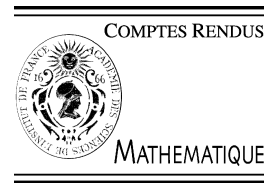


This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



Problèmes mathématiques de la mécanique

Équilibre d'un solide élastique en grandes déformations

Michel Frémond

Università di Roma Tor Vergata, via del Politecnico 1, 00133 Roma, Italie

Reçu le 7 octobre 2008 ; accepté le 31 octobre 2008

Disponible sur Internet le 14 mars 2009

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On étudie les positions d'équilibre d'un solide en grandes déformations. On prend le parti d'accepter que le solide puisse s'aplatir en un solide de dimension inférieure. Une structure écrasée par un marteau-pilon est un exemple d'une telle situation. De plus, on prend en compte les variations spatiales de la matrice de rotation. On montre que sous des hypothèses raisonnables, il existe des solutions au problème d'équilibre. Elles peuvent ne pas être uniques. *Pour citer cet article : M. Frémond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Equilibrium positions of a solid in large deformations. We investigate equilibrium positions of a solid in large deformations. We take the party that a solid can flatten in a solid with a lower dimension. A structure flattened by a power hammer is an example of such a situation. Moreover, we take into account the spacial variations of rotation matrix. We prove that under reasonable assumptions, there exist equilibrium positions which may be non-unique. *To cite this article: M. Frémond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In Note [3], we investigate the motion of an elastic solid in large deformations. In the predictive theory we take into account the spatial variation, $\text{grad } \mathbf{R}$, of the rotation matrix \mathbf{R} of polar decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}$. The principle of virtual power involves the gradient of the angular velocity. It gives an equation of motion (see Eqs. (1) and (2)) introducing a new interior force, $\mathbf{\Lambda}_\alpha$ a torque flux. In large deformations, self-contact or self collision may occur, see Fig. 1. Self contact introduces contact forces defined in Eq. (4) with constitutive law given in Eq. (12). Self collision, introduces contact percussions investigated in [2]. The local impenetrability condition we choose (see Eq. (5)), requires that the eigenvalues of the extension matrix \mathbf{W} are non-negative. Our parti pris is that the material may flatten into a surface, $\text{rank } \mathbf{W} = 2$ (for instance when a structure is flattened by a power hammer), a curve, $\text{rank } \mathbf{W} = 1$ (for instance when an ingot is transformed into a wire in an extruder), even into a point, $\text{rank } \mathbf{W} = 0$. Free energy $\bar{\Psi}(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R})$ involves the indicator function of convex cone C of the symmetric semi definite positive matrices, see Eq. (6). The constitutive

Adresses e-mail : fremond@lagrange.it, michel.fremond@uniroma2.it.

laws are given by the derivatives and the subgradients of the free energy, Eqs. (7)–(10). They introduce impenetrability reactions (see Eq. (8)) which result from symmetric matrices \mathbf{S}^{reac} and antisymmetric matrices \mathbf{A}^{reac} which are normal to convex cone C in the linear space, \mathcal{M} , of 3×3 matrices. For instance, when the solid is flattened into a plate, the reaction is a pressure maintaining the flattening.

Equilibrium positions may be found by minimization of the potential energy (see Eqs. (20) and (21)). Potential energy depends on two quantities: the position $x = \Phi(a)$ and the rotation matrix $\mathbf{R}(a)$ because this matrix is not uniquely given by function Φ when $\text{rank } \mathbf{W} < 2$. The kinematically admissible couples (Φ, \mathbf{R}) , those which may be reached from position $\Phi(a) = a$ and rotation matrix $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, satisfy unilateral and bilateral boundary conditions (see Eqs. (17) and (18)) and no global interpenetration occurs. The global non-interpenetration condition for a position function $\Phi(a)$ is that there exist non-flattened non-interpenetrating position functions $\Phi_\varepsilon(a)$ close to $\Phi(a)$ (see Eq. (16) and Fig. 2). Proposition 4.1 proves that the set of kinematically admissible couples (Φ, \mathbf{R}) is non-empty and sequentially weakly closed in $(W^{1,p}(\dot{D}_a))^3 \times (H^1(\dot{D}_a))^9$, $p > 3$.

If the free energy, see Eq. (22), satisfies coercivity and sequential weak semi continuity simple properties and if the exterior forces are smooth functions, we prove that there exist equilibrium couples (Φ, \mathbf{R}) which minimize the potential energy (see problem (21) and Theorem 4.2). Free energy $\bar{\Psi}(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R})$ may be a convex function of $(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R})$ without any mechanical restriction, for instance free energy given in formula (23). The solutions are not unique because the set of the kinematically admissible (Φ, \mathbf{R}) is not convex. When an eigenvalue of \mathbf{W} is null, free energy may be either finite or infinite: when finite flattening is possible, when infinite flattening is impossible.

1. Introduction

Dans la Note [3], nous avons décrit le mouvement d'un solide élastique en grandes déformations. Nous avons pris le parti d'accepter qu'un matériau puisse s'écraser en un matériau de dimension inférieure. Une structure écrasée par un marteau-pilon est un exemple d'une telle situation. Lorsqu'un solide est transformé en un fil par une filière, la torsion du fil pendant et après sa fabrication est un élément important de son comportement. Nous avons donc choisi de prendre en compte les variations spatiales de la matrice de rotation \mathbf{R} dans la théorie prévisionnelle. Nous étudions l'équilibre d'un solide élastique pouvant avoir de grandes déformations, être en autocontact et être en contact unilatéral ou bilatéral avec un obstacle qui occupe le domaine régulier D_{obs} (un domaine est un fermé). On montre que sous des hypothèses raisonnables ce problème a des solutions. L'énergie libre peut être, sans inconvénient mécanique, une fonction convexe de la matrice d'extension \mathbf{W} .

On utilise les notations de la Note [3]. On note \mathcal{M} l'ensemble des matrices 3×3 muni du produit scalaire $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ le sous ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ le sous ensemble des matrices antisymétriques.

On note $x = \Phi(a) = (x_i) \in D_x = \Phi(D_a)$ la position d'un point matériel du solide en équilibre qui se trouvait auparavant au point $a = (a_\alpha) \in D_a$ (le domaine D_a est un fermé régulier). On note encore C le cône convexe des matrices de \mathcal{M} qui sont semi définies positives. La décomposition polaire de la matrice gradient $\mathbf{F} = (F_{i\alpha} = \partial \Phi_i / \partial a_\alpha)$ est $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}$ où $\mathbf{R}(\Phi)$ est orthogonale directe et $\mathbf{W}(\Phi)$ est symétrique et unique, [3]. Une partie de la frontière du solide peut être en contact avec une autre. Cette partie Γ_{auto} est à l'intérieur du domaine D_x . Sur la surface d'autocontact, le point $x \in \Gamma_{\text{auto}}$ est la position de deux points matériels a et b , voir la Fig. 1.

2. Les équations d'équilibre

Elles sont données par le principe des puissances virtuelles. Ces puissances introduisent les efforts intérieurs, le tenseur de Boussinesq Π , le moment \mathbf{M} , le courant de moment Λ_α dans D_a et la force surfacique \vec{r} , le moment surfacique \mathbf{m} sur $\Phi^{-1}(\Gamma_{\text{auto}}) \cap \partial D_a$, [3]. Les équations d'équilibre dans D_a sont

$$\Pi_{i\alpha,\alpha} + f_i = 0, \quad \Lambda_{\alpha,\alpha} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^e = 0, \quad \text{dans } \dot{D}_a, \quad (1)$$

$$\Pi_{i\alpha} N_\alpha = g_i, \quad \Lambda_\alpha N_\alpha = \mathbf{m}^e, \quad \text{sur } \Phi^{-1}(\partial D_x \setminus \partial D_{\text{obs}}) \cap \partial D_a, \quad (2)$$

$\Phi^{-1}(\partial D_x \setminus \partial D_{\text{obs}}) \cap \partial D_a$ est la partie de ∂D_a qui n'a pas pour image une zone de contact (autocontact ou contact avec l'obstacle). Les efforts extérieurs surfaciques g_i et \mathbf{m}^e y sont appliqués. Les efforts extérieurs volumiques sont f_i et \mathbf{M}^e . Le vecteur N_α est normal à ∂D_a .

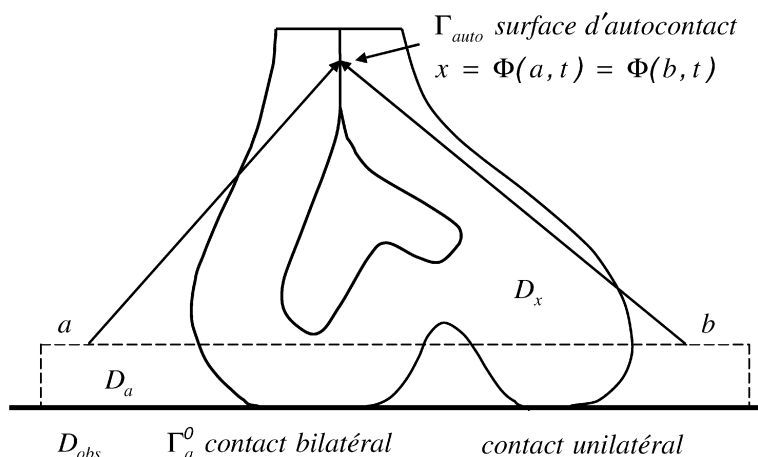


Fig. 1. La position $x = \Phi(a)$. Il y a autocontact sur la partie Γ_{auto} . Le solide est fixé sur la partie Γ_a^0 à un obstacle D_{obs} . Il peut par ailleurs être en contact unilatéral avec l'obstacle.

Là où il y a autocontact, les équations d'équilibre sont

$$\forall(a, b) = \Phi^{-1}(\Phi(a)) \cap \partial D_a = \Phi^{-1}(\Phi(b)) \cap \partial D_a, \quad a \neq b, \quad (3)$$

$$\vec{r}(a) dS_a + \vec{r}(b) dS_b = 0, \quad \Lambda_\alpha(a) N_\alpha(a) + \mathbf{m}(a) = 0, \quad \Lambda_\alpha(b) N_\alpha(b) + \mathbf{m}(b) = 0, \quad \text{sur } \Phi^{-1}(\Gamma_{\text{auto}}), \quad (4)$$

où les éléments de surface $dS_a = d\Gamma / \|\text{cof } \mathbf{W}(a)\|$ et $dS_b = d\Gamma / \|\text{cof } \mathbf{W}(b)\|$ sont les images réciproques de $d\Gamma$, élément de surface de Γ_{auto} .

3. Les lois de comportement

La condition de non interpénétration locale est

$$\mathbf{W} \in C, \quad (5)$$

où C est le cône convexe des matrices de \mathcal{M} qui sont semi définies positives. Cette condition impose que le volume algébrique de l'image par \mathbf{F} d'un parallélépipède ne change pas de signe. Lorsque $\det \mathbf{W} = \det \mathbf{F} = 0$, le matériau est aplati, en une surface si $\text{rang } \mathbf{W} = 2$, en une courbe si $\text{rang } \mathbf{W} = 1$ et en un point si $\text{rang } \mathbf{W} = 0$. Cette propriété de l'état du matériau est prise en compte par l'énergie libre volumique qui dépend des variables d'état \mathbf{W} et $\text{grad } \mathbf{R}$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{W}, \|\text{grad } \mathbf{R}\|^2) + I_C(\mathbf{W}), \quad (6)$$

où $\|\text{grad } \mathbf{R}\|^2 = R_{i\alpha, \beta} R_{i\alpha, \beta}$ est une quantité objective et I_C est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe C , [4]. Les lois de comportement pour un matériau élastique sont

$$\Pi = \mathbf{R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} + \mathbf{S}^{\text{reac}} + \mathbf{A}^{\text{reac}} \right), \quad (\mathbf{S}^{\text{reac}} + \mathbf{A}^{\text{reac}}) \in \partial I_C(\mathbf{W}), \quad (7)$$

$$\mathbf{S}^{\text{reac}} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{A}^{\text{reac}} \in \mathcal{A}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \Pi \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \Pi^T, \quad (9)$$

$$\Lambda = 4 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial (\|\text{grad } \mathbf{R}\|^2)} \right) (\text{grad } \mathbf{R}) \mathbf{R}^T. \quad (10)$$

Elles impliquent que l'inégalité de Clausius Duhem est vérifiée et que $\mathbf{W} \in C$, [2]. Le sous-différentiel $\partial I_C(\mathbf{W})$ est formé des matrices \mathbf{A}^{reac} de \mathcal{A} et des matrices \mathbf{S}^{reac} de \mathcal{S} qui sont normales au cône C dans \mathcal{S} au point $\mathbf{W} \in C$

$$\forall \mathbf{X} \in C, \quad (\mathbf{X} - \mathbf{W}) : \mathbf{S}^{\text{reac}} \leq 0. \quad (11)$$

Le tenseur $\mathbf{R} \mathbf{S}^{\text{reac}}$ avec $\mathbf{S}^{\text{reac}} \in \partial I_C(\mathbf{W})$ empêche les extensions principales, les valeurs propres de \mathbf{W} , de devenir négatives. Il est, bien sûr, nul lorsque $\text{rang } \mathbf{W} = \text{rang } \mathbf{F} = 3$. On montre, comme on peut s'y attendre, que lorsque le

solide est aplati en un solide de dimension 2, une plaque par exemple, ce tenseur donne une pression qui maintient l'aplatissement.

Le tenseur $\mathbf{R}\mathbf{A}^{\text{reac}}$ toujours présent, est la somme de deux tenseurs $\mathbf{R}\mathbf{A}_0^{\text{reac}} \in \mathbf{R}\mathcal{A}$ et $\mathbf{R}\mathbf{A}_1^{\text{reac}} \in \mathbf{R}\mathcal{A}$ avec $\mathbf{A}_1^{\text{reac}} : \mathbf{A}_0^{\text{reac}} = 0$. Le tenseur $\mathbf{R}\mathbf{A}_0^{\text{reac}}$ empêche la matrice \mathbf{W} de devenir non symétrique ou, suivant la formule (9), la matrice \mathbf{M} de devenir non antisymétrique. Il est déterminé par les lois de comportement (7) et (9). La matrice $\mathbf{A}_1^{\text{reac}}$, nulle pour $\text{rang } \mathbf{W} \geq 2$, donne une réaction de non interpénétration de cisaillement qui est déterminée par les équations du mouvement.

Sur la surface d'autocontact Γ_{auto} , $\mathbf{m} = 0$ et la réaction de non interpénétration est

$$\vec{r}(a) = \|\text{cof } \mathbf{W}(a)\|_2 R^{\text{reac}} \vec{N}_1(\Phi(a)), \quad R^{\text{reac}} \in \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

où \vec{N}_1 est la normale à Γ_{auto} extérieure à la partie relative à $\Phi(a)$.

4. Les positionnements d'équilibre

On peut rechercher des positions d'équilibre, celles qui minimisent l'énergie potentielle. Pour cela, on doit définir les couples (Φ, \mathbf{R}) que l'on appelle positionnements, qui sont cinématiquement admissibles : ce sont ceux qui peuvent être atteints à partir de D_a avec $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ comme matrice de rotation initiale. Dans le cas du problème d'évolution, cette question ne se pose pas puisque les lois de comportement comme (12) sur la surface d'autocontact empêchent deux parties du solide de s'interpénétrer.

4.1. L'ensemble des positionnements cinématiquement admissibles

On sait que l'ensemble des positionnements

$$\mathcal{C} = \{(\Phi, \mathbf{R}) \mid \exists \mathbf{W} \text{ tel que } \text{grad } \Phi = \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}, \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1, \mathbf{W} \in \mathcal{C}\}, \quad (13)$$

n'est pas l'ensemble des positionnements possibles du solide, c'est à dire tous ceux qui peuvent être atteints à partir de D_a et de la matrice de rotation initiale $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. En effet (13) n'interdit pas l'interpénétration de deux parties du solide, [1].

Rappelons qu'un positionnement (Φ, \mathbf{R}) sans aplatissement (c'est à dire tel que $\det \mathbf{F} > 0$) et qui satisfait

$$\int_{\dot{D}_x} dD_x \geq \int_{\dot{D}_a} \det \mathbf{F} dD_a, \quad (14)$$

peut être atteint à partir de D_a (voir Ciarlet [1], page 230). On note \mathcal{K}_{nf} l'ensemble des positionnements sans aplatissement qui vérifient (14)

$$\mathcal{K}_{nf} = \{(\Phi, \mathbf{R}) \text{ satisfait (14), } \det \mathbf{F} > 0, \Phi \in C^1(D_a)\}. \quad (15)$$

Il n'y a pas interpénétration de deux parties d'un solide dont le positionnement est (Φ, \mathbf{R}) s'il existe des positionnements sans aplatissement qui peuvent être atteints, $(\Phi_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon) \in \mathcal{K}_{nf}$, et sont aussi proches que l'on souhaite de (Φ, \mathbf{R}) , voir la Fig. 2. Ces positionnements forment l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{(\Phi, \mathbf{R}) \mid \forall \varepsilon > 0, \exists (\Phi^\varepsilon, \mathbf{R}^\varepsilon) \in \mathcal{K}_{nf}, \text{ tel que } \|\Phi - \Phi^\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon\}. \quad (16)$$

Sur la Fig. 2 on voit bien que la différence entre deux positions avec ou sans interpénétration, ne peut pas être faite sur D_x mais sur une position voisine $D_x^\varepsilon = \Phi^\varepsilon(D_a)$ qui n'est pas aplatie.

Le solide est fixé sur la partie Γ_a^0 sur un obstacle immobile occupant le domaine D_{obs} , Fig. 1. Il peut être en contact unilatéral avec cet obstacle sur une autre partie, inconnue cette fois, de la surface ∂D_{obs} . On définit

$$\mathcal{K}^c = \{(\Phi, \mathbf{R}) \mid (\Phi, \mathbf{R}) \in \mathcal{K}^o, \Phi \in \mathcal{K}^+\}, \quad (17)$$

avec

$$\mathcal{K}^o = \{(\Phi, \mathbf{R}) \mid \Phi(a) = a, \mathbf{R} = \mathbf{I}, \text{ sur } \Gamma_a^0\}, \quad \mathcal{K}^+ = \{x \mid x \notin \dot{D}_{\text{obs}}\} = \{x \mid d_{\text{obs}}(x) \geq 0\}, \quad (18)$$

où d_{obs} est la distance signée à l'obstacle supposé régulier. Les positionnements de \mathcal{K}^c vérifient les conditions à la limite unilatérales ou bilatérales et il n'y a pas interpénétration avec l'obstacle. On montre alors que tous les ensembles \mathcal{K} , \mathcal{K}^c et \mathcal{C} sont fermés dans des espaces de Sobolev qui sont raisonnables du point de vue mécanique.

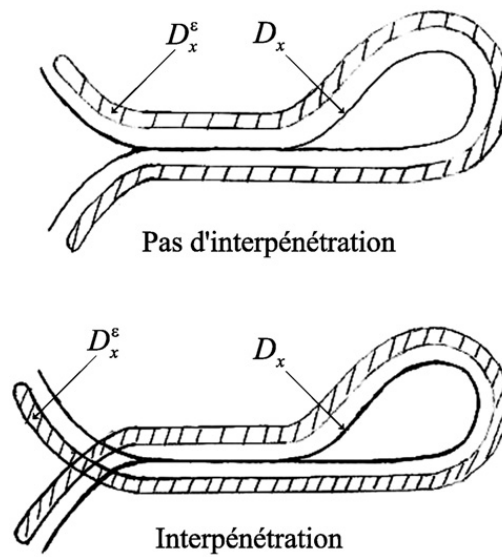


Fig. 2. Un solide de dimension 2, D_a est aplati en une courbe $D_x = \Phi(D_a)$. Les solides de dimension 2, $D_x^e = \Phi^e(D_a)$ font la différence entre la situation où il y a interpénétration (en bas) et la situation où il n'y en a pas (en haut). Pour un exemple en dimension 3, la figure est une coupe d'un solide aplati en une feuille (une feuille de papier par exemple, la situation du bas demande de couper la feuille de papier pour qu'elle soit traversée par l'autre partie).

Proposition 4.1. *Les ensembles \mathcal{K} , \mathcal{K}^c et \mathcal{C} sont séquentiellement faiblement fermés dans $(W^{1,p}(\dot{D}_a))^3 \times (H^1(\dot{D}_a))^9$, $p > 3$. Leur intersection est non vide.*

4.2. Les efforts extérieurs

On suppose qu'il n'y a pas de moment extérieur appliqué, $\mathbf{M}^e = 0$ et $\mathbf{m}^e = 0$. La force \vec{g} est appliquée sur la partie Γ_a^1 de la frontière. Le travail des forces extérieures dans un déplacement $\hat{\Phi} - a$ est

$$T^e(\hat{\Phi}) = \int_{\dot{D}_a} \vec{f} \cdot (\hat{\Phi} - a) dD_a + \int_{\Gamma_a^1} \vec{g} \cdot (\hat{\Phi} - a) dS_a. \quad (19)$$

4.3. Les positionnements d'équilibre

Un positionnement qui est un bon candidat pour être un positionnement d'équilibre minimise l'énergie potentielle

$$\mathcal{F}(\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{R}}) = \int_{\dot{D}_a} \Psi(\hat{\mathbf{W}}(\hat{\Phi}), \text{grad } \hat{\mathbf{R}}) dD_a - T^e(\hat{\Phi}), \quad (20)$$

sur l'ensemble des positionnements qui sont cinématiquement admissibles $(\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{R}}) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c \cap \mathcal{C}$. On montre que sous des hypothèses raisonnables ce problème

$$\inf\{\mathcal{F}(\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{R}}) \mid (\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{R}}) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c \cap \mathcal{C} \cap (W^{1,p}(\dot{D}_a))^3 \times (H^1(\dot{D}_a))^9\}, \quad (21)$$

a des solutions :

Théorème 4.2. *Si la fonction*

$$h(\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{R}}) = \int_{\dot{D}_a} \Psi(\hat{\mathbf{W}}, \text{grad } \hat{\mathbf{R}}) dD_a, \quad (22)$$

de $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{R}})$ est coercive et séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur $(L^p(\dot{D}_a))^6 \times (H^1(\dot{D}_a))^9$ avec $p > 3$ et si les forces \vec{f} et \vec{g} appartiennent à $(L^q(\dot{D}_a))^3$ et à $(L^q(\Gamma_a^1))^3$, $((1/p) + (1/q) = 1)$, alors le problème (21) a des solutions.

Un exemple d'énergie libre vérifiant les hypothèses du théorème est

$$\Psi(\widehat{\mathbf{W}}, \text{grad } \widehat{\mathbf{R}}) = \frac{k_1}{p} \|\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{I}\|^p + \frac{k_2}{2} \|\text{grad } \widehat{\mathbf{R}}\|^2. \quad (23)$$

Remarque. L'énergie libre précédente $\Psi(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R})$ est une fonction convexe de \mathbf{W} . Notons que cela n'implique pas que Ψ est une fonction convexe de $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}$. Dans le cas où $\text{rang } \mathbf{W} = 3$, $p = 2$ et $\mathbf{A}_1^{\text{reac}} = 0$, on a

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = k_1 \mathbf{R}(\mathbf{W} - \mathbf{I}), \quad \sigma = \frac{k_1}{J} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{F}^T = \frac{k_1}{J} \mathbf{R}(\mathbf{W}^2 - \mathbf{W}) \mathbf{R}^T. \quad (24)$$

Les contraintes principales de Cauchy $\sigma_i = (k_1/J)(\lambda_i^2 - \lambda_i)$ où $J = \det \mathbf{F}$ et les λ_i sont les valeurs propres de \mathbf{W} , sont négatives lorsque les $\lambda_i < 1$. Cette propriété est impossible si $\mathbf{F} \rightarrow \Psi(\mathbf{F})$ est une fonction convexe (voir Ciarlet [1], page 170), parce que $\sigma_i + \sigma_{i+1}$ doit être positive ou nulle. Alors $\Psi(\mathbf{F})$ n'est pas une fonction convexe de \mathbf{F} . Si l'on remplace $\|\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{I}\|^2$ par $\|\widehat{\mathbf{W}}\|^2 = \mathbf{F} : \mathbf{F}$, l'énergie libre devient une fonction convexe de \mathbf{F} , ayant $\sigma_i = (k_1/J)\lambda_i^2 > 0$ comme contraintes principales de Cauchy.

Notons aussi que la fonction $\mathcal{F}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}, \widehat{\mathbf{R}})$ est minimisée sur un ensemble non convexe. Les solutions du problème (21) peuvent alors ne pas être uniques. Remarquons enfin que l'énergie libre peut être finie ou infinie lorsque $\det \mathbf{W} = \det \mathbf{F} = 0$. Si elle est infinie, l'aplatissement est alors impossible.

Références

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity*, vol. I: Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [2] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [3] M. Frémond, Grandes déformations et comportements extrêmes, C. R. Mécanique 337 (2009); doi:10.1016/j.crme.2009.01.003.
- [4] J.J. Moreau, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Roma Tor Vergata, Roma, ISBN 9 788862 960014, 2003. Collège de France, 1966.