiche e conseguentemente i relativi coefficienti adimensionali non sono riferiti agli assi definiti in ragione della direzione media del vento incidente (indicati come x e y in figura 2.18) ma sono riferiti alle direzioni orizzontale e verticale (x_o e y_o in figura 2.18). In modo analogo si assumono generalmente le convenzioni relative alle componenti di spostamento per la sezione da ponte e per le derivate di *flutter*. In particolare, secondo questa convenzione v rappresenta lo spostamento della sezione a partire dalla configurazione di equilibrio statico in direzione verticale e le derivate di *flutter* di tipo H_i^* definiscono l'azione aeroelastica verticale. Se l'angolo α (cf. figura 2.18) è assunto nullo⁹, l'angolo medio di incidenza del vento sulla struttura risulta $\bar{\gamma} = -\bar{\theta}$.

Assumendo comunque piccoli i valori di $\bar{\theta}$, le forze aeroelastiche conseguenti al moto armonico imposto possono considerarsi esse stesse armoniche nel tempo,

⁹In generale infatti in prossimità del sito di un ponte il vento soffia parallelamente al mare o alla superficie del corso d'acqua, *i.e.* è lecito assumere $\alpha \cong 0$.

con pulsazioni praticamente identiche a quelle del moto ma caratterizzate da uno sfasamento rispetto a questo ultimo.

Pertanto, considerando attiva per la generica sezione da ponte in considerazione una sola componente di moto alla volta, *i.e.* attivando prima solo il grado di libertà flessionale e poi solo quello torsionale, le forze del vento agenti per unità di lunghezza dell'impalcato possono esprimersi come:

$$L(\bar{\gamma}^{(d)}, t) = \bar{L} + L_{ae}(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 B \left[C_\ell(\bar{\gamma}^{(d)}) + C_{\ell_o}^{(d)} e^{i(\omega^{(d)}t - \psi_\ell^{(d)})} \right] \quad (5.133)$$

$$M(\bar{\gamma}^{(d)}, t) = \bar{M} + M_{ae}(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left[C_m(\bar{\gamma}^{(d)}) + C_{m_o}^{(d)} e^{i(\omega^{(d)}t - \psi_m^{(d)})} \right] \quad (5.134)$$

dove l'apice $d = v, \theta$ si riferisce alla componente armonica del moto attiva, C_ℓ e C_m sono i coefficienti adimensionali introdotti nella (2.12), C_{ℓ_o} e C_{m_o} sono le ampiezze delle forze aeroelastiche adimensionali ed infine ψ_ℓ e ψ_m sono i corrispondenti angoli di sfasamento rispetto alla condizione di moto imposta.

In definitiva, il confronto tra i contributi armonici espressi nelle relazioni (5.133-5.134) con quelli corrispondenti alle (2.94-2.95) conduce alle equazioni:

$$\frac{C_{\ell_o} B e^{i\psi_\ell^{(v)}}}{K^2 v_o} = iH_1^* + H_4^* \quad \frac{C_{m_o} B e^{i\psi_m^{(v)}}}{K^2 v_o} = iA_1^* + A_4^* \quad (5.135)$$

$$\frac{C_{\ell_o} e^{i\psi_\ell^{(\theta)}}}{K^2 \theta_o} = iH_2^* + H_3^* \quad \frac{C_{m_o} e^{i\psi_m^{(\theta)}}}{K^2 \theta_o} = iA_2^* + A_3^* \quad (5.136)$$

Pertanto, le derivate di *flutter* H_i^* , A_i^* ($i = 1, \dots, 4$) possono valutarsi dalle relazioni (5.135-5.136) a seguito dell'imposizione di un moto armonico forzato nel grado di libertà verticale o angolare e della estrazione numerica, alla medesima pulsazione del moto imposto, delle ampiezze delle azioni adimensionali aeroelastiche di portanza e momento, *i.e.* C_{ℓ_o} e C_{m_o} , e dei relativi angoli di sfasamento.

È il caso di osservare che quando l'angolo medio di attacco non è piccolo, a seguito della massiccia separazione del flusso in corrispondenza della sezione, gli andamenti nel tempo delle azioni aerodinamiche corrispondenti ad un moto armonico forzato non sono più considerabili funzioni propriamente armoniche, pur conservando un carattere periodico.

Tale evenienza è tanto più evidente quanto più l'angolo medio di incidenza è prossimo a quello di stallo statico [5.9].

In virtù di tali considerazioni, il calcolo delle derivate di *flutter* è compiuto attraverso la valutazione dell'armonica fondamentale alla Fourier degli andamenti nel tempo per le forze aeroelastiche. In dettaglio, se si considerano moti puramente cosinusoidali, gli angoli di sfasamento $\psi_q^{(d)}$ e le ampiezze C_{qo} degli andamenti nel tempo

del tipo $C_{qae}^{(d)}(t)$ (con $d = v, \theta$ e $q = \ell, m$) si ricavano dalla integrazione numerica delle condizioni alla Fourier [5.30]:

$$\tan \psi_q^{(d)} = \frac{\int_{T_q^{(d)}} C_{qae}(t) \sin(\omega^{(d)} t) dt}{\int_{T_q^{(d)}} C_{qae}(t) \cos(\omega^{(d)} t) dt} \quad (5.137)$$

$$C_{qo} \cos \psi_q^{(d)} = \frac{1}{T_q^{(d)}} \int_{T_q^{(d)}} C_{qae}(t) \cos(\omega^{(d)} t) dt \quad (5.138)$$

avendo assunto $T_\ell^{(d)} \cong T_m^{(d)} \cong 2\pi/\omega^{(d)}$.

5.10 Validazione del modello e risultati numerici

Il modello numerico proposto è stato validato attraverso la considerazione di profili a geometria semplice, confrontando i risultati ottenuti numericamente con i dati sperimentali e con altre soluzioni numeriche, disponibili in letteratura. Per dette sezioni a geometria semplice si è inoltre provata numericamente, attraverso un processo di raffinamento progressivo della griglia di calcolo, la convergenza del modello.

Si presentano poi i risultati numerici ed i relativi confronti con i dati sperimentali e con altre soluzioni numeriche, corrispondenti alla caratterizzazione delle forze del vento stazionarie e non per tipici profili di sezioni trasversali di ponti di grande luce.

Tutte le simulazioni sono state condotte considerando un intervallo di tempo adimensionale pari a $0 < tU/B < 60$, assumendo una intensità della turbolenza in ingresso al dominio di calcolo dell'ordine del 5% rispetto alla condizione di flusso medio indisturbato ed una corrispondente lunghezza scala dell'ordine di $3 \div 5B$, essendo B la dimensione caratteristica della sezione solida immersa nel dominio fluido valutata nella direzione della corrente media.

Il dominio di calcolo, al fine di limitare comunque gli effetti di rimbalzo di onde acustiche sulle condizioni di bordo, è definito considerando una distanza minima del dominio solido dal bordo di ingresso pari a $2 \div 5B$, una distanza minima dal bordo di uscita a valle della sezione pari a $6 \div 10B$ ed una distanza minima dai bordi superiore ed inferiore (*cf.* figura 5.2) di $2 \div 5B$.

Infine, per le simulazioni condotte su tipici profili di sezioni da ponte, il modello discretizzato riproduce gli aspetti di larga scala della geometria della sezione ma si sono omessi i dettagli di piccola scala (ringhiere, spartitraffico, pannelli di protezione, etc.).

5.10.1 Validazione del modello su sezioni a geometria semplice

Sezione circolare

Il primo test di validazione che si presenta è relativo ad una sezione circolare fissa nel dominio fluido. Le simulazioni sono state condotte su quattro *mesh* del dominio di calcolo caratterizzate da valori decrescenti, in corrispondenza dell'interfaccia Γ_w , del rapporto medio $(\Delta x/D)_{\Gamma_w}$, intendendo con Δx la dimensione caratteristica delle celle di calcolo e con D il diametro della sezione. La figura 5.14 mostra, in corrispondenza della parte sottovento della sezione, dove ci si attende avvenga la separazione del flusso, un particolare della *mesh* caratterizzata da $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} \cong 2.0 \times 10^{-2}$.

La figura 5.15 riporta, al variare di $(\Delta x/D)_{\Gamma_w}$, i valori dell'errore ϵ_{C_d} definito come

$$\epsilon_{C_d} = \frac{|C_d^{sp} - C_d^{num}|}{C_d^{sp}} \quad (5.139)$$

essendo l'apice '*sp*' relativo ai dati sperimentali e quello '*num*' relativo alla simulazione numerica. Il numero di Reynolds ed il numero di Mach sul bordo Γ_u ¹⁰ sono stati assunti rispettivamente pari a: $Re = \rho DU/\mu_\ell = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$.

Si noti come al crescere del grado di infittimento della griglia di calcolo, *i.e.* al diminuire di $(\Delta x/D)_{\Gamma_w}$, la soluzione numerica tende a quella sperimentale [5.27], confermando da un punto di vista numerico la convergenza del modello.

È il caso di notare che non è possibile caratterizzare in modo significativo una velocità di convergenza in quanto il parametro $(\Delta x/D)_{\Gamma_w}$, come detto, è un parametro medio e la discretizzazione del dominio non è uniforme.

In figura 5.16 sono illustrati al variare del numero di Reynolds i risultati sperimentali [5.27] e quelli ottenuti numericamente per il coefficiente C_d . Si è adottata per il calcolo la *mesh* con $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$.

In un ampio *range* di valori del numero di Reynolds Re , significativi nell'ambito dei problemi tipici di ingegneria del vento, l'accordo appare più che soddisfacente.

Nel caso di $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Re = 10^4$ e $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, la figura 5.17 illustra gli andamenti nel tempo dei coefficienti di portanza e resistenza, C_d e C_ℓ , secondo le convenzioni introdotte nel capitolo 2. I valori medi ottenuti dalla simulazione sono:

$$C_d = 1.16 \pm 0.32 \quad C_\ell = -0.01 \pm 0.98$$

ed essi devono confrontarsi con i seguenti dati sperimentali [5.2]:

¹⁰Il numero di Mach è definito come il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono in corrispondenza delle medesime condizioni termodinamiche.

$$C_d = 1.1 \div 1.2 \pm 0.27 \quad C_\ell = 0.0 \pm 1.05$$

Le figure 5.18 e 5.19 mostrano rispettivamente, in corrispondenza del tempo adimensionale $tU/D = 45$, la distribuzione del numero di Mach ed il coefficiente di pressione C_p , definito come:

$$C_p = \frac{p - p_{atm}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.140)$$

Inoltre, la figura 5.20 riporta, sempre per $tU/D = 45$, la distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , mentre la figura 5.21 illustra due corrispondenti particolari del campo di moto nella zona posteriore del profilo.

Si vuole far notare come, in corrispondenza del bordo di uscita del dominio a valle della sezione, non si genera effetto di riflessione della perturbazione associata alla condizione di *vortex-shedding*, confermando il carattere assorbente delle condizioni al contorno implementate.

Alla natura periodica delle strutture vorticosi che si staccano dalla sezione, evidente nelle figure 5.17-5.21, è associato un valore del numero di Strouhal simulato pari a $St = n_w D/U \sim 0.26 \div 0.28$ in ottimo accordo con il valore sperimentale di 0.27.

Le figura 5.22 mostra, nel caso di $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$ e $Re = 0.8 \times 10^6$, *i.e.* in una condizione turbolenta del flusso, la variazione calcolata e sperimentale [5.2] della velocità media adimensionale $\bar{u}/U$ lungo l'asse di simmetria longitudinale nella zona posteriore della sezione.

Nelle stesse condizioni la figura 5.23 riporta l'intervallo sperimentale [5.2] ed i valori medi ottenuti numericamente per la distribuzione sul profilo del coefficiente di pressione C_p .

È immediato rilevare che l'accordo tra i valori simulati e gli andamenti sperimentali è più che soddisfacente.

Si vuole far notare che i risultati discussi si possono ad esempio riferire al caso di uno strallo o di un cavo, costituente un ponte di grande luce. In altri termini, trascurando gli effetti di variazione della forma aerodinamica della sezione, dovuti alla presenza sulla superficie del cavo di neve o rivoli di pioggia, e trascurando gli effetti connessi alla sua inclinazione, detti risultati consentono di valutare in modo approssimato i carichi del vento agenti sul cavo, stazionari ed indotti dalla condizione di *vortex-shedding*.

Stante l'elevata flessibilità di un cavo è poi possibile assumere che la sua frequenza di oscillazione, indotta dal distacco di vortici dal profilo, coincida, in prima approssimazione, con la frequenza di *vortex-shedding*. Sotto questa assunzione la figura

5.24 mostra i valori medi della frequenza di distacco dei vortici, ottenuti numericamente (utilizzando una *mesh* con $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} \cong 2.0 \times 10^{-2}$) al variare della velocità della corrente incidente e per una sezione circolare di diametro pari a $D = 0.11m$. Nella stessa figura è inoltre riportato l'intervallo di valori della frequenza di oscillazione di un cavo del Meiko West Bridge in Giappone di diametro corrispondente, ottenuto sperimentalmente [5.31]. L'evidente accordo conferma l'attendibilità delle assunzioni dette.

Sezione quadrata

Al fine di testare ulteriormente la convergenza numerica del modello si sono utilizzate per il calcolo, anche in questo caso, quattro differenti *mesh*. La figura 5.25 mostra un particolare della griglia computazionale in corrispondenza della parte sottovento della sezione, caratterizzata dal rapporto $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} \cong 2.0 \times 10^{-2}$ nella zona di interfaccia Γ_w , essendo B il lato della sezione.

La figura 5.26 illustra, al variare di $(\Delta x/B)_{\Gamma_w}$, i valori dell'errore ϵ_{C_d} definito nella (5.139). Il numero di Reynolds ed il numero di Mach sul bordo Γ_u sono stati assunti rispettivamente pari a: $Re = \rho BU/\mu_\ell = 2.2 \times 10^4$ e $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$.

Si noti come al crescere del grado di infittimento della griglia di calcolo, *i.e.* al diminuire di $(\Delta x/B)_{\Gamma_w}$, la soluzione numerica tende a quella sperimentale [5.17], confermando ancora una volta la convergenza numerica del modello.

Nel caso di $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Re = 2.2 \times 10^4$ e $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$ la figura 5.27 illustra gli andamenti nel tempo dei coefficienti di portanza e resistenza. I valori medi ottenuti numericamente sono:

$$C_d = 2.23 \pm 0.16 \quad C_\ell = -0.02 \pm 2.17$$

ed essi devono confrontarsi con i corrispondenti sperimentali [5.17]:

$$C_d = 2.14 \pm 0.1 \quad C_\ell = 0.0 \pm 2.08$$

Il numero di Strohual estratto dagli andamenti detti è circa pari a $St \cong 0.138$, in ottimo accordo con il corrispondente valore sperimentale [5.17]: $St = 0.134$. In riferimento alle medesime condizioni di test, le figure dalla 5.28 alla 5.31 illustrano rispettivamente, per $tU/B = 55$, la distribuzione e le curve iso-Mach, la distribuzione del coefficiente di pressione, la distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale ed un dettaglio del campo di moto attorno al profilo. In particolare, da quest'ultima appaiono evidenti le regioni di separazione della vena dal profilo in corrispondenza del bordo di uscita della sezione.

Le figura 5.32 mostra, nel caso di $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$ e $Re = 2.2 \times 10^4$, la variazione della velocità media adimensionale $\frac{\bar{u}}{U}$ lungo l'asse di simmetria longitudinale nella zona posteriore della sezione. Sono messi a confronto i valori ottenuti numericamente con il presente modello con i rilievi sperimentali di Lyn e Durao riportati in [5.24]. Infine, in figura 5.33 si illustrano gli andamenti sperimentali ricavati da Sluchanovskaya e Gorlin, e riportati in [5.2], ed i valori calcolati numericamente con il presente modello, per la distribuzione media sul profilo del coefficiente di pressione C_p . L'accordo è, anche in questo caso, più che soddisfacente.

Sezione rettangolare

La mesh adottata, un cui dettaglio è riprodotto in figura 5.34, è caratterizzata in corrispondenza di Γ_w dal valore del rapporto medio $\Delta x/B \cong 2.0 \times 10^{-2}$, essendo B la dimensione della corda longitudinale del profilo. Per la sezione in esame (con rapporto tra i lati pari a 1:4), assunta fissa nel dominio fluido ed investita, sotto un angolo di incidenza nullo, da una corrente caratterizzata dalle condizioni: $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 2.0 \times 10^4$, le figure dalla 5.35 alla 5.38 illustrano rispettivamente, per $tU/B = 45$, la distribuzione e le curve iso-Mach, la distribuzione del coefficiente di pressione, la distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale ed un dettaglio del campo di moto attorno al profilo. Anche in questo caso appaiono in modo evidente le zone di separazione del flusso e la condizione di distacco di vortici dalla sezione.

Per ciò che concerne la caratterizzazione delle azioni aerodinamiche adimensionali, i risultati numerici medi ottenuti nelle condizioni dette sono:

$$\begin{array}{llll} C_d = 0.348 & C_d^{RMS} = 0.065 & C_\ell = 0.011 & C_\ell^{RMS} = 0.250 \\ C_m = -0.017 & C_m^{RMS} = 0.071 & St = nH/U = 0.149 & \end{array}$$

essendo H l'altezza della sezione ed avendo indicato con C^{RMS} lo scarto quadratico medio dei corrispondenti andamenti nel tempo. L'accordo con i relativi risultati sperimentali (gentilmente forniti da C.S.T.B. *Centre Scientifique et Technique du Bâtiment-Nantes-France*) è apprezzabile

$$\begin{array}{llll} C_d = 0.356 & C_d^{RMS} = 0.081 & C_\ell = -0.074 & C_\ell^{RMS} = 0.289 \\ C_m = 0.026 & C_m^{RMS} = 0.054 & St = 0.159 & \end{array}$$

In particolare, l'errore sul numero di Strohual è dell'ordine del 6% e, per le quantità non prossime a zero comunque contenuto entro il 13%.

5.10.2 Risultati numerici su sezioni da ponte

Sezioni del Great Belt Link

Dapprima si considera il caso relativo alla sezione trasversale del *Great Belt East Bridge*, il cui modello in scala 1:80 analizzato in galleria del vento [5.22] è rappresentato in figura 5.39. La griglia di calcolo adottata è caratterizzata, in corrispondenza dell'interfaccia Γ_w , dal rapporto medio $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} \cong 2.1 \times 10^{-2}$ e la figura 5.40 ne riporta un particolare nella parte sottovento del profilo.

La figura 5.41 mostra, al variare dell'angolo di incidenza della corrente, i valori dei coefficienti aerodinamici medi di portanza, resistenza e momento ottenuti numericamente ed i relativi andamenti sperimentali ricavati in galleria del vento [5.22]. Detti coefficienti sono ricavati considerando la sezione trasversale dell'impalcato fissa nella corrente, sotto diversi angoli di incidenza ed assumendo un numero di Reynolds pari a quello considerato in galleria, *i.e.* $Re = 1.1 \times 10^5$.

La figura 5.42 illustra, per un angolo di incidenza nullo, gli andamenti nel tempo delle forze adimensionali di portanza, momento e resistenza. Il corrispondente numero di Strouhal ricavato è pari a $St = n_w H/U = 0.142$ in accordo con i risultati numerici proposti in [5.13]. Inoltre, mancando un riferimento sperimentale, nella figura 5.43 si confrontano, con i risultati numerici proposti sempre in [5.13] e per differenti angoli di incidenza, le distribuzioni sulla superficie superiore ed inferiore del coefficiente di pressione definito in (5.140) e valutato tramite il presente modello. L'accordo con la soluzione numerica di confronto è soddisfacente.

Nelle figure dalla 5.44 alla 5.46 sono poi riportate, per diversi angoli di incidenza della corrente (-10° , 0° , 10°) e per $tU/B = 40$ la distribuzione del numero di Mach, quella dell'energia cinetica turbolenta adimensionale ed alcuni particolari del campo di moto attorno al profilo.

Dette figure mostrano un effetto di scia abbastanza marcato che giustifica i valori relativamente alti del coefficiente di *drag* per tale sezione (*cf.* figura 5.41) e manifestano la tendenza a fenomeni di *vortex-shedding*.

Al fine di caratterizzare le azioni aeroelastiche non stazionarie tramite le (2.93-2.95), considerando la procedura di valutazione delle derivate di *flutter* di tipo A^* e H^* indicata nella sezione 5.9, si sono effettuate differenti simulazioni numeriche considerando condizioni di moto forzato della sezione da ponte immersa nella corrente. In particolare, si è considerato il modello di sezione del *Great Belt West Bridge*, la cui rappresentazione schematica è riportata in figura 5.39 (scala 1:80) e per il quale sono disponibili i risultati sperimentali delle prove in galleria del vento [5.22].

Le simulazioni sono state condotte considerando moti forzati armonici verticali e rotazionali intorno al punto medio della corda longitudinale del profilo, per 5

differenti valori della velocità ridotta della corrente compresi nell'intervallo $2 \leq U/nB \leq 14$, essendo $n = \omega/2\pi$ ed ω la pulsazione del moto armonico.

Le ampiezze del moto armonico forzato verticale e di rotazione per la sezione considerata sono state poste pari a: $v_o/B = 0.05$, $\theta_o = 3^\circ$. La discretizzazione del dominio fluido attorno alla sezione presenta un valore medio del rapporto $(\Delta x/B)_{\Gamma_w}$ pari a 2.1×10^{-2} .

La figura 5.47 mostra le derivate di *flutter* valutate numericamente per un angolo medio di incidenza nullo ed i relativi andamenti sperimentali [5.22]¹¹. Nel caso corrispondente a $U/nB = 8$ e per un moto armonico forzato verticale della sezione, la figura 5.48 mostra un dettaglio della distribuzione di energia cinetica turbolenta k per un tempo adimensionale pari a $tU/B = 30$. Appare evidente la condizione di separazione di vena e di strutture vorticosi indotte dal moto del profilo.

Modelli di sezione per il ponte di Normandia

Con riferimento al modello della sezione trasversale del ponte di Normandia relativo al *Projet-Détailé* del 1989 (figura 5.49, [5.43]) la griglia di calcolo utilizzata per le prove numeriche è caratterizzata, in corrispondenza di Γ_w , dal rapporto medio $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} \cong 1.9 \times 10^{-2}$. La figura 5.50 riporta un particolare della discretizzazione nella parte sottovento del profilo.

In figura 5.51 sono riportati, per i coefficienti statici adimensionali di portanza, resistenza e momento, i valori dei rilievi sperimentali condotti in galleria del vento da ONERA e CBTP [5.43] ed i risultati ottenuti numericamente attraverso il presente modello. La loro variabilità con l'angolo di attacco della corrente è stata provata numericamente effettuando differenti test numerici per diversi angoli di incidenza compresi nell'intervallo da -6° a 6° . Il numero di Reynolds adottato per il calcolo è stato posto pari a $Re = 1.5 \times 10^5$. Il confronto con i risultati del 1989 dell'ONERA risultano soddisfacenti per il coefficiente di portanza e quello di momento, mentre il coefficiente di resistenza valutato numericamente è più grande rispetto ai valori indicati da ONERA, come confermato dai rilievi del CEBTP ottenuti in corrente turbolenta [5.43].

Nelle figure dalla 5.52 alla 5.54 sono poi riportate, per diversi angoli di incidenza della corrente (-6° , 0° , 6°) e per $tU/B = 25$ la distribuzione del numero di Mach, quella dell'energia cinetica turbolenta adimensionale ed alcuni particolari del campo di moto attorno al profilo.

Dalla curva del coefficiente di momento, riprodotta numericamente, si evince come in corrispondenza di un angolo di incidenza del flusso di circa 6° si verifichi una brusca variazione di pendenza. In altre parole, detto valore può assumersi

¹¹I dati sperimentali per A_4^* non sono riportati in [5.22].

rappresentativo approssimativamente dell'angolo di incidenza di stallo statico per il profilo in esame. Quanto detto trova conferma nella massiccia separazione del flusso dal profilo osservata in figura 5.54.

Al fine di caratterizzare per il profilo in esame, attraverso la simulazione numerica, la tendenza al *flutter* di tipo torsionale ed il corrispondente momento torcente aeroelastico, si sono valutate le derivate di *flutter* A_2^* e A_3^* considerando moti forzati angolari armonici della sezione di ampiezza $\theta_o = 3^\circ$ e sotto 5 differenti angoli medi di incidenza ($\bar{\gamma} = -\bar{\theta}$) nell'intervallo della velocità ridotta $2 \leq U/nB = 2\pi/K \leq 10$. La figura 5.55 riporta i risultati numerici ottenuti e, ove disponibili, gli andamenti sperimentali [5.43] ottenuti da ONERA. Appare quanto mai evidente che, per un angolo di attacco di 6° ed una velocità ridotta di circa 4.8, la derivata di *flutter* A_2^* cambia segno passando da negativa a positiva. Ciò conferma, per il profilo esaminato, la tendenza all'instabilità aeroelastica di *stall flutter* o stallo dinamico, come già puntualizzato nei capitoli 3 e 4 (cf. sezioni 3.2.1 e 4.2.4).

Nell'ipotesi di $Re = 1.5 \times 10^5$ e $K = 1.57$ la figura 5.56 mostra due andamenti nel tempo riferiti al coefficiente adimensionale di momento e corrispondenti, per il profilo in esame, ad una condizione di moto armonico forzato angolare con due differenti angoli di incidenza medi. Si noti che per l'angolo medio di attacco pari a 4° , l'andamento nel tempo del coefficiente di momento non è perfettamente sinusoidale, come invece accade in modo sostanziale nel caso di angolo medio di incidenza nullo. Ciò è dovuto al fatto che in corrispondenza di un angolo istantaneo di incidenza prossimo a quello di stallo statico, si verifica una massiccia separazione della vena fluida dalla superficie del profilo e conseguentemente si ha un'alterazione del carattere armonico relativo all'accoppiamento fra il moto imposto alla sezione e la risposta del flusso. Per meglio mostrare la perdita di armonicità che caratterizza le azioni del vento sulla struttura in movimento, nelle figure 5.57 e 5.58 sono riportati i cicli medi del coefficiente di momento C_m per i due angoli medi di attacco al variare dell'angolo di incidenza istantaneo. Come elemento di raffronto sono anche riportate le curve statiche stazionarie, già introdotte nella figura 5.51. I cicli detti si rappresentano quindi al variare dell'angolo di incidenza istantaneo come due cicli di isteresi percorsi in senso antiorario e l'area in essi racchiusa risulta proporzionale al lavoro per ciclo che le forze prodotte dal vento compiono. Tale lavoro è positivo quando esso è compiuto sulla struttura da parte del vento e, in questa evenienza, è presente uno smorzamento aerodinamico negativo cosicché nel caso di oscillazioni libere della struttura, queste tenderebbero ad aumentare la loro ampiezza a meno della presenza di altre forme di smorzamento.

Dalla figura 5.57 si evince facilmente che il ciclo medio ottenuto numericamente in corrispondenza ad un angolo medio di incidenza nullo è praticamente di forma

ellittica in accordo con la teoria classica del *flutter*. In questo caso il lavoro per ciclo è negativo, confermando una condizione di stabilità. D'altro canto, il ciclo medio corrispondente al caso di angolo medio di incidenza di 4° (cf. figura 5.58) si discosta fortemente dall'andamento ellittico soprattutto in corrispondenza dell'angolo di stallo statico di 6° . In questo caso il lavoro per ciclo del sistema mostra chiaramente la tendenza ad invertire il suo segno, *i.e.* il sistema è vicino alla condizione di instabilità dinamica di *stall flutter*.

Infine, per il modello di sezione dell'*Avant Projet* del 1987 (figura 5.49), si sono condotte una serie di simulazioni considerando moti forzati angolari e verticali della sezione, al fine di valutarne le derivate di *flutter*. Sono state considerate 5 differenti velocità ridotte nell'intervallo $2 \leq U/nB \leq 10$ ed ampiezze, per i moti armonici verticali ed angolari, rispettivamente pari a: $v_o/B = 0.04$, $\theta_o = 3^\circ$. La griglia di calcolo adottata è caratterizzata da un rapporto medio $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} \cong 1.6 \times 10^{-2}$ in corrispondenza dell'interfaccia Γ_w . Inoltre, con l'intento di caratterizzare la variabilità delle derivate di *flutter* con l'angolo statico di torsione dell'impalcato, si sono considerati tre differenti valori dell'angolo medio di incidenza della corrente sul profilo.

Le figure 5.59 e 5.60 mostrano gli andamenti nel tempo dei coefficienti C_ℓ e C_m corrispondenti rispettivamente ad un moto armonico angolare con angolo medio di incidenza nullo e ad uno verticale con angolo medio di incidenza pari a 3° . Il numero di Reynolds e la frequenza ridotta sono stati assunti pari a: $Re = 1.5 \times 10^5$, $K = 1.57$.

Nel caso di angolo di attacco medio nullo e moto armonico forzato verticale con $K = 1,05$ e $Re = 1.5 \times 10^5$, la figura 5.61 mostra, in corrispondenza di un ciclo di oscillazione della sezione, le distribuzioni valutate numericamente del coefficiente di pressione C_p attorno al profilo, per differenti istanti adimensionali.

Come mostrato nelle figure 5.62 e 5.63, i valori ottenuti dall'analisi numerica per le derivate di *flutter* in esame sono in ottimo accordo con gli andamenti sperimentali ricavati in galleria del vento. Da tali risultati è inoltre quanto mai evidente come il profilo considerato sia fortemente sensibile anche a piccole variazioni dell'angolo medio di incidenza, *i.e.* alla rotazione statica torsionale dell'impalcato.

I dati sperimentali riportati a confronto con quelli ottenuti numericamente nelle figure 5.55, 5.62 e 5.63 sono stati estratti dai risultati dell'ONERA, originariamente espressi nel formato alla Küssner (cf. (2.96-2.97)).

5.11 Conclusioni

Al fine di ridurre i tempi caratteristici delle analisi aerodinamiche ed aeroelastiche caratterizzanti la fase progettuale dei ponti di grande luce, e di sopperire anche par-

zialmente all'uso di dati di natura sperimentale, si è presentato uno strumento di calcolo numerico in grado di valutare le azioni stazionarie e non agenti sull'impalcato per effetto del vento. Il modello numerico, basato sull'ipotesi semplificativa di un flusso bidimensionale che investe la sezione non profilata della travata, è stato formulato mediante un approccio ai volumi finito di tipo A.L.E.. Si utilizza inoltre un modello di turbolenza, derivato dal classico modello a due equazioni di tipo $k-\epsilon$, e speciali condizioni al contorno numeriche al fine di ottenere una soddisfacente accuratezza e stabilità della soluzione numerica.

Il modello e le procedure di gestione di dati, presentati nella prima parte di questo capitolo, sono stati dapprima validati più che soddisfacentemente su una serie di sezioni a geometria semplice e successivamente adottati per l'analisi di tipiche sezioni di ponte di grande luce.

In particolare, si sono presentati una serie di risultati numerici relativi sia alla caratterizzazione delle forze stazionarie che di quelle non stazionarie aeroelastiche, *i.e.* relativi alla valutazione delle derivate di *flutter*, nel caso dei modelli di sezione dei ponti del *Great Belt Link* (Danimarca) e dei modelli progettuali della sezione del ponte di Normandia (Francia).

Le piccole discrepanze osservate, tra i risultati numerici connessi alla valutazione dei coefficienti aerodinamici medi stazionari ed i relativi dati di raffronto sperimentali, nelle figure 5.41 e 5.51, soprattutto nel caso di angoli di incidenza negativi, possono considerarsi conseguenza del fatto che, nel modello di sezione utilizzato nel calcolo, non si sono tenuti in conto elementi di dettaglio quali ringhiere, barriere protettive, spartitraffico etc. Conseguentemente, in presenza di un angolo di incidenza negativo, la distribuzione del flusso valutata numericamente attorno alla sezione risulta meno perturbata e quindi meno distaccata dal profilo rispetto alla condizione reale osservata in galleria del vento.

Inoltre, nel caso della previsione numerica della azioni aeroelastiche non stazionarie, *i.e.* delle derivate di *flutter*, le differenze osservate nelle figure 5.47, 5.55, 5.62 e 5.63 fra i valori simulati e quelli misurati sperimentalmente, possono giustificarsi tenendo conto, in aggiunta alle considerazioni precedenti, altre due possibili cause. Le derivate di *flutter* simulate sono state ottenute direttamente dalle forze non stazionarie originatesi da moti armonici imposti della sezione dell'impalcato ad un grado di libertà. D'altro canto, i risultati dei rilievi in galleria del vento sono relativi a condizioni di oscillazione del modello di sezione secondo condizioni di moto complesse che interessano sia il grado di libertà verticale che quello angolare, ed in generale con frequenze di oscillazione differenti. Un ulteriore aspetto da tenere presente è la possibile influenza di effetti non-lineari relativi all'ampiezza del moto, come indicato in [5.26].

Ad ogni modo, il buon accordo con i dati sperimentali relativi a prove in galleria del vento e con altre soluzioni numeriche disponibili in letteratura, confermano che il modello presentato può rappresentare, vista la sua utilizzabilità su piattaforme computazionali di medio-alte prestazioni, un utile strumento per l'analisi e la progettazione dei ponti di grande luce.

Bibliografia

- [5.1] J. D. Anderson jr., "Computational Fluid Dynamics-the basics with applications", McGraw-Hill, (1995).
- [5.2] S. M. Belotserokovsky et al., "Two-dimensional separated flows", CRC Press, Florida, (1993).
- [5.3] J. Bielak, L. F. Kallivokas, R. C. Mc. Camy, "Absorbing boundaries for acoustic wave propagation problems", *Proc. IUTAM Symposium on Comput. Meth. for Unbounded Domains*, T. L. Geers Ed., Kluwer Academic Publishers, (1997).
- [5.4] A. Brandt, J. E. Dendy H. Ruppel, *J. Comput. Phys.*, **34**, (1980) 348.
- [5.5] F. Casadei, J. P. Halleux, "An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **128**, (1995), 231-289, .
- [5.6] T. L. Clark, "Lateral and upper boundary conditions", *Proc. Numerical methods in atmospheric models*, ECMWF, (1991), 43-71 .
- [5.7] C. Farhat, M. Lesoinne, "Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional non linear transient aeroelastic problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **182**, (2000), 499-515.
- [5.8] C. A. J. Fletcher, "Computational techniques for fluid dynamics", Vol.I, Springer-Verlag, (1988).
- [5.9] R. L. Halfman, H. C. Johnson, S. M. Haley "Evaluation of high-angle-of-attack aerodynamic-derivative data and stall flutter prediction techniques", *NACA Report 2533*, (1951).
- [5.10] W. Hirt, A. A. Amsden, J. L. Cook, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds", *J. Comput. Phys.*, **14**, (1974), 227.
- [5.11] A. Huerta, W. K. Liu, "Viscous flow with large surface motion", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **69**, (1988), 227-324.
- [5.12] F. Kreith, "Principi di trasmissione del calore", Liguori Ed. (1997).
- [5.13] S. Kuroda, "Numerical simulation of flow around a box girder of a long span suspension bridge", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **67-68**, (1997), 239-252.
- [5.14] A. Larsen, J. H. Walther, "Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulations", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **67-68**, (1997), 253-265.
- [5.15] A. Larsen, J. H. Walther, "Discrete vortex simulation of flow around five generic bridge deck sections", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **77-78**, (1998), 591-602.
- [5.16] S. Lee, J. Seok Lee, J. D. Kim, "Prediction of vortex-induced wind loading on long-span bridges", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **67-68**, (1997), 267-278.
- [5.17] S. Lee, "Unsteady aerodynamic force prediction on a square cylinder using $k - \epsilon$ turbulence models", *J. Wind Engrg. and Ind. Aerodyn.*, **67-68**, (1997), 79-90.
- [5.18] F. Maceri, G. Vairo, "Modelling and simulation of long-span bridges under aerodynamic loads", *Proc. I Colloquium Lagrangianum*, Taormina (2000).
- [5.19] F. Maceri, G. Vairo, "Simulazione numerica dello stall flutter nei ponti strallati di grande luce", *Proc. XXX AIAS Congress*, Alghero (2001).
- [5.20] G. E. Mase, "Meccanica dei continui", Etas Libri (1976).
- [5.21] B. Mohammadi, O. Pironneau, "Unsteady separated turbulent flows computations with wall-laws and $k - \epsilon$ model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **148**, (1997), 393-405.
- [5.22] T. A. Reinhold, M. Brinch, A. Damsgaard, A., "Wind Tunnel tests for the Great Belt Link", in *Aerodynamics of Large Bridges*, A. Larsen ed., Balkema, Rotterdam, (1992).
- [5.23] P. J. Roache, "Computational fluid dynamics", Hermosa Publishers", New Mexico, (1982).

- [5.24] W. Rodi, "Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff-bodies", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **69-71**, (1997), 55-75.
- [5.25] P. J. O'Rourke, D. C. Haworth, R. Ranganathan, "Three-dimensional computational fluid dynamics", Los Alamos National Laboratory, (1998), LA-13427-MS.
- [5.26] R. H. Scanlan, "Amplitude and turbulence effects on bridge flutter derivatives", *J. Struct. Engrg.* **123**(2) (1997) 232-236.
- [5.27] H. Schlichting, "Boundary layer theory", McGraw-Hill, (1979).
- [5.28] R. P. Selvam, M. J. Tarini, A. Larsen, "Computer modelling of flow around bridges using LES and FEM", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **77-78**, (1998), 643-651.
- [5.29] M. Souli, A. Ouahsine, L. Lewin, "ALE formulation for fluid-structure interaction problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, (2000), 659-675.
- [5.30] G. Strang, "Introduction to applied mathematics", Wellesley-Cambridge Press, (1986).
- [5.31] Y. Suzuki, K. Mizuguchi, S. Sakuma, T. Maekawa, T. Ueda, Y. Kobayashi, "Field observation of aerodynamic response of Meiko West Bridge", *Report of aerodynamic study on cables in cable-stayed bridges*, (1997).
- [5.32] B. van Leer, *J. Comput. Phys.*, **32**, 101 (1979).
- [5.33] W. A. Wall, E. Ramm, "Fluid-Structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method", *Proc. fourth World Congress on Computational Mechanics*, Argentina, (1998).
- [5.34] J. H. Walther, A. Larsen, "Two dimensional discrete vortex method for application to bluff body aerodynamics", *J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn.*, **67-68**, (1997), 183-193.
- [5.35] J. F. Wendt, "Computational fluid dynamics", A von Kármán Institute Book, Springer-Verlag, (1992).
- [5.36] F. M. White, "Viscous fluid flow", II ed., McGraw-Hill, (1991).
- [5.37] D. C. Wilcox, "Turbulence modeling for CFD", DCW Ind., California (2nd Ed.), (1998).
- [5.38] V. Yakhot, S. A. Orszag, "Renormalization Group Analysis of Turbulence: 1. Basic Theory", *J. Scientific Computing*, **1**, (1986), 3-51.
- [5.39] G. Vairo, L. Ammassari, "Una tecnica di simulazione numerica per il calcolo dei coefficienti aeroelastici delle sezioni da ponte", *Proc. XXIX AIAS Congress*, Lucca (2000).
- [5.40] G. Vairo, "Wind loads simulation for long-span cable-stayed bridges", *Proc. ISCS Congress*, Lecce (2000).
- [5.41] G. Vairo, "Numerical simulation of wind loads on long-span bridges", *Proc. Eur. Sim. Meet.*, Delft, (2001).
- [5.42] G. Vairo, "A numerical model for wind loads simulation on long-span bridges", *Simulation Practice and Theory*, to appear, (2002).
- [5.43] M. Virlogeux, "Wind design and analysis for the Normandy Bridge", in *Aerodynamics of Large Bridges*, A. Larsen ed., Balkema, Rotterdam, (1992).
- [5.44] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "The Finite Element Method", Mc-Graw Hill (4th Ed.), (1998).

SEZIONE CIRCOLARE

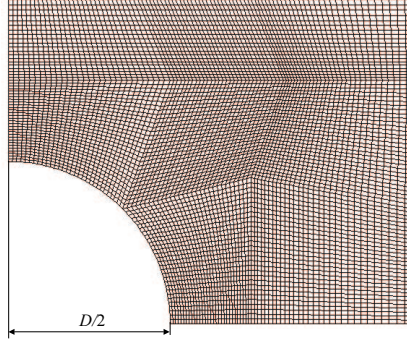


Fig. 5.14: Particolare della discretizzazione nella zona di separazione del flusso per una delle griglie di calcolo adottate nel caso di profilo circolare $((\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2})$.

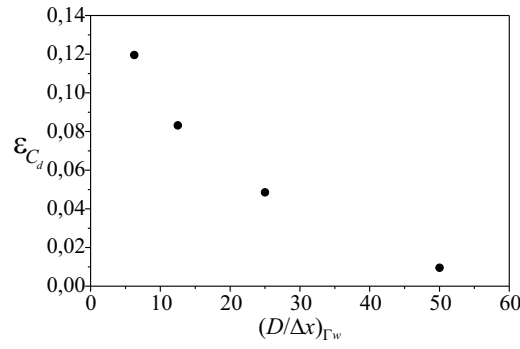


Fig. 5.15: Errore relativo ϵ_{C_d} per il coefficiente medio di *drag* di una sezione circolare tra la soluzione numerica ed il valore misurato sperimentalmente al variare dell'infitimento locale della griglia in corrispondenza di Γ_w ($Re = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$).

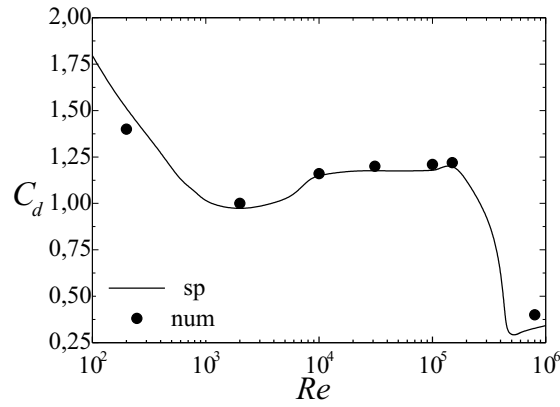


Fig. 5.16: Coefficiente medio di *drag* per una sezione circolare al variare del numero di Re ($Ma_{\Gamma_u} = 0.1$; $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$).

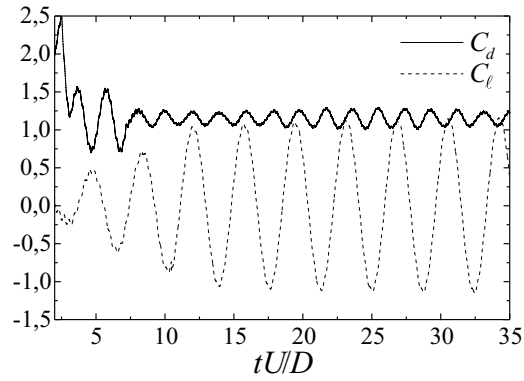


Fig. 5.17: Andamenti nel tempo dei coefficienti di portanza e resistenza ottenuti numericamente per una sezione circolare ($Re = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$).

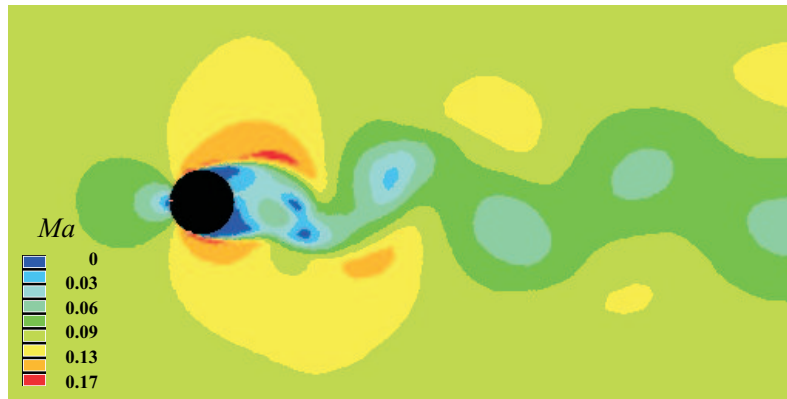


Fig. 5.18: Distribuzione del numero di Mach valutata numericamente attorno ad una sezione circolare ($Re = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/D = 45$).

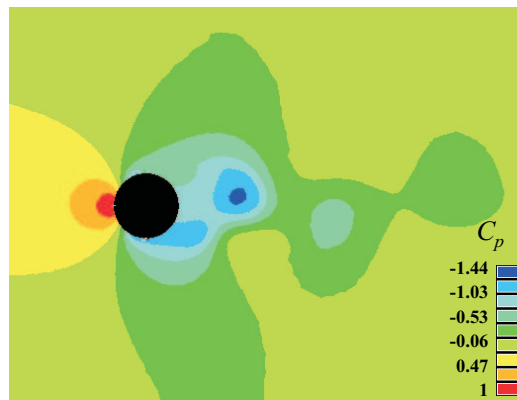


Fig. 5.19: Distribuzione del coefficiente di pressione C_p valutata numericamente attorno ad una sezione circolare ($Re = 10^4$, Ma_{Γ_u} , $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/D = 45$).

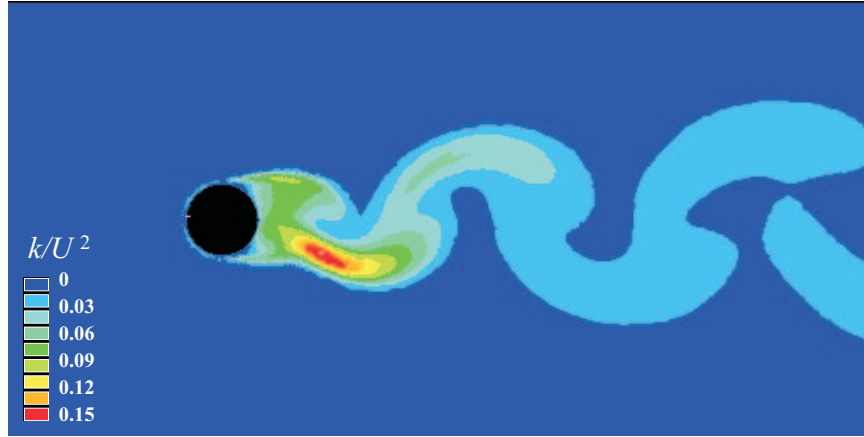


Fig. 5.20: Distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale (k/U^2) valutata numericamente attorno ad una sezione circolare ($Re = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/D = 45$).

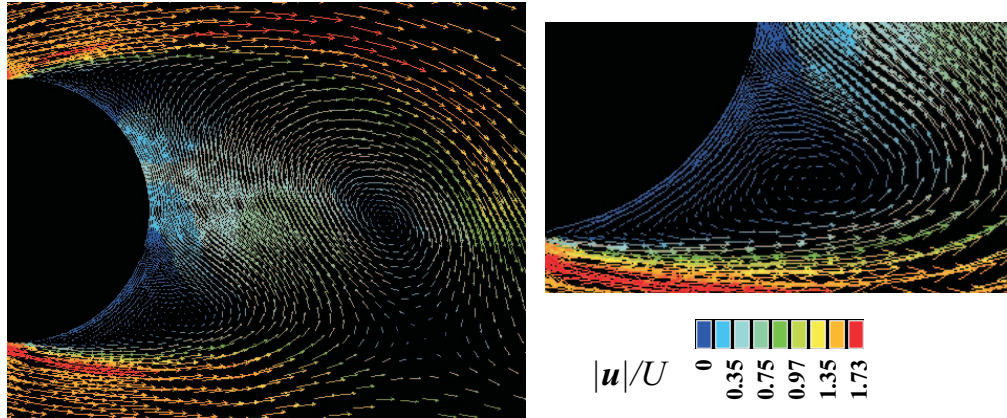


Fig. 5.21: Dettagli del campo di moto simulato attorno ad una sezione circolare ($Re = 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/D = 45$).

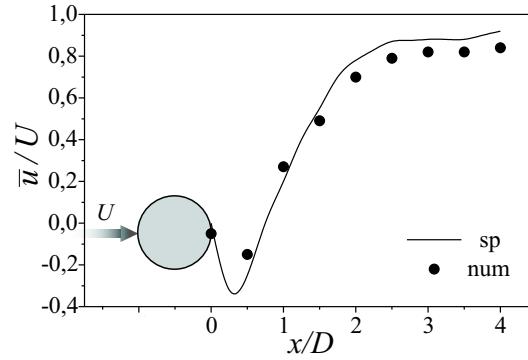


Fig. 5.22: Variazione della velocità media lungo l'asse di simmetria longitudinale nella zona posteriore del profilo nel caso di sezione circolare $((\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 0.8 \times 10^6$). Confronto tra i valori ottenuti numericamente ed i dati sperimentali [5.2].

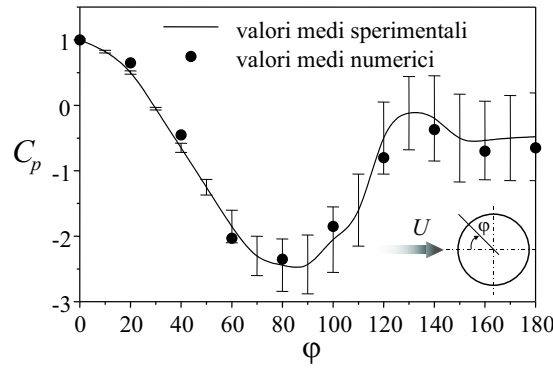


Fig. 5.23: Distribuzione del coefficiente medio di pressione C_p su un profilo circolare ($Re = 0.8 \times 10^6$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$). Confronto tra i valori ottenuti numericamente ed i dati sperimentali [5.2].

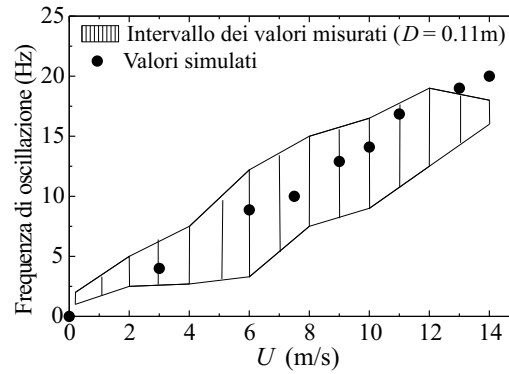


Fig. 5.24: Valori medi della frequenza di oscillazione indotta dal fenomeno di *vortex-shedding* per un cavo del Meiko West Bridge in Giappone [5.31] ($D = 0.11m$, $(\Delta x/D)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$).

SEZIONE QUADRATA

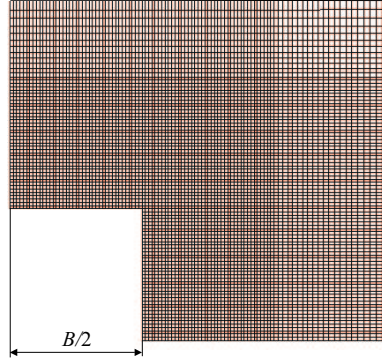


Fig. 5.25: Particolare di una delle griglie di calcolo adottate nel caso di sezione quadrata $((\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2})$.

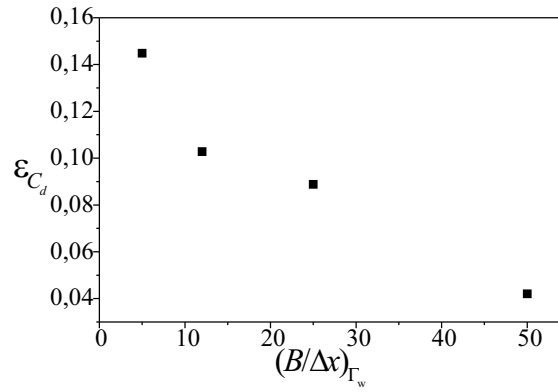


Fig. 5.26: Errore relativo ϵ_{C_d} per il coefficiente medio di *drag* di una sezione quadrata tra la soluzione numerica ed il valore misurato sperimentalmente al variare dell'infiltramento locale della griglia in corrispondenza di Γ_w ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$).

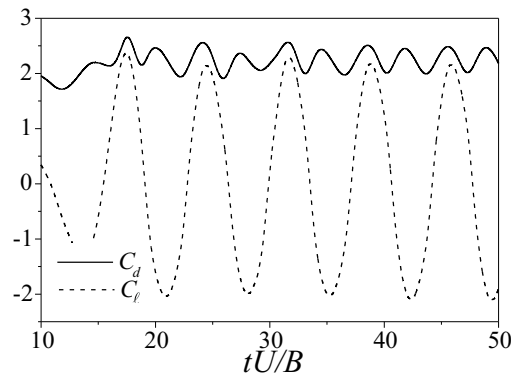


Fig. 5.27: Andamenti nel tempo dei coefficienti di portanza e resistenza ottenuti numericamente per una sezione quadrata ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$).

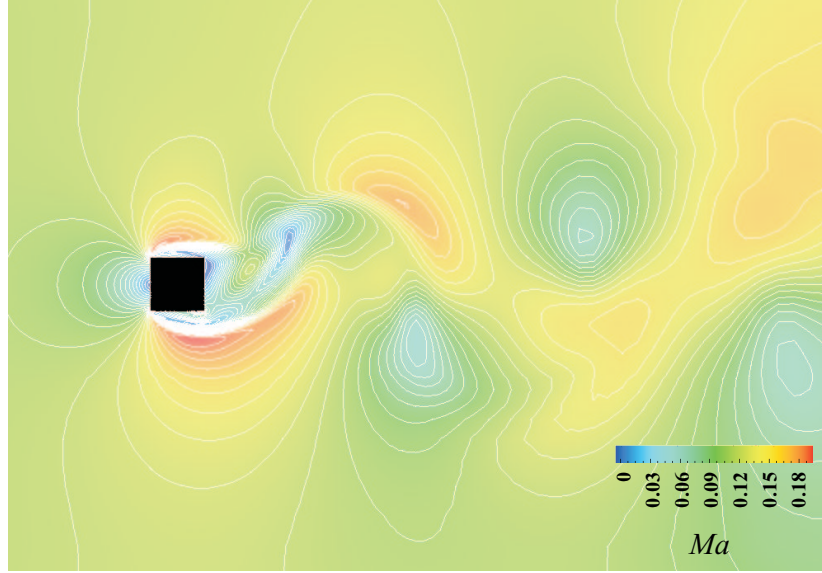


Fig. 5.28: Distribuzione del numero di Mach valutata numericamente attorno ad una sezione quadrata ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/B = 55$).

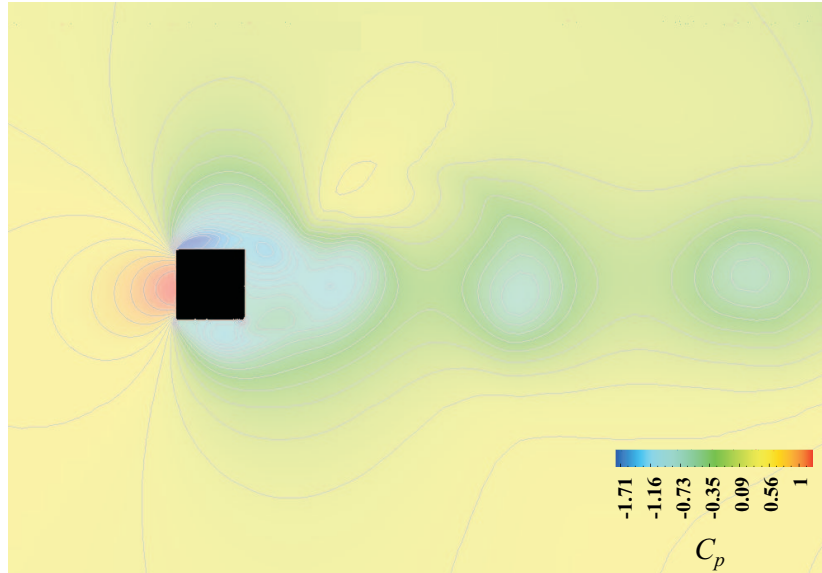


Fig. 5.29: Distribuzione del coefficiente di pressione C_p attorno ad una sezione quadrata valutata numericamente ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/B = 55$).

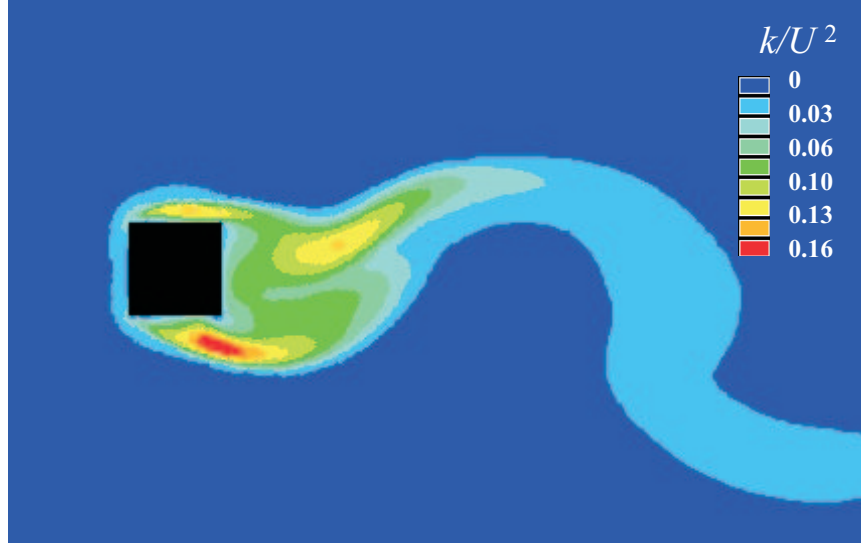


Fig. 5.30: Distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale (k/U^2) valutata numericamente attorno ad una sezione quadrata ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/B = 55$).

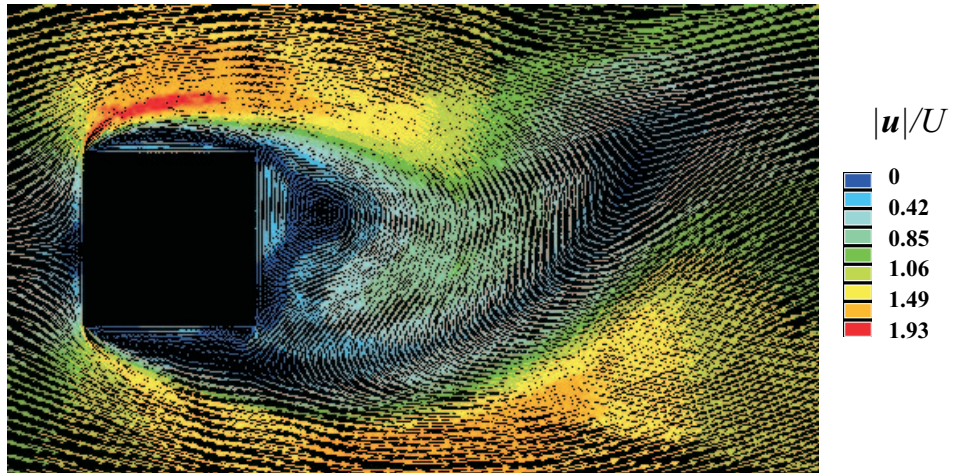


Fig. 5.31: Dettaglio del campo di moto simulato attorno ad una sezione quadrata ($Re = 2.2 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $tU/B = 55$).

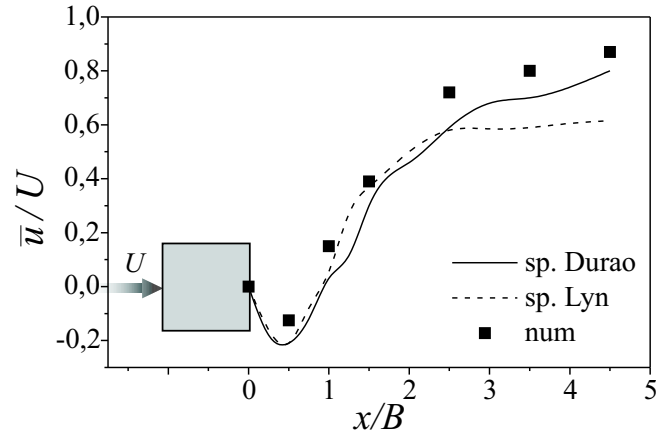


Fig. 5.32: Variazione della velocità media lungo l'asse di simmetria longitudinale nella zona posteriore del profilo $((\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 2.2 \times 10^4$). Confronto tra i valori ottenuti numericamente e quelli sperimentali [5.24].

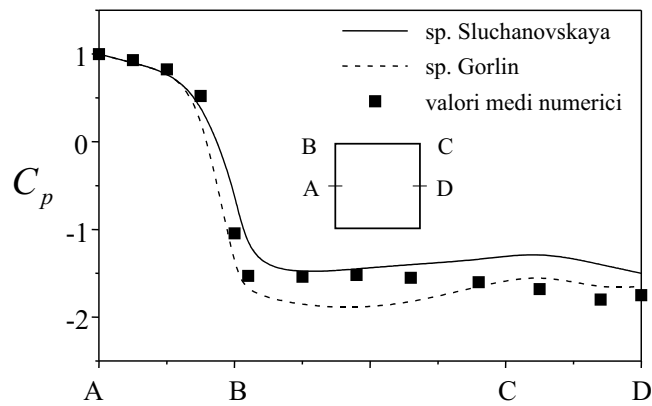


Fig. 5.33: Distribuzione del coefficiente medio di pressione su un profilo quadrato $((\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.0 \times 10^{-2}$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 2.2 \times 10^4$). Confronto tra i valori ottenuti numericamente e quelli sperimentali [5.2].

SEZIONE RETTANGOLARE

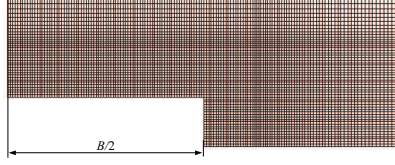


Fig. 5.34: Particolare della griglia di calcolo adottata per una sezione rettangolare (1:4) $((\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.2 \times 10^{-2})$.

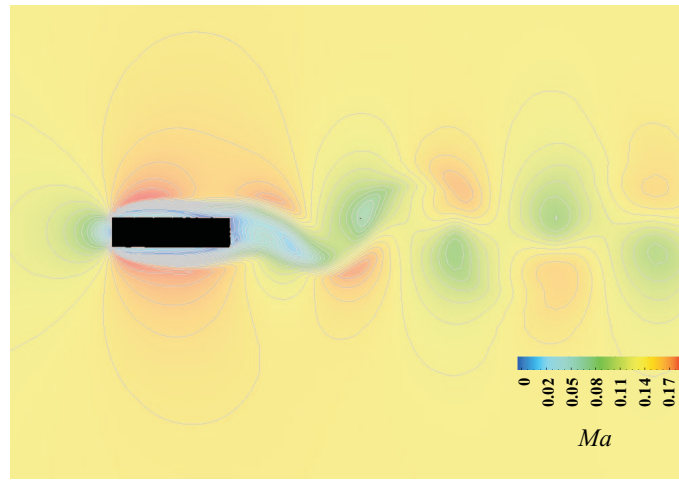


Fig. 5.35: Distribuzione del numero di Mach valutata numericamente attorno ad una sezione rettangolare (1:4) ($Re = 2.0 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.2 \times 10^{-2}$, $tU/B = 45$).

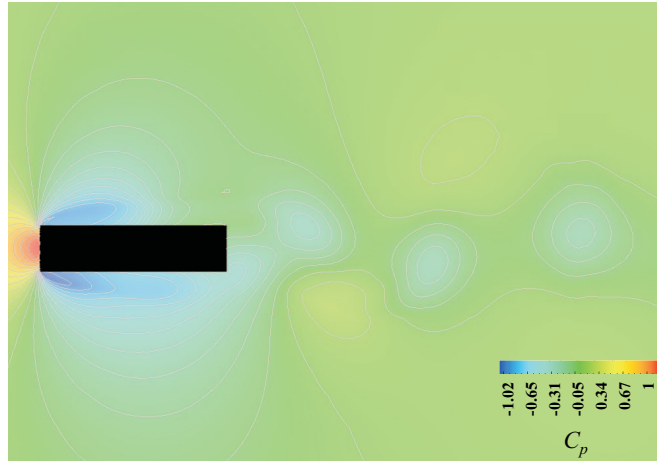


Fig. 5.36: Distribuzione del coefficiente di pressione C_p valutata numericamente attorno ad una sezione rettangolare ($Re = 2.0 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.2 \times 10^{-2}$, $tU/B = 45$).

SEZIONE RETTANGOLARE

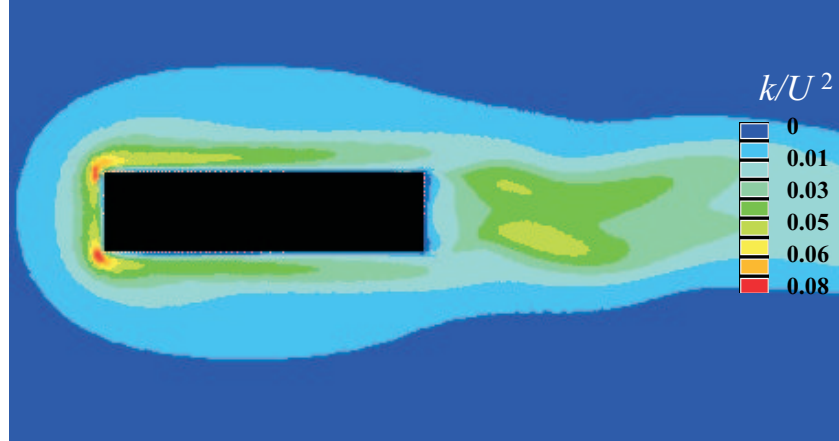


Fig. 5.37: Distribuzione dell'energia cinetica turbolenta adimensionale (k/U^2) valutata numericamente attorno ad una sezione rettangolare (1:4) ($Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 2.0 \times 10^4$, $tU/B = 45$, $\Delta x/B = 2.2 \times 10^{-2}$).

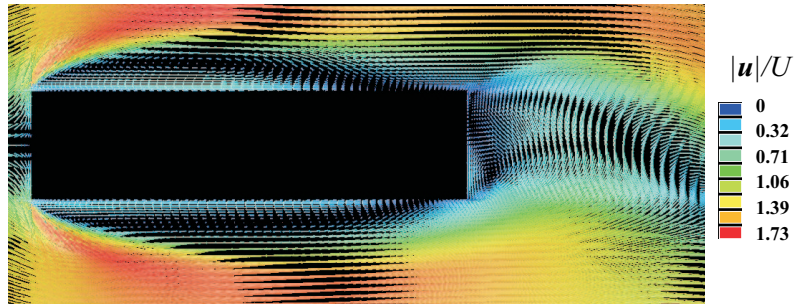


Fig. 5.38: Dettaglio del campo di moto simulato attorno ad una sezione rettangolare (1:4) ($Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $Re = 2.0 \times 10^4$, $tU/B = 45$, $\Delta x/B = 2.2 \times 10^{-2}$). del coefficiente di pressione C_p valutata numericamente attorno ad una sezione rettangolare ($Re = 2.0 \times 10^4$, $Ma_{\Gamma_u} = 0.1$, $(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.2 \times 10^{-2}$, $tU/B = 45$).

SEZIONI DEL GREAT BELT LINK

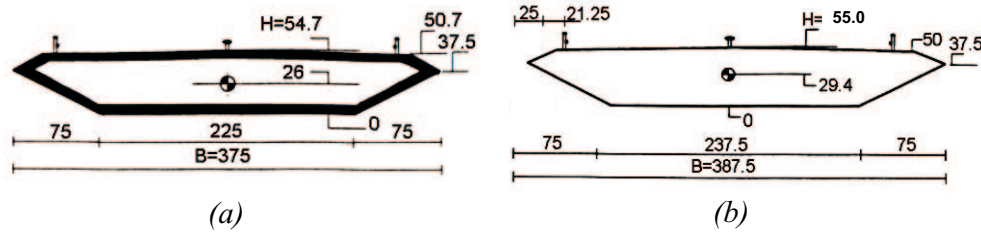


Fig. 5.39: Modelli di sezione (scala 1:80, dimensioni in mm) del *Great Belt East Bridge* (a) e del *Great Belt West Bridges* (b) [5.22].

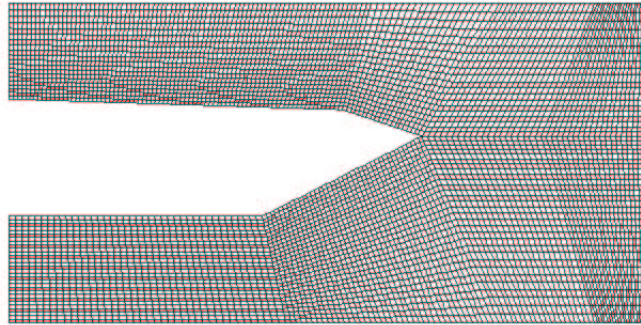


Fig. 5.40: Particolare della griglia di calcolo utilizzata per il modello di sezione del *Great Belt East Bridge* ($(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 2.1 \times 10^{-2}$).

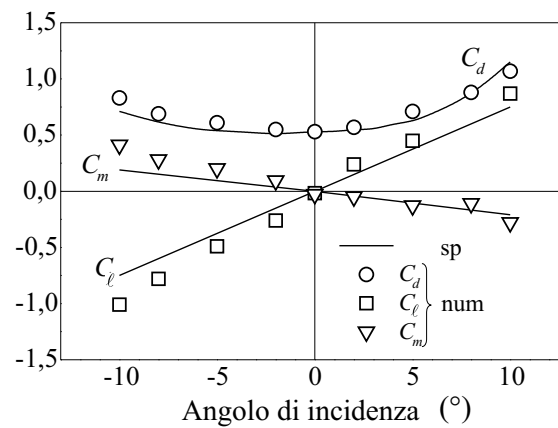


Fig. 5.41: Confronto tra i coefficienti aerodinamici stazionari medi ottenuti sperimentalmente [5.22] e quelli valutati numericamente per il modello di sezione del *Great Belt East Bridge* al variare dell'angolo di incidenza della corrente ($Re = 1.1 \times 10^5$).

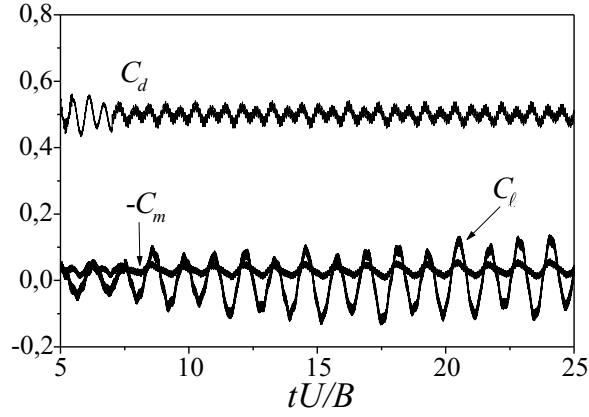


Fig. 5.42: Andamenti nel tempo dei coefficienti aerodinamici adimensionali C_d , C_l e C_m per il modello di sezione del *Great Belt East Bridge* investito da una corrente con angolo di incidenza nullo ($Re = 1.1 \times 10^5$).

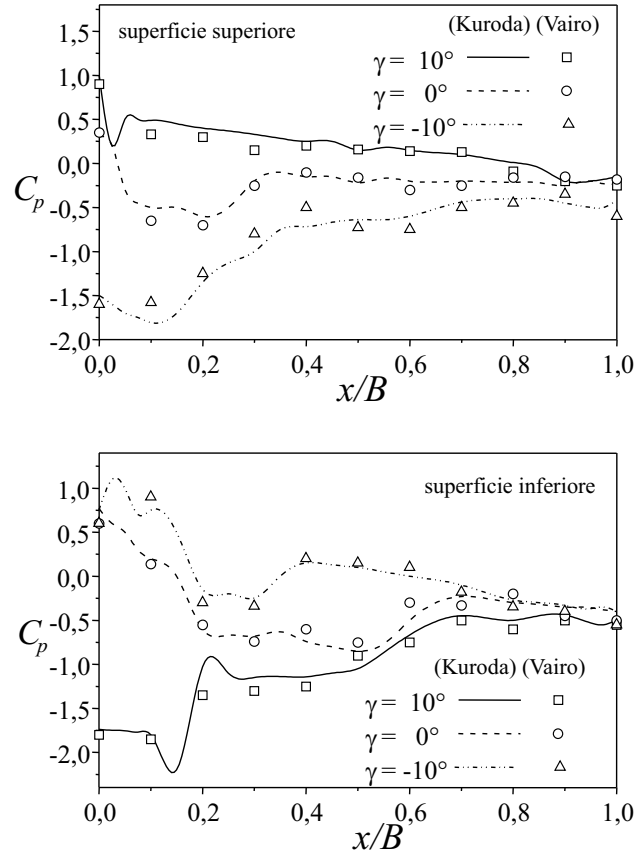


Fig. 5.43: Andamenti del coefficiente medio di pressione sulla superficie superiore ed inferiore del profilo del modello di sezione del *Great Belt East Bridge* per diversi angoli di incidenza della corrente. Confronto tra i risultati numerici proposti in [5.13] e quelli ottenuti con il presente modello ($Re = 1.1 \times 10^5$).

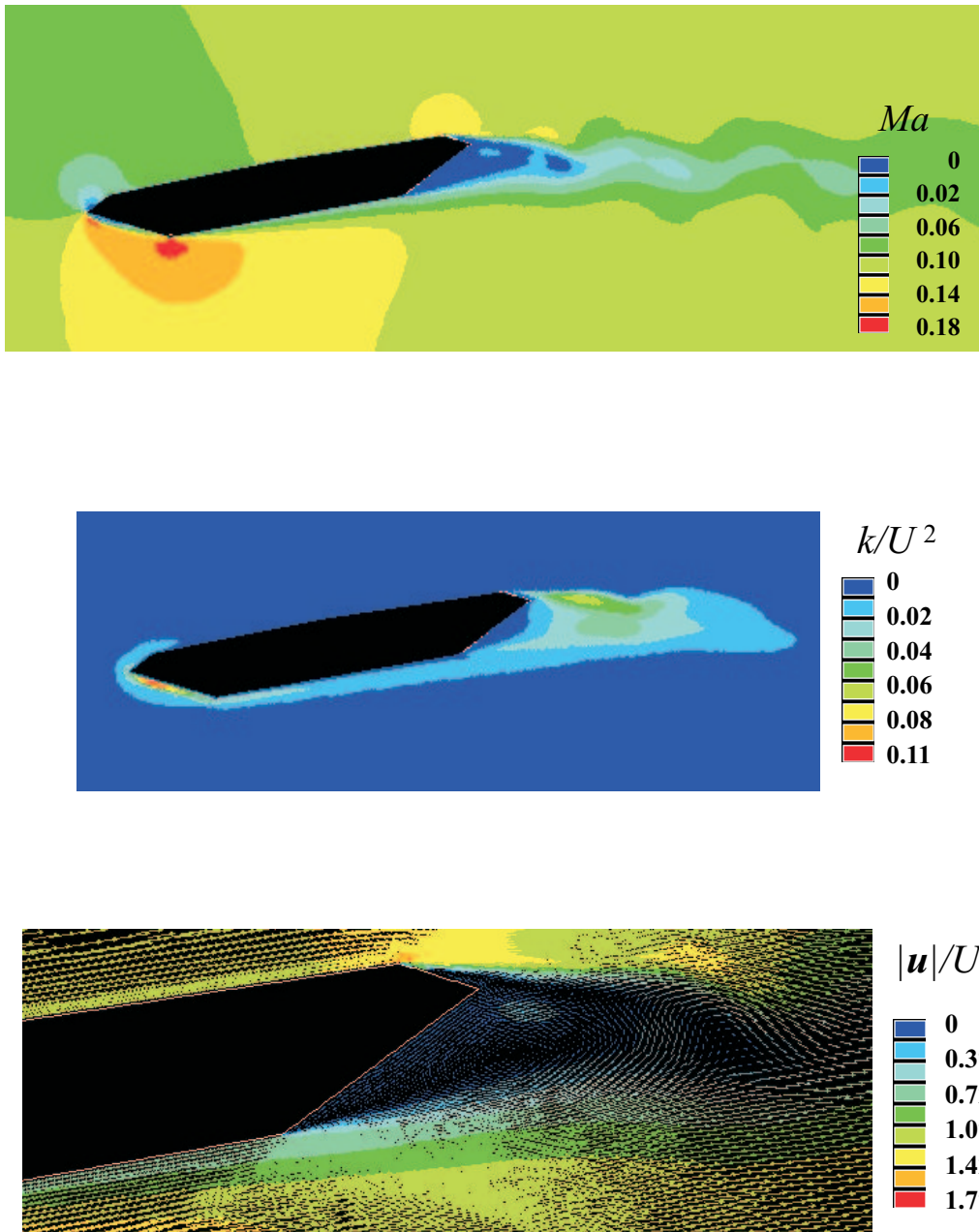


Fig. 5.44: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione del *Great Belt East Bridge* investito da una corrente con angolo di incidenza pari a -10° ($Re = 1.1 \times 10^5$, $tU/B = 30$).

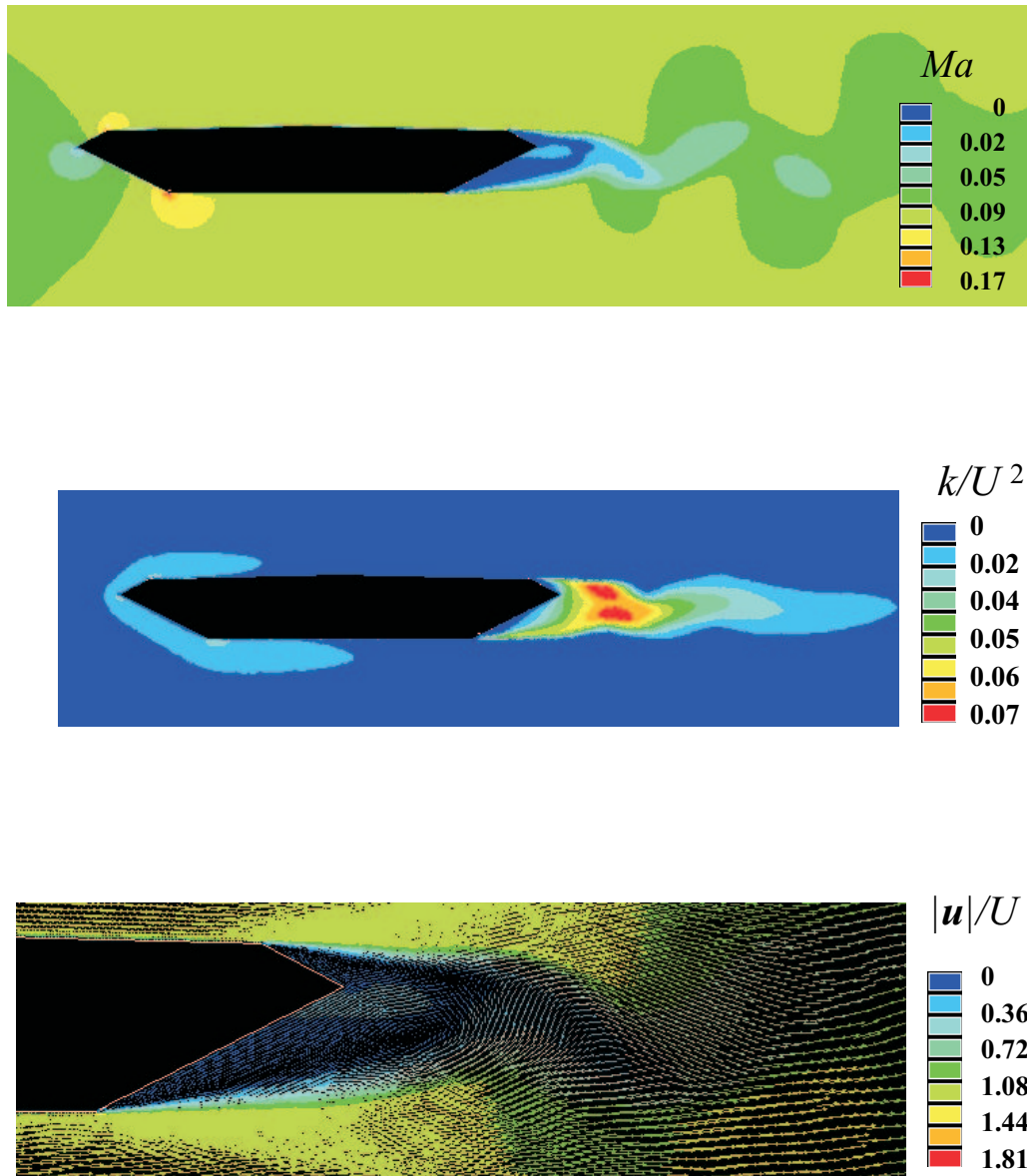


Fig. 5.45: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione del *Great Belt East Bridge* investito da una corrente con angolo di incidenza pari a 0° ($Re = 1.1 \times 10^5$, $tU/B = 30$).

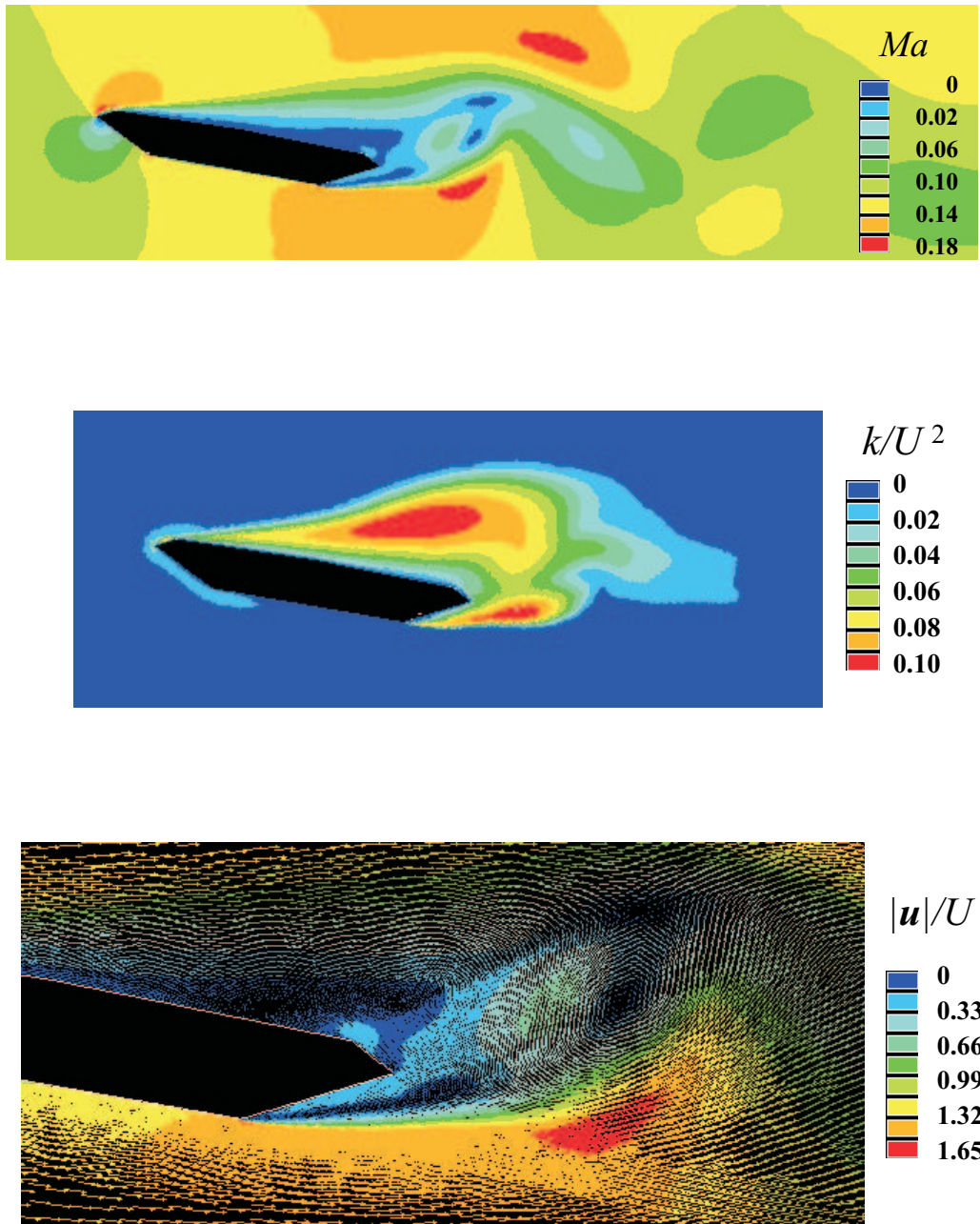


Fig. 5.46: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione del *Great Belt East Bridge* investito da una corrente con angolo di incidenza pari a 10° ($Re = 1.1 \times 10^5$, $tU/B = 30$).

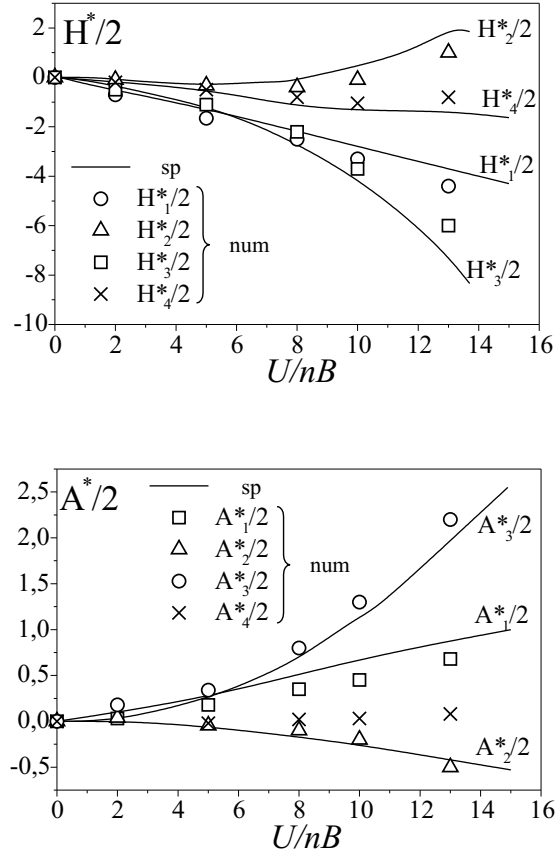


Fig. 5.47: Derivate di *flutter* al variare della velocità ridotta per il modello di sezione del *Great Belt West Bridge* sotto un angolo medio di incidenza nullo. Confronto fra i risultati numerici ed i rilievi sperimentali [5.22].

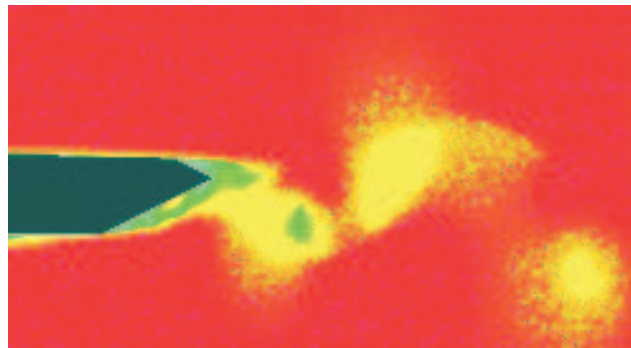


Fig. 5.48: Dettaglio, in corrispondenza del bordo posteriore della sezione del *Great Belt West Bridge* soggetta a moto armonico forzato verticale, del campo simulato di energia cinetica turbolenta k ($U/nB = 8$, $tU/B = 30$).

SEZIONI DEL PONTE DI NORMANDIA

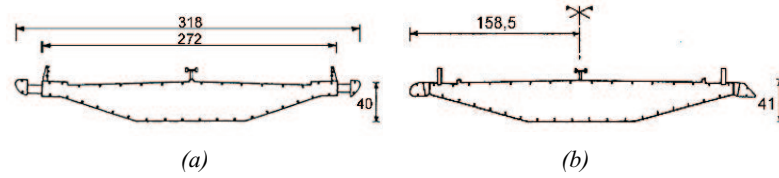


Fig. 5.49: Modelli di sezione (scala 1:70, dimensioni in mm) del ponte di Normandia relativi all'*Avant-Projet* del 1987 (a) ed al *Projet Détaillé* del 1989 (b) [5.43].

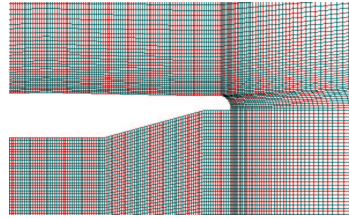


Fig. 5.50: Particolare della griglia di calcolo utilizzata per il modello di sezione del ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 ($(\Delta x/B)_{\Gamma_w} = 1.9 \times 10^{-2}$).

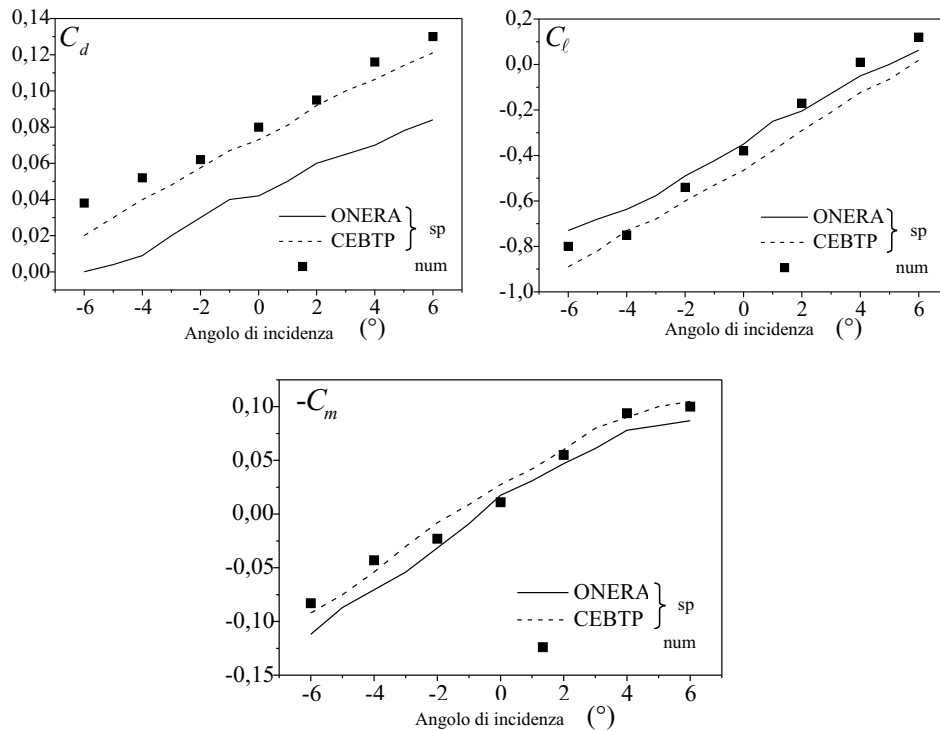


Fig. 5.51: Confronto tra i coefficienti aerodinamici stazionari medi ottenuti sperimentalmente [5.43] da ONERA e CBTP e quelli valutati numericamente per il modello di sezione del ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 ($Re = 1.5 \times 10^5$).

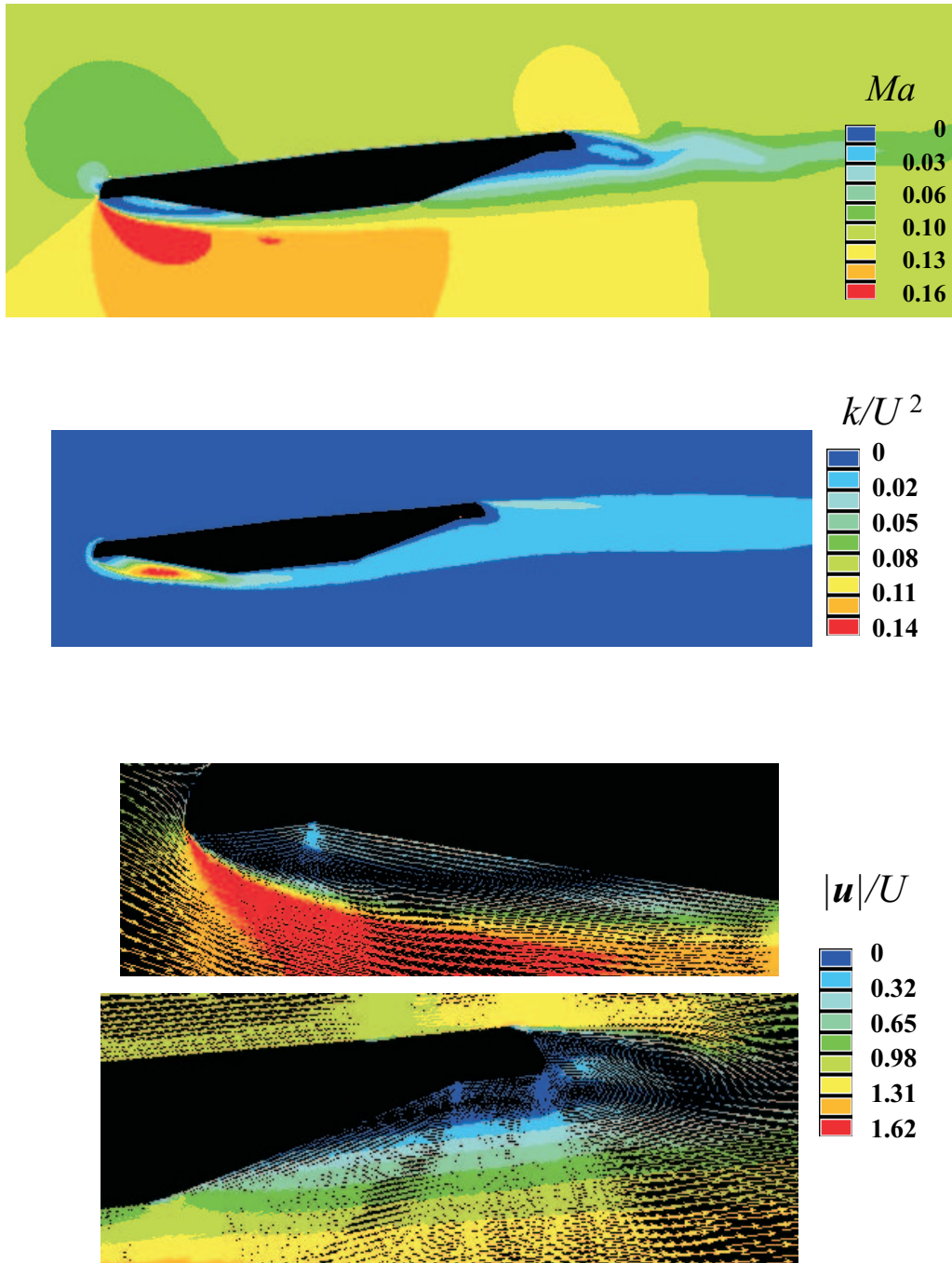


Fig. 5.52: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione di ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 investito da una corrente con angolo di incidenza pari a -6° ($Re = 1.5 \times 10^5$, $tU/B = 25$).

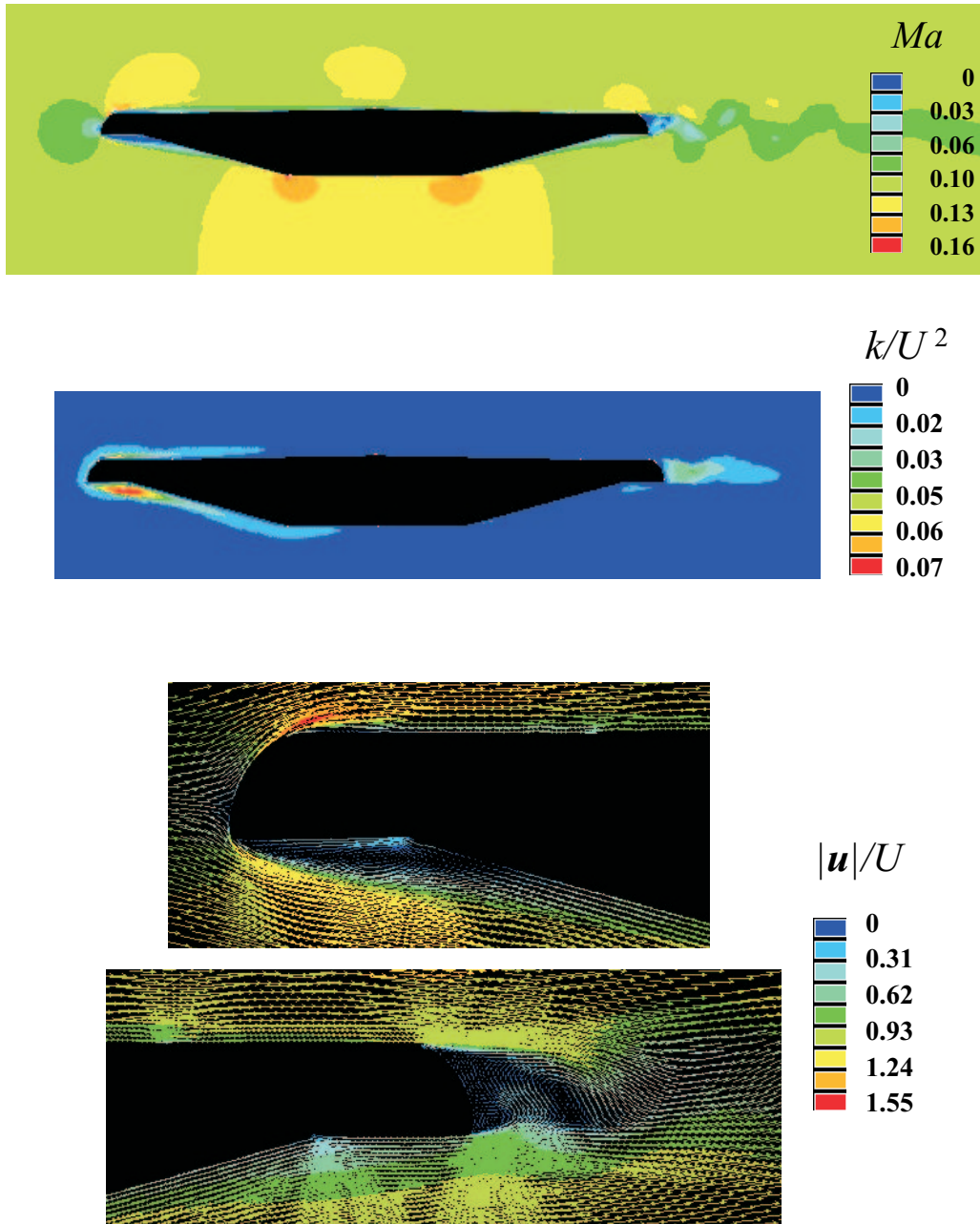


Fig. 5.53: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione del ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 investito da una corrente con angolo di incidenza pari a 0° ($Re = 1.5 \times 10^5$, $tU/B = 25$).

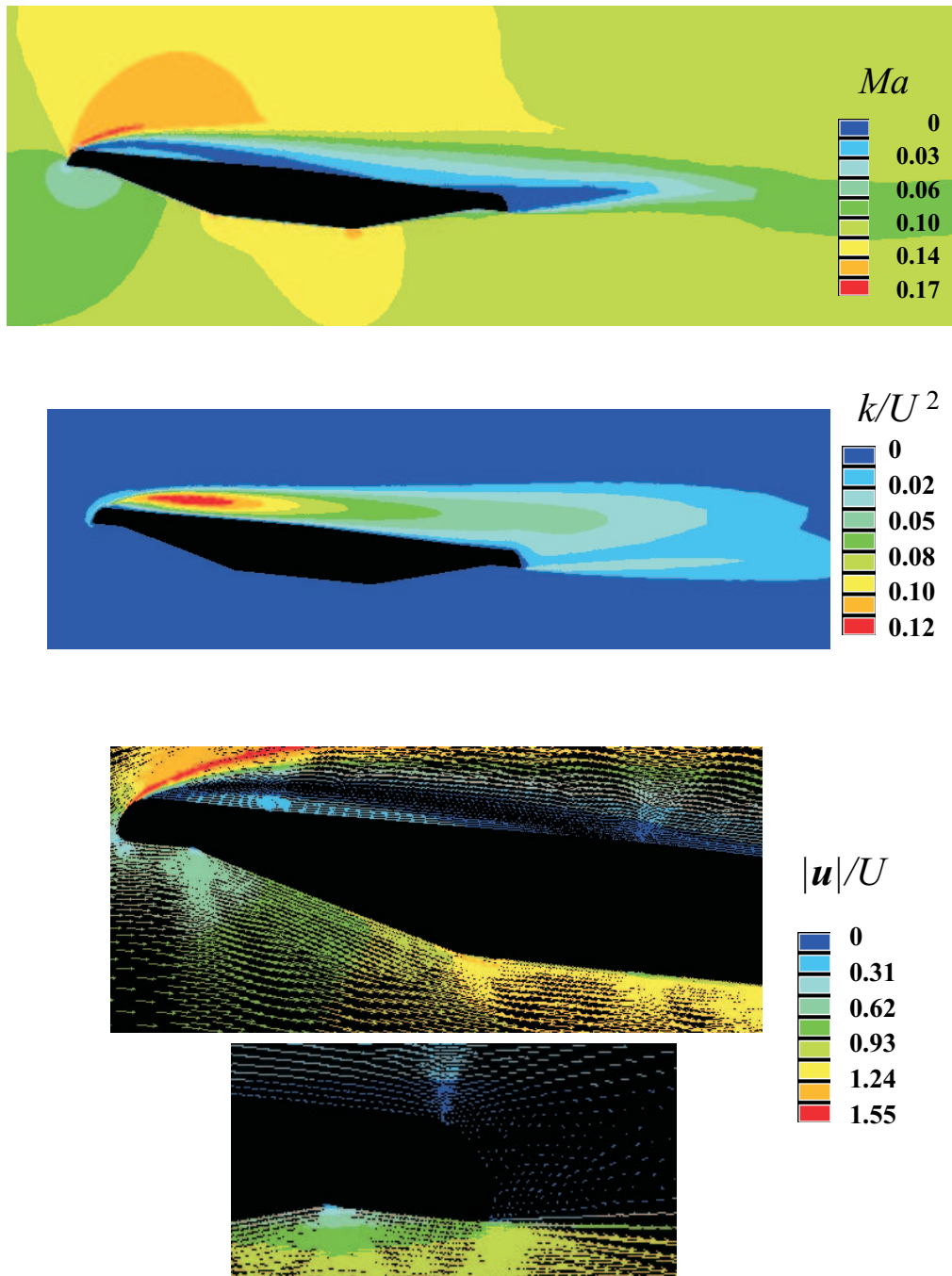


Fig. 5.54: Distribuzioni del numero di Mach e dell'energia cinetica turbolenta adimensionale k/U^2 , dettaglio del campo di moto attorno al modello di sezione del ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 investito da una corrente con angolo di incidenza pari a 6° ($Re = 1.5 \times 10^5$, $tU/B = 25$).

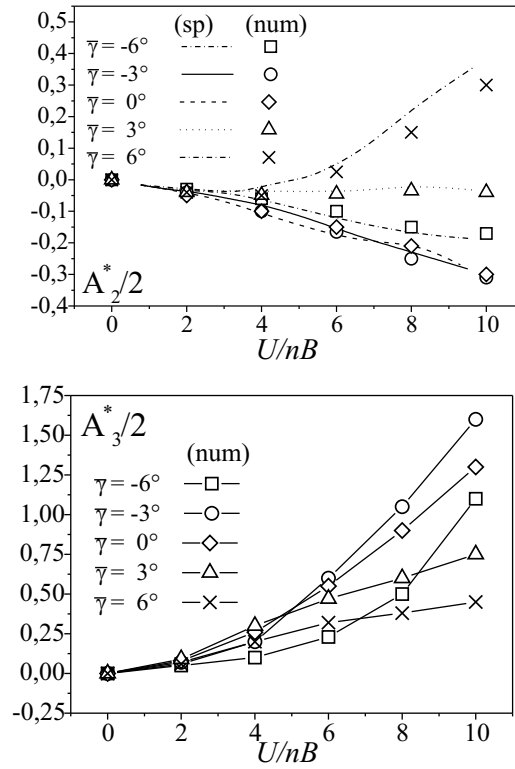


Fig. 5.55: Derivate di *flutter* al variare della velocità ridotta per il modello di sezione del ponte di Normandia relativo al *Projet Détaillé* del 1989 per diversi valori dell'angolo medio di incidenza. Confronto fra i risultati numerici ed i rilievi sperimentali ove disponibili [5.43].

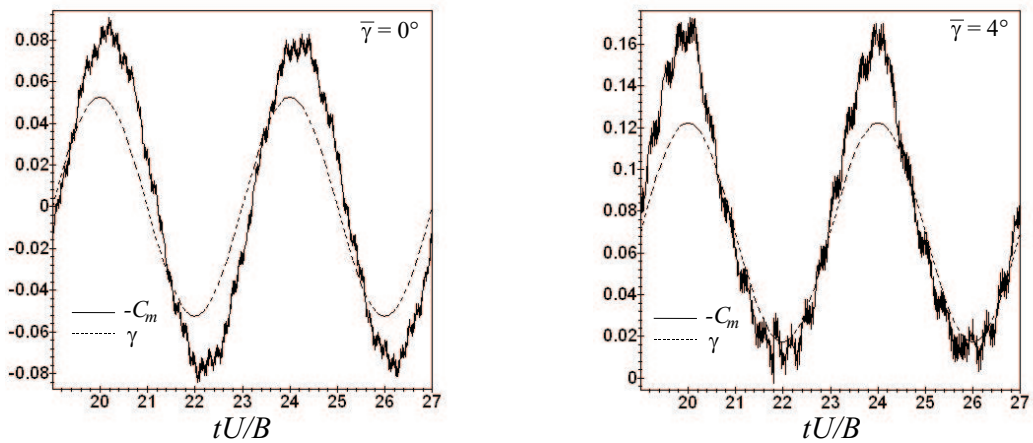


Fig. 5.56: Andamenti nel tempo del coefficiente adimensionale di momento corrispondenti a due diversi angoli medi di incidenza e relativi ad una condizione di moto armonico forzato angolare per il modello di sezione del ponte di Normandia (*Projet Détaillé* del 1989 - $Re = 1.5 \times 10^5$, $K = 1.57$).

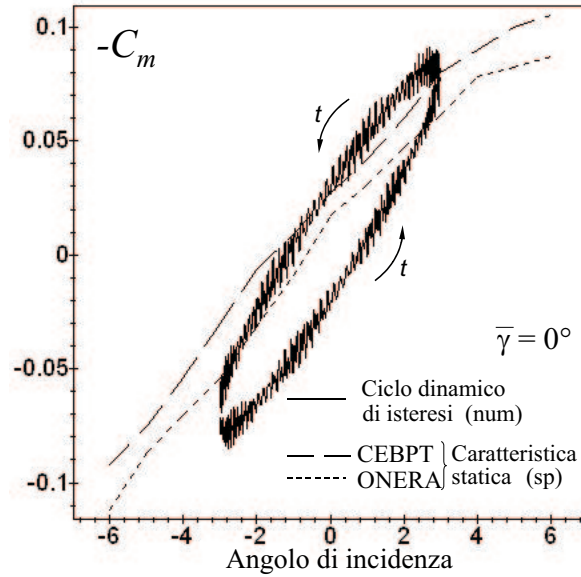


Fig. 5.57: Ciclo medio di isteresi del coefficiente di momento C_m corrispondente all'andamento di figura 5.56, con angolo medio di incidenza nullo.

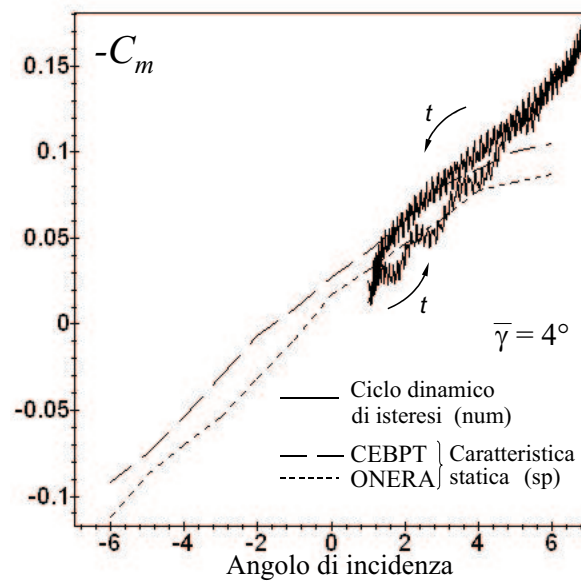


Fig. 5.58: Ciclo medio di isteresi del coefficiente di momento C_m corrispondente all'andamento di figura 5.56, con angolo medio di incidenza pari a -4° .

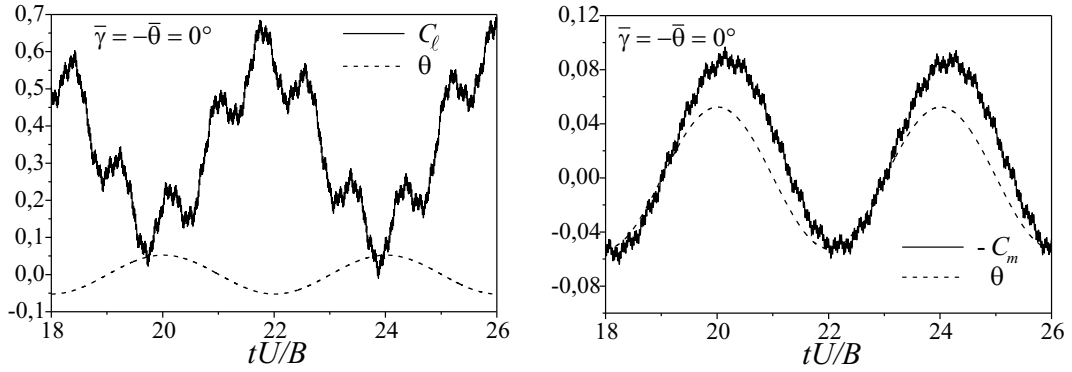


Fig. 5.59: Andamenti nel tempo ottenuti numericamente dei coefficienti C_ℓ e C_m per un moto armonico forzato angolare con angolo medio di incidenza nullo del modello di sezione del ponte di Normandia relativo all'*Avant-Projet* del 1987. ($Re = 1.5 \times 10^5$, $K = 1.57$).

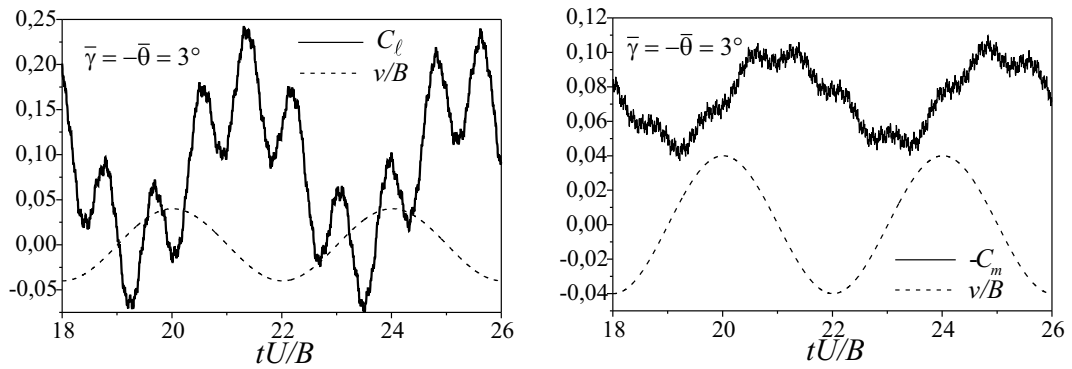


Fig. 5.60: Andamenti nel tempo ottenuti numericamente dei coefficienti C_ℓ e C_m per un moto armonico forzato verticale con angolo medio di incidenza pari a 3° del modello di sezione del ponte di Normandia relativo all'*Avant-Projet* del 1987. ($Re = 1.5 \times 10^5$, $K = 1.57$).

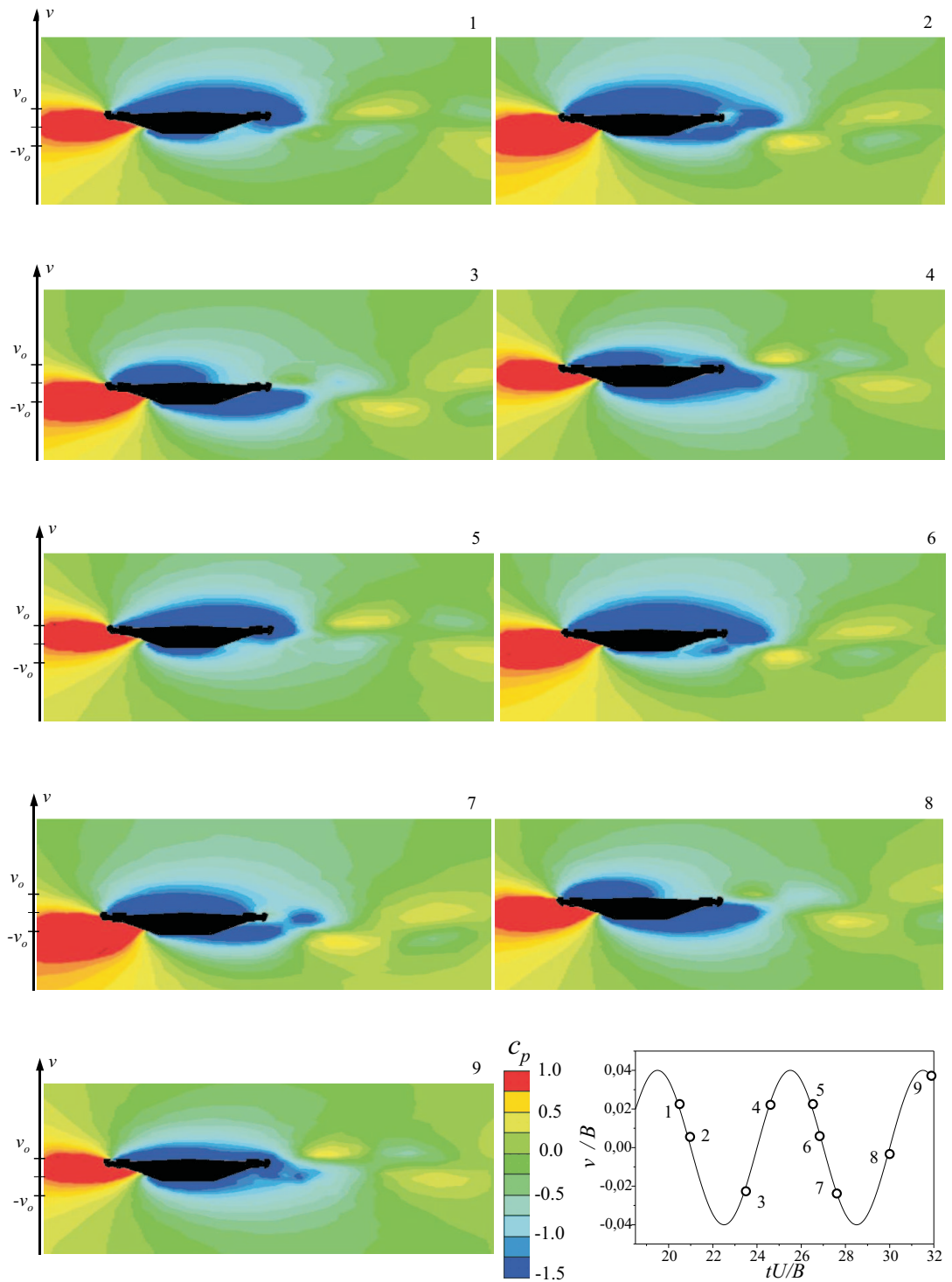


Fig. 5.61: Distribuzioni del coefficiente di pressione valutate numericamente al variare del tempo e per diverse posizioni del modello di sezione del ponte di Normandia, relativo all'*Avant-Projet* del 1987, corrispondenti ad una oscillazione armonica forzata verticale del profilo ($K = 1,05$ e $Re = 1.5 \times 10^5$).

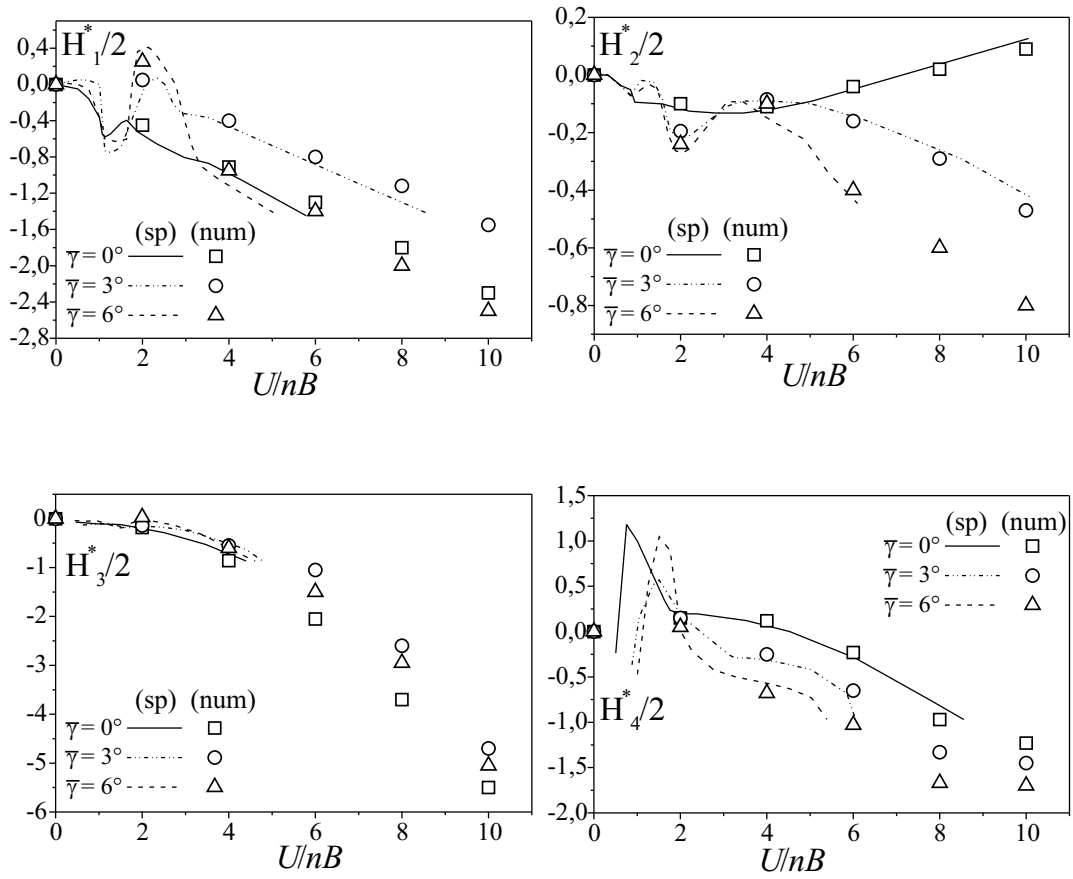


Fig. 5.62: Derivate di *flutter* di tipo H^* per il modello di sezione del ponte di Normandia relativo all'*Avant-Projet* del 1987. Confronto fra i risultati numerici e gli andamenti sperimentali [5.43] per diversi angoli medi di incidenza della corrente.

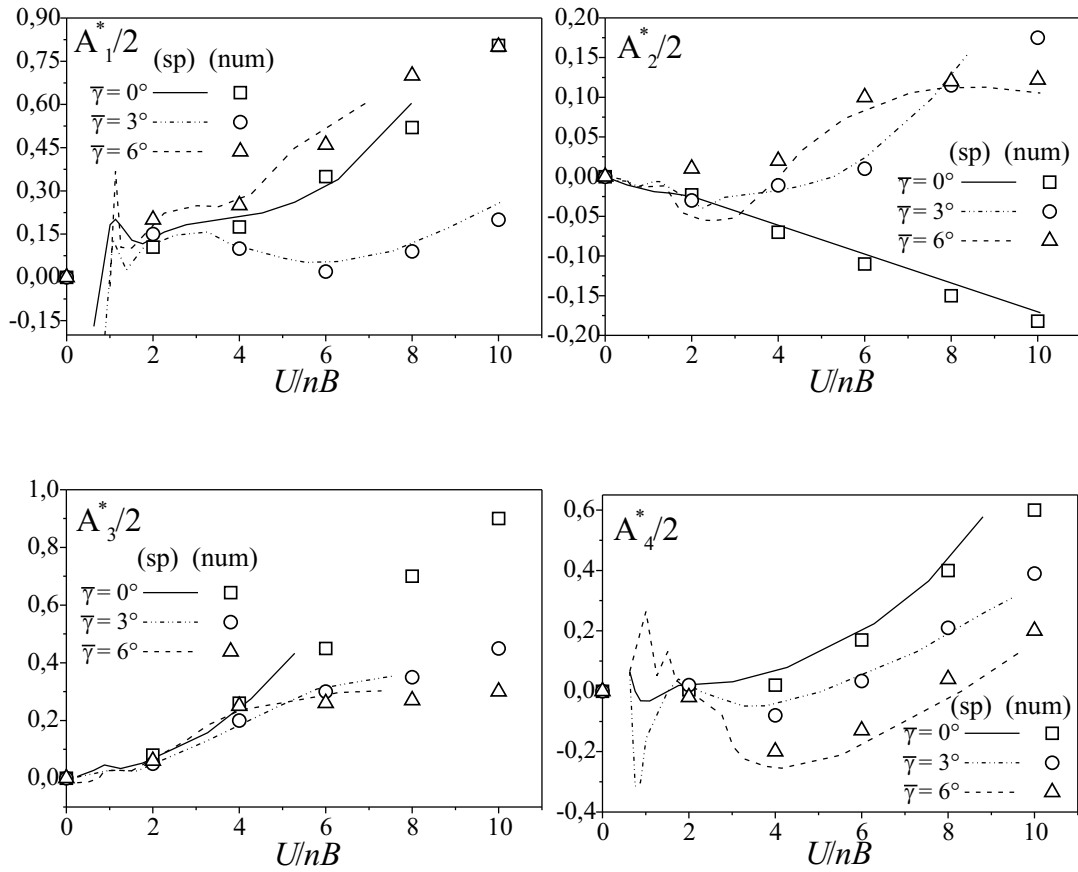


Fig. 5.63: Derivate di *flutter* di tipo A^* per il modello di sezione del ponte di Normandia relativo all'*Avant-Projet* del 1987. Confronto fra i risultati numerici e gli andamenti sperimentali [5.43] per diversi angoli medi di incidenza della corrente.