

Capitolo 7

Smorzamento passivo di vibrazioni tramite piezoelettrici

Attuatori e sensori piezoelettrici sono ormai diffusamente impiegati nella tecnica per il controllo delle vibrazioni strutturali [33], grazie alla loro capacità di convertire energia meccanica in elettrica e viceversa. Diverse sono le tipologie di controllo realizzabili.

Il controllo attivo, che utilizza gli elementi piezoelettrici sia come sensori che come attuatori, consente di ottenere smorzamenti delle vibrazioni strutturali consistenti su una larga banda in frequenza; molti sono i lavori in letteratura che trattano il controllo attivo di vibrazioni mediante piezoelettrici, ad esempio in [81, 48, 27] si studia il controllo attivo di travi, in [1, 62] si studia il controllo attivo di laminati mentre in [99, 60, 49] il controllo attivo delle vibrazioni di piastre viene applicato alla riduzione del rumore irradiato. In [43, 3, 81, 49] si mostra come uno stesso elemento piezoelettrico, mediante opportuni ponti elettrici, possa essere usato contemporaneamente come attuttore e sensore per la realizzazione di un controllo attivo collocato. Accanto ai numerosi pregi il controllo attivo presenta alcuni svantaggi: esso richiede infatti opportuni amplificatori per attuare gli elementi piezoelettrici, circuiti elettronici per amplificare e filtrare il segnale dei sensori ed infine un sistema che elabori in tempo reale il controllo; inoltre può presentare effetti di instabilità dovuti, ad esempio, ad una non perfetta modellazione dei modi di vibrazione ad alta frequenza della struttura da controllare.

Il controllo passivo, che è l'argomento di questo capitolo, è più semplice in quanto richiede soltanto un semplice circuito elettrico passivo ed ha il vantaggio di non presentare alcun problema di instabilità; d'altro canto consente una riduzione delle vibrazioni meno consistente rispetto a quella ottenibile con il controllo attivo, e su una più ristretta banda in frequenza.

Lo smorzamento passivo delle vibrazioni può essere ottenuto incollando alla struttura vibrante un piezoelettrico, i cui elettrodi sono collegati ad un circuito elettrico esterno passivo contenente almeno una resistenza elettrica R , come illustrato in figura 7.1.

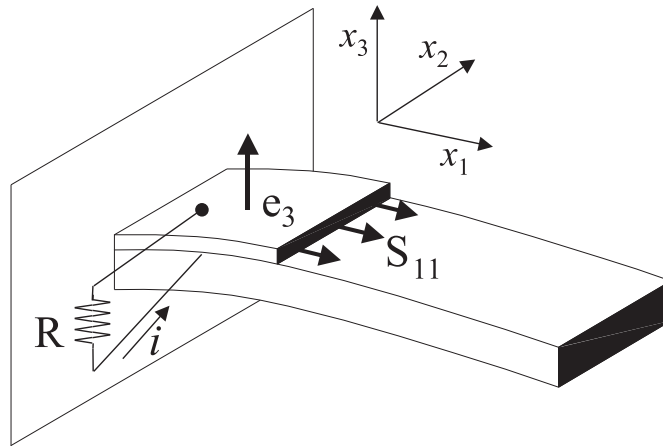


Figura 7.1: Principio di funzionamento dell'elemento piezoelettrico nello smorzamento passivo di vibrazioni

Durante il fenomeno vibratorio il piezoelettrico è sottoposto ad una estensione periodica S_{11} che induce, per effetto piezoelettrico diretto, un campo elettrico e_3 lungo x_3 . Di conseguenza circola una corrente i nel circuito esterno e viene dissipata energia elettrica attraverso l'elemento resistivo per effetto Joule [57, 67]. In ultima analisi parte dell'energia meccanica connessa con il fenomeno vibratorio è dissipata in calore e, allo smorzamento interno della struttura meccanica, si aggiunge un ulteriore smorzamento dovuto al controllo passivo. È facile rendersi conto che esiste un valore ottimo di R in corrispondenza del quale si ottiene il massimo smorzamento delle vibrazioni del sistema; basta infatti considerare le situazioni relative ai casi limite $R = 0$ e $R = \infty$: per $R = 0$ il circuito elettrico non contiene più componenti in grado di dissipare energia, per $R = \infty$ il circuito elettrico è aperto e ancora non può essere dissipata energia attraverso la resistenza. Più considerevole è lo smorzamento ottenibile aggiungendo un'induttanza L in serie alla resistenza; in questo caso il circuito elettrico, comprensivo della capacità associata al piezoelettrico, diventa oscillante e lo smorzamento ottenibile può essere massimizzato sintonizzando la frequenza di oscillazione del circuito elettrico alla frequenza di un modo proprio della struttura le cui vibrazioni si vogliono smorzare [54], come chiarito nel seguito di questo capitolo. Lo smorzamento ottenibile con un circuito oscillante, come evidenziano i ri-

sultati sperimentali presentati nel capitolo successivo, può risultare di oltre un ordine di grandezza superiore allo smorzamento interno della struttura. L'elemento piezoelettrico ed il relativo circuito elettrico agiscono sulla struttura vibrante in maniera analoga ad un assorbitore meccanico di vibrazioni [54].

Primi studi sulla fattibilità del controllo passivo mediante piezoelettrici sono riportati in [47, 45]. In [54] è presentato uno studio analitico dello smorzamento passivo delle vibrazioni mediante piezoelettrici; in tale lavoro si prende in considerazione un modello ad un solo grado di libertà meccanico, rappresentante un singolo modo di vibrazione della struttura, e sono dedotte le espressioni dei valori ottimi dei componenti relativi ad un circuito puramente resistivo e ad un circuito costituito dalla serie di un'induttanza e una resistenza. In [100, 82] sono prese in considerazione altre tipologie di circuito elettrico. In [53] è considerato un circuito esterno RL capace di auto-sintonizzarsi ad un modo di vibrazione della struttura, grazie ad un semplice controllo attivo sui valori dei componenti R e L .

Il problema di smorzare contemporaneamente in maniera passiva le vibrazioni relative a due o più modi di una struttura meccanica con un unico piezoelettrico è affrontato in [52], dove si utilizza un numero di circuiti RL in parallelo al piezoelettrico pari al numero di modi che si vogliono contemporaneamente smorzare. In questo caso non è più possibile ottenere formule esplicite per i valori ottimi dei componenti elettrici; il problema è affrontato definendo una funzione di costo, derivante da una media pesata dell'energia vibrazionale relativa a ogni modo proprio della struttura, e cercando i valori dei componenti dei differenti circuiti elettrici che la rendono minima.

Lo smorzamento passivo ottenuto con un piezoelettrico collegato ad un circuito elettrico può anche essere utilizzato in modo combinato con un sistema di controllo attivo [2]; in tal caso si realizza un sistema di controllo ibrido nel quale l'effetto di smorzamento passivo, oltre a contribuire allo smorzamento delle vibrazioni del sistema, serve a stabilizzare il controllo attivo; alcuni risultati circa l'applicazione di tale metodologia sono presentati in [26].

In questo capitolo viene preso in considerazione il modello ad un grado di libertà meccanico riportato nel paragrafo 6.1.4 e derivato, mediante riduzione modale, da un modello a più gradi di libertà ottenuto tramite calcolo agli elementi finiti. Il modello qui considerato, quando il coefficiente di smorzamento d è posto a zero, risulta analogo a quello utilizzato in [54]. Definito un parametro indicativo dello smorzamento del sistema,

corrispondente al tasso di decadimento esponenziale nel tempo delle oscillazioni libere del sistema, è svolta un'analisi dettagliata e completa dell'andamento dello smorzamento ottenuto al variare dei valori dei componenti relativi al circuito elettrico, prendendo in considerazione entrambe le tipologie di circuito impiegate in [54] e generalizzando i risultati ottenuti in tale lavoro come spiegato in dettaglio nel seguito.

I risultati di tale analisi sono riportati in alcuni abachi che forniscono un quadro completo dello smorzamento ottenibile e della sensibilità di tale smorzamento al valore dei parametri adimensionali dai quali dipende il modello.

7.1 Modello meccanico

Per lo studio dello smorzamento passivo di vibrazioni mediante piezoelettrici si considera il semplice sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un circuito elettrico, mostrato in figura 6.2. Come discusso nel paragrafo 6.1.4, tale modello è rappresentativo di un singolo modo di vibrazione di una piastra strumentata con attuatori piezoelettrici; dunque l'analisi che viene svolta nel seguito si applica immediatamente allo smorzamento passivo mediante piezoelettrici delle vibrazioni associate ad un modo proprio di una struttura a più gradi di libertà, una volta calcolati i suoi parametri modali definiti nel paragrafo 6.1.4. Le equazioni che descrivono il comportamento di questo sistema accoppiato sono le (6.7); per ottenere uno smorzamento passivo delle oscillazioni del sistema meccanico occorre collegare i poli del circuito elettrico di figura 6.2 (cioè gli elettrodi del piezoelettrico) ad un'opportuno circuito esterno. Il comportamento di quest'ultimo sistema è completamente descritto aggiungendo alle (6.7) l'equazione di Kirchhoff relativa al circuito esterno, scritta in maniera generica nella (6.12).

Sono considerate due differenti tipologie di circuito esterno [54]: la prima è un circuito esterno puramente resistivo, la seconda è un circuito risonante costituito dalla serie di un circuito RL con la capacità del piezoelettrico.

7.2 Circuito elettrico puramente resistivo

Questo è il caso più semplice di smorzamento passivo di vibrazioni mediante attuatori piezoelettrici; in questo semplice caso infatti, il circuito esterno contiene solo una resistenza, che è il componente elettrico essenziale per ottenere uno smorzamento passivo.

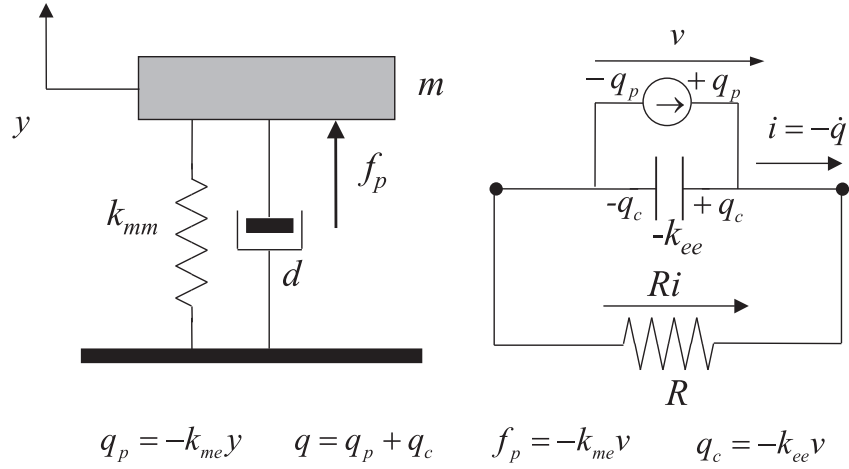


Figura 7.2: Sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un circuito elettrico RC

L'equazione di Kirchhoff relativa al circuito elettrico esterno (6.12) si particolarizza come:

$$R\dot{q} + v = 0 \quad (7.1)$$

essendo R la resistenza elettrica del circuito elettrico esterno. Il sistema costituito dalle (6.7) e dalla (7.1) descrive il sistema elettromeccanico accoppiato rappresentato in figura 7.2.

Procedendo come fatto nel paragrafo 6.1.4, si sostituisce l'espressione (6.8) di v nella (6.7)₁ e nella (7.1) ottenendo il seguente sistema del terzo ordine di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + d\dot{y} + \bar{k}_{mm}y - \frac{k_{me}}{k_{ee}}q &= 0 \\ R\dot{q} + \frac{1}{-k_{ee}}q - \frac{k_{me}}{k_{ee}}y &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

7.2.1 Equazioni adimensionali e parametri significativi

Allo scopo di ottimizzare il valore di R in modo da ottenere lo smorzamento più efficace delle vibrazioni del sistema, conviene operare una adimensionalizzazione del sistema (7.2), individuando quindi i parametri essenziali per la descrizione del fenomeno in analisi. Le tre grandezze fondamentali y , q e t sono adimensionalizzate secondo le (6.14); sostituendo le (6.14) nelle (7.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y} + \frac{\tilde{t}}{m} d\dot{Y} + \frac{\tilde{t}^2}{m} \bar{k}_{mm} Y + \frac{\tilde{q}}{\tilde{y}} \frac{\tilde{t}^2}{m} \frac{k_{me}}{-k_{ee}} Q &= 0 \\
\dot{Q} + \frac{\tilde{t}}{R - k_{ee}} Q + \frac{\tilde{y}}{\tilde{q}} \frac{\tilde{t}}{R - k_{ee}} \frac{k_{me}}{R - k_{ee}} Y &= 0
\end{aligned} \tag{7.3}$$

corrispondente alla (6.15) con $\tilde{D}Q = \dot{Q}$ e $C = \tilde{t}/R$. Assumendo come scala dei tempi la (6.16) e operando scelte analoghe a quanto fatto per ottenere il sistema (6.18) da (6.15), (7.3) si riscrive come:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y} + 2\zeta_m \dot{Y} + Y + \gamma \kappa Q &= 0 \\
\dot{Q} + \gamma^2 Q + \gamma \kappa Y &= 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

essendo valide le (6.19)_{1,3}; la (6.19)₂, particolarizzata al caso presente, diventa:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sqrt{m}}{R\sqrt{k_{mm}(-k_{ee})}}} \tag{7.5}$$

Il parametro adimensionale $\gamma > 0$ risulta così inversamente proporzionale alla radice quadrata della resistenza elettrica R del circuito esterno. Essendo $-1 < \kappa < 1$ e poichè l'equazione caratteristica (7.13) di (7.4) dipende da κ^2 , si può assumere $0 < \kappa < 1$ senza perdere di generalità; i valori limite $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$ sono discussi più avanti.

Analogia con un sistema meccanico

Il sistema elettromeccanico preso qui in esame si comporta in maniera simile al sistema meccanico mostrato in figura 7.3, le cui equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + d_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) &= 0 \\
d_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + k_{12}(x_2 - x_1) &= 0
\end{aligned} \tag{7.6}$$

dove, con riferimento alla figura 7.3, m_1 è la massa del sistema, d_1 e d_2 sono i coefficienti di smorzamento meccanico mentre k_1 , k_2 e k_{12} sono le rigidezze delle molle.

Ai fini di confrontare il sistema di figura 7.3 con il sistema elettromeccanico accoppiato della figura 7.2 è opportuno ricavare una versione adimensionale delle (7.6); si pone dunque:

$$\begin{aligned}
t &= \tilde{t}T \\
x_1 &= \tilde{x}_1 X_1 \\
x_2 &= \tilde{x}_2 X_2
\end{aligned} \tag{7.7}$$

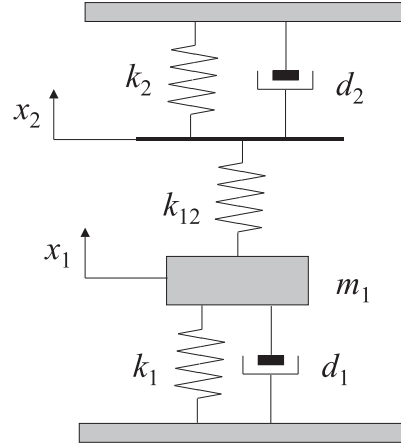


Figura 7.3: Sistema meccanico analogo al sistema elettromeccanico accoppiato in figura 7.2

e sia

$$\nu_1 = \sqrt{(k_1 + k_{12})/m_1} \quad \tilde{t}\nu_1 = 1 \quad \zeta_m = d_1\tilde{t}/(2m_1) \quad (7.8)$$

dove ν_1 è la pulsazione di risonanza del sottosistema nel quale $x_2 = 0$; sia infine $\tilde{x}_1/\tilde{x}_2 = \sqrt{(d_2\tilde{t})/m_1}$.

Sostituendo le precedenti relazioni nelle (7.6) e introducendo i parametri adimensionali:

$$\gamma_m^2 = \frac{(k_2 + k_{12})}{\nu_1 d_2} \quad \kappa_m = \frac{1}{\sqrt{(1 + k_1/k_{12})(1 + k_2/k_{12})}} \quad (7.9)$$

con $\gamma_m > 0$ e $\kappa_m \in (0, 1)$, le (7.6) si scrivono in forma adimensionale come:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + 2\zeta_m \dot{X}_1 + X_1 - \kappa_m \gamma_m X_2 &= 0 \\ \dot{X}_2 + \gamma_m^2 X_2 - \kappa_m \gamma_m X_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

del tutto analoghe alle equazioni adimensionali (7.4) per il sistema elettromeccanico accoppiato.

Soluzione del sistema di equazioni adimensionali

Mediante la posizione $\dot{Y} = Z$, il sistema (7.4) è trasformato nel seguente sistema di tre equazioni differenziali ordinarie di primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta_m & -\gamma_m \kappa_m \\ -\gamma_m \kappa_m & 0 & -\gamma_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ Q \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

La soluzione delle (7.11) è della forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = e^{\tilde{A}T} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Z_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

dove $\tilde{A}$ è la matrice a secondo membro della (7.11) mentre Y_0 , Z_0 e Q_0 sono le condizioni iniziali. Tale soluzione è esplicitabile in termini di combinazione lineare degli esponenziali $e^{\lambda_i T}$, $i=1..3$, essendo λ_i gli autovalori della matrice stessa; i coefficienti di tale combinazione lineare dipendono dalle condizioni iniziali e sono in generale polinomi nella variabile T . L'equazione caratteristica della matrice nella (7.11), le cui radici sono gli autovalori della suddetta matrice, è la seguente:

$$\lambda^3 + (\gamma^2 + 2\zeta_m)\lambda^2 + (2\zeta_m\gamma^2 + 1)\lambda + (1 - \kappa^2)\gamma^2 = 0 \quad (7.13)$$

Applicando il criterio di Routh risulta $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1..3$, in accordo col fatto che il sistema, essendo puramente dissipativo, è intrinsecamente stabile. Si possono adesso discutere i casi limite $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$. Per $\kappa = 0$ le due equazioni in (7.4) risultano disaccoppiate: la prima è l'equazione di un oscillatore ad un grado di libertà mentre la seconda rappresenta la scarica di un condensatore su di una resistenza. Per $\kappa = 1$ la soluzione del sistema accoppiato è costituita dalla somma di due termini esponenziali più un termine costante dovuto alla presenza di una radice nulla nella (7.13); in particolare, per $\gamma < \sqrt{2}$ la risposta è oscillante mentre per $\gamma > \sqrt{2}$ non lo è più.

7.2.2 Ottimizzazione del circuito elettrico esterno

Per ottimizzare lo smorzamento del sistema rispetto ai parametri adimensionali γ e κ occorre innanzitutto dare una definizione di smorzamento. A tale proposito lo smorzamento del sistema è definito, qui e nel seguito, come il coefficiente $\bar{\lambda}$ di decadimento esponenziale nel tempo delle oscillazioni libere del sistema, definito come:

$$\bar{\lambda}(\gamma, \kappa) = \min_i \{|\text{Re}(\lambda_i)|\} \quad (7.14)$$

in modo tale che le oscillazioni libere del sistema si attenuano nel tempo secondo la legge esponenziale $e^{-\bar{\lambda}\nu_m^a t}$.

Nell'analisi per l'identificazione del valore ottimale di R si suppone, per semplicità, che sia nullo il coefficiente di smorzamento meccanico d , cioè che sia $\zeta_m = 0$; il caso di $\zeta_m \neq 0$ è trattato successivamente, nella situazione più generale di circuito elettrico RL .

L'ottimizzazione è eseguita ricavando, per ogni fissato valore di $\kappa \in (0,1)$, il valore di γ per il quale la soluzione della (7.11) ha decadimento esponenziale nel tempo più grande. In altre parole l'ottimizzazione si effettua ricavando, per ogni fissato valore di κ , il valore γ_κ di γ che massimizza il coefficiente $\bar{\lambda}(\gamma, \kappa)$; sia dunque

$$\lambda_\kappa(\kappa) = \max_{\gamma} \bar{\lambda}(\gamma, \kappa) \quad (7.15)$$

È facile provare che $\lambda_\kappa(\kappa)$ esiste in quanto, per ogni fissato valore di κ , $\bar{\lambda}(0, \kappa) = 0$ e $\bar{\lambda}(\gamma, \kappa) \rightarrow 0$ quando $\gamma \rightarrow +\infty$; infatti $\gamma = 0$ ($R = +\infty$) corrisponde a un circuito aperto mentre $\gamma = +\infty$ ($R = 0$) corrisponde ad un corto-circuito e, come detto all'inizio di questo capitolo, in entrambi i casi la potenza dissipata nella resistenza è nulla e dunque è nulla la dissipazione dell'intero sistema. Essendo $\bar{\lambda}$ in generale non differenziabile rispetto a γ , ai fini della ricerca del massimo di tale funzione rispetto a γ si possono distinguere tre differenti casi.

- i) Fissato κ , sia Γ_κ^1 il sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^+$ costituito dai valori di γ per i quali valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} \lambda_i = \lambda_j &\Rightarrow i = j & \forall i, j = 1..3 \\ \operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j &\Rightarrow \operatorname{Im} \lambda_i = -\operatorname{Im} \lambda_j & \forall i, j = 1..3 \end{aligned}$$

Ovviamente $\bar{\lambda}$ risulta differenziabile rispetto a $\gamma \forall \gamma \in \Gamma_\kappa^1$ e dunque:

$$\gamma_\kappa(\kappa) \in \Gamma_\kappa^1, \Rightarrow \frac{\partial \bar{\lambda}_\kappa(\gamma, \kappa)}{\partial \gamma} = 0 \quad (7.16)$$

Sia dunque Λ_κ^1 l'insieme (chiuso) dei valori di $\bar{\lambda}$ stazionari rispetto a γ .

Qualora $\gamma_\kappa(\kappa) \notin \Gamma_\kappa^1$, si deve considerare l'insieme complementare Γ_κ^{1c} (chiuso) di Γ_κ^1 , costituito dai valori di γ per i quali $\bar{\lambda}$ non è differenziabile rispetto a γ . Γ_κ^{1c} può essere rappresentato mediante l'unione dei seguenti suoi sottoinsiemi:

- ii) Un primo sottoinsieme di Γ_κ^{1c} è costituito dai valori di γ per i quali (7.13) ha una radice reale e due complesse coniugate, con la radice reale uguale alla parte reale delle radici complesse coniugate. Sia dunque Γ_κ^2 l'insieme costituito dai valori di γ per i quali (7.13) si fattorizza come:

$$(\lambda - x_1)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2) \quad (7.17)$$

essendo $x_1 \in \mathbf{R}^-$ e $x_2 \in \mathbf{R}$. Sia inoltre Λ_κ^2 l'insieme (chiuso) costituito dai valori di $\bar{\lambda}$ calcolati per $\gamma \in \Gamma_\kappa^2$.

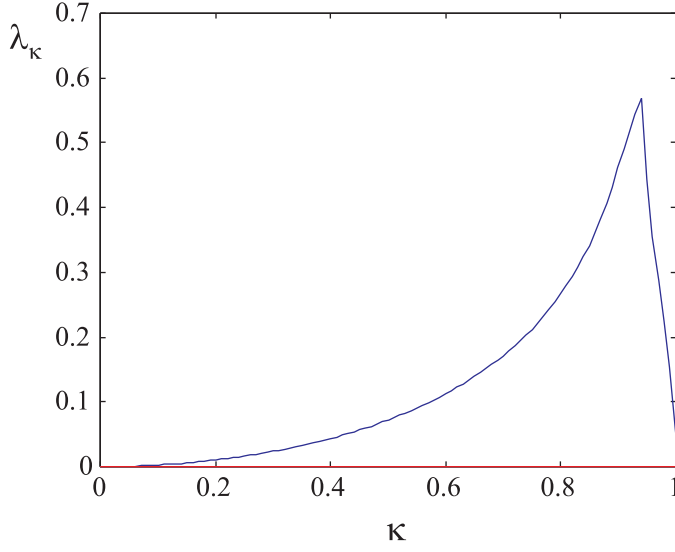


Figura 7.4: Andamento di λ_κ al variare di κ

iii) Un secondo sottoinsieme di Γ_κ^{1C} è costituito dai valori di γ per i quali (7.13) ha radici multiple. Sia dunque $\Gamma_\kappa^3 = \{\gamma \in (0, +\infty) | \Delta(\kappa, \gamma) = 0\}$ essendo Δ il discriminante di (7.13). Sia inoltre Λ_κ^3 l'insieme (chiuso) costituito dai valori di $\bar{\lambda}$ corrispondenti a $\gamma \in \Gamma_\kappa^3$.

I tre casi prima elencati completano l'analisi connessa con la ricerca di λ_κ , in quanto risulta $\Gamma_\kappa^{1C} = \Gamma_\kappa^2 \cup \Gamma_\kappa^3$. Per ogni fissato valore di κ in $(0,1)$ l'ottimizzazione è realizzata identificando gli elementi appartenenti agli insiemi Λ_κ^i ; risulta quindi

$$\lambda_\kappa(\kappa) = \max\{\Lambda_\kappa^1 \cup \Lambda_\kappa^2 \cup \Lambda_\kappa^3\} \quad (7.18)$$

a cui è poi associato il valore ottimale $\gamma_\kappa(\kappa)$ del parametro γ .

Mediante un programma in linguaggio Matlab, le funzioni λ_κ e γ_κ sono state ricavate e sono riportate rispettivamente in figura 7.4 e figura 7.5.

Dalla figura 7.4 risulta che, per valori del coefficiente di accoppiamento piezoelettrico κ inferiori a 0.3, $\lambda_\kappa \leq 0.025$.

La figura 7.5 mostra come il valore ottimale della resistenza elettrica R del circuito esterno, inversamente proporzionale a γ , si mantiene circa costante per $0 \leq \kappa \leq 0.7$ per poi diminuire rapidamente per $\kappa \geq 0.9$.

Dall'analisi risulta inoltre che per $\kappa \in (0, \kappa_{12})$ $\gamma_\kappa \in \Gamma_\kappa^1$, per $\kappa \in (\kappa_{12}, \kappa_{23})$ $\gamma_\kappa \in \Gamma_\kappa^2$ e per $\kappa \in (\kappa_{23}, 1)$ $\gamma_\kappa \in \Gamma_\kappa^3$. I valori di κ_{12} e κ_{23} sono stati ricavati espressamente; κ_{12} si ottiene imponendo la stazionarietà di x_1 nella (7.17) e risulta $\kappa_{12} = 2/\sqrt{5}$, cui corrisponde

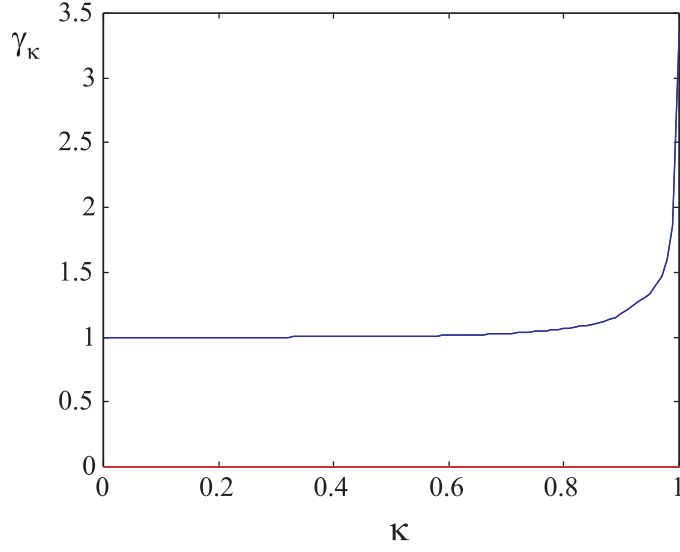


Figura 7.5: Andamento di γ_κ al variare di κ

il valore di $\gamma_\kappa = \Gamma_{\kappa_{12}}^1 \cap \Gamma_{\kappa_{12}}^2 = (9/5)^{(1/4)}$; κ_{23} è il valore di κ in corrispondenza del quale l'equazione caratteristica (7.13) si fattorizza come:

$$(\lambda - x_1)^3 = 0 \quad (7.19)$$

In particolare in corrispondenza di $\kappa = \kappa_{23} = 2\sqrt{2}/3 = \kappa_{ott}$ si ottiene il miglior smorzamento del sistema con circuito puramente resistivo (poli del sistema coincidenti), cioè

$$\max_{\kappa} \{\lambda_\kappa\} = \lambda_\kappa(\kappa_{23}) = \lambda_{ott} = \sqrt{3}/3 \quad (7.20)$$

in corrispondenza di $\gamma_\kappa = \gamma_{ott} = \Gamma_{\kappa_{23}}^2 \cap \Gamma_{\kappa_{23}}^3 = 3^{1/4}$.

7.2.3 Bilancio energetico del sistema

In questa sezione sono valutati gli scambi energetici tra i vari organi del sistema capaci di trattenere o di dissipare energia; in particolare è confrontato, da un punto di vista energetico, il comportamento del sistema accoppiato relativo a circuito esterno ottimizzato con quello relativo ad un circuito non ottimizzato, per un fissato valore di κ . Per valutare i vari contributi energetici del sistema conviene scrivere la formulazione lagrangiana $\mathcal{L}$ delle (7.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{-\partial \mathcal{P}_d}{\partial \dot{q}_i} \quad (7.21)$$

dove q_i , $i=1..2$, sono le coordinate generalizzate, con $q_1=Y$ e $q_2=Q$; $\mathcal{L}$ è la differenza tra l'energia cinetica $\mathcal{E}_c$ e l'energia potenziale $\mathcal{E}_p$ mentre $\mathcal{P}_d$ è il potenziale di dissipazione; nel caso specifico in esame si ha:

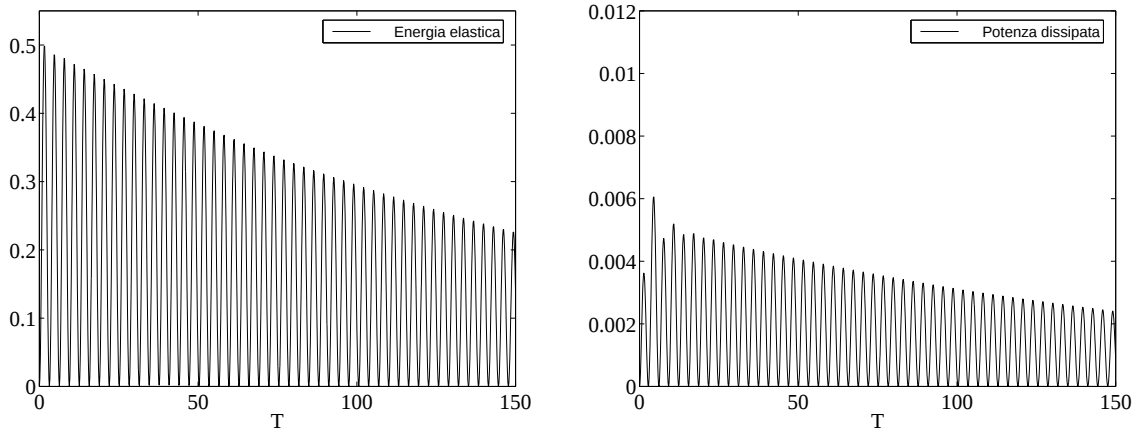


Figura 7.6: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$ e $\gamma = 1/2\gamma_\kappa$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}\dot{Y}^2 \\
 \mathcal{E}_p &= \frac{1}{2}(Y^2 + \gamma^2 Q^2 + 2\gamma\kappa QY) \\
 \mathcal{P}_d &= \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + \zeta_m \dot{Y}^2
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Nelle figure 7.6-7.8 sono riportate simulazioni delle oscillazioni libere del sistema valutate per $\kappa = 0.15$, $\zeta_m = 0$ ed in corrispondenza, rispettivamente, di $\gamma = 1/2\gamma_\kappa$, $\gamma = \gamma_\kappa \simeq 1$ e $\gamma = 2\gamma_\kappa$; più specificamente sono riportati gli andamenti dell'energia elastica $1/2\dot{Y}^2$ e della potenza dissipata $\dot{Q}^2$. In figura 7.9 è riportata la simulazione corrispondente al massimo smorzamento ottenibile con circuito resistivo, cioè per $\gamma = \gamma_{ott}$ e $\kappa = \kappa_{ott}$; in quest'ultima figura, per esigenze di chiarezza, gli intervalli rappresentati sugli assi sono differenti da quelli relativi alle altre simulazioni. Le condizioni iniziali per ciascuno dei casi analizzati consistono nell'assegnare al sistema una velocità iniziale $\dot{Y} = 1$.

Dalle figure 7.6-7.8 si osserva che l'energia potenziale, proporzionale al quadrato dello spostamento Y , ha un andamento oscillante il cui decadimento esponenziale è massimo quando $\gamma = \gamma_\kappa$; lo smorzamento ottenuto in corrispondenza dei valori non ottimali di γ è decisamente inferiore a quello relativo ad una scelta ottimale. La potenza dissipata nel tempo è massima quando $\gamma = \gamma_\kappa$.

Nella figura 7.9 lo smorzamento raggiunto è il massimo ottenibile con circuito resistivo; in tali condizioni infatti, il sistema presenta tre poli reali coincidenti che determinano condizioni di smorzamento critico.

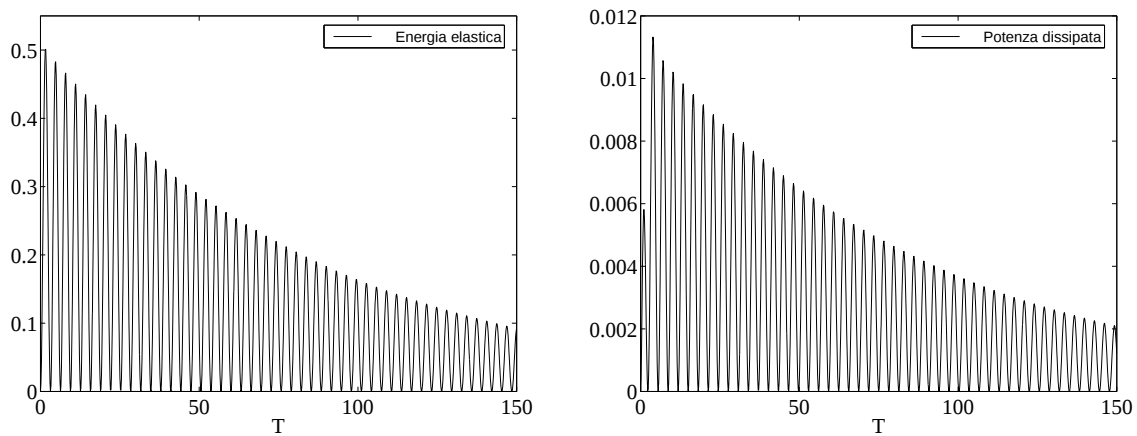


Figura 7.7: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$ e $\gamma = \gamma_\kappa$

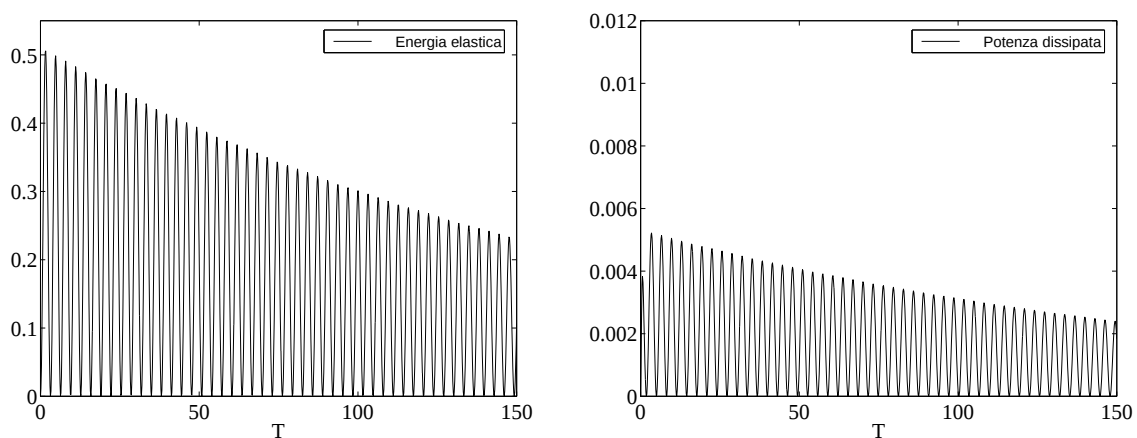


Figura 7.8: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$ e $\gamma = 2\gamma_\kappa$

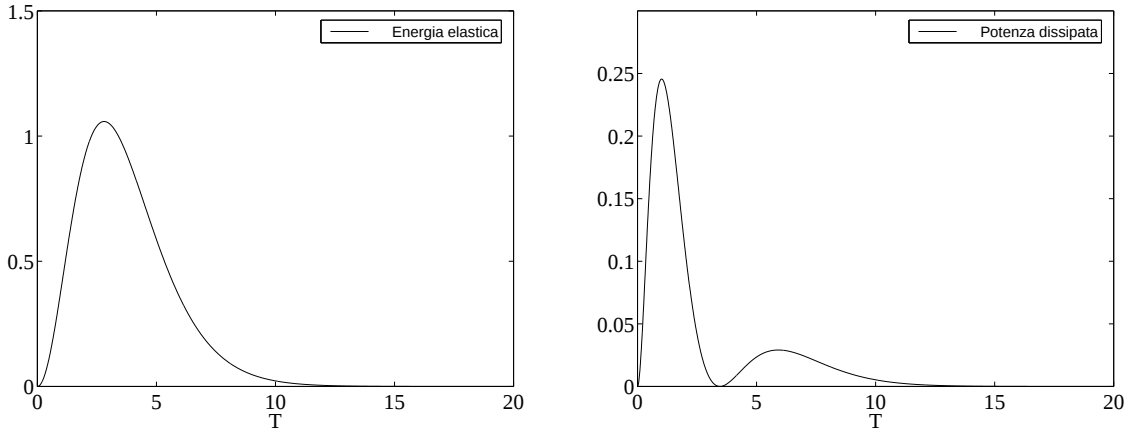


Figura 7.9: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = \kappa_{ott}$ e $\gamma = \gamma_{ott}$

7.3 Circuito elettrico risonante

Nel paragrafo precedente si è valutato lo smorzamento passivo ottenibile mediante un circuito esterno puramente resistivo. Viene ora analizzato il caso di circuito esterno RL ; la serie di tale circuito con la capacità $-k_{ee}$ del piezoelettrico forma un circuito risonante RLC che, come è mostrato nel seguito, consente di ottenere smorzamenti ben più consistenti di quelli ottenibili nel caso di circuito esterno solo resistivo.

Si prende dunque in considerazione il sistema elettromeccanico accoppiato rappresentato in figura 7.10.

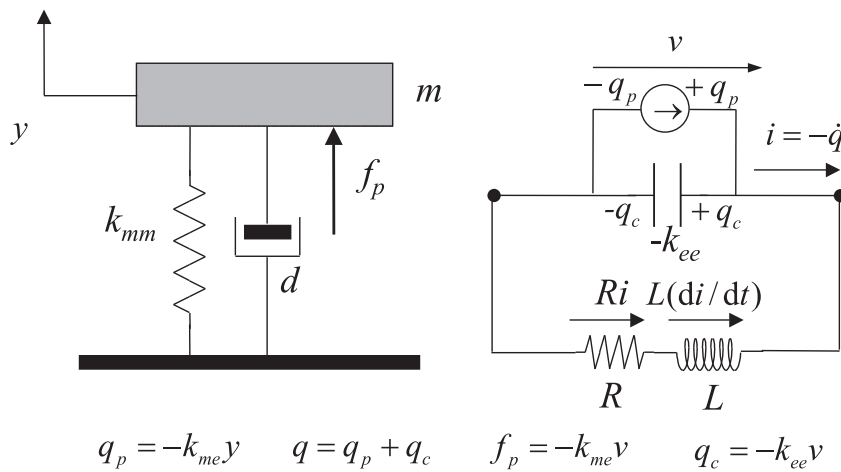


Figura 7.10: Sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un circuito elettrico RLC

Tale sistema è completamente descritto dalle (6.7) alle quali va aggiunta l'equazione di Kirchhoff relativa al circuito RL . A tal proposito la (6.12) si particolarizza come:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + v = 0 \quad (7.23)$$

essendo R la resistenza elettrica del circuito elettrico esterno ed L la sua induttanza.

Manipolando le 6.7 e 7.23 in maniera analoga a quanto fatto nel caso di circuito resistivo, si ottiene il seguente sistema di due equazioni differenziali ordinarie, ciascuna del secondo ordine:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + d\dot{y} + \bar{k}_{mm}y - \frac{k_{me}}{k_{ee}}q &= 0 \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{-k_{ee}}q - \frac{k_{me}}{k_{ee}}y &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

7.3.1 Equazioni adimensionali e parametri significativi

Analogamente a quanto fatto per il circuito resistivo, si opera in questo paragrafo un'adimensionalizzazione delle equazioni (7.24). Le tre grandezze fondamentali y , q e t sono adimensionalizzate secondo le (6.14); sostituendo le (6.14) nelle (7.24) si ottengono:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + d\frac{\tilde{t}}{m}\dot{Y} + \frac{\tilde{t}^2}{m}\bar{k}_{mm}Y + \frac{\tilde{q}}{\tilde{y}}\frac{\tilde{t}^2}{m}\frac{k_{me}}{-k_{ee}}Q &= 0 \\ \ddot{Q} + \frac{\tilde{t}}{L}R\dot{Q} + \frac{\tilde{t}^2}{L}\frac{1}{-k_{ee}}Q + \frac{\tilde{y}}{\tilde{q}}\frac{\tilde{t}^2}{L}\frac{k_{me}}{-k_{ee}}Y &= 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

corrispondenti alle (6.15) con $\tilde{\mathcal{D}}Q = \ddot{Q} + \tilde{t}R/L\dot{Q}$ e $C = \tilde{t}^2/L$. Assumendo come scala dei tempi la (6.16) e operando scelte analoghe a quanto fatto nel caso di circuito resistivo, il sistema (7.25) si scrive come:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + 2\zeta_m\dot{Y} + Y + \nu\kappa Q &= 0 \\ \ddot{Q} + 2\delta\nu\dot{Q} + \nu^2Q + \nu\kappa Y &= 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

essendo ancora valide le (6.19)_{1,3}. La (6.19)₂, particolarizzata al caso di circuito RL , diventa il parametro di sintonia ν così definito:

$$\nu = \sqrt{\frac{\tilde{t}^2}{[L(-k_{ee})]}} = \frac{\sqrt{1/L(-k_{ee})}}{\sqrt{\bar{k}_{mm}/m}} \quad (7.27)$$

e cioè pari al rapporto tra la pulsazione naturale $\nu_e^b = \sqrt{1/[L(-k_{ee})]}$ del circuito elettrico a massa bloccata ($y = 0$ nella (7.24)₂) e la pulsazione naturale ν_m^a del sistema meccanico a circuito aperto, definita nel precedente capitolo; il parametro di sintonia è dunque legato al valore dell'induttanza L del circuito elettrico esterno. Resta poi definito il parametro di dissipazione elettrica δ , la cui espressione è:

$$\delta = \frac{R}{2\nu_e^b L} \quad (7.28)$$

e quindi inversamente proporzionale alla resistenza elettrica R .

Operando invece le seguenti scelte, adottate in [54]:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{\nu_m^c} = \frac{1}{\sqrt{k_{mm}/m}} & \kappa' &= \frac{k_{me}}{\sqrt{k_{mm}(-k_{ee})}} \in (0, +\infty) \\ \nu' &= \frac{\nu_e^b}{\nu_m^c} & \delta' &= R(-k_{ee})\nu_m^c & \zeta_m &= 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

le (7.26) diventano:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + (1 + \kappa'^2)Y + \nu'\kappa'Q &= 0 \\ \ddot{Q} + \delta'\nu'^2\dot{Q} + \nu'^2Q + \nu'\kappa'Y &= 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

In [54], utilizzando un approccio differente da quello seguito nel presente capitolo, si ricava la funzione di trasferimento di Y quando il sistema è sollecitato da una forza esterna; tale funzione di trasferimento risulta identica a quella che si ottiene dalle (7.30) considerando nel membro a destra della (7.30)₁ una forza adimensionale unitaria.

Analogia con un sistema meccanico

Il sistema elettromeccanico preso in esame in questa sezione risulta analogo [54] al sistema meccanico mostrato in figura 7.11 (assorbitore meccanico di vibrazioni [92]) le cui equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + d_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + d_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + k_{12}(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

dove, con riferimento alla figura 7.11, m_1 e m_2 sono le masse del sistema, d_1 e d_2 sono i coefficienti di smorzamento meccanico mentre k_1 , k_2 e k_{12} sono le rigidezze delle molle.

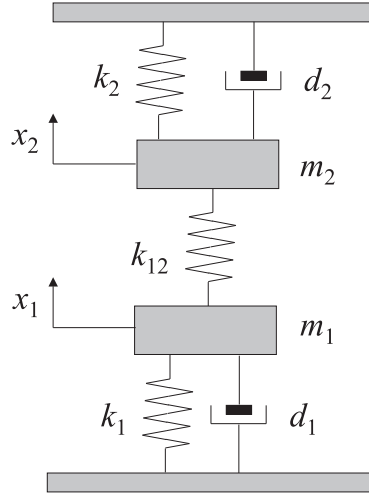


Figura 7.11: Sistema meccanico analogo al sistema elettromeccanico accoppiato in figura 7.10

Ai fini di confrontare il sistema di figura 7.11 con il sistema elettromeccanico accoppiato in figura 7.10, è opportuno ricavare una versione adimensionale delle (7.31); si assumono dunque le posizioni (7.7) e (7.8) e sia inoltre $\tilde{x}_1/\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2/m_1}$.

Sostituendo le precedenti relazioni nelle (7.31) e introducendo i parametri adimensionali:

$$\nu_m = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \quad \delta_m = \frac{d_2}{2m_2\nu_2} \quad (7.32)$$

essendo $\nu_2 = \sqrt{(k_2 + k_{12})/m_2}$ la pulsazione di risonanza del sottosistema ottenuto bloccando la massa m_1 , le (7.31) si scrivono in forma adimensionale come:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + 2\zeta_m \dot{X}_1 + X_1 - \nu_m \kappa_m X_2 &= 0 \\ \ddot{X}_2 + 2\delta_m \nu_m \dot{X}_2 + \nu_m^2 X_2 - \nu_m \kappa_m X_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.33)$$

dove κ_m è definito nella (7.9). Le (7.33) sono del tutto analoghe alle equazioni adimensionali (7.26) che descrivono il sistema elettromeccanico accoppiato.

Soluzione del sistema di equazioni adimensionali

Si procede ora trasformando il sistema di due equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine (7.26) in un sistema di quattro equazioni differenziali ordinarie del primo ordine mediante la posizione $\dot{Y} = Z$ e $\dot{Q} = W$. In termini delle variabili (Y, Q, Z, W) (7.26) si

riscrive come:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Q} \\ \dot{Z} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\kappa\nu & -2\zeta_m & 0 \\ -\kappa\nu & -\nu^2 & 0 & -2\delta\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Q \\ Z \\ W \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Circa le considerazioni sulla forma della soluzione di (7.34) vale quanto detto nel caso di circuito resistivo per la soluzione del sistema (7.11); in questo caso però la matrice in (7.34) possiede quattro autovalori λ_i , $i = 1..4$, radici del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda^4 + (2\zeta_m + 2\delta\nu)\lambda^3 + (\nu^2 + 4\zeta_m\delta\nu + 1)\lambda^2 + (2\zeta_m\nu^2 + 2\delta\nu)\lambda + \nu^2(1 - \kappa^2) \quad (7.35)$$

Anche nel caso di circuito esterno risonante gli autovalori di (7.34) sono a parte reale negativa, come si vede facilmente applicando alla (7.35) il criterio di Routh; il sistema infatti è ancora puramente dissipativo e quindi intrinsecamente stabile.

Si discutono anche in questo caso i valori limite di κ . Per $\kappa = 0$ le due equazioni in (7.26) sono tra loro disaccoppiate; la prima è la risposta libera di un oscillatore ad un grado di libertà e la seconda rappresenta la scarica di un condensatore su un circuito RL . Per $\kappa = 1$, come per il caso di circuito esterno resistivo, (7.34) ha un autovalore nullo che porta ad un termine costante nella soluzione. Per capire il significato fisico di tale termine costante si può considerare l'analogo sistema meccanico mostrato in figura 7.11, dove $\kappa = 1$ implica che i rapporti k_2/k_{12} e k_1/k_{12} sono nulli; ciò significa che l'energia immagazzinata nelle molle di rigidezza k_1 e k_2 è trascurabile rispetto all'energia immagazzinata nella molla di rigidezza k_{12} . Di conseguenza, quando $t \rightarrow +\infty$, $(x_2 - x_1) \rightarrow 0$ mentre x_1 tende ad un valore costante non nullo, dipendente dalle condizioni iniziali.

7.3.2 Ottimizzazione del circuito elettrico esterno

In questo paragrafo si procede all'ottimizzazione dei componenti RL del circuito elettrico esterno per ottenere una soluzione di (7.34) avente decadimento esponenziale nel tempo più grande possibile. Dapprima si suppone nullo il coefficiente di smorzamento meccanico d , cioè $\zeta_m = 0$. L'ottimizzazione dello smorzamento del sistema viene realizzata fissando il valore di κ , dipendente dalla struttura meccanica attuata, e di ν , dipendente dall'induttanza L del circuito elettrico esterno secondo la (7.27), e cercando il valore $\delta_{\nu\kappa}$ di δ , cioè della resistenza elettrica R (vedi la (7.28)), che massimizza il coefficiente di decadimento esponenziale $\bar{\lambda}(\delta, \nu, \kappa)$ delle oscillazioni libere, definito nella 7.14. Si pone dunque

$$\lambda_{\nu\kappa}(\nu, \kappa) = \max_{\delta} \bar{\lambda}(\delta, \nu, \kappa) \quad (7.36)$$

Tale massimo esiste in base alle stesse considerazioni fatte nel caso di circuito elettrico resistivo.

Essendo in generale $\bar{\lambda}$ non differenziabile rispetto a δ , occorre distinguere quattro casi ai fini della ricerca di $\lambda_{\nu\kappa}$.

- i) Fissati ν e κ , sia $\Gamma_{\nu\kappa}^1$ il sottoinsieme aperto di $\mathcal{R}^+$ tale che $\forall \delta \in \Gamma_{\nu\kappa}^1$ valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_i = \lambda_j &\Rightarrow i = j & \forall i, j = 1..4 \\ \operatorname{Re}\lambda_i = \operatorname{Re}\lambda_j &\Rightarrow \operatorname{Im}\lambda_i = -\operatorname{Im}\lambda_j & \forall i, j = 1..4\end{aligned}$$

Ovviamente $\bar{\lambda}$ è differenziabile rispetto a $\delta \forall \delta \in \Gamma_{\nu\kappa}^1$; come conseguenza si ha:

$$\delta_{\nu\kappa}(\nu, \kappa) \in \Gamma_{\nu\kappa}^1 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\lambda}_{\nu\kappa}(\delta, \nu, \kappa)}{\partial \delta} = 0 \quad (7.37)$$

Sia dunque $\Lambda_{\nu\kappa}^1$ l'insieme (chiuso) dei valori di $\bar{\lambda}$ stazionari rispetto a δ .

Qualora $\delta_{\nu\kappa} \notin \Gamma_{\nu\kappa}^1$, si deve considerare l'insieme $\Gamma_{\nu\kappa}^{1\mathcal{C}}$ (chiuso) complementare di $\Gamma_{\nu\kappa}^1$, costituito dai valori di δ per i quali $\bar{\lambda}$ non è differenziabile rispetto a δ . $\Gamma_{\nu\kappa}^{1\mathcal{C}}$ si può rappresentare come l'unione dei seguenti tre suoi sottoinsiemi.

- ii) Il primo sottoinsieme di $\Gamma_{\nu\kappa}^{1\mathcal{C}}$ è costituito dai valori di δ per i quali (7.35) ha radici multiple. Sia dunque $\Gamma_{\nu\kappa}^2 = \{\delta \in (0, +\infty) | \Delta(\delta, \nu, \kappa) = 0\}$, essendo Δ il discriminante di (7.35). Sia inoltre $\Lambda_{\nu\kappa}^2$ l'insieme (chiuso) costituito dai valori di $\bar{\lambda}$ calcolati per $\delta \in \Gamma_{\nu\kappa}^2$.
- iii) Il secondo sottoinsieme di $\Gamma_{\nu\kappa}^{1\mathcal{C}}$ è costituito dai valori di δ per i quali (7.35) ha due radici reali e due radici complesse coniugate la cui parte reale coincide con una delle due radici reali. Sia dunque $\Gamma_{\nu\kappa}^3$ l'insieme costituito dai valori di δ per i quali (7.35) si fattorizza come:

$$(\lambda - x_1)(\lambda - x_2)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_3^2) \quad (7.38)$$

essendo $x_1, x_2 \in \mathcal{R}^-$ e $x_3 \in \mathcal{R}$. Sia inoltre $\Lambda_{\nu\kappa}^3$ l'insieme (chiuso) costituito dai valori di $\bar{\lambda}$ calcolati per $\delta \in \Gamma_{\nu\kappa}^3$.

- iv) L'ultimo sottoinsieme di $\Gamma_{\nu\kappa}^{1\mathcal{C}}$ è costituito dai valori di δ per i quali (7.35) ammette due coppie di radici complesse coniugate, aventi parte reale coincidente. Sia dunque

$\Gamma_{\nu\kappa}^4$ l'insieme costituito dai valori di δ per i quali (7.35) si fattorizza come:

$$(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_3^2) \quad (7.39)$$

essendo $x_1 \in \mathbf{R}^-$, e $x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Sia inoltre $\Lambda_{\nu\kappa}^4$ l'insieme (chiuso) costituito dai valori di $\bar{\lambda}$ calcolati per $\delta \in \Gamma_{\nu\kappa}^4$.

I quattro casi precedentemente elencati completano l'analisi connessa con la ricerca di $\lambda_{\nu\kappa}$ in quanto risulta $\Gamma_{\nu\kappa}^{1C} = \Gamma_{\nu\kappa}^2 \cup \Gamma_{\nu\kappa}^3 \cup \Gamma_{\nu\kappa}^4$. Fissati dunque $\kappa \in (0, 1)$ e $\nu > 0$ si ha $\lambda_{\nu\kappa}(\nu, \kappa) = \max\{\Lambda_{\nu\kappa}^1 \cup \Lambda_{\nu\kappa}^2 \cup \Lambda_{\nu\kappa}^3 \cup \Lambda_{\nu\kappa}^4\}$, mentre $\delta_{\nu\kappa}$ è il valore di δ corrispondente a $\lambda_{\nu\kappa}(\nu, \kappa)$.

Tracciamento di un abaco per i parametri di smorzamento ottimo

Mediante un programma in linguaggio Matlab le funzioni $\lambda_{\nu\kappa}$ e $\delta_{\nu\kappa}$ sono state ricavate per differenti valori di $\kappa \in (0, 1)$ e $\nu > 0$ e sono state riportate, come curve di livello, in figura 7.12 e 7.13 rispettivamente.

Dalla figura 7.12 (parte a sinistra) risulta che, per ogni fissato valore κ , $\lambda_{\nu\kappa}$ presenta un massimo, indicato con $\lambda_\kappa(\kappa)$, in corrispondenza di un determinato valore del parametro ν , indicato con $\nu_\kappa(\kappa)$. Sulla linea di equazione $\nu = \nu_\kappa(\kappa)$ l'equazione caratteristica (7.35) ha due coppie coincidenti di radici complesse coniugate. L'espressione analitica di $\nu_\kappa(\kappa)$ e di $\delta_{\nu\kappa}(\nu_\kappa, \kappa) = \delta_\kappa(\kappa)$ sono state calcolate imponendo la seguente fattorizzazione di (7.35):

$$(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (7.40)$$

essendo $x_1 \in \mathbf{R}^-$ e $x_2 \in \mathbf{R}$. Risulta:

$$\nu_\kappa = \sqrt{\frac{1}{1 - \kappa^2}} \quad \delta_\kappa = \kappa \quad \kappa \in (0, 2/\sqrt{5}] \quad (7.41)$$

Lo smorzamento λ_κ ottenuto lungo tale linea è dato dalla seguente espressione:

$$\lambda_\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa^2}{(1 - \kappa^2)}} \quad \kappa \in (0, 2/\sqrt{5}] \quad (7.42)$$

In ciò che segue si intende che il sistema è in condizioni di sintonia quando $\nu = \nu_\kappa$. Lungo la linea $\nu_\kappa(\kappa)$ l'andamento di λ_κ è monotono crescente con κ . Per $\kappa = 2/\sqrt{5} = \kappa_{ott}$, $\nu = \sqrt{5} = \nu_{ott}$ e $\delta = \kappa_{ott} = \delta_{ott}$ si ha il miglior smorzamento, indicato con λ_{ott} , ottenibile

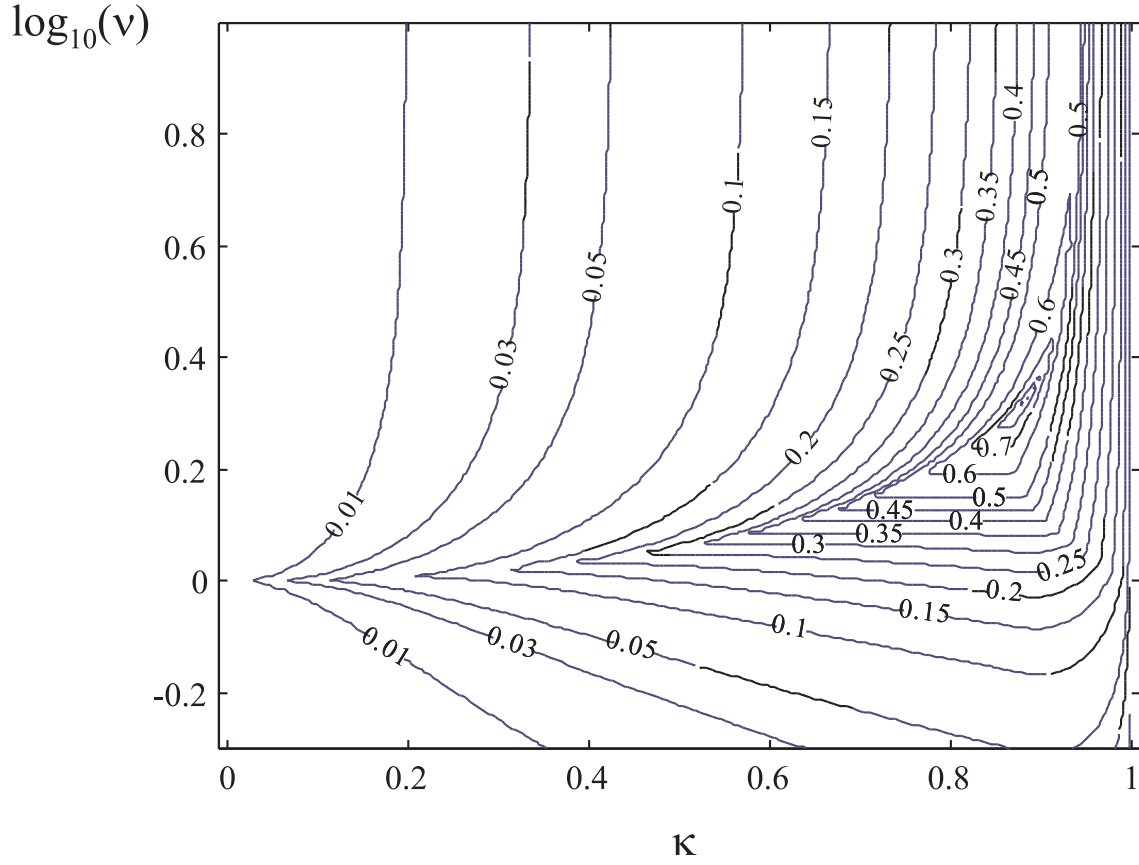


Figura 7.12: Andamento di $\lambda_{\nu\kappa}$ in funzione di κ e ν

con un circuito esterno RL ; in tali condizioni i quattro poli del sistema coincidono e (7.35) si fattorizza come:

$$(\lambda - 1)^4 \quad (7.43)$$

e quindi $\lambda_{ott} = 1$; a tale valore corrisponde un decadimento esponenziale nel tempo della soluzione pari a $e^{-\nu_m^a t}$. Per $\kappa > \kappa_{ott}$ lo smorzamento massimo ottenibile decresce e, quanto più κ si avvicina al suo valore limite $\kappa = 1$, tanto più diminuisce l'influenza del parametro di sintonia ν sullo smorzamento ottenibile.

Le formule (7.41), riscritte in termini dei parametri adimensionali κ' , ν' e δ' utilizzati in [54] e riportati nelle (7.29), coincidono con quelle ricavate in [54]. In [54] non viene però rilevato l'andamento prima crescente e poi decrescente di λ_κ al variare di κ , e quindi l'esistenza del valore ottimo κ_{ott} del coefficiente modale di accoppiamento κ ; non è poi studiato il problema dell'ottimizzazione di δ , cioè della resistenza elettrica, per valori di ν non appartenenti alla linea ν_κ , cioè in condizioni di non-sintonia. Tale problema, la

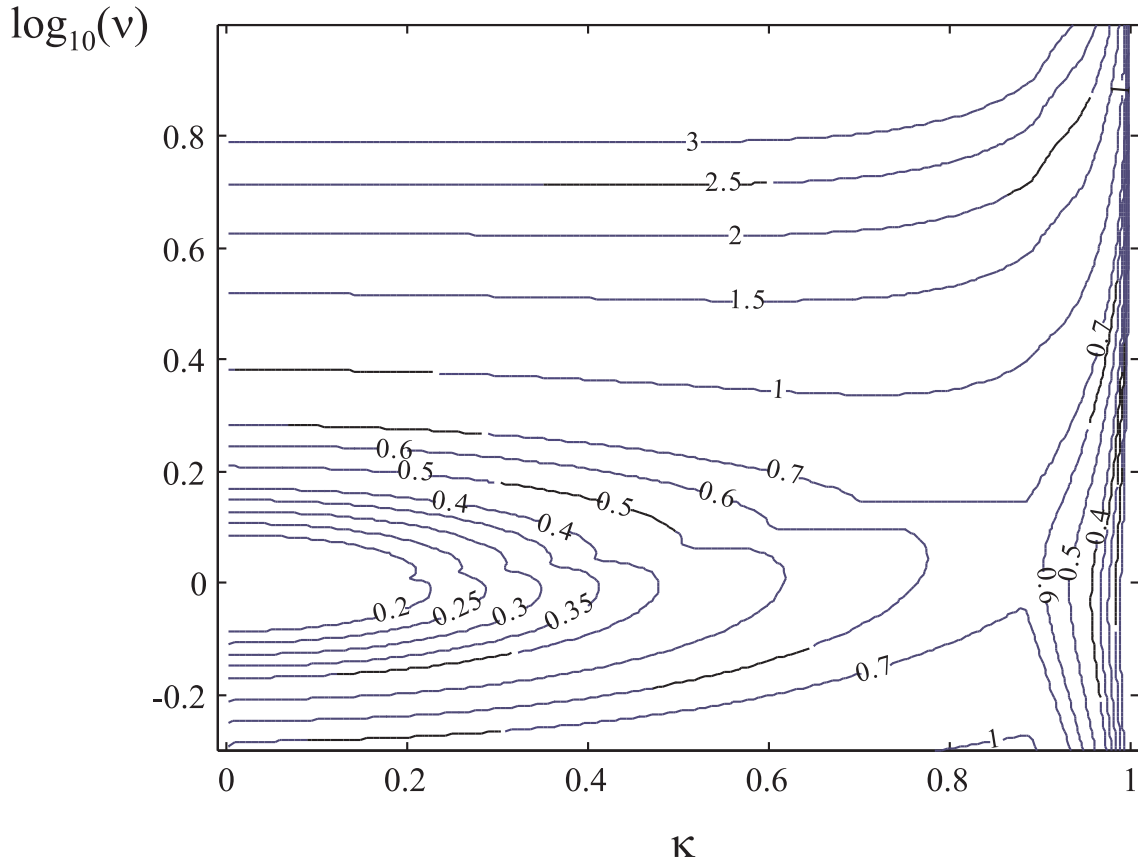


Figura 7.13: Andamento di $\delta_{\nu\kappa}$ in funzione di κ e ν

cui soluzione qui fornita è riportata negli abachi in figura 7.12 e 7.13, si propone quando nelle applicazioni pratiche non si riesce a realizzare un circuito esterno perfettamente sintonizzato oppure quando, sintonizzando il circuito elettrico su un determinato modo di vibrazione della struttura, si vuole considerare anche lo smorzamento ottenuto sugli altri modi.

Il significato dei valori ottimali nella (7.41) può essere meglio inteso tracciando il luogo delle radici di (7.35) al variare del parametro δ . Nelle figure 7.14 e 7.16 il luogo delle radici di (7.35), nel semipiano di ordinata positiva, è riportato per $\kappa = 0.15$, $\delta = 0 \div 1.8\kappa$ e per valori di ν rispettivamente pari a $0.9\nu_\kappa$ e $1.1\nu_\kappa$; la condizione di massimo smorzamento è raggiunta nei punti o, in corrispondenza dei quali è stazionaria la parte reale del polo a parte reale minore in modulo. In figura 7.15 è riportato il luogo delle radici di (7.35) per $\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa$ (condizioni di sintonia) e $\delta = 0 \div 1.8\kappa$; in conseguenza alla scelta $\nu = \nu_\kappa$ esiste un valore di δ ($\delta = \kappa$) in corrispondenza del quale le coppie di poli complessi coniugati del sistema coincidono. Il punto di ottimalità, indicato con o, corrisponde al

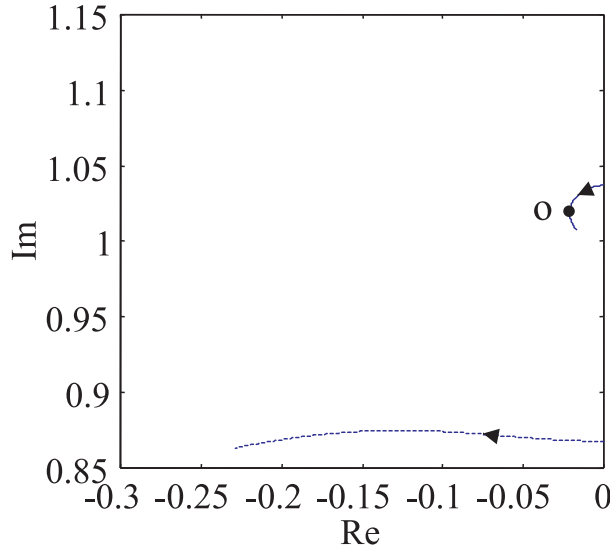


Figura 7.14: Luogo delle radici di (7.35) al variare di δ : $\kappa = 0.15$, $\zeta_m = 0$, $\nu = 0.9\nu_\kappa$

massimo smorzamento ottenibile per un fissato valore di $\kappa < \kappa_{ott}$.

Per valori non troppo alti di κ , ν_κ si discosta di poco dal valore unitario; di conseguenza la condizione di ottimalità si ottiene sintonizzando la frequenza naturale ν_e^b del circuito elettrico a struttura bloccata, regolabile mediante la scelta della sola induttanza L , ad una valore circa pari a quella della frequenza naturale ν_m^a del sistema meccanico a circuito elettrico aperto. Successivamente si impone il corrispondente valore ottimo di R , legato al valore ottimo di L e a quello di δ_κ secondo la (7.28).

A differenza di quanto fatto in [54] si considera qui anche il caso in cui il coefficiente di dissipazione meccanica ζ_m non è trascurabile; i valori ottimali ν_κ e δ_κ , in corrispondenza dei quali la (7.35) ha due coppie coincidenti di radici complesse coniugate per un fissato valore di κ , sono in questo caso definiti dalle seguenti relazioni implicite:

$$\begin{aligned}\kappa &= \sqrt{\frac{(1 - \zeta_m^2)(-1 + \nu_\kappa^2 + 2\zeta_m^2 - 2\zeta_m\sqrt{\zeta_m^2 - 1 + \nu_\kappa^2})}{\nu_\kappa^2}} \\ \delta_\kappa &= \sqrt{\frac{\nu_\kappa^2 - 1 + \zeta_m^2}{\nu_\kappa^2}}\end{aligned}\tag{7.44}$$

valide per $1 < \nu_\kappa < \sqrt{5 - 4\zeta_m^2 + 4\zeta_m\sqrt{1 - \zeta_m^2}}$ e $\zeta_m < 1$. Lungo la linea $\nu_\kappa(\kappa)$ definita implicitamente dalla (7.44)₁ lo smorzamento λ_κ ottenuto è pari a:

$$\lambda_\kappa = \frac{1}{2}\zeta_m + \frac{1}{2}\sqrt{\zeta_m^2 - 1 + \nu_\kappa^2}\tag{7.45}$$

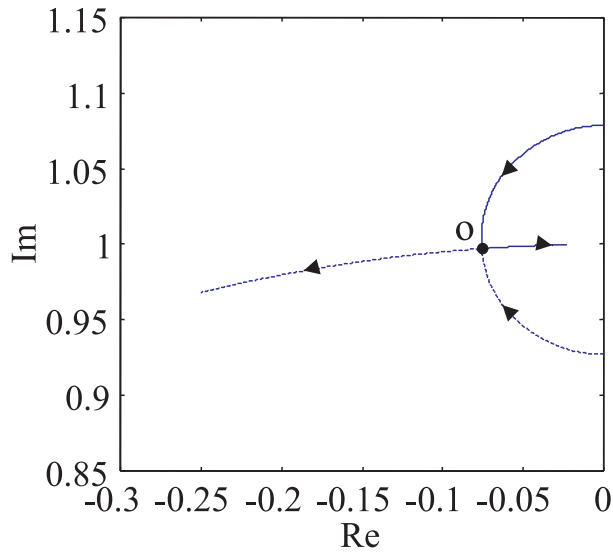


Figura 7.15: Luogo delle radici di (7.35) al variare di δ : $\kappa = 0.15$, $\zeta_m = 0$, $\nu = \nu_\kappa$

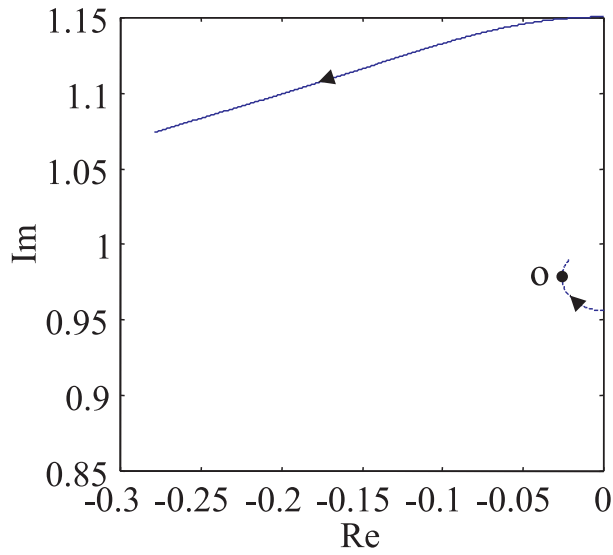


Figura 7.16: Luogo delle radici di (7.35) al variare di δ : $\kappa = 0.15$, $\zeta_m = 0$, $\nu = 1.1\nu_\kappa$

È facile verificare che le (7.44) coincidono con le (7.41) e la (7.45) coincide con la (7.42) quando $\zeta_m = 0$; confrontando inoltre la (7.45) con la (7.42) risulta che lo smorzamento massimo ottenibile nel caso di dissipazione meccanica non nulla ($\zeta_m \neq 0$) è superiore, a parità di κ , a quello ottenibile nel caso di dissipazione meccanica nulla ($\zeta_m = 0$).

Un'ottimizzazione in base a considerazioni sulla funzione di trasferimento

Vi sono altri possibili criteri per stabilire il valore ottimale di ν e δ ; tra questi si fa qui cenno ad un metodo basato sull'analisi in frequenza di Y . Tale metodologia è illustrata in [92], applicata ad un sistema meccanico analogo a quello in figura 7.11, ed è utilizzata in [54, 100] per il sistema elettromeccanico qui considerato. Si considera dunque la risposta in frequenza di Y ottenuta dal seguente sistema:

$$\begin{aligned}\ddot{Y} + Y + \nu\kappa Q &= 1 \\ \ddot{Q} + 2\delta\nu\dot{Q} + \nu^2 Q + \nu\kappa Y &= 0\end{aligned}\tag{7.46}$$

corrispondente a (7.26) nel quale è considerato nullo il coefficiente di dissipazione meccanica ζ_m e nel quale è considerata una forza esterna adimensionale unitaria. La risposta in frequenza di Y è data dalla seguente espressione:

$$Y(\Omega) = -\frac{\Omega^2 - 2j\delta\nu\Omega - \nu^2}{\Omega^4 - 2j\delta\nu\Omega^3 - (\nu^2 + 1)\Omega^2 + 2j\delta\nu\Omega + \nu^2(1 - \kappa^2)}\tag{7.47}$$

dove $j = \sqrt{-1}$ e $\Omega = \nu/\nu_m^a$ è la pulsazione adimensionale, essendo ν la pulsazione dimensionale. L'ottimizzazione si effettua cercando i valori di ν e δ che minimizzano la quantità:

$$||Y(\Omega)||_\infty = \sup_{\Omega} |Y(\Omega)|\tag{7.48}$$

Operando in tal modo si ottimizza la risposta del sistema, sollecitato da forze esterne su larga banda in frequenza.

In figura 7.17 è riportata la risposta in frequenza $|Y(\Omega)|$, valutata per $\kappa = 0.15$, $\nu = 1.01$ ed in corrispondenza di differenti valori di δ ; si nota che esistono due valori di Ω , rispettivamente $\Omega = \Omega_1$ e $\Omega = \Omega_2$, in corrispondenza dei quali $|Y(\Omega)|$ non dipende da δ .

L'espressione analitica di Ω_1 e Ω_2 può essere ottenuta imponendo che $|Y(\Omega)|^2$ non dipenda da δ procedendo come segue: risulta $|Y(\Omega)|^2 = (A + \delta^2 B)/(C + \delta^2 D)$; tale espressione non dipende da δ se $B/A = D/C$. Imponendo quest'ultima condizione si

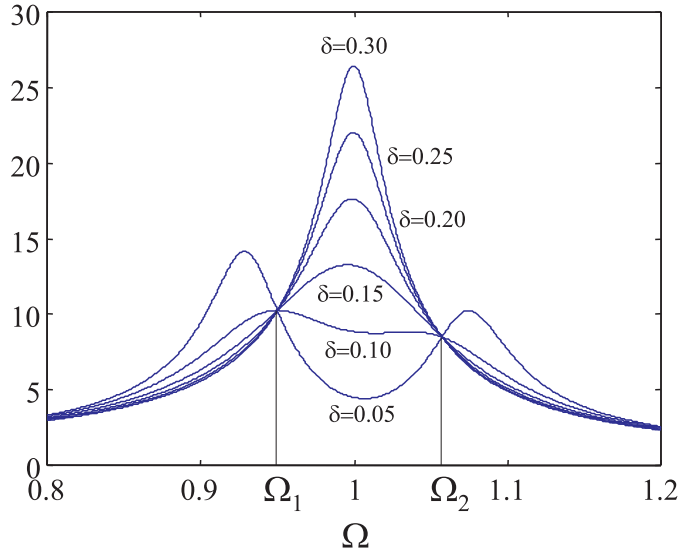


Figura 7.17: Risposta in frequenza $|Y(\Omega)|$ per $\kappa = 0.15$ e $\nu = 1.01$, in corrispondenza di diversi valori di δ

ottiene un'equazione biquadratica in Ω le cui due radici positive sono i valori Ω_1 e Ω_2 cercati, aventi espressione analitica:

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\nu^2 \pm 2\sqrt{1 - 2\nu^2 + \nu^4 + 2\nu^2\kappa^2}} \quad (7.49)$$

Il valore ottimale ν_κ^{rf} di ν secondo questo metodo viene ricavato imponendo $|Y(\Omega_1)| = |Y(\Omega_2)|$; si ottiene:

$$\nu_\kappa^{ft} = 1 \quad (7.50)$$

Determinato ν_κ^{rf} vi sono diversi metodi per stabilire il valore ottimo δ_κ^{rf} di δ ; si possono ad esempio adottare i seguenti due criteri:

a) Si impone

$$\frac{\partial |Y(\Omega)|}{\partial \Omega}(\Omega_1) = 0 \quad (7.51)$$

ottenendo:

$$\delta_\kappa^{rf} = \frac{\sqrt{2}}{2} \kappa \quad (7.52)$$

b) Si impone

$$|Y(\Omega_1)| = |Y(1)| \quad (7.53)$$

ottenendo:

$$\delta_\kappa^{rf} = \frac{\sqrt{6\sqrt{2}(\sqrt{2} - \kappa)\kappa}}{4(\sqrt{2} - \kappa)} \quad (7.54)$$

In figura 7.18 è riportata la risposta in frequenza $|Y(\Omega)|$ calcolata per $\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa^{rf} = 1$ e in corrispondenza di diversi valori di δ ; δ_1 e δ_2 sono i valori ottimali di δ calcolati, rispettivamente, secondo la (7.52) e la (7.54).

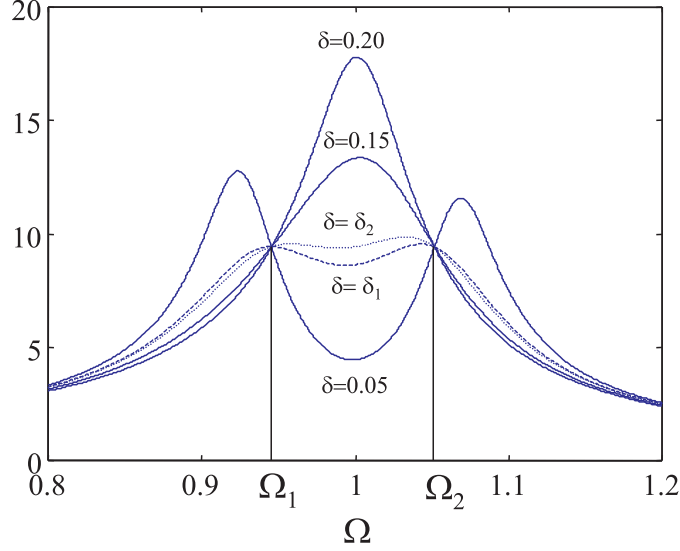


Figura 7.18: Risposta in frequenza $|Y(\Omega)|$ per $\kappa = 0.15$ e $\nu = \nu_\kappa^{rf} = 1$, in corrispondenza di diversi valori di δ

Per valori piccoli di κ , quali quelli che usualmente si ottengono nelle applicazioni, i valori ottimali di ν calcolati secondo la (7.41)₁ e la (7.50) tendono a coincidere. La metodologia appena vista non è applicabile nel caso in cui ζ_m non è più trascurabile in quanto, in quest'ultimo caso, non esistono più due valori di frequenza in corrispondenza dei quali il modulo della risposta in frequenza non dipende da δ .

7.3.3 Il caso di circuito resistivo come limite del caso di circuito RL

Il caso relativo a circuito esterno puramente resistivo trattato nel paragrafo 7.2 può essere ottenuto come limite per $L \rightarrow 0$ del caso in esame; per $L \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow +\infty$ e $\delta \rightarrow +\infty$ entrambi come $1/\sqrt{L}$. Per calcolare tale limite si moltiplica la (7.26)₂ per $\sqrt{L}$, ottenendo:

$$\sqrt{L}\ddot{Q} + 2\sqrt{L}\delta\nu\dot{Q} + \sqrt{L}\nu^2Q + \sqrt{L}\kappa\nu Y = 0 \quad (7.55)$$

In tale maniera, nel limite $L \rightarrow 0$, l'ultimo termine del membro a sinistra della (7.55) tende ad un valore finito. Si riscalda quindi Q con la posizione $Q = \bar{q}\bar{Q}$, essendo $\bar{q}$ un fattore di scala adimensionale da scegliere in modo che nella (7.55), nel limite $L \rightarrow 0$,

il coefficiente di $\dot{Q}$ rimanga finito; con la scelta $\bar{q} = \alpha\sqrt{L}$, con α costante dimensionale indipendente da L e da determinare, la (7.55) nel limite $L \rightarrow 0$ diventa:

$$\frac{\alpha R}{\nu_m^a} \dot{\bar{Q}} + \frac{\alpha(1/(-k_{ee}))}{(\nu_m^a)^2} \bar{Q} + \kappa \frac{(1/\sqrt{-k_{ee}})}{\nu_m^a} Y = 0 \quad (7.56)$$

ovvero

$$\dot{\bar{Q}} + \frac{\nu}{2\delta} \bar{Q} + \frac{\kappa}{\alpha\sqrt{(-k_{ee})}R} Y = 0 \quad (7.57)$$

Con la scelta $\alpha = \sqrt{(\nu_m^a/R)}$ e ponendo:

$$\gamma^2 = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\nu}{2\delta} \quad (7.58)$$

la (7.57) coincide con la (7.4)₂ relativa al caso di circuito esterno puramente resistivo; sostituendo poi $Q = \bar{q}\bar{Q} = \bar{Q}\sqrt{(\nu_m^a L/R)}$ nella (7.26)₁, quest'ultima non dipende più da L e va a coincidere con la (7.4)₁. In conclusione nel caso di circuito esterno resistivo il grafico di λ_κ , riportato in figura 7.4, coincide con la curva ottenuta intersecando la superficie $\lambda_{\nu\kappa}$, le cui curve di livello sono riportate nell'abaco in figura 7.12, con il piano $\nu = l$ nel limite $l \rightarrow +\infty$. Il grafico di γ_κ , riportato in figura 7.5, coincide con la curva ottenuta intersecando la superficie $\delta_{\nu\kappa}$, le cui curve di livello sono riportate nell'abaco in figura 7.13, con il piano $\nu = l$ nel limite $l \rightarrow +\infty$.

7.3.4 Bilancio energetico del sistema

Analogamente a quanto fatto nel caso di circuito esterno non risonante si valutano ora gli scambi energetici tra i vari organi del sistema capaci di trattenere o di dissipare energia; in particolare sono mostrate simulazioni numeriche della risposta nel tempo, relative al sistema sottoposto ad una velocità iniziale $\dot{Y} = 1$, in corrispondenza di differenti scelte dei valori dei parametri relativi al circuito risonante esterno. Nel caso di circuito esterno risonante la lagrangiana $\mathcal{L}$ nella (7.21) contiene i seguenti termini energetici:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}\dot{Q}^2 \\ \mathcal{E}_p &= \frac{1}{2}(Y^2 + \nu^2 Q^2 + 2\kappa\nu QY) \\ \mathcal{P}_d &= \delta\nu\dot{Q}^2 + \zeta_m\dot{Y}^2 \end{aligned} \quad (7.59)$$

Nelle simulazioni che seguono si riportano l'energia potenziale elastica $1/2Y^2$ e la potenza dissipata $2\delta\nu\dot{Q}^2$, assumendo $\zeta_m = 0$. Le simulazioni nelle figure 7.19-7.21 sono relative a condizioni di sintonia ($\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa$) e a differenti scelte del parametro δ ; in particolare in figura 7.19 $\delta = 1/2\delta_\kappa$, in figura 7.20 $\delta = \delta_\kappa$ mentre in figura 7.21 $\delta = 2\delta_\kappa$.

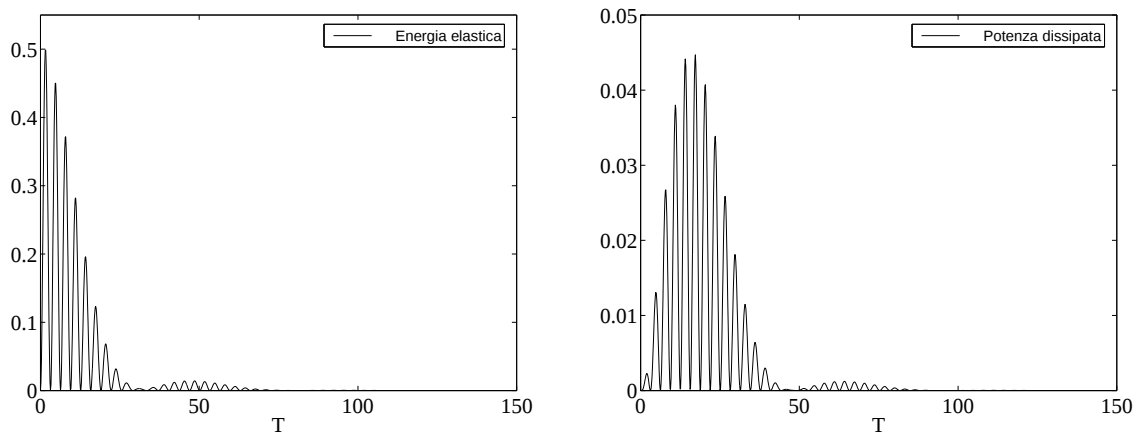


Figura 7.19: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa$ e $\delta = 1/2\delta_\kappa$

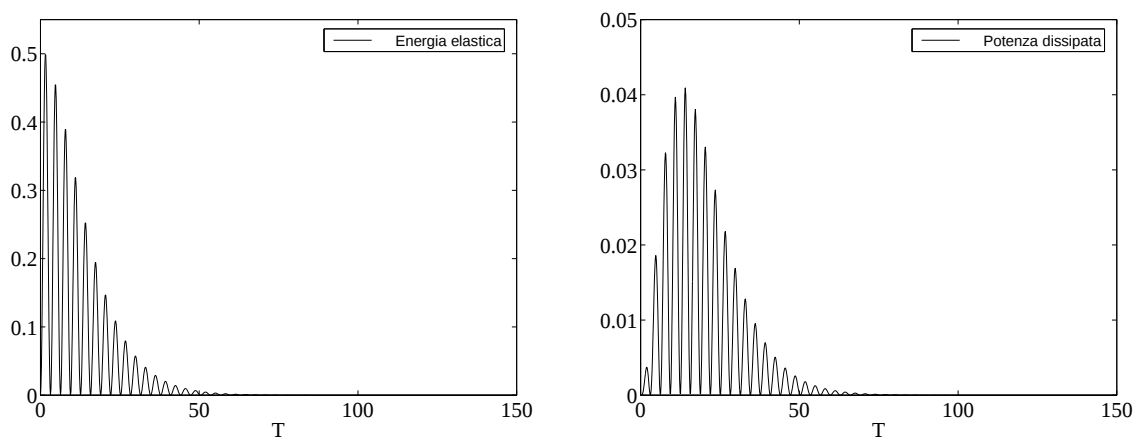


Figura 7.20: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa$ e $\delta = \delta_\kappa$

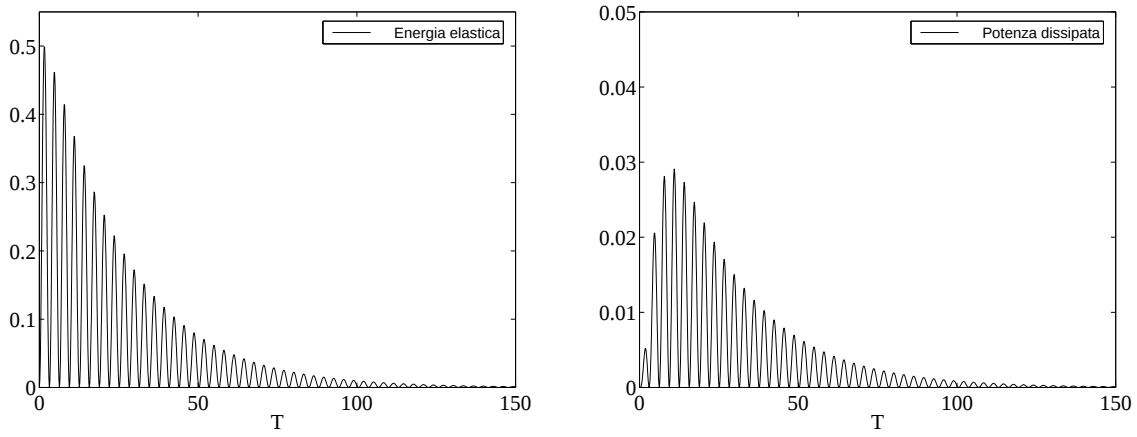


Figura 7.21: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$, $\nu = \nu_\kappa$ e $\delta = 2\delta_\kappa$

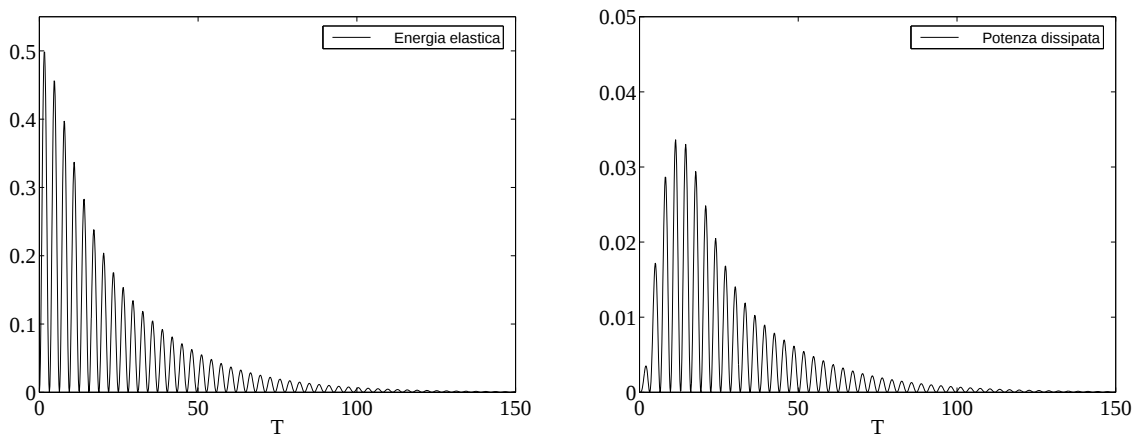


Figura 7.22: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$, $\nu = 0.9\nu_\kappa$ e $\delta = \delta_{\nu\kappa}$

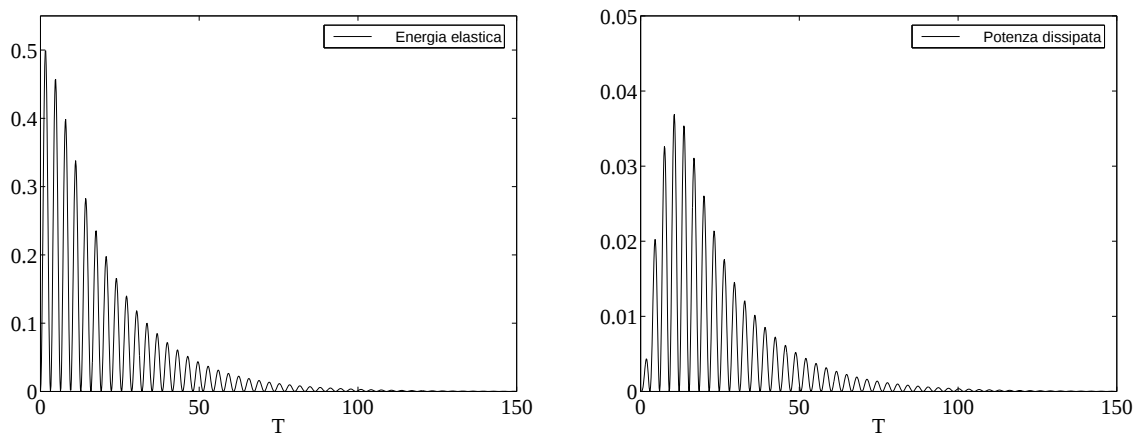


Figura 7.23: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = 0.15$, $\nu = 1.1\nu_\kappa$ e $\delta = \delta_{\nu\kappa}$

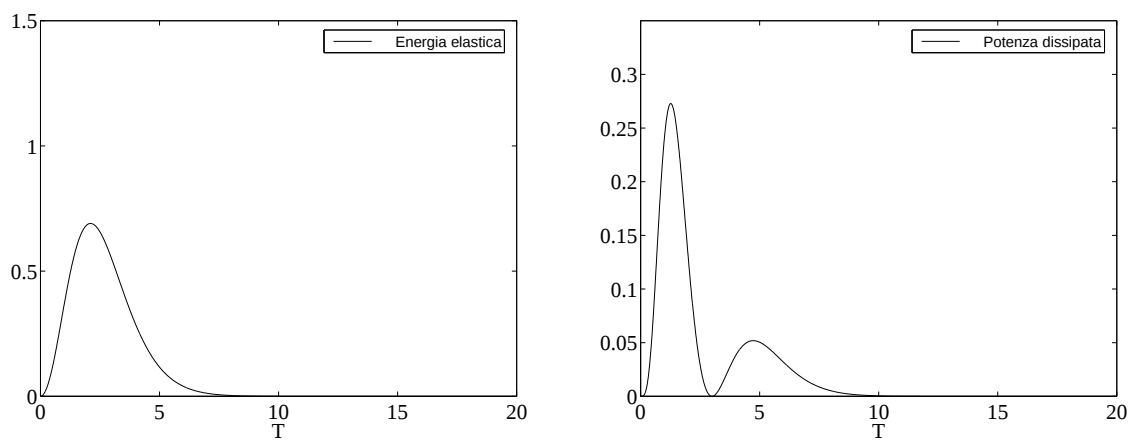


Figura 7.24: Oscillazioni libere del sistema per $\kappa = \kappa_{ott}$, $\nu = \nu_{ott}$ e $\delta = \delta_{ott}$

Le simulazioni 7.19-7.21 presentano un andamento analogo a quello relativo alle simulazioni 7.6-7.8 relative al circuito puramente resistivo; risulta però evidente che nel caso di circuito RL lo smorzamento ottenibile è notevolmente maggiore che nel caso di circuito resistivo. Si può inoltre osservare la comparsa di battimenti nelle simulazioni di figura 7.19, dovuti alla presenza di due coppie di poli complessi coniugati le cui parti reali sono quasi coincidenti e le cui parti immaginarie differiscono di poco.

Nelle figure 7.22-7.23 sono riportate simulazioni effettuate per $\kappa = 0.15$ e per diverse scelte del parametro di sintonia ν , scegliendo sempre $\delta = \delta_{\nu\kappa}$; in particolare in figura 7.22 $\nu = 0.9\nu_\kappa$, in figura 7.23 $\nu = 1.1\nu_\kappa$ mentre il caso $\nu = \nu_\kappa$ è già stato riportato in figura 7.20.

Confrontando le simulazioni nelle figure 7.22 e 7.23 con la simulazione in figura 7.20 risulta evidente l'elevata influenza del parametro di sintonia ν sullo smorzamento ottenibile. Tale influenza, come si evince dall'abaco in figura 7.12, aumenta con l'aumentare di κ fino al suo valore ottimo κ_{ott} . Infine in figura 7.24 è riportata una simulazione effettuata in corrispondenza di $\kappa = \kappa_{ott}$, $\nu = \nu_{ott}$ e $\delta = \delta_{ott}$; in quest'ultima figura, per esigenze di chiarezza, gli intervalli rappresentati sugli assi sono differenti da quelli relativi alle precedenti simulazioni. In tali condizioni si raggiunge il massimo smorzamento ottenibile con un circuito RL ; la presenza di quattro poli coincidenti porta a condizioni di smorzamento critico.