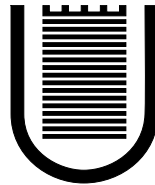


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
TOR VERGATA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DOTTORATO DI RICERCA IN PROGETTAZIONE
DEI SISTEMI MECCANICI

TESI DI DOTTORATO

**Sviluppo e implementazione di
formulazioni per l'analisi dinamica di
sistemi multibody**

Leonardo Vita

Tutor

Prof. Ettore Pennestrì

XVII CICLO

Indice

Introduzione	1
1 Analisi dinamica dei sistemi multibody	4
1.1 Parametri di Eulero, matrice di spostamento e velocità angolare	5
1.2 Equazioni di vincolo	7
1.2.1 Riferimento del giunto	7
1.2.2 Coppia Rotoidale	8
1.2.3 Coppia Prismatica	9
1.2.4 Coppia Cilindrica	9
1.2.5 Coppia Sferica	10
1.2.6 Guida	10
1.2.7 Gradi di libertà	11
1.2.8 Vincoli di base	12
1.2.9 Equazioni di vincolo della coppia rotoidale	16
1.2.10 Equazioni di vincolo della coppia prismatica	16
1.2.11 Equazioni di vincolo della coppia cilindrica	16
1.2.12 Equazioni di vincolo della coppia sferica	17
1.2.13 Equazioni di vincolo della guida	17

1.3	Matrice Jacobiana dei vincoli di base	17
1.3.1	Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di ortogonalità	18
1.3.2	Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di ortogonalità	19
1.3.3	Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di parallelismo	21
1.3.4	Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di parallelismo	21
1.3.5	Blocco matrice Jacobiana per vincolo sferico	21
1.3.6	Blocco matrice Jacobiana per vincolo distanza costante	22
1.4	Il vettore $\{\gamma\}$ per i vincoli base	23
1.4.1	Primo vincolo di ortogonalità	23
1.4.2	Secondo vincolo di ortogonalità	24
1.4.3	Primo vincolo di parallelismo	25
1.4.4	Secondo vincolo di parallelismo	26
1.4.5	Vincolo sferico	26
1.4.6	Vincolo sferico-sferico o di distanza	26
1.5	Equazioni del moto	27
1.6	Matrice delle masse	29
1.7	Forze generalizzate	30
1.7.1	Forze esterne	31
1.7.2	Coppie esterne	31
1.7.3	Sistema molla/smorzatore traslazionale	31
1.7.4	Sistema molla/smorzatore rotazionale	32
2	Metodologie di integrazione numerica	36
2.0.5	La formulazione stabilizzata di Baumgarte	37

2.1	Partizionamento delle coordinate	39
2.1.1	Il partizionamento delle coordinate	41
2.2	Ortogonalizzazione dei vincoli	46
2.2.1	Decomposizione SVD	55
2.2.2	Decomposizione QR	58
2.3	La formulazione di Udwadia-Kalaba	63
2.3.1	La matrice pseudoinversa di Moore-Penrose	65
3	Sistemi a vincoli sovrabbondanti	79
3.1	Decomposizione QTZ della matrice Jacobiana dei vincoli	80
3.1.1	Decomposizione ortogonale di $[R']$	82
3.1.2	Decomposizione QTZ	82
3.1.3	Riduzione del numero di vincoli	84
3.1.4	Unicità della matrice $[Q_1]$	85
3.2	Definizione di velocità indipendenti	86
3.2.1	Verifica della soluzione	87
3.3	Metodo di aggiornamento della base del kernel	89
3.3.1	Proprietà della matrice $[\hat{Q}]$	92
3.3.2	Criteri per determinare quando decomporre nuovamente la matrice Jacobiana	94
3.4	Equazioni del moto in forma di stato	95
3.4.1	Equazione del moto in forma ridotta	95
3.4.2	Ortogonalizzazione dei vincoli	96
3.4.3	Formulazione mediante le accelerazioni indipendenti	97
3.4.4	Formulazione mediante un set minimo di coordinate	99
4	Il codice	103
4.1	Interfaccia utente	103

4.2	Descrizione delle card di dati	104
4.2.1	La card <i>General.s3d</i>	105
4.2.2	La card <i>Connection.s3d</i>	107
4.2.3	La card <i>Inertial.s3d</i>	114
4.2.4	La card <i>Force.s3d</i>	116
4.2.5	La card <i>Initial Configuration.s3d</i>	121
4.2.6	La card <i>SPDamp.s3d</i>	125
4.2.7	La card <i>Driving Pos.s3d</i>	129
4.2.8	La card <i>QRTol.s3d</i>	131
4.3	Metodi numerici	138
4.3.1	La libreria LAPACK	138
4.3.2	Risoluzione di sistemi non lineari	140
4.3.3	Soluzione di sistemi differenziali ordinari	141
4.3.4	Soluzione di sistemi algebrico–differenziali	141
4.4	Lettura delle card	142
4.5	Risoluzione mediante QTZ	144
4.5.1	Ricerca di una configurazione iniziale congruente	145
4.5.2	Correzione delle posizioni	146
4.5.3	Scelta del metodo di risoluzione	146
4.6	Accorgimenti computazionali	147
4.6.1	Allocazione di variabili locali	147
4.6.2	Trattamento dei vincoli di moto	148
4.7	Esempi numerici	148
4.7.1	Pentalatero articolato	149
4.7.2	Manovellismo in configurazione critica	158
4.7.3	Giunto cardanico	161
4.8	Modellazione cuscinetti a strisciamento	165

4.8.1	Modello di cuscinetto bidimensionale	167
4.8.2	Modello di cuscinetto tridimensionale	173
5	Algebra duale	186
5.1	Algebra dei numeri duali	186
5.1.1	Operazioni sui numeri duali	187
5.1.2	La funzione di un numero duale	188
5.1.3	Funzioni trigonometriche di numeri duali	191
5.2	Algebra dei vettori linea	191
5.2.1	La teoria delle <i>screw</i>	191
5.2.2	Torsore, <i>screw</i> , <i>twist</i> e <i>wrench</i>	192
5.2.3	Moltiplicazione di un vettore linea unitario per un numero reale	196
5.2.4	Moltiplicazione di un vettore linea unitario per un numero duale	197
5.2.5	Vettore linea di minima distanza tra due rette	199
5.2.6	Prodotti tra vettori linea	200
5.3	Matrici duali	203
5.4	Applicazione dell'algebra duale al moto di un corpo rigido	205
5.4.1	Movimenti spaziali finiti: descrizione matriciale	205
5.4.2	Matrice di trasformazione duale tra due riferimenti cartesiani	209
5.4.3	Quantità di moto duale di un corpo	211
5.4.4	Equazioni di Newton-Euler in forma duale	215
6	Analisi del rendimento meccanico di un giunto cardanico	216
6.1	Analisi cinematica	217
6.2	Analisi statica	223

6.3	Analisi dinamica	226
6.4	Coppie cinematiche con attrito	231
6.5	Analisi del rendimento meccanico	233
7	Modellazione statistica delle tolleranze geometriche e dimensionali per meccanismi tridimensionali	240
7.1	Metodologie per l'analisi delle tolleranze	241
7.2	Modellazione della coppia cilindrica	242
7.3	Strategia risolutiva	247
7.4	Esempio numerico	248
	Conclusioni	256
	Bibliografia	258
	Pubblicazioni	263

Elenco delle figure

1.1	Coppia rotoidale	8
1.2	Coppia prismatica	9
1.3	Coppia cilindrica	10
1.4	Coppia sferica	10
1.5	Guida	11
1.6	Geometria primo vincolo di ortogonalità.	13
1.7	Geometria secondo vincolo di ortogonalità.	13
1.8	Vincolo sferico	14
1.9	Vincolo di distanza	14
1.10	Geometria del primo vincolo di parallelismo	15
1.11	Secondo vincolo di parallelismo	15
1.12	Attuatore dinamico lineare	32
1.13	Attuatore dinamico angolare	33
2.1	Doppio pendolo - Nomenclatura	49
2.2	Pendolo semplice - Nomenclatura	56
2.3	Fasi di calcolo per l'integrazione numerica	60

2.4	Confronto dell'entità della violazione dei vincoli di posizione: a) Senza stabilizzazione b) Con stabilizzazione di Baumgarte	75
2.5	Pentalatero articolato piano	77
2.6	Posizione angolare delle aste parallele	77
3.1	Interpretazione geometrica dei sottospazi $[\hat{Q}_1]$ e $[\hat{Q}_2]$	93
4.1	<i>Card Manager</i> : Finestra Principale	105
4.2	<i>Card Manager</i> : Card General	106
4.3	<i>Card Manager</i> : Finestra principale di gestione delle coppie cinematiche	108
4.4	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione della coppia rotoidale	109
4.5	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione della coppia prismatica	110
4.6	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione della coppia cilindrica	111
4.7	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione della coppia sferica	111
4.8	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione della guida	112
4.9	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione delle caratteristiche inerziali	114
4.10	<i>Card Manager</i> : Finestra di gestione di forze e coppie	117
4.11	<i>Card Manager</i> : Condizioni iniziali tramite asse di rotazione	121
4.12	<i>Card Manager</i> : Condizioni iniziali tramite parametri di Eulero	122
4.13	<i>Card Manager</i> : Gruppi molla-smorzatore-attuatore estensionali	126
4.14	<i>Card Manager</i> : Gruppi molla-smorzatore-attuatore torsionali	127
4.15	<i>Card Manager</i> : Opzioni di risoluzione	132
4.16	Struttura dati per lettura card	143
4.17	Pentalatero – Configurazione iniziale	149
4.18	Pentalatero – Traiettorie dei baricentri	150
4.19	Pentalatero – Confronto risultati	151
4.20	Pentalatero – Violazione vincolo cinematico	152

4.21	Configurazione iniziale	158
4.22	Velocità angolare manovella	159
4.23	Coordinata X ed Y del CM della manovella	160
4.24	Posizione del CM del pistone	160
4.25	Contenuto di energia cinetica a) e totale b)	161
4.26	Configurazione iniziale	162
4.27	Errato calcolo di un parametro di Eulero	164
4.28	Velocità angolare dei corpi	164
4.29	Parametri di Eulero dell'asse di ingresso a) e di uscita b) . . .	165
4.30	Cuscinetto a strisciamento in regime di lubrificazione idrodinamica	166
4.31	Nomenclatura del cuscinetto bidimensionale	168
4.32	Manovellismo di spinta con cuscinetto a strisciamento	171
4.33	Confronto tra le accelerazioni della biella: a scala piena sulla sinistra, un particolare sulla destra	173
4.34	Traiettoria del centro del guscio interno rispetto a quello del guscio esterno del cuscinetto	174
4.35	Nomenclatura del cuscinetto	175
4.36	Cuscinetto con asse inclinato	177
4.37	Coefficiente di attrito per un cuscinetto a strisciamento	180
4.38	Schema di calcolo per un cuscinetto a strisciamento	181
4.39	Rotore non bilanciato tra due cuscinetti a strisciamento	182
4.40	Traiettoria del baricentro del rotore e traiettoria del centro di uno dei cuscinetti a strisciamento	183
4.41	Coordinate del baricentro in funzione del tempo	185
5.1	Definizione dell'asse di un torsore	193
5.2	Vettore linea di minima distanza	199

5.3	Prodotto di vettori duali: Nomenclatura	200
5.4	Nomenclatura	207
5.5	Definizione sistema di riferimento: Nomenclatura	210
5.6	Quantità di moto: Nomenclatura	212
6.1	Meccanismo RCCC equivalente	218
6.2	Parametri di Denavit-Hartenberg	219
6.3	Momenti registrati nelle coppie cinematiche nel caso di giunto cardanico con errori (a) e senza (b)	225
6.4	Azioni dinamiche dovute all'attrito	231
6.5	Influenza degli errori di montaggio sul rendimento meccanico .	234
6.6	Influenza della velocità angolare sul rendimento meccanico . .	234
6.7	Influenza della configurazione del giunto sul rendimento mec- canico	235
6.8	Banco giunti	236
6.9	Schema del banco giunti	237
6.10	Riproduzione del giunto cardanico usato in laboratorio	238
6.11	Confronto rendimento meccanico	238
7.1	Coppia cilindrica con gioco radiale	244
7.2	Parametri delle coppia cilindrica con gioco	245
7.3	Sistemi di riferimento per un membro qualunque del meccani- simo RCCC	249
7.4	Angoli di rotazione ai giunti	251
7.5	Velocità angolari ai giunti	252
7.6	Spostamenti lungo gli assi delle coppie cilindriche	252
7.7	Velocità di scorrimento lungo gli assi delle coppie cilindriche .	253
7.8	Deviazione standard degli angoli di output	253

7.9	Deviazione standard degli spostamenti lungo gli assi dei giunti	254
7.10	Deviazione standard delle velocità angolari	254
7.11	Deviazione standard delle velocità di scorrimento lungo gli assi delle coppie cilindriche	255

Introduzione

Il presente lavoro di tesi conclude i tre anni di dottorato in Progettazione dei Sistemi Meccanici presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università di Roma Tor Vergata. Durante l'attività di ricerca sono state esaminate talune metodologie di analisi di sistemi meccanici. Questo studio mi ha consentito di venire a conoscenza di strategie numeriche utili alla modellazione dei sistemi meccanici ed alla simulazione dinamica degli stessi. L'approccio cosiddetto *multibody* è probabilmente il più noto ed attraverso varie formulazioni dinamiche consente di pervenire in maniera sistematica alle equazioni della dinamica di una larga classe di sistemi meccanici. Uno dei problemi che spesso si pone in questo settore è rappresentato dalla risoluzione del sistema algebrico differenziale così ottenuto.

Già attraverso il mio lavoro di tesi di laurea, consistito nello sviluppo ed implementazione di un codice di calcolo per l'analisi dinamica 3D mediante approccio multibody, ero venuto a contatto con questo tipo di problematiche. Un serio ostacolo sperimentato nel corso dell'integrazione numerica era rappresentato dai vincoli sovrabbondanti oppure dai gradi di libertà oziosi, spesso presenti nei sistemi meccanici. In questo caso, infatti, diventa necessario risolvere le equazioni della dinamica mantenendo contemporaneamente

un'elevata accuratezza nel soddisfacimento dei vincoli.

Nella prima parte del presente lavoro, richiamati i fondamenti teorici del metodo delle equazioni di vincolo dovuto ad E.J. Haug, vengono proposte e numericamente sperimentate talune formulazioni cui ricorrere (ortogonalizzazione dei vincoli, set minimo di coordinate, formulazione di Udwadia - Kalaba). Inoltre viene proposta ed illustrata un'originale strategia di soluzione adatta alla simulazione di sistemi a vincoli sovrabbondanti o variabili. Questa nuova strategia risolutiva, unitamente alle altre, è stata implementata in un codice di calcolo per l'analisi dinamica di sistemi meccanici spaziali mediante approccio multibody, realizzato ed ampliato durante questi tre anni di dottorato di ricerca.

Per quanto riguarda la formulazione di Udwadia-Kalaba, fondata sul principio di minimo di Gauss, si è in particolare indagato sull'influenza della metodologia di calcolo della matrice pseudoinversa sull'efficienza computazionale (tempi di calcolo, accuratezza, affidabilità).

Nell'ottica di una modellazione sempre più fedele della realtà sono state implementate anche coppie cinematiche con attrito. Si è posta particolare attenzione alla modellazione dei cuscinetti a strisciamento in regime di lubrificazione idrodinamica.

La seconda parte della presente tesi, richiamati i principi dell'algebra duale, se ne propone l'applicazione nella modellazione di tolleranze geometriche e dimensionali, o errori di montaggio, nei sistemi meccanici. L'approccio descritto è stato applicato allo studio del rendimento di un giunto cardanico ed i risultati numerici validati mediante i risultati sperimentali ottenuti dal banco giunti allestito presso il Laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Meccanica di questa Università. Infine, è stata impostata una metodologia per la modellazione statistica delle tolleranze geometriche nei meccanismi spaziali.

Anche in questo caso l'applicazione è stata rivolta ad un giunto cardanico. In particolare si è studiata l'influenza delle tolleranze, generate in modo casuale secondo distribuzioni predefinite, sui parametri cinematici di funzionamento del meccanismo.

CAPITOLO 1

Analisi dinamica dei sistemi multibody

Nel presente capitolo viene illustrata la metodologia multibody per l'analisi dinamica di sistemi tridimensionali complessi, costituiti da un elevato numero di corpi ed aventi un elevato numero di gradi di libertà. L'obiettivo è quello di definire le equazioni necessarie allo studio del sistema, che andranno a costituire un unico sistema di equazioni algebrico-differenziali la cui soluzione definisce l'andamento delle coordinate del moto di ogni corpo al variare del tempo. Le tecniche multibody ben si adattano, infatti, alla implementazione su calcolatore data la complessità e l'elevato numero delle variabili in gioco. L'idea di base è infatti quella di andare a comporre le equazioni del moto per ciascun corpo appartenente al sistema a prescindere dalla morfologia dello stesso, di cui si terrà conto con l'introduzione di ulteriori equazioni relative ai vincoli presenti nel sistema [1, 2, 3].

1.1 Parametri di Eulero, matrice di spostamento e velocità angolare

Per poter correttamente individuare un corpo nello spazio sono necessari almeno sei parametri: tre per individuare la locazione di un suo punto (di solito il baricentro) e tre per definirne l'orientamento nello spazio. Generalmente i primi tre parametri corrispondono alle coordinate cartesiane del punto preso come riferimento, mentre gli altri tre sono definiti dagli *angoli* di Eulero: angoli di rotazione intorno agli assi coordinati necessari per sovrapporre i riferimenti tra cui avviene la rotazione. Va però notato che nella trattazione seguente vengono impiegati i *parametri* di Eulero come descrittori della rotazione. Essi sono quattro, anziché tre come gli angoli, e possono essere definiti nella seguente maniera: dato un sistema di n corpi rigidi vincolati tra di loro, sia $O - XYZ$ un sistema di riferimento cartesiano inerziale, e $o_i - x_i y_i z_i$ un sistema di riferimento cartesiano non inerziale, associato al corpo rigido i -esimo ($i = 1 \dots n$) e ad esso solidale. Si faccia compiere al suddetto corpo una rotazione di un angolo Ψ attorno ad un asse \hat{u} il cui versore è:

$$\{\hat{u}\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T \quad (1.1)$$

i parametri di Eulero saranno allora:

$$\begin{cases} e_0 = \cos \frac{\Psi}{2} \\ e_1 = u_1 \sin \frac{\Psi}{2} \\ e_2 = u_2 \sin \frac{\Psi}{2} \\ e_3 = u_3 \sin \frac{\Psi}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

tra cui sussiste la seguente importante relazione (detta anche vincolo di normalizzazione):

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 = 0 \quad (1.3)$$

In funzione di essi è possibile definire la matrice di spostamento assoluto del corpo i -esimo, che descrive lo spostamento del medesimo dalla posizione iniziale a quella finale:

$$[A]_i^0 = \begin{bmatrix} 2e_0^2 + 2e_1^2 - 1 & 2e_1e_2 - 2e_0e_3 & 2e_1e_3 + 2e_0e_2 \\ 2e_1e_2 + 2e_0e_3 & 2e_0^2 + 2e_2^2 - 1 & 2e_2e_3 - 2e_0e_1 \\ 2e_1e_3 - 2e_0e_2 & 2e_2e_3 + 2e_0e_1 & 2e_0^2 + 2e_3^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Questa può anche essere ottenuta come prodotto di due matrici (3×3) , $[E]_i^0$ e $[G]_i^0$, definite da:

$$[E]_i^0 = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$[G]_i^0 = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

ovvero:

$$[A]_i^0 = [E]_i^0 [G^T]_i^0 . \quad (1.7)$$

Dato un generico vettore $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3\}^T$, la corrispondente *matrice antisimmetrica*, o *skew matrix*, $[\tilde{v}]$ è definita come:

$$[\tilde{v}] = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (1.8)$$

Se $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ è un generico vettore in \mathfrak{R}^3 , il prodotto vettoriale:

$$\{v\} \wedge \{x\}$$

produce lo stesso risultato del prodotto scalare:

$$[\tilde{v}] \{x\} .$$

Si può dimostrare che tra la velocità angolare $\{\omega\}$ e la derivata rispetto al tempo dei parametri di Eulero $\{\dot{p}\}$ sussistono le relazioni:

$$\{\omega\} = 2 [E] \{\dot{p}\}^1 \quad (1.9)$$

$$\{\omega\} = 2 [G] \{\dot{p}\}^2 . \quad (1.10)$$

1.2 Equazioni di vincolo

1.2.1 Riferimento del giunto

Si consideri un generico corpo i ed una terna cartesiana associata $o_i - x_i y_i z_i$ ad esso solidale, che ne permette di definire la posizione e l'orientamento rispetto al riferimento inerziale $O - XYZ$. Ai fini della caratterizzazione dei vincoli è utile introdurre, per ogni coppia cinematica, un riferimento d'assi cartesiano $P_i - x'_i y'_i z'_i$ detto *riferimento del giunto*, avente origine nel punto P_i e solidale anch'esso al corpo i . La posizione angolare di tale riferimento sia definita dalle componenti dei versori $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ e $\{h_i\}$. In particolare, il versore $\{h_i\}$ è individuato dal punto Q_i posto sull'asse z'_i ed a distanza unitaria da P_i ; analogamente, il versore $\{f_i\}$ resta individuato dal punto R_i posto a distanza unitaria da P_i sull'asse x'_i . Infine, la direzione ed il verso del versore $\{g_i\}$ discende dal prodotto $\{g_i\} = [\tilde{h}] \{f_i\}$. I punti P_i , Q_i e R_i costituiscono i *punti di definizione del giunto*.

Le coppie cinematiche che vengono prese in esame sono le seguenti:

¹Se la velocità angolare è espressa nel riferimento inerziale.

²Se la velocità angolare è espressa nel riferimento locale del corpo.

1. Coppia rotoidale
2. Coppia prismatica
3. Coppia cilindrica
4. Coppia sferica
5. Guida

Per ognuna di esse in questa sezione si suggerisce il modo con il quale è possibile definire i riferimenti dei giunti ad esse associati.

1.2.2 Coppia Rotoidale

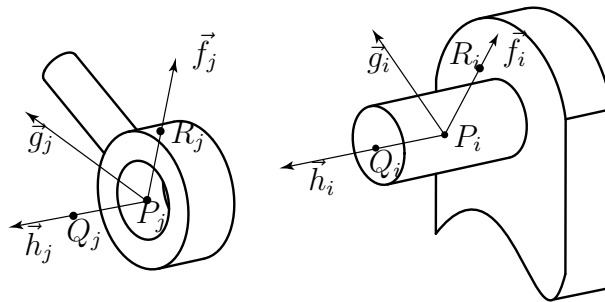


Figura 1.1: Coppia rotoidale

Con riferimento alla figura 1.1 si pongano:

- P_i e P_j nel centro della coppia
- h_i ed h_j paralleli all'asse della coppia
- f_i ed f_j perpendicolari all'asse della coppia

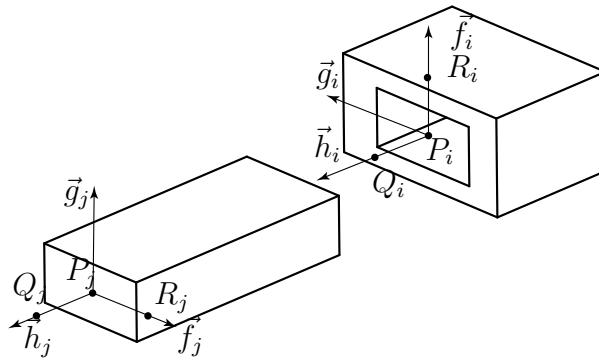


Figura 1.2: Coppia prismatica

1.2.3 Coppia Prismatica

Con riferimento alla figura 1.2 si pongano:

- P_i e P_j sull'asse della coppia
- h_i ed h_j paralleli all'asse della coppia
- f_i perpendicolare all'asse della coppia
- f_j perpendicolare all'asse della coppia ed a f_i

1.2.4 Coppia Cilindrica

Con riferimento alla figura 1.3 si pongano:

- P_i e P_j sull'asse della coppia
- h_i ed h_j paralleli all'asse della coppia
- f_i ed f_j perpendicolari all'asse della coppia

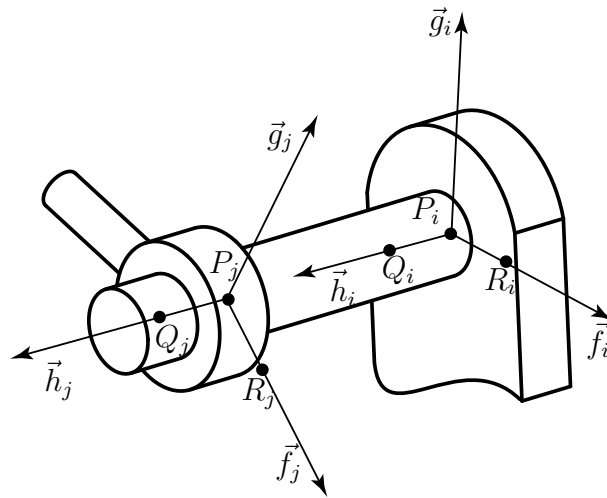


Figura 1.3: Coppia cilindrica

1.2.5 Coppia Sferica

Con riferimento alla figura 1.4 si pongano:

- P_i e P_j nel centro della coppia
- h_i, f_i, h_j ed f_j qualsiasi

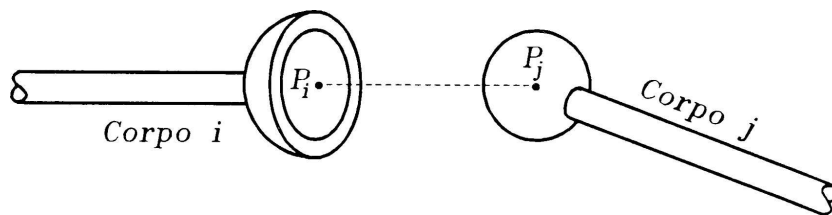


Figura 1.4: Coppia sferica

1.2.6 Guida

Con riferimento alla figura 1.5 si pongano:

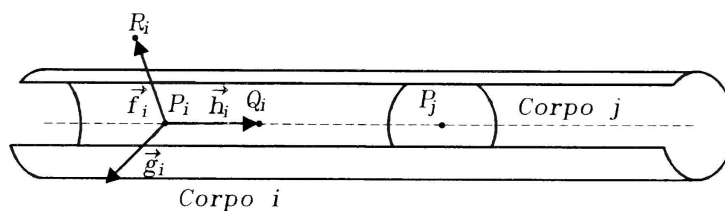


Figura 1.5: Guida

- P_i sull'asse del cilindro
- P_j nel centro della sfera
- h_i parallelo all'asse del cilindro
- f_i perpendicolare all'asse del cilindro
- h_j ed f_j qualsiasi

1.2.7 Gradi di libertà

La determinazione dei gradi di libertà del sistema può essere effettuata tramite la formula di Kutzbach [21]. Tale formula viene dedotta sottraendo dai gradi di libertà dei corpi considerati mobili i gradi di vincolo introdotti dalle coppie cinematiche presenti. Per meccanismi spaziali, quali sono quelli che si andranno ad analizzare, tale formula si scrive:

$$F = 6(l - 1) - \sum_{i=1}^j (6 - f_i) \quad (1.11)$$

dove si è indicato con:

F : i gradi di libertà del sistema;

l : il numero dei membri compreso il telaio;

j : il numero delle coppie cinematiche;

f_i : il grado di libertà della coppia i -esima.

I gradi di libertà delle coppie cinematiche precedentemente descritte sono riassunte nella tabella 1.1.

Tabella 1.1: Gradi di libertà delle coppie cinematiche

Coppia cinematica	f	Moti relativi inibiti
Rotoidale	1	3 trasl. + 2 rot.
Prismatica	1	2 trasl. + 3 rot.
Cilindrica	2	2 trasl. + 2 rot.
Sferica	3	3 traslazioni
Sfera nel cilindro	4	2 traslazioni
Giunto cardanico	2	3 trasl. + 1 rot.

1.2.8 Vincoli di base

La formulazione delle equazioni dei vincoli introdotti dalle coppie cinematiche presenti nel sistema, necessita della definizione preliminare di condizioni, i vincoli di base per l'appunto, di cui esse stesse sono costituite:

Primo vincolo di ortogonalità. Se $\{a_i\}$ e $\{a_j\}$ sono due vettori ortogonali se:

$$\Psi^{d1} \left(\{a_i\}^{(0)}, \{a_j\}^{(0)} \right) = \{a_i^T\}^{(i)} [A^T]_i^0 [A]_j^0 \{a_j\}^{(j)} = 0 \quad (1.12)$$

Secondo vincolo di ortogonalità. Se $\{a_i\}$ è un vettore appartenente al corpo i e $\{d_{ij}\}$ è un vettore congiungente due punti appartenenti rispettiva-

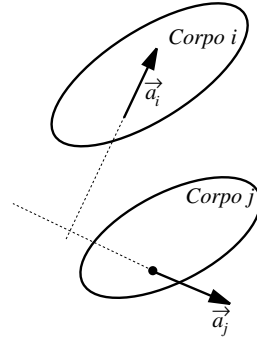


Figura 1.6: Geometria primo vincolo di ortogonalità.

mente l'uno al corpo i e l'altro al corpo j (v. Figura 1.7), il primo vettore sarà ortogonale al secondo se:

$$\begin{aligned} \Psi^{d2} \left(\{a_i\}^{(0)}, \{d_{ij}\}^{(0)} \right) &= \\ &= \{a_i^T\}^{(i)} [A^T] \left(\{r_i\}^{(0)} + [A]_i^0 \{s^{P_i}\}^{(i)} - \{r_j\}^{(0)} - [A]_j^0 \{s^{P_j}\}^{(j)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

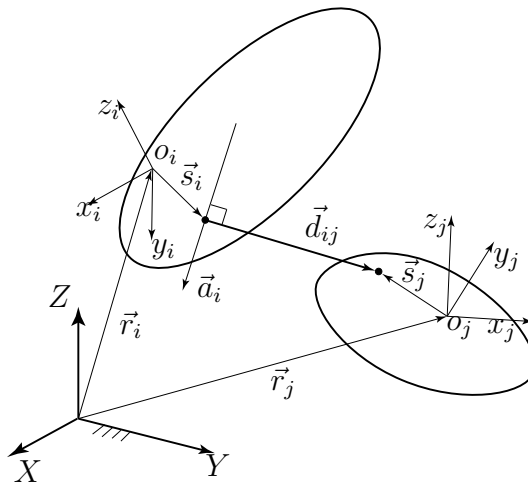


Figura 1.7: Geometria secondo vincolo di ortogonalità.

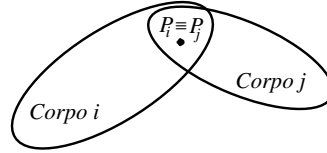


Figura 1.8: Vincolo sferico

Vincolo sferico. Dati due punti P_i e P_j appartenenti rispettivamente al corpo i ed al corpo j (v. Figura 1.8), essi saranno coincidenti se:

$$\begin{aligned} \Psi^S(P_i, P_j) = \{d_{ij}\}^{(0)} = \\ \{r_i\}^{(0)} + [A]_i^0 \{s^{P_i}\}^{(i)} - \{r_j\}^{(0)} - [A]_j^0 \{s^{P_j}\}^{(j)} = \{0\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

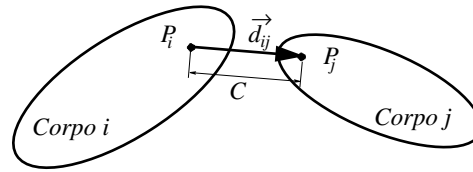


Figura 1.9: Vincolo di distanza

Vincolo di distanza. La distanza tra due punti P_i e P_j appartenenti rispettivamente al corpo i ed al corpo j sarà costante e pari a C se (v. Figura 1.9):

$$\Psi^{SS}(P_i, P_j, C) = \{d_{ij}^T\}^{(0)} \{d_{ij}\}^{(0)} - C^2 = \{0\} \quad (1.15)$$

Primo vincolo di parallelismo. Il versore $\{h_i\}$ appartenente al corpo i , ed il versore $\{h_j\}$ appartenente al corpo j saranno paralleli se (v. Figura

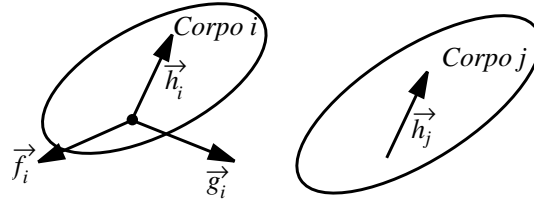


Figura 1.10: Geometria del primo vincolo di parallelismo

1.10):

$$\begin{aligned} \Psi^{P1} \left(\{h_i\}^{(0)} \{h_j\}^{(0)} \right) &= \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{d1} \left(\{f_i\}^{(0)}, \{h_j\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{d1} \left(\{g_i\}^{(0)}, \{h_j\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{d1} \left(\{f_j\}^{(0)}, \{h_i\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{d1} \left(\{g_j\}^{(0)}, \{h_i\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

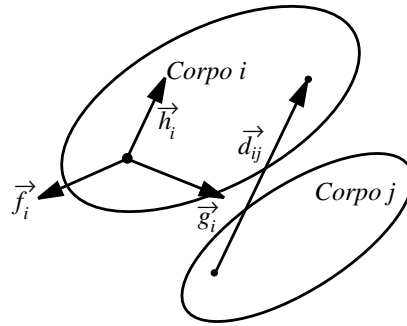


Figura 1.11: Secondo vincolo di parallelismo

Secondo vincolo di parallelismo. Il vettore $\{h_i\}$ appartenente al corpo i , ed il vettore $\{d_{ij}\}$, congiungente due punti appartenenti rispettivamente l'uno al corpo i e l'altro al corpo j , saranno paralleli se (v. Figura 1.11):

$$\Psi^{P2} \left(\{h_i\}^{(0)} \{d_{ij}\}^{(0)} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{d1} \left(\{f_i\}^{(0)}, \{d_{ij}\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{d1} \left(\{g_i\}^{(0)}, \{d_{ij}\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \quad (1.17)$$

1.2.9 Equazioni di vincolo della coppia rotoidale

Una coppia rotoidale che vincola due corpi i e j consente rotazioni relative attorno ad un asse comune (asse della coppia), ma preclude traslazioni relative lungo quest'asse. Con la disposizione del riferimento del giunto come in figura 1.1, l'espressione algebrica dei vincoli sarà la seguente:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \Psi^S (P_i, P_j) \\ \Psi^{P1} \left(\{h_i\}^{(0)} \{h_j\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \quad (1.18)$$

1.2.10 Equazioni di vincolo della coppia prismatica

Una coppia prismatica consente ai due corpi collegati solamente traslazioni relative lungo un unico asse comune e preclude rotazioni relative. Con la disposizione del riferimento del giunto come in figura 1.2, l'espressione algebrica dei vincoli sarà la seguente:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{P1} \left(\{h_i\}^{(0)} \{h_j\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{P2} \left(\{h_i\}^{(0)} \{d_{ij}\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{d1} \left(\{f_i\}^{(0)}, \{f_j\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \quad (1.19)$$

1.2.11 Equazioni di vincolo della coppia cilindrica

Una coppia cilindrica è analoga ad una coppia rotoidale consentendo però, in più, traslazioni relative lungo l'asse della coppia stessa. Con la disposizione del riferimento del giunto come in figura 1.3, l'espressione algebrica dei vincoli sarà la seguente:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{P1} \left(\{h_i\}^{(0)} \{h_j\}^{(0)} \right) \\ \Psi^{P2} \left(\{h_i\}^{(0)} \{d_{ij}\}^{(0)} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \quad (1.20)$$

1.2.12 Equazioni di vincolo della coppia sferica

Tale vincolo preclude qualsiasi tipo di traslazione relativa permettendo invece le rotazioni relative attorno a tre assi mutuamente ortogonali. Con la disposizione del riferimento del giunto come in figura 1.4, l'espressione algebrica dei vincoli sarà la seguente:

$$S = \Psi^S (P_i, P_j) = \{0\} \quad (1.21)$$

1.2.13 Equazioni di vincolo della guida

Tale vincolo preclude le due traslazioni relative ortogonali all'asse della coppia. Con la disposizione del riferimento del giunto come in figura 1.5, l'espressione algebrica dei vincoli sarà la seguente:

$$G = \Psi^{P2} \left(\{h_i\}^{(0)} \{d_{ij}\}^{(0)} \right) = \{0\} \quad (1.22)$$

1.3 Matrice Jacobiana dei vincoli di base

Nello sviluppo di modelli di meccanismi spaziali, ovvero con membri caratterizzati da moto tridimensionale, si è fatto ricorso ai *vincoli base* la cui opportuna combinazione, come si è visto, consente di riprodurre matematicamente i vincoli introdotti dalle coppie cinematiche presenti nel meccanismo. In particolare, ciascuna coppia cinematica contribuisce al sistema delle equazioni $\{\Psi\} = \{0\}$ con un numero di equazioni scalari pari ai gradi di libertà che la coppia stessa sopprime. La struttura algebrica di tali equazioni dipende dai vincoli base coinvolti nella caratterizzazione della coppia cinematica. Ciò consente di rendere sistematica e modulare la procedura di assemblaggio delle equazioni di vincolo.

Per completezza di trattazione, restano ancora da dedurre, per ciascun vincolo base, le rispettive espressioni algebriche, dei blocchi di matrice Jacobiana e degli elementi del vettore $\{\gamma\}$. Nella programmazione del metodo delle equazioni di vincolo, dovranno essere predisposte delle subroutines, atte alla valutazione numerica delle suddette espressioni algebriche ed eseguite allorché il relativo vincolo base è presente nel sistema $\{\Psi\} = \{0\}$.

Gli elementi del vettore posizione $\{q\}$ comprenderanno sia quelli del vettore $\{r\}^{(0)}$, dell'origine del riferimento cartesiano locale, sia quelli del vettore $\{p\}$ dei rispettivi parametri di Eulero.

Per i due corpi, sarà dunque

$$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{c} \{r_i\}^{(0)} \\ \dots \\ \{p_i\} \end{array} \right\} ,$$

per il corpo i

$$\{q_j\} = \left\{ \begin{array}{c} \{r_j\}^{(0)} \\ \dots \\ \{p_j\} \end{array} \right\} ,$$

per il corpo j .

1.3.1 Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di ortogonalità

Tale vincolo, com'è noto, è espresso dalla relazione

$$\Psi^{o1} \equiv \{a_i\}^{(0)T} \{a_j\}^{(0)} = \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_0^i [A]_j^0 \{a_j\}^{(j)} = 0 , \quad (1.23)$$

essendo i e j gli indici che distinguono i corpi collegati dalla coppia cinematica.

Il differenziale di Ψ^{o1} vale

$$\delta\Psi^{o1} = \{a_i\}^{(i)T} [\delta A]_i^0 [A]_j^0 \{a_j\}^{(j)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [\delta A]_j^0 \{a_j\}^{(j)} ,$$

per cui, tenuto conto delle uguaglianze

$$\begin{aligned} [\delta A]_i^0 &= [A]_i^0 [\delta \tilde{\pi}_i]^{(i)} , \\ [\delta A]_j^0 &= [A]_j^0 [\delta \tilde{\pi}_j]^{(j)} , \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} \delta \Psi^{o1} &= \{a_i\}^{(i)} [\delta \tilde{\pi}_i]^{(i)} [A^T]_i^0 [A]_j^0 \{a_j\}^{(j)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\delta \tilde{\pi}_j]^{(j)} \{a_j\}^{(j)} \\ &= \{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\delta \tilde{\pi}_i]^{(i)} \{a_i\}^{(i)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\delta \tilde{\pi}_j]^{(j)} \{a_j\}^{(j)} , \end{aligned}$$

ovvero

$$\delta \Psi^{o1} = - \{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^{(i)} \{\delta \pi_i\}^{(i)} - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{a}_j]^{(j)} \{\delta \pi_j\}^{(j)} ,$$

da cui

$$\frac{d\Psi^{o1}}{d\{r_i\}^{(0)}} = \{0, 0, 0\} \quad (1.24a)$$

$$\frac{d\Psi^{o1}}{d\{\pi_i\}^{(i)}} = - \{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^{(i)} , \quad (1.24b)$$

$$\frac{d\Psi^{o1}}{d\{r_j\}^{(0)}} = \{0, 0, 0\} \quad (1.24c)$$

$$\frac{d\Psi^{o1}}{d\{\pi_j\}^{(j)}} = - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{a}_j]^{(j)} . \quad (1.24d)$$

1.3.2 Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di ortogonalità

Il secondo vincolo di ortogonalità è espresso dalla relazione

$$\begin{aligned} \Psi^{o2} &\equiv \{a_i\}^{(0)T} \{d_{ij}\}^{(0)} = \\ &= \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \left(\{r_{ij}\}^{(0)} + [A]_j^0 \{s_j\}^{(j)} - \{r_i\}^{(0)} - [A]_i^0 \{s_i\}^{(i)} \right) = 0 , \end{aligned}$$

per cui il rispettivo differenziale risulta essere

$$\begin{aligned}
\delta\Psi^{o2} &= \{a_i\}^{(i)T} [\delta A^T]_i^0 \{d_{ij}\}^{(0)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \left(\{\delta r_j\}^{(0)} + [\delta A]_j^0 \{s_j\}^{(j)} \right. \\
&\quad \left. - \{\delta r_i\}^{(0)} - [\delta A]_i^0 \{s_i\}^{(i)} \right) = \\
&= \{a_i\}^{(i)T} [\delta\tilde{\pi}_i^T]^i [A^T]_i^0 \{d_{ij}\}^{(0)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \left(\{\delta r_j\}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + [A]_j^0 [\delta\tilde{\pi}_j]^j \{s_j\}^{(j)} - \{\delta r_i\}^{(0)} - [A]_i^0 [\delta\tilde{\pi}_i]^i \{s_i\}^{(i)} \right) = \\
&= - \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \{\delta\pi_i\}^{(i)} + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \left(\{\delta r_j\}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. - [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j \{\delta\pi_j\}^{(j)} - \{\delta r_i\}^{(0)} + [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i \{\delta\pi_i\}^{(i)} \right) ,
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\delta\Psi^{o2} &= - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \{\delta r_i\}^{(0)} + \left(\{a_i\}^{(i)T} [\tilde{s}_i]^i - \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \right) \{\delta\pi_i\}^{(i)} \\
&\quad + \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \{\delta r_j\}^{(0)} - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j \{\delta\pi_j\}^{(j)} . \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Pertanto, in definitiva, si ha

$$\frac{d\Psi^{o2}}{d\{r_i\}^{(0)}} = - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 , \quad (1.26a)$$

$$\frac{d\Psi^{o2}}{d\{\pi_i\}^{(i)}} = \left(\{a_i\}^{(i)T} [\tilde{s}_i]^i - \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \right) , \quad (1.26b)$$

$$\frac{d\Psi^{o2}}{d\{r_j\}^{(0)}} = \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 , \quad (1.26c)$$

$$\frac{d\Psi^{o2}}{d\{\pi_j\}^{(j)}} = - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j . \quad (1.26d)$$

1.3.3 Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di parallelismo

Il primo vincolo base di parallelismo è costituito dalla combinazione di due vincoli base di ortogonalità del primo tipo, dunque

$$\frac{d\{\Psi^{p1}(\{h_i\}, \{h_j\})\}}{d\{q_i\}} = \left[\begin{array}{c} \frac{d\{\Psi^{o1}(\{f_i\}, \{h_j\})\}}{d\{q_i\}} \\ \frac{d\{\Psi^{o1}(\{g_i\}, \{h_j\})\}}{d\{q_i\}} \end{array} \right] \quad (1.27)$$

1.3.4 Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di parallelismo

Il secondo vincolo base di parallelismo è costituito dalla combinazione di due vincoli base di ortogonalità del secondo tipo, dunque

$$\frac{d\{\Psi^{p2}(\{h_i\}, \{d_{ij}\})\}}{d\{q_i\}} = \left[\begin{array}{c} \frac{d\{\Psi^{o2}(\{f_i\}, \{d_{ij}\})\}}{d\{q_i\}} \\ \frac{d\{\Psi^{o2}(\{g_i\}, \{d_{ij}\})\}}{d\{q_i\}} \end{array} \right] \quad (1.28)$$

1.3.5 Blocco matrice Jacobiana per vincolo sferico

L'equazione relativa al vincolo di coincidenza tra punti P_i e P_j appartenenti a due corpi distinti risulta essere

$$\Psi^s \equiv \{r_j\}^{(0)} + [A]_j^0 \{s_j\}^{(j)} - \{r_i\}^{(0)} - [A]_i^0 \{s_i\}^{(i)} = 0. \quad (1.29)$$

Pertanto, il relativo differenziale assume l'espressione

$$\delta\Psi^s = \{\delta r_j\}^{(0)} + [\delta A]_j^0 \{s_j\}^{(j)} - \{\delta r_i\}^{(0)} + [\delta A]_i^0 \{s_i\}^{(i)},$$

ovvero

$$\delta\Psi^s = \{\delta r_j\}^{(0)} - [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j \{\delta\pi_j\}^{(j)} - \{\delta r_i\}^{(0)} + [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i \{\delta\pi_i\}^{(i)}. \quad (1.30)$$

In definitiva, si ha

$$\frac{d\{\Psi^s\}}{d\{r_i\}^{(0)}} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.31a)$$

$$\frac{d\{\Psi^s\}}{d\{\pi_i\}^{(i)}} = [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i, \quad (1.31b)$$

$$\frac{d\{\Psi^s\}}{d\{r_j\}^{(0)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.31c)$$

$$\frac{d\{\Psi^s\}}{d\{\pi_j\}^{(j)}} = - [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j. \quad (1.31d)$$

1.3.6 Blocco matrice Jacobiana per vincolo distanza costante

L'equazione che traduce il vincolo distanza costante risulta essere

$$\Psi^{ss} \equiv \{d_{ij}\}^{(0)T} \{d_{ij}\}^{(0)} - c^2 = 0, \quad (1.32)$$

essendo c la distanza costante tra i punti P_i e P_j appartenenti a corpi distinti.

Il differenziale di tale espressione vale

$$\begin{aligned} \delta\Psi^{ss} &= 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} \{\delta d_{ij}\}^{(0)} \\ &= 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} \left(\{\delta r_j\}^{(0)} - [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j \{\delta\pi_j\}^{(j)} - \{\delta r_i\}^{(i)} + [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i \{\delta\pi_i\}^{(i)} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

per cui, in definitiva, si ha

$$\frac{d\Psi^{ss}}{d\{r_i\}^{(0)}} = -2 \{d_{ij}\}^{(0)T} , \quad (1.34a)$$

$$\frac{d\Psi^{ss}}{d\{\pi_i\}^{(i)}} = 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i , \quad (1.34b)$$

$$\frac{d\Psi^{ss}}{d\{r_j\}^{(0)}} = 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} , \quad (1.34c)$$

$$\frac{d\Psi^{ss}}{d\{\pi_j\}^{(j)}} = -2 \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j . \quad (1.34d)$$

1.4 Il vettore $\{\gamma\}$ per i vincoli base

Le espressioni dei blocchi della matrice Jacobiana per i vari vincoli base introdotti, verranno ora ulteriormente derivate rispetto al tempo per poter definire il vettore $\{\gamma\}$ delle accelerazioni per i vincoli di base. Negli sviluppi algebrici si dovrà, inoltre, impiegare la seguente uguaglianza

$$[\dot{A}]_i^0 = [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i .$$

1.4.1 Primo vincolo di ortogonalità

Tenute presenti le espressioni

$$\begin{aligned} \Psi_{\pi_i}^{o1} &= -\{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i , \\ \Psi_{\pi_j}^{o1} &= \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{a}_j]^j , \end{aligned}$$

sarà

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{\pi_i}^{o1} &= -\{a_j\}^{(j)T} [\dot{A}^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i - \{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [\dot{A}]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \\ &= \{a_j\}^{(j)T} [\tilde{\omega}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i - \{a_j\}^{(j)T} [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{a}_i]^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{\pi_j}^{o1} &= -\{a_i\}^{(i)T} \left[\dot{A}^T \right]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{a}_j]^j - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \left[\dot{A} \right]_j^0 [\tilde{a}_j]^j \\ &= \{a_i\}^{(i)T} [\tilde{\omega}_i]^i [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{a}_j]^j - \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j [\tilde{a}_j]^j\end{aligned}$$

In definitiva, essendo

$$\begin{aligned}\gamma^{o1}(\{a_i\}, \{a_j\}) &= - \left[0 \quad \dot{\Psi}_{\pi_i}^{o1} \quad 0 \quad \dot{\Psi}_{\pi_j}^{o1} \right] \begin{Bmatrix} \{r_i\}^{(0)} \\ \{\omega_i\}^{(i)} \\ \{r_j\}^{(0)} \\ \{\omega_j\}^{(j)} \end{Bmatrix} = \\ &= - \left[\dot{\Psi}_{\pi_i}^{o1} \right] \{\omega_i\}^{(i)} - \left[\dot{\Psi}_{\pi_j}^{o1} \right] \{\omega_j\}^{(j)} ,\end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned}\gamma^{o1} &= \{a_j\}^{(j)T} \left([A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i - [\tilde{\omega}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 \right) [\tilde{a}_i]^i \{\omega_i\}^{(i)} \\ &\quad + \{a_i\}^{(i)T} \left([A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j - [\tilde{\omega}_i]^i [A^T]_i^0 [A]_j^0 \right) [\tilde{a}_j]^j \{\omega_j\}^{(j)} ,\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\gamma^{o1}(\{a_i\}, \{a_j\}) &= -\{a_j\}^{(j)T} \left([A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{\omega}_i]^i \right. \\ &\quad \left. + [\tilde{\omega}_j]^j [\tilde{\omega}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 \right) \{a_i\}^{(i)} \\ &\quad + 2 \{a_j\}^{(j)T} [\tilde{a}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \{\omega_i\}^{(i)}\end{aligned} \quad (1.35)$$

1.4.2 Secondo vincolo di ortogonalità

Tenute presenti le espressioni

$$\begin{aligned}\Psi_{r_i}^{o2} &= -\{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \\ \Psi_{\pi_i}^{o2} &= \{a_i\}^{(i)T} [\tilde{s}_i]^i - \{d_{ij}\}^T [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i \\ \Psi_{r_j}^{o2} &= \{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 \\ \Psi_{\pi_j}^{o2} &= -\{a_i\}^{(i)T} [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j ,\end{aligned}$$

sarà

$$\gamma^{o2} = - \left[\dot{\Psi}_{r_i}^{o2} \right] \{\dot{r}_i\}^{(0)} - \left[\dot{\Psi}_{\pi_i}^{o2} \right] \{\omega_i\}^{(i)} - \left[\dot{\Psi}_{r_j}^{o2} \right] \{\dot{r}_j\}^{(0)} - \left[\dot{\Psi}_{\pi_j}^{o2} \right] \{\omega_j\}^{(j)} ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \gamma^{o2} &= \{a_i\}^{(i)T} [\tilde{\omega}_i]^i [A^T]_i^0 \left(\{\dot{r}_j\}^{(0)} - \{\dot{r}_i\}^{(0)} \right) \\ &+ \left[\{\dot{d}_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{a}_i]^i + \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{a}_i]^i \right] \{\omega_i\}^{(i)} \\ &+ \{a_i\}^{(i)T} \left([\tilde{\omega}_i]^i [A^T]_i^0 [A]_j^0 - [A^T]_i^0 [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j \right) [\tilde{\omega}_j]^j \{s_j\}^{(j)} , \end{aligned} \quad (1.36)$$

con

$$\{\dot{d}_{ij}\}^{(0)} = \left(\{\dot{r}_j\}^{(0)} + [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j \{s_j\}^{(j)} - \{\dot{r}_i\}^{(0)} - [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i \{s_i\}^{(i)} \right) .$$

La (1.36) si semplifica nella

$$\begin{aligned} \gamma^{o2} (\{a_i\}, \{d_{ij}\}) &= 2 \{\omega_i\}^{(i)T} [\tilde{a}_i]^i [A^T]_i^0 \left(\{\dot{r}_i\}^{(0)} - \{\dot{r}_j\}^{(0)} \right) + \\ &+ 2 \{s_j\}^{(j)T} [\tilde{\omega}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i \{a_i\}^{(i)} + \\ &- \{s_j\}^{(j)T} [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{\omega}_i]^i \{a_i\}^{(i)} + \\ &- \{s_j\}^{(j)T} [\tilde{\omega}_j]^j [\tilde{\omega}_j]^j [A^T]_j^0 [A]_i^0 \{a_i\}^{(i)} + \\ &- \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{\omega}_i]^i \{a_i\}^{(i)} . \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.4.3 Primo vincolo di parallelismo

Il primo vincolo di parallelismo è costituito combinando due equazioni di vincolo di perpendicolarità del primo tipo, pertanto

$$\{\gamma^{p1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{o1} (\{f_i\}, \{h_j\}) \\ \gamma^{o1} (\{g_i\}, \{h_j\}) \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

1.4.4 Secondo vincolo di parallelismo

Il secondo vincolo di parallelismo è costituito combinando due equazioni di vincolo di perpendicolarità del secondo tipo, pertanto

$$\{\gamma^{p2}\} = \begin{pmatrix} \gamma^{o2}(\{f_i\}, \{d_{ij}\}) \\ \gamma^{o2}(\{g_i\}, \{d_{ij}\}) \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

1.4.5 Vincolo sferico

Tenute presenti le espressioni

$$\begin{aligned} \Psi_{r_i}^s &= -[I_{3 \times 3}] , \\ \Psi_{\pi_i}^s &= [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i , \\ \Psi_{r_j}^s &= [I_{3 \times 3}] , \\ \Psi_{\pi_j}^s &= -[A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j , \end{aligned}$$

sarà

$$\{\gamma^s\} = -[\dot{\Psi}_{\pi_i}^s] \{\omega_i\}^{(i)} - [\dot{\Psi}_{\pi_j}^s] \{\omega_j\}^{(j)} ,$$

ovvero

$$\{\gamma^s\} = [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{\omega}_i]^i \{s_i\}^{(i)} - [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j [\tilde{\omega}_j]^j \{s_j\}^{(j)} . \quad (1.40)$$

1.4.6 Vincolo sferico-sferico o di distanza

Tenute presenti le espressioni

$$\begin{aligned} \Psi_{r_i}^{ss} &= -2 \{d_{ij}\}^{(0)T} , \\ \Psi_{\pi_i}^{ss} &= 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_i^0 [\tilde{s}_i]^i , \\ \Psi_{r_j}^{ss} &= 2 \{d_{ij}\}^{(0)T} , \\ \Psi_{\pi_j}^{ss} &= -2 \{d_{ij}\}^{(0)T} [A]_j^0 [\tilde{s}_j]^j , \end{aligned}$$

sarà

$$\gamma^{ss} = - \left[\dot{\Psi}_{r_i}^{ss} \right] \{ \dot{r}_i \}^{(0)} - \left[\dot{\Psi}_{\pi_i}^{ss} \right] \{ \omega_i \}^{(i)} - \left[\dot{\Psi}_{r_j}^{ss} \right] \{ \dot{r}_j \}^{(0)} - \left[\dot{\Psi}_{\pi_j}^{ss} \right] \{ \omega_j \}^{(j)} ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \gamma^{ss} = & - 2 \left\{ \dot{d}_{ij} \right\}^{(0)T} \left\{ \dot{d}_{ij} \right\}^{(0)} + \\ & - 2 \left\{ d_{ij} \right\}^{(0)T} \left([A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j [\tilde{\omega}_j]^j \{ s_j \}^{(j)} - [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i [\tilde{\omega}_i]^i \{ s_i \}^{(i)} \right) , \end{aligned} \quad (1.41)$$

ove

$$\left\{ \dot{d}_{ij} \right\}^{(0)} = \{ \dot{r}_j \}^{(0)} + [A]_j^0 [\tilde{\omega}_j]^j \{ s_j \}^{(j)} - \{ \dot{r}_i \}^{(0)} - [A]_i^0 [\tilde{\omega}_i]^i \{ s_i \}^{(i)} .$$

1.5 Equazioni del moto

Per la deduzione delle equazioni del moto si ricorrerà all'approccio lagrangiano. Per fare ciò è necessario introdurre il principio di d'Alembert secondo cui, per un sistema di N masse, è possibile scrivere la seguente relazione:

$$\sum_{k=1}^N \left(\vec{F}_k^e - m_k \vec{a}_k \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (1.42)$$

dove:

\vec{F}_k^e rappresenta le forze esterne;

$m_k \vec{a}_k$ il termine inerziale;

$\delta \vec{r}_k$ il vettore degli spostamenti virtuali.

Se tale sistema ha n gradi di libertà, scelto l'insieme di coordinate generalizzate (q_1, q_2, \dots, q_n) , è possibile introdurre la trasformazione

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.43)$$

tra le componenti dei vettori posizione $\{r\}$ e le suddette coordinate generalizzate. Manipolando l'espressione (1.42), tenendo presente la (1.43), si perviene alle equazioni di Lagrange nella seguente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1 \dots n) \quad (1.44)$$

dove:

T : energia cinetica del sistema;

$\{q\}$: vettore delle coordinate generalizzate;

$\{\dot{q}\}$: vettore delle derivate rispetto al tempo delle coordinate generalizzate;

$\{Q\}$: vettore delle forze generalizzate, esprimibili come:

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\delta W}{\delta q_j} . \quad (1.45)$$

Se si effettua un'ulteriore distinzione fra forze conservative e non conservative agenti sul sistema e si introduce la funzione lagrangiana L , definita come la differenza fra l'energia cinetica e quella potenziale (associata alle forze conservative), la (1.45) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \quad (j = 1 \dots n) \quad (1.46)$$

che si semplifica ulteriormente nel caso di assenza di forze non conservative:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1 \dots n) . \quad (1.47)$$

Se si tiene ulteriormente presente che, per il sistema in esame, è necessario che vengano anche soddisfatte le equazioni di vincolo, la relazione (1.47) sarà ancora valida a patto che L venga considerata come lagrangiana estesa avente la seguente forma:

$$L = T - V - (\lambda_1 \Psi_1 + \dots + \lambda_p \Psi_p) \quad (1.48)$$

dove $\{\lambda\}$ rappresenta il vettore dei moltiplicatori di Lagrange mentre $\{\Psi\}$ il vettore delle equazioni di vincolo.

L'applicazione della (1.47) alla (1.48), come detto, porta alla definizione delle seguenti equazioni del moto:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q^T] \{\lambda\} = \{F_e\} \quad (1.49)$$

Per poter definire nella sua interezza la (1.49), bisogna determinare la matrice delle masse $[M]$ ed il vettore delle forze generalizzate $\{F_e\}$.

1.6 Matrice delle masse

La matrice $[M]$ presente nell'equazione (1.49) ha dimensioni $(7n \times 7n)$ e la seguente forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_1] & [0] & \cdots & [0] & [0] \\ [0] & [M_2] & \cdots & [0] & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & [0] & \cdots & [M_{n-1}] & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & [M_n] \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

Per determinare la singola matrice $[M_i]$ si può ricorrere ad un criterio energetico. Si può definire, infatti, l'energia cinetica posseduta dal generico corpo come

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{\dot{r}_i^T\} \{\dot{r}_i\} + \frac{1}{2} \{\omega_i^T\} [J_i] \{\omega_i\} \quad (1.51)$$

dove si è indicato con:

m_i la massa del corpo;

$\{\dot{r}_i\}$ il vettore velocità del baricentro del corpo;

$\{\omega_i\}$ il vettore velocità angolare del corpo;

$[J_i]$ il tensore di inerzia del corpo.

Ricordando la relazione (1.10) relativa alla velocità angolare ed introducendo il vettore $\{q_i\} = \{r_x \ r_y \ r_z \ e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3\}^T$, la (1.51) può essere riscritta in forma più compatta come:

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{q}_i^T\} [M_i] \{\dot{q}_i\} \quad (1.52)$$

Da questa relazione la matrice $[M_i]$ avrà così la seguente forma:

$$[M_i] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} & [0]_{(3 \times 4)} \\ [0]_{(4 \times 3)} & 4 [G_i]^T [J_i] [G_i]_{(7 \times 7)} \end{bmatrix} . \quad (1.53)$$

1.7 Forze generalizzate

Le forze generalizzate possono essere considerate derivanti o da forze e/o coppie esterne oppure dalle reazioni degli elementi molla/smorzatore presenti. In qualsiasi caso l'obiettivo è quello di definire il vettore $\{Q_i\}$ i cui elementi possono essere calcolati secondo la seguente relazione:

$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_j} \quad (1.54)$$

dove si è indicato con δW il lavoro virtuale delle azioni esterne agenti e con δq_j la coordinata generalizzata.

1.7.1 Forze esterne

Per il generico corpo i , se $\{f_i\}$ è la forza agente su di esso ed $\{s_i\}$ il vettore che collega il suo punto di applicazione con l'origine del sistema di riferimento locale $o_i - x_i y_i z_i$, il vettore forze generalizzate sarà dato da:

$$\{Q_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \{f_i\}^{(0)} \\ 2 [E^T]_i^0 [\tilde{s}_i^{(0)}] \{f_i\}^{(0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [A]_0^i \{f_i\}^{(i)} \\ 2 [G^T]_i^0 [\tilde{s}_i^{(i)}] \{f_i\}^{(i)} \end{array} \right\} \quad (1.55)$$

1.7.2 Coppie esterne

Se $\{\tau_i\}$ è la coppia agente sul corpo i , il vettore forze generalizzate sarà dato da:

$$\{Q_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \{0\}_{(3 \times 1)} \\ 2 [E^T] \{\tau_i\}^{(0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{0\}_{(3 \times 1)} \\ 2 [G^T]_i^0 \{\tau_i\}^{(i)} \end{array} \right\} \quad (1.56)$$

1.7.3 Sistema molla/smorzatore traslazionale

Con riferimento alla Figura 1.12 sia $\{d_{ij}\}$ è il vettore, avente modulo l , che definisce la distanza tra i punti P_i e P_j di ancoraggio del dispositivo, rispettivamente sul corpo i e sul corpo j ; $\{s_{P_i}\}^{(i)}$ il vettore che collega il suo punto di ancoraggio sul corpo i con l'origine del sistema di riferimento locale $o_i - x_i y_i z_i$ ed infine $\{s_{P_j}\}^{(j)}$ il vettore che collega il suo punto di ancoraggio sul corpo j con l'origine del sistema di riferimento locale $o_j - x_j y_j z_j$, i vettori forze generalizzate per i corpi i -esimo e j -esimo saranno dati rispettivamente da:

$$\{Q_i\} = \frac{F}{l} \left\{ \begin{array}{l} \{d_{ij}\}^{(0)} \\ 2 [G^T]_i^0 [\tilde{s}_{P_i}^{(i)}] [A^T]_i^0 \{d_{ij}\}^{(0)} \end{array} \right\} \quad (1.57)$$

$$\{Q_j\} = -\frac{F}{l} \left\{ \begin{array}{l} \{d_{ij}\}^{(0)} \\ 2 [G^T]_j^0 [\tilde{s}_{P_j}^{(j)}] [A^T]_j^0 \{d_{ij}\}^{(0)} \end{array} \right\}, \quad (1.58)$$

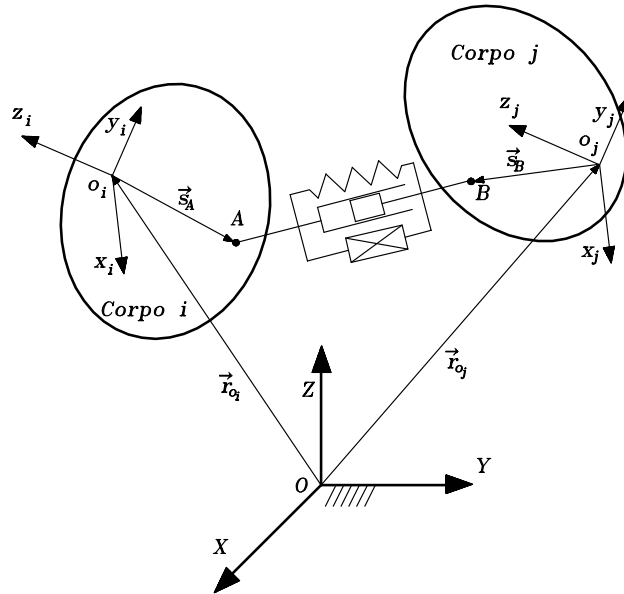


Figura 1.12: Attuatore dinamico lineare

dove:

$$F = k(l - l_0) + c\dot{l} + F_a(l, \dot{l}, t) \quad (1.59)$$

è il modulo della forza generata dal dispositivo, ed F_a la forza generata da un'eventuale attuatore posto in serie ad esso. La distanza l e la sua derivata \dot{l} si possono calcolare con le seguenti formule:

$$l^2 = (\{d_{ij}^T\} \{d_{ij}\}) \quad (1.60)$$

$$\dot{l} = \frac{\{\dot{d}_{ij}^T\} \{d_{ij}\}}{l} \quad (1.61)$$

1.7.4 Sistema molla/smorzatore rotazionale

Nella modellazione di un sistema meccanico, non è raro il caso di dover introdurre un elemento molla-smorzatore viscoso tra i corpi i e j collegati da una coppia cinematica che consente gradi di libertà rotazionali nel moto relativo

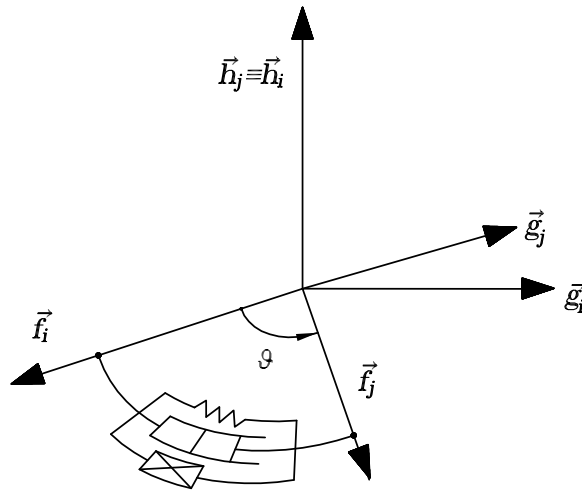


Figura 1.13: Attuatore dinamico angolare

tra i corpi medesimi (*e.g.* coppia rotoidale, cilindrica, etc.). In tale evenienza è opportuno disporre delle espressioni delle forze generalizzate dovute ad un elemento molla torsionale-smorzatore viscoso-attuatore angolare.

Con riferimento alla nomenclatura di Figura 1.13, si ipotizzi, senza perdita di generalità, che la rotazione influenzata dal suddetto elemento avvenga nel piano $x_{i_k}y_{i_k}$ del riferimento del giunto relativo alla coppia cinematica k^{ma} tra i corpi i e j . Il modulo \mathcal{T} della coppia agente sui due corpi sarà

$$\mathcal{T} = k_{\vartheta} (\vartheta - \vartheta_0) + c_{\vartheta} \dot{\vartheta} + \mathcal{T}_a (\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$$

ove è

- ϑ l'angolo tra i versori \vec{f}_i ed \vec{f}_j , di segno algebrico positivo se antiorario quando sia misurato a partire dal primo di tali versori, (se si compie

più di una rotazione tale angolo sarà maggiore di $(2\pi)^3$;

- k_ϑ la rigidità torsionale della molla;
- c_ϑ il coefficiente di smorzamento viscoso torsionale;
- \mathcal{T}_a la coppia esercitata dall'attuatore.

Il lavoro virtuale compiuto da \mathcal{T} per una rotazione virtuale $\delta\vartheta$ sarà

$$\delta W = -\mathcal{T} \delta\vartheta .$$

Per valutare $\delta\vartheta$ si applicherà alla velocità angolare $\{\omega_j\}^{(j)}$ la trasformazione

$$\{\omega_j\}^{(i)} = [A^T]_i^0 [A]_j^0 \{\omega_j\}^{(j)} ,$$

per cui si definiranno le componenti nel riferimento locale $o_i - x_i y_i z_i$ del corpo i .

³Per conoscere il valore dell'angolo ϑ si può procedere come segue:

1. si osserva che la posizione del versore dell'asse x_{j_k} del riferimento del giunto k^{mo} , valutata in quello del corpo $o_j - x_j y_j z_j$, risulta essere

$$\{f_j\}^{(j)} = \{P_j R_j\}^{(j)}$$

2. si esegue la trasformazione

$$\{f_j\}^{(i)} = [A^T]_i^0 [A]_j^0 \{f_j\}^{(j)}$$

3. si esegue la trasformazione

$$\{f_j\}^{(i_k)} = [C]_i^{i_k} \{f_j\}^{(i)} = \left[\{f_i\}^{(i)} \quad \{g_i\}^{(i)} \quad \{h_i\}^{(i)} \right]^T \{f_j\}^{(i)}$$

4. si calcola

$$\vartheta = \text{ATAN2} \left(f_j^{(i_k)}(2), f_j^{(i_k)}(1) \right) .$$

Essendo

$$\begin{aligned}
 \delta\vartheta &= \left(\{\omega_j\}^{(i)} - \{\omega_i\}^{(i)} \right)^T \{h_i\}^{(i)} \delta t \\
 &= \left([A^T]_i^0 [A]_j^0 \{\omega_j\}^{(j)} - \{\omega_i\}^{(i)} \right)^T \{h_i\}^{(i)} \delta t \\
 &= \left(2 [A^T]_i^0 [A]_j^0 [G]_j^0 \{\delta p_j\} - 2 [G]_i^0 \{\delta p_i\} \right)^T \{h_i\}^{(i)}
 \end{aligned}$$

l'entità della rotazione virtuale relativa attorno al versore \vec{h}_i le richieste espressioni delle forze generalizzate in questo caso saranno

$$\{Q_i\} = \mathcal{T} \left\{ \begin{array}{c} \{0\}_{3 \times 1} \\ 2 [G^T]_i^0 \{h_i\}^{(i)} \end{array} \right\}, \quad (1.62a)$$

$$\{Q_j\} = -\mathcal{T} \left\{ \begin{array}{c} \{0\}_{3 \times 1} \\ 2 [G^T]_j^0 [A^T]_j^0 [A]_i^0 \{h_i\}^{(i)} \end{array} \right\}. \quad (1.62b)$$

CAPITOLO 2

Metodologie di integrazione numerica

L'approccio multibody per la descrizione della dinamica di un sistema meccanico mediante un set ridondante di coordinate (come esposto nel Capitolo 1), comporta la risoluzione di un sistema algebrico-differenziale (DAE) di indice 3 costituito dalle equazioni del moto e dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} = \{Q\} \\ \{\Psi(q, t)\} = \{0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

Le formulazioni cosiddette *ridondanti* offrono sostanziali vantaggi quali:

- caratteristiche cinematiche dei membri ottenute simultaneamente e senza calcoli aggiuntivi;
- semplicità di sviluppo e manutenzione del codice di calcolo;
- possibilità di calcolo delle reazioni vincolari nelle coppie cinematiche;
- impiego di algoritmi ottimizzati per le matrici sparse;

Per contro, tali formulazioni richiedono la generazione e la soluzione di sistemi di equazioni algebrico-differenziali di indice elevato quale il sistema (2.1). Ciò ha indirizzato la ricerca verso l'impostazione di strategie che riducano la

soluzione del problema all'impiego di metodologie di integrazione numerica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Esistono diversi riferimenti in letteratura riguardanti algoritmi risolutivi per sistemi DAE [4, 5, 6].

L'approccio più diretto per la risoluzione del citato sistema consiste nel riformularlo secondo l'indice 1. In questo modo le equazioni descriventi la dinamica nel sistema (2.1) vengono risolte contemporaneamente alle equazioni di vincolo sulle accelerazioni:

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} = \{Q\} \\ [\Psi_q] \{\ddot{q}\} = \{\gamma\} \end{cases}, \quad (2.2)$$

dove

$$\{\gamma\} = -([\Psi_q] \{\dot{q}\})_q \{\dot{q}\} - 2[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\}. \quad (2.3)$$

Per quanto riguarda la soluzione di tale sistema, un'elementare strategia di soluzione consiste nel risolvere il sistema (2.2), al tempo $t = t_i$, rispetto alle variabili \ddot{q}_i e λ_i e di stimare, per differenze finite, velocità \dot{q}_{i+1} e posizioni q_{i+1} . Purtroppo tale modo di procedere non consente di mantenere sotto controllo possibili violazioni delle equazioni di vincolo $\Psi = 0$.

2.0.5 La formulazione stabilizzata di Baumgarte

Il metodo di soluzione descritto in prosieguo, dovuto a J.W Baumgarte [7, 8] e particolarmente adatto per la simulazione di sistemi meccanici, consente di limitare le suddette violazioni.

Riassumendo i termini del problema si può dire che deve essere soddisfatto il sistema di equazioni non lineari

$$\Psi \equiv \Psi(q, t) = 0 \quad (2.4)$$

nelle incognite q , ed i due sistemi lineari,

$$\dot{\Psi} \equiv [\Psi_q] \{\dot{q}\} + \{\Psi_t\} = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\Psi} \equiv [\Psi_q] \{\ddot{q}\} - \{\gamma\} = 0, \quad (2.6)$$

rispettivamente nelle incognite $\{\dot{q}\}$ e $\{\ddot{q}\}$, che dal primo discendono per derivazione successiva rispetto al tempo. L'idea di Baumgarte è quella di smorzare le violazioni delle equazioni di vincolo durante l'integrazione numerica inserendo le violazioni medesime nella (2.6). In particolare, si aggiungono a quest'ultima le suddette ottenendo così il sistema di equazioni differenziali nella incognita vettoriale Ψ

$$\ddot{\Psi} + 2\alpha\dot{\Psi} + \beta^2\Psi = 0, \quad (2.7)$$

essendo α e β funzioni peso, positive e diverse da zero, che l'utente fissa a proprio piacimento. Affinché Ψ riduca le sue oscillazioni attorno allo zero e sia così favorita la *stabilità* del metodo viene suggerito di imporre $\alpha=\beta$, corrispondenti a condizioni di smorzamento critico. Per quanto detto, il sistema (2.2) si trasforma nel seguente

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \gamma - 2\alpha\dot{\Psi} - \beta^2\Psi \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

da risolvere, al tempo $t = t_i$, rispetto alle variabili \ddot{q}_i e λ_i . Successivamente, per differenze finite, si stimano velocità \dot{q}_{i+1} e posizioni q_{i+1} al tempo $t + \Delta t$.

L'esperienza suggerisce di assegnare ad α e β valori numerici pari all'inverso del passo di integrazione, tuttavia strategie più sofisticate nella scelta di tali parametri sono proposte da C.O Chang e P. Nikravesh [9].

Si fa osservare che i valori dei moltiplicatori di Lagrange λ calcolati tramite la (2.8) potranno discostarsi notevolmente da quelli cui si perviene risolvendo la (2.2), per cui non sono affidabili per valutare le reazioni vincolari nelle coppie.

2.1 Partizionamento delle coordinate

Per ricondurre la soluzione del sistema di equazioni algebriche-differenziali (DAE) a quella di un sistema di equazioni ordinarie differenziali (ODE) ci si può avvalere del metodo del *partizionamento delle coordinate* [10, 11] di cui si fa rilevare l'importanza sia sotto il profilo teorico che sotto quello storico in quanto fu per la prima volta implementato nel software multibody DADS, sviluppato da E.J. Haug, P. Nikravesh, R. Wehage.

Il metodo prevede, innanzitutto di partizionare e riordinare il vettore delle coordinate generalizzate $q \in \mathfrak{R}^n$ in due set $v \in \mathfrak{R}^f$ e $u \in \mathfrak{R}^m$ di coordinate indipendenti e dipendenti, rispettivamente [10]. Se r è il rango della matrice Jacobiana, il numero degli elementi del vettore $\{v\}$ sarà pari ai gradi di libertà del sistema, ovvero $f = n - r$. Grazie a tale operazione, le note equazioni

$$[\Psi_q] \{\dot{q}\} = -\{\Psi_t\} , \quad (2.9a)$$

$$[\Psi_q] \{\ddot{q}\} = \{\gamma\} , \quad (2.9b)$$

si trasformano, rispettivamente, nelle seguenti

$$[\Psi_u] \{\dot{u}\} + [\Psi_v] \{\dot{v}\} = -\{\Psi_t^u\} , \quad (2.10a)$$

$$[\Psi_u] \{\ddot{u}\} + [\Psi_v] \{\ddot{v}\} = \{\gamma^u\} , \quad (2.10b)$$

con $[\Psi_u]$ matrice $r \times r$, $[\Psi_v]$ matrice $r \times f$, $\{\Psi_t^u\}$, $\{\gamma^u\}$ vettori con r elementi. Se non vi sono vincoli sovrabbondanti, il numero m delle equazioni sarà pari ad r ed il vettore $\{\gamma^u\}$ coincide, dopo un eventuale riordinamento degli elementi, con $\{\gamma\}$.

Inoltre, poiché la matrice $[\Psi_u]$ è quadrata e non singolare, dalle (2.10) si ottiene

$$\{\dot{u}\} = -[\Psi_u]^{-1}([\Psi_v] \{\dot{v}\} + \{\Psi_t^u\}) , \quad (2.11a)$$

$$\{\ddot{u}\} = [\Psi_u]^{-1}(\{\gamma^u\} - [\Psi_v] \{\ddot{v}\}) , \quad (2.11b)$$

Analogamente, le equazioni della Dinamica

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} = \{F\} \quad (2.12)$$

verranno partizionate come segue

$$[M^{uu}] \{\ddot{u}\} + [M^{uv}] \{\ddot{v}\} + [\Psi_u]^T \{\lambda\} = \{F^u\} , \quad (2.13a)$$

$$[M^{vu}] \{\ddot{u}\} + [M^{vv}] \{\ddot{v}\} + [\Psi_v]^T \{\lambda\} = \{F^v\} , \quad (2.13b)$$

in cui

$$[M] \{\ddot{q}\} = \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{uv} \\ M^{vu} & M^{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} . \quad (2.14)$$

Le equazioni (2.11b) e (2.13) possono interpretarsi come un sistema nelle incognite $\{\ddot{u}\}$, $\{\lambda\}$, $\{\ddot{v}\}$. Sostituita dunque la (2.11b) nella (2.13a) avremo

$$\{\lambda\} = [\Psi_u^T]^{-1} (\{F^u\} - [M^{uv}] \{\ddot{v}\} - [M^{uu}] \{\ddot{u}\}) , \quad (2.15)$$

mentre dalle rimanenti equazioni, segue, per successive sostituzioni,

$$[\widehat{M}^{vv}] \{\ddot{v}\} = \{\widehat{F}^v\} , \quad (2.16)$$

quando si ponga

$$\begin{aligned} [\widehat{M}^{vv}] &= [M^{vv}] - [M^{vu}] [\Psi_u]^{-1} [\Psi_v] \\ &\quad - [\Psi_v]^T [\Psi_u^T]^{-1} ([M^{uv}] - [M^{uu}] [\Psi_u]^{-1} [\Psi_v]) , \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{F}^v\} &= \{F^v\} - [M^{vu}] [\Psi_u]^{-1} \{\gamma^u\} \\ &\quad - [\Psi_v]^T [\Psi_u^T]^{-1} (\{F^u\} - [M^{uu}] [\Psi_u]^{-1} \{\gamma^u\}) . \end{aligned} \quad (2.17b)$$

Le (2.16) formano un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

In definitiva, il metodo del partizionamento delle coordinate si sviluppa attraverso le fasi seguenti:

1. Siano noti al tempo t i vettori $\{q\}$ e $\{\dot{q}\}$, congruenti con le equazioni di vincolo.

2. Si partizionano i vettori $\{q\}^T = \begin{Bmatrix} u & v \end{Bmatrix}^T$, $\{\dot{q}\}^T = \begin{Bmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{Bmatrix}^T$ e si valutano le matrici $[\Psi_u]$, $[\Psi_v]$, $[M^{vv}]$, $[M^{uu}]$, $[M^{uv}]$, $[M^{vu}]$, ed i vettori $\{F^u\}$, $\{F^v\}$, $\{\Psi_t^u\}$, $\{\gamma^u\}$.
3. Si valuta $[\widehat{M}^{vv}]$ ed $\{\widehat{F}^v\}$ dalle (2.17).
4. Si risolve (2.16) ottenendo $\{\ddot{v}\}$ al tempo t e si stima, per differenze finite, $\{\dot{v}\}$ e $\{v\}$ al tempo $t + \Delta t$.
5. Dalla (2.11b) si ottiene $\{\ddot{u}\}$ al tempo t e si stima, per differenze finite, $\{\dot{u}\}$ e $\{u\}$ al tempo $t + \Delta t$.
6. Dalla (2.15) si calcola il vettore dei moltiplicatori di Lagrange.

2.1.1 Il partizionamento delle coordinate

L'applicazione del metodo del partizionamento delle coordinate richiede:

- il calcolo del rango r della matrice Jacobiana $[\Psi_q]$;
- il riordino degli n elementi del vettore $\{q\}$ in modo tale che i primi r siano quelli del vettore $\{u\}$ ed i rimanenti f quelli del vettore $\{v\}$;
- il calcolo delle matrici $[\Psi_u]_{r \times r}$ e $[\Psi_v]_{r \times f}$;
- il calcolo dei vettori $\{\Psi_t^u\}_{r \times 1}$, $\{\gamma^u\}_{r \times 1}$;
- il calcolo delle matrici $[M^{uu}]_{r \times r}$, $[M^{vv}]_{f \times f}$, $[M^{uv}]_{r \times f}$, $[M^{vu}]_{f \times r}$ e dei vettori $\{F^u\}_{r \times 1}$, $\{F^v\}_{f \times 1}$.

Per quanto concerne, le matrici $[M^{uu}]$, $[M^{vv}]$, $[M^{uv}]$ ed $[M^{vu}]$ ed i vettori $\{F^u\}$ ed $\{F^v\}$, il seguente esempio servirà a chiarire le modalità con cui determinarli.

Si avverte che l'ordine degli elementi di $\{q\}$ potrà essere diverso da quello originale se, nella procedura che porta a definire le matrici $[\Psi_u]$ e $[\Psi_v]$, si è attivata l'opzione di *pivoting* parziale sulle colonne o di *pivoting* totale. In questo caso, di norma, viene generato un vettore *IPVT* di interi che registra la posizione finale di ciascuna colonna alla fine della procedura, cosicché $IPVT(i)$ registra la colonna di $[\Psi_q]$ che è stata spostata nella colonna i^{ma} .

Il seguente esempio, servirà a chiarire i dettagli di quanto descritto. Supponiamo sia $n = 5$, il numero delle variabili di posizione, $r = 3$, il rango della matrice Jacobiana ed $f = n - r = 2$, i g.d.l. del sistema e che la procedura di eliminazione di Gauss, applicata alla matrice Jacobiana ed eseguita con l'opzione *pivot*, abbia dato luogo al seguente vettore

$$\{IPVT\} = \left\{ 2 \ 3 \ 5 \ 4 \ 1 \right\} .$$

Il vettore $\{q\}$ delle coordinate risulterà così partizionato

$$\{q\} = \left\{ q_2 \ q_3 \ q_5 \ q_4 \ q_1 \right\}^T ,$$

per cui

$$\{u\} = \left\{ q_2 \ q_3 \ q_5 \right\}^T ,$$

e

$$\{v\} = \left\{ q_4 \ q_1 \right\}^T .$$

Pertanto se

$$\begin{array}{c} v_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad u_3 \\ v_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad u_3 \\ \left[\begin{array}{ccccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{array} \right] \end{array}$$

è la matrice $[M]$ delle masse, avremo

$$[M^{uu}] = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{25} \\ m_{32} & m_{33} & m_{35} \\ m_{52} & m_{53} & m_{55} \end{bmatrix},$$

$$[M^{uv}] = \begin{bmatrix} m_{24} & m_{21} \\ m_{34} & m_{31} \\ m_{54} & m_{51} \end{bmatrix},$$

$$[M^{vv}] = \begin{bmatrix} m_{44} & m_{41} \\ m_{14} & m_{11} \end{bmatrix},$$

$$[M^{vu}] = \begin{bmatrix} m_{42} & m_{43} & m_{45} \\ m_{12} & m_{13} & m_{15} \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\{F\}$ delle forze sarà partizionato esattamente come $\{q\}$, per cui se

$$\{F\} = \left\{ F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \right\}^T,$$

sarà

$$\{F^u\} = \left\{ F_2 \ F_3 \ F_5 \right\}^T,$$

e

$$\{F^v\} = \left\{ F_4 \ F_1 \right\}^T.$$

I successivi sottoparagrafi descrivono alcuni approcci numerici utili per la determinazione delle matrici $[\Psi_u]$ e $[\Psi_v]$ sopra menzionate. Esistono alcune varianti al metodo del partizionamento che prevedono la stabilizzazione dei vincoli nel corso dell'integrazione.

Eliminazione di Gauss-Jordan

Se si applica l'algoritmo di Gauss-Jordan, i due sistemi

$$\begin{aligned} [\Psi_q] \{\dot{q}\} &= -\{\Psi_t\} , \\ [\Psi_q] \{\ddot{q}\} &= \{\gamma\} , \end{aligned}$$

partizionata la matrice Jacobiana nella forma

$$[\Psi_q] = \begin{bmatrix} \Psi_u & \Psi_v \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

si trasformano nei seguenti

$$\begin{aligned} [\Psi_u] \{\dot{u}\} + [\Psi_v] \{\dot{v}\} &= -\{\Psi_t^u\} , \\ [\Psi_u] \{\ddot{u}\} + [\Psi_v] \{\ddot{v}\} &= \{\gamma^u\} , \end{aligned}$$

con $[\Psi_u]$ matrice in forma triangolare,

I vettori $\{\Psi_t^u\}$ $\{\gamma^u\}$ sono costituiti dai primi r elementi di $\{\Psi_t\}$ e $\{\gamma\}$, una volta che siano stati assoggettati alle stesse operazioni eseguite sulle righe di $[\Psi_q]$ e riordinati come $\{q\}$ nel corso dell'operazione di pivoting.

Fattorizzazione di Cholesky

Comè noto, la fattorizzazione di Cholesky applicata alla matrice Jacobiana $[\Psi_q]$ conduce alla definizione delle seguenti matrici

$$[L]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_1]_{r \times r} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{rr} \end{bmatrix}$$

$$[H]_{r \times f} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1f} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2f} \\ h_{31} & h_{32} & \cdots & h_{3f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rf} \end{bmatrix},$$

cosicch 

$$[\Psi_q] \{\dot{q}\} = \left\{ \begin{array}{c} [L][U_1] \{\dot{u}\} + [L][H] \{\dot{v}\} \\ \hline 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_t^u \\ \hline 0 \end{array} \right\},$$

$$[\Psi_q] \{\ddot{q}\} = \left\{ \begin{array}{c} [L][U_1] \{\ddot{u}\} + [L][H] \{\ddot{v}\} \\ \hline 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma^u \\ \hline 0 \end{array} \right\},$$

per cui, dal confronto con le (2.10), si ha

$$[\Psi_u] = [L][U_1],$$

$$[\Psi_v] = [L][H],$$

I vettori $\{\Psi_t^u\}$ $\{\gamma^u\}$ sono costituiti dai primi r elementi di $\{\Psi_t\}$ e $\{\gamma\}$ riordinati come $\{q\}$ nel corso dell'operazione di pivoting.

Fattorizzazione QR

Com'  noto, dopo aver applicato la fattorizzazione QR alla matrice Jacobiana si ha

$$[\Psi_q]_{m \times n} = [Q]_{m \times m} \begin{bmatrix} [R_{11}]_{r \times r} & \vdots & [R_{12}]_{r \times f} \\ \hline 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

con $[Q]$ matrice ortogonale.

Pertanto, i sistemi (2.9) si possono riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} [Q] \begin{bmatrix} [R_{11}] \{\dot{u}\} + [R_{12}] \{\dot{v}\} \\ 0 \end{bmatrix} &= -\{\Psi_t\} , \\ [Q] \begin{bmatrix} [R_{11}] \{\ddot{u}\} + [R_{12}] \{\ddot{v}\} \\ 0 \end{bmatrix} &= \{\gamma\} , \end{aligned}$$

ed il confronto di queste con le (2.10) consente di porre

$$\begin{aligned} [\Psi_u] &= [R_{11}] , \\ [\Psi_v] &= [R_{12}] , \\ \begin{Bmatrix} \Psi_t^u \\ 0 \end{Bmatrix} &= [Q]^T \{\Psi_t\} , \\ \begin{Bmatrix} \gamma^u \\ 0 \end{Bmatrix} &= [Q]^T \{\gamma\} . \end{aligned}$$

2.2 Ortogonalizzazione dei vincoli

Per poter riscrivere il sistema (2.1) come un sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE) è necessario eliminare la matrice Jacobiana $[\Psi_q]$ delle equazioni di vincolo. Questo approccio fornisce diversi vantaggi:

- L'eliminazione dei moltiplicatori di Lagrange dalle equazioni risolutive;
- La possibilità di dividere l'intero set di coordinate generalizzate in variabili dipendenti ed indipendenti;
- Un più vasto numero di metodi per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie;
- La possibilità di analizzare sistemi meccanici con vincoli sovrabbondanti o con g.d.l. variabili durante il funzionamento.

Per poter operare questa trasformazione è necessario introdurre un set minimo di n_p coordinate indipendenti $\{p\}$, dove n_p coincide con i gradi di libertà F del sistema¹.

E' possibile così aggiungere al vettore delle equazioni di vincolo $\{\Psi\}$ ² il vettore $\{\Phi\}$ delle relazioni che si possono stabilire tra le m coordinate $\{q\}$ e le n_p coordinate $\{p\}$

$$\{\Gamma(p, q)\} = \begin{Bmatrix} \{\Psi(q)\} \\ \{\Phi(p, q)\} \end{Bmatrix} . \quad (2.18)$$

Derivando rispetto al tempo la (2.18) si ottiene

$$[\Gamma_q] \{\dot{q}\} + [\Gamma_p] \{\dot{p}\} = \{0\} , \quad (2.19)$$

dove si sono indicate con $[\Gamma_q] = \frac{\partial \Gamma}{\partial q}$ e $[\Gamma_p] = \frac{\partial \Gamma}{\partial p}$ le matrici Jacobiane. Introducendo la matrice

$$[V(p, q)] = -[\Gamma_q]^{-1} [\Gamma_p] \quad (2.20)$$

e sostituendola nell'espressione (2.19) si ottiene la seguente relazione

$$\{\dot{q}\} = [V(p, q)] \{\dot{p}\} . \quad (2.21)$$

Quando non c'è una dipendenza esplicita dal tempo delle equazioni di vincolo sussiste la seguente uguaglianza

$$[\Psi_q] \{\dot{q}\} = \{0\} , \quad (2.22)$$

¹Si rammenta che il grado di libertà F può calcolarsi come

$$F = n_q - r$$

essendo n_q il numero di coordinate generalizzate ed r il rango della matrice Jacobiana del sistema delle equazioni di vincolo.

²Per il momento sono stati considerati solamente vincoli scleronomi, questa ipotesi verrà successivamente rimossa

il confronto di questa con la (2.21) conduce alla *condizione di ortogonalità*:

$$[\Psi_q] [V] = 0 . \quad (2.23)$$

Inoltre differenziando rispetto al tempo la (2.20) si perviene all'espressione delle accelerazioni delle coordinate generalizzate in termini delle sole derivate di $\{p\}$:

$$\{\ddot{q}\} = [V] \{\ddot{p}\} + [\dot{V}] \{\dot{p}\} . \quad (2.24)$$

Per eliminare i moltiplicatori di Lagrange $\{\lambda\}$ dalle equazioni differenziali di equilibrio, ottenendo così un sistema di equazioni differenziali ordinarie, bisogna premoltiplicare ambo i lati della (2.1) per $[V]^T$:

$$[V]^T [M] \{\ddot{q}\} + [V]^T [\Psi_q]^T \{\lambda\} = [V]^T \{Q\} \quad (2.25)$$

da cui

$$[V]^T [M] \{\ddot{q}\} = [V]^T \{Q\} . \quad (2.26)$$

Utilizzando infine la (2.19) e (2.24) nella (2.26) si ottiene il sistema di equazioni differenziali ordinarie che descrive il moto del sistema meccanico in esame mediante le sole variabili indipendenti:

$$[V]^T [M] [V] \{\ddot{p}\} = [V]^T \{Q\} - [V]^T [M] [\dot{V}] \{\dot{p}\} . \quad (2.27)$$

Al fine di avere una espressione facilmente implementabile per il termine $[\dot{V}] \{\dot{p}\}$ si può dividere il vettore delle coordinate generalizzate in due vettori

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{l} \{y\} \\ \{p\} \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

dove le $\{y\}$ sono le $n-n_p$ variabili dipendenti mentre le $\{p\}$ sono le n_p variabili indipendenti già introdotte. Alla luce di ciò l'espressione dell'accelerazione $[\Psi_q] \{\ddot{q}\} = \{\gamma\}$ può essere riscritta come

$$[\Psi_y] \{\ddot{y}\} + [\Psi_p] \{\ddot{p}\} = \{\gamma\} , \quad (2.29)$$

da cui

$$\{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_y]^{-1} [\Psi_p] \\ [I] \end{bmatrix} \{\ddot{p}\} + \begin{Bmatrix} [\Psi_y]^{-1} \{\gamma\} \\ [0] \end{Bmatrix}. \quad (2.30)$$

Dal confronto tra la (2.24) e la (2.30) risulta immediato dedurre che è

$$[V] = \begin{bmatrix} -[\Psi_y]^{-1} [\Psi_p] \\ [I] \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

e

$$[\dot{V}] \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} [\Psi_y]^{-1} \{\gamma\} \\ [0] \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Esempio

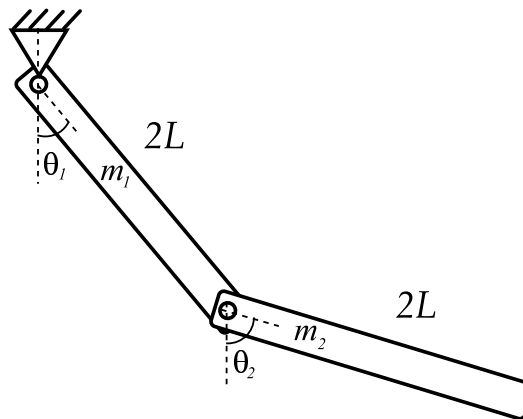


Figura 2.1: Doppio pendolo - Nomenclatura

Per un pendolo doppio soggetto all'azione della forza peso, noti i valori (Figura 2.1)

- delle caratteristiche inerziali m_1 , m_2 , I_{G_1} , I_{G_2} delle aste;
- della lunghezza $2L$, identica per ciascuna asta;

la formulazione (2.1) si particolarizza nella seguente:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{G_2} \end{bmatrix}, & (2.33) \\
 \{\Psi\} &= \begin{Bmatrix} q_1 - L \cos q_3 \\ q_2 - L \sin q_3 \\ q_1 + L \cos q_3 - q_4 + L \cos q_6 \\ q_2 + L \sin q_3 - q_5 + L \sin q_6 \end{Bmatrix}, \\
 [\Psi_q] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin q_3 & -1 & 0 & -L \sin q_6 \\ 0 & 1 & L \cos q_3 & 0 & -1 & L \cos q_6 \end{bmatrix}, \\
 \{F_e\} &= \left\{ 0 \quad -m_1 g \quad 0 \quad 0 \quad -m_2 g \quad 0 \right\}^T.
 \end{aligned}$$

Se si vuole esprimere le equazioni differenziali del moto in funzione dei due angoli

$$p_1 = \vartheta_1$$

$$p_2 = \vartheta_2$$

che le aste formano con la verticale e collegati alle coordinate generalizzate prima introdotte tramite le seguenti

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &\equiv p_1 - \frac{3}{2}\pi + q_3 = 0, \\
 \Phi_2 &\equiv p_2 - \frac{3}{2}\pi + q_6 = 0,
 \end{aligned}$$

si dovrà, innanzitutto formare il vettore $\Gamma(p, q)$ (2.18).

Pertanto, quando siano particolarizzate per il caso in esame, $[\Gamma_q] = \frac{\partial \Gamma}{\partial q}$ e $[\Gamma_p] = \frac{\partial \Gamma}{\partial p}$ si trasformano, rispettivamente, nelle seguenti

$$[\Gamma_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\Gamma_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin q_3 & -1 & 0 & -L \sin q_6 \\ 0 & 1 & L \cos q_3 & 0 & -1 & L \cos q_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo sviluppo della (2.20) condurrà alla matrice³

$$[V(p, q)] = - \begin{bmatrix} -L \sin q_3 & 0 \\ L \cos q_3 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2L \sin q_3 & -L \sin q_6 \\ 2L \cos q_3 & L \cos q_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

³La matrice $[V(p, q)]$ qui dedotta soddisfa la condizione (2.23).

In conclusione, definiti i prodotti vettoriali

$$\begin{aligned}
 [V(p, q)]^T [M] [V(p, q)] &= \begin{bmatrix} L^2 (m_1 + 4m_2) + I_{G_1} & 2L^2 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ 2L^2 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & m_2 L^2 + I_{G_2} \end{bmatrix} \\
 [V(p, q)]^T \{F\} &= - \begin{Bmatrix} -gL (m_1 + 2m_2) \cos \vartheta_1 \\ -m_2 gL \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \\
 [V(p, q)]^T [M] [\dot{V}(p, q)] \{\dot{p}\} &= -2m_2 L^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2^2 \\ -\dot{\vartheta}_1^2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

l'applicazione della (2.27) conduce al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L^2 (m_1 + 4m_2) + I_{G_1} & 2L^2 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ 2L^2 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & m_2 L^2 + I_{G_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} gL (m_1 + 2m_2) \cos \vartheta_1 \\ m_2 gL \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} + 2m_2 L^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2^2 \\ -\dot{\vartheta}_1^2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Da ultimo, è opportuno osservare che:

- il procedimento di eliminazione dei moltiplicatori di Lagrange qui descritto è suscettibile di implementazione su mezzi di calcolo automatico;
- la matrice delle masse, pur se di dimensione inferiore alla (2.33), è densa e dipende dalla configurazione assunta dal sistema; dal punto di vista computazionale tale situazione è sfavorevole in quanto non si potranno utilizzare i veloci algoritmi ottimizzati per le matrici sparse e, inoltre, l'inversione della matrice medesima sarà richiesta ad ogni passo di integrazione.

Per generalizzare l'approccio al caso in cui le equazioni di vincolo abbiano una dipendenza esplicita dal tempo (vincoli reonomi). Si ipotizza dunque che

le n_λ equazioni indipendenti di vincolo siano nella forma vettoriale

$$\{\Psi(q, t)\} = \{0\} .$$

Nella soluzione del problema dinamico diretto, il sistema

$$[\Psi_q] \{\dot{q}\} = -\{\Psi_t\} \quad (2.34)$$

presenterà un numero n_λ di equazioni inferiore a quello n_q degli elementi del vettore coordinate $\{q\}$, per cui la matrice $[\Psi_q]$ è rettangolare. Si vuole definire una matrice $[B]$, che consenta, attraverso la trasformazione

$$\{\dot{p}\} = [B] \{\dot{q}\} , \quad (2.35)$$

di enucleare da $\{\dot{q}\}$ il vettore $\{\dot{p}\}$ delle derivate temporali delle coordinate indipendenti $\{p\}$. Il numero n_p di elementi in tale vettore è uguale a quello F dei gradi di libertà del sistema meccanico da analizzare. Si tenga presente che il valore di F non sarà necessariamente costante durante tutto il processo di integrazione numerica, ma si possono registrare delle variazioni dovute a configurazioni singolari del sistema o cambiamenti nella topologia dello stesso. Si ipotizza, inoltre, che la matrice $[B]$, di dimensione $n_p \times n$, abbia le n_p righe indipendenti anche rispetto alle n_λ righe della matrice Jacobiana $[\Psi_q]$. Combinando l'equazione (2.34) con la (2.35) si ottiene

$$\begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix} \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} -\{\Psi_t\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

dove la matrice a sinistra dell'uguale è non singolare per costruzione. Esplicitando $\{\dot{q}\}$ dal precedente sistema si ottiene

$$\{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\{\Psi_t\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} = -[S] \{\Psi_t\} + [V] \{\dot{p}\} \quad (2.37)$$

dove la matrice $[S]$ è ottenuta dalle prime n_λ colonne della matrice $\begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1}$.
 Come può facilmente verificarsi l'espressione appena dedotta contiene come caso particolare la (2.21). Dalla soluzione (2.37) si deduce

$$\begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix} [[S] [V]] = \begin{bmatrix} [\Psi_q] [S] [\Psi_q] [V] \\ [B] [S] [B] [V] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] [0] \\ [0] [I] \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

per cui può ricavarsi nuovamente la condizione di ortogonalità $[\Psi_q] [V] = [0]$ ed un'ulteriore relazione $[B] [V] = [I]$. Derivando la (2.36) si ricava la relazione tra le accelerazioni espresse mediante coordinate generalizzate e le derivate del vettore $\{p\}$:

$$\begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

da cui

$$\{\ddot{q}\} = [S] \{\gamma\} + [V] \{\ddot{p}\} . \quad (2.40)$$

Il termine $[S] \{\gamma\}$ è ottenibile dalla precedente relazione ponendo $\{\ddot{p}\} = \{0\}$:

$$[S] \{\gamma\} = \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} . \quad (2.41)$$

La matrice $[V]$, che rende possibile eliminare i moltiplicatori di Lagrange dalle equazioni del moto, non è unica. Diverse metodologie di decomposizione della matrice Jacobiana $[\Psi_q]$ possono essere impiegate per la sua determinazione. In particolare la decomposizione al valore singolo (SVD) [12] e la decomposizione QR [13] sono state spesso impiegate a tale proposito.

2.2.1 Decomposizione SVD

Mediante decomposizione al valore singolo, la matrice Jacobiana trasposta $[\Psi_q]^T$ viene riscritta come segue

$$[\Psi_q]^T = [[W_d] [W_i]] \begin{bmatrix} [\Lambda_1] \\ [0] \end{bmatrix} [U]^T = [W_d] [\Lambda_1] [U]^T, \quad (2.42)$$

con le matrici aventi le seguenti dimensioni:

- $[W_d]$ matrice $n_q \times r$;
- $[W_i]$ matrice $n_q \times (n_q - r)$;
- $[\Lambda_1]$ matrice diagonale $r \times r$;
- $[0]$ matrice $(n_q - r) \times r$;
- $[U]$ matrice $r \times r$.

Le colonne della matrice $[[W_d] [W_i]]$ dovranno essere ortogonali per cui

$$[W_i]^T [W_d] = [0]. \quad (2.43)$$

La condizione di ortogonalità sarà allora espressa come

$$[W_i]^T [\Psi_q]^T = [W_i]^T [W_d] [\Lambda_1] [U]^T = [0]. \quad (2.44)$$

Combinando quest'ultima con la (2.42) si ha

$$[W_i]^T [\Psi_q]^T = [W_i]^T [W_d] [\Lambda_1] [U]^T = [0]. \quad (2.45)$$

Pertanto è possibile affermare che è

$$[V] = [W_i] \quad (2.46)$$

la matrice ortogonale a $[\Psi_q]$, per cui

$$\{\dot{q}\} = [W_i] \{\dot{p}\} . \quad (2.47)$$

Inoltre, il termine $[S] \{\gamma\}$ si ottiene da

$$[S] \{\gamma\} = \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [W_i]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} . \quad (2.48)$$

In definitiva, l'equazione del moto diviene

$$[W_i]^T [M] [W_i] \{\ddot{p}\} = [W_i]^T \{F_e\} - [W_i]^T [M] [S] \{\gamma\} . \quad (2.49)$$

Esempio

L'obiettivo è quello di ridurre il sistema di equazioni algebrico – differenziali, che descrive la dinamica di un pendolo semplice, ad un'unica equazione differenziale ordinaria mediante decomposizione SVD. Il pendolo è costituito

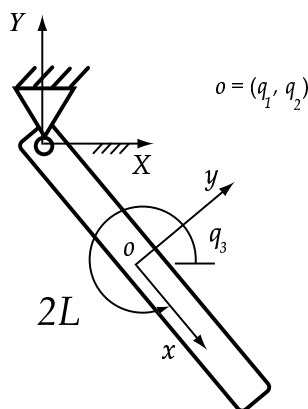


Figura 2.2: Pendolo semplice - Nomenclatura

da un'asta di lunghezza $2L$, momento di inerzia baricentrico I_g e massa m . Il baricentro si trova nella mezzeria dell'asta che è soggetta alla forza peso (Figura 2.2).

Per eseguire tale decomposizione è necessario procedere per via numerica.

Si impongono, quale posizione iniziale, $q_3 = \pi/4$ ed $L = 1$, cosicché

$$[\Psi_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\{\gamma\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q}_3^2, -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q}_3^2 \right\}^T.$$

Applicando la decomposizione si avrà

$$[\Psi_q]^T = [W] [\Lambda] [U]^T,$$

con

$$[W] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dal confronto di tali matrici con la seguente,

$$[\Psi_q]^T = \begin{bmatrix} [W_d] & [W_i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_1] \\ [0] \end{bmatrix} [U]^T,$$

è immediato dedurre

$$[W_i] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

ovvero

$$[S] \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [W_i]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{q}_3^2 .$$

In definitiva, l'applicazione della (2.49) fornisce l'equazione differenziale

$$(m + I_g) \ddot{p} + \frac{\sqrt{2}}{2} gm \cos q = 0 .$$

2.2.2 Decomposizione QR

Applicando questo metodo di decomposizione, la matrice Jacobiana $[\Psi_q]^T$ viene riscritta come segue

$$[\Psi_q]^T = [[Q_1] [Q_2]] \begin{bmatrix} [R_1] \\ [0] \end{bmatrix} = [Q_1] [R_1] , \quad (2.50)$$

con le matrici aventi le dimensioni seguenti:

- $[\Psi_q]$ matrice $n_\lambda \times n_q$,
- $[Q_1]$ matrice $n_q \times n_\lambda$,
- $[Q_2]$ matrice $n_q \times (n_q - n_\lambda)$,
- $[R_1]$ matrice $n_\lambda \times n_\lambda$,
- $[0]$ matrice $(n_q - n_\lambda) \times n_\lambda$.

Il numero n_p delle variabili indipendenti coincide con quello $F = n_q - n_\lambda$ dei gradi di libertà. Il vettore $\{y\}$ delle variabili dipendenti ha dimensione $n_y = n_q - n_p$, mentre n_λ è pari al rango r della matrice Jacobiana se i vincoli

sono tutti indipendenti. Stante l'ortogonalità tra le colonne delle matrici $[Q_1]$ e $[Q_2]$, sussistono le condizioni

$$\begin{aligned} [Q_2]^T [Q_1] &= [0] \\ [Q_2]^T [Q_2] &= [I] . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Premoltiplicando la matrice Jacobiana trasposta $[\Psi_q]^T$ per $[Q_2]^T$ e considerando la prima delle (2.51) si ottiene la condizione di ortogonalità:

$$[Q_2]^T [\Psi_q]^T = [Q_2]^T [Q_1] [R_1] = [0] . \quad (2.52)$$

Confrontando la (2.52) con $[\Psi_q][V] = [0]$ e la seconda delle (2.51) con la $[B][V] = [I]$, si possono dedurre le matrici $[V]$ e $[B]$ come

$$\begin{aligned} [V] &= [Q_2] \\ [B] &= [Q_2]^T . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pertanto, sostituendo $[Q_2]^T$ al posto di $[V]$ nella (2.25) si ha

$$[Q_2]^T [M] \{\ddot{q}\} = [Q_2]^T \{F_e\} .$$

Quest'ultima, tenuta presente la (2.40), diventa

$$[Q_2]^T [M] [Q_2] \{\ddot{p}\} = [Q_2]^T \{F_e\} - [Q_2]^T [M] [S] \{\gamma\} , \quad (2.54)$$

con $[S]$ matrice costituita dalle prime n_λ colonne dell'inversa

$$\begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [Q_2]^T \end{bmatrix}^{-1} .$$

E' appena il caso di osservare che (2.54) è un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite $\{\ddot{p}\}$.

Il confronto della (2.40) con la (2.24) fornisce

$$[\dot{V}] \{\dot{p}\} = [S] \{\gamma\} . \quad (2.55)$$

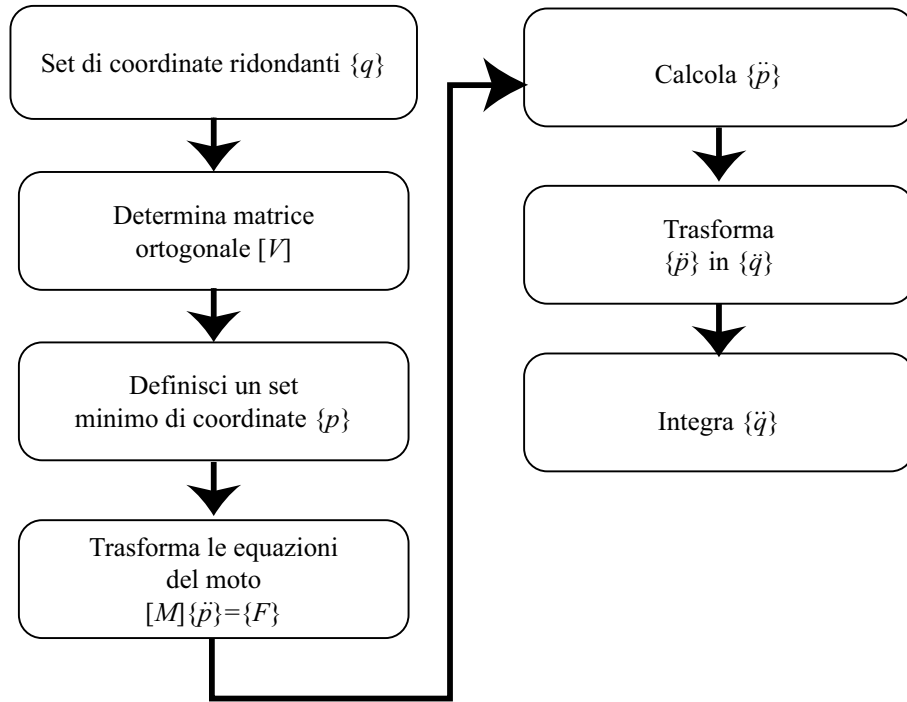


Figura 2.3: Fasi di calcolo per l'integrazione numerica

Da ultimo si fa notare che gli elementi del vettore $\{\dot{p}\}$ potrebbero essere combinazioni di elementi di $\{\dot{q}\}$ e l'equazione differenziale cui si perviene non è di immediata interpretazione. Inoltre, calcolato il vettore $\{\ddot{p}\}$ si userà la (2.40) per ottenere $\{\ddot{q}\}$ e da quest'ultimo, per integrazione, la stima dei vettori $\{\dot{q}\}$ e $\{q\}$ all'istante successivo.

Ai fini dell'integrazione numerica, la Figura 2.3 riassume le fasi di calcolo.

Esempio

In questo caso si applica la decomposizione QR all'esempio del pendolo — riportato in precedenza per la decomposizione SVD (Figura 2.2).

Il vettore delle equazioni di vincolo e la relativa matrice Jacobiana sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \{\Psi\} &= \begin{Bmatrix} q_1 - L \cos q_3 \\ q_2 - L \sin q_3 \end{Bmatrix}, \\ [\Psi_q] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \sin q_3 \\ 0 & 1 & -L \cos q_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'applicazione della fattorizzazione QR alla $[\Psi_q]^T$ fornirà

$$[\Psi_q]^T = \begin{bmatrix} [Q_1] & [Q_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_1] \\ [0] \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} [R_1] &= \begin{bmatrix} \sqrt{1 - L^2 \sin^2 q_3} & -\frac{L^2 \sin q_3 \cos q_3}{\sqrt{1 - L^2 \sin^2 q_3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1 + L^2}{1 - L^2 \sin^2 q_3}} \end{bmatrix}, \\ [Q_2] &= \begin{bmatrix} -L \sin q_3 & L \cos q_3 & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Pertanto, essendo $[Q_2] = [V]$, la relazione $\{\dot{q}\} = [V] \{\dot{p}\}$ si particolarizza nella seguente

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \sin q_3 \\ L \cos q_3 \\ 1 \end{bmatrix} \{\dot{p}\}.$$

Inoltre, la (2.41) diventa

$$\begin{aligned}
 [S] \{\gamma\} &= \begin{bmatrix} [\Psi_q] \\ [Q_2]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \sin q_3 \\ 0 & 1 & -L \cos q_3 \\ -L \sin q_3 & L \cos q_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -L\dot{q}_3^2 \cos q_3 \\ -L\dot{q}_3^2 \sin q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -L\dot{q}_3^2 \cos q_3 \\ -L\dot{q}_3^2 \sin q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} .
 \end{aligned}$$

In definitiva, tenuto conto che è

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_g \end{bmatrix} ,$$

la matrice delle masse,

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} 0 & -mg & 0 \end{Bmatrix}^T ,$$

il vettore delle forze esterne, la relazione (2.54),

$$[Q_2]^T [M] [Q_2] \{\ddot{p}\} = [Q_2]^T \{F_e\} - [Q_2]^T [M] [S] \{\gamma\} ,$$

si particolarizza nella seguente equazione differenziale

$$(mL^2 + I_g) \ddot{p} + mgL \cos q_3 = 0 \tag{2.56}$$

in cui l'unica incognita è la \ddot{p} .

2.3 La formulazione di Udwadia-Kalaba

Ponendo le equazioni della Dinamica di un sistema meccanico nella forma

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \gamma \end{Bmatrix}, \quad (2.57)$$

se la matrice Jacobiana associata al sistema di equazioni di vincolo ha tutte le righe indipendenti, la matrice dei coefficienti possiede l'inversa. Operando quindi sui singoli blocchi si ottiene

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} - M^{-1}\Psi_q^T (\Psi_q M^{-1}\Psi_q^T)^{-1} \Psi_q M^{-1} & M^{-1}\Psi_q^T (\Psi_q M^{-1}\Psi_q^T)^{-1} \\ (\Psi_q M^{-1}\Psi_q^T)^{-1} \Psi_q M^{-1} & -(\Psi_q M^{-1}\Psi_q^T)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

per cui, dalla (2.57), indicato con

$$\{\ddot{q}_f\} = [M]^{-1} \{F\}, \quad (2.59)$$

il vettore delle accelerazioni che si sarebbero registrate in assenza di vincoli, segue

$$\{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-1} [\Psi_q]^T \left([\Psi_q] [M]^{-1} [\Psi_q]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) \quad (2.60)$$

e

$$\{\lambda\} = \left([\Psi_q] [M]^{-1} [\Psi_q]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}). \quad (2.61)$$

Introdotta le posizioni

$$[M]^{-1} = [M]^{-\frac{1}{2}} [M]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.62)$$

$$[D] = [\Psi_q] [M]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

la (2.60) può riscriversi nella forma

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}\} &= \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} \left([M]^{-\frac{1}{2}} [\Psi_q]^T \right) \left([\Psi_q] [M]^{-\frac{1}{2}} [M]^{-\frac{1}{2}} [\Psi_q]^T \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}), \\ &= \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} [D]^T \left([D] [D]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Quindi, tenuta presente la definizione di matrice pseudoinversa destra si può porre

$$[D]^+ = [D]^T \left([D] [D]^T \right)^{-1} \quad (2.65)$$

e la (2.64) diventa

$$\{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} [D]^+ (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) , \quad (2.66)$$

equazione dedotta per la prima volta da Kalaba ed Udwadia [14] avvalendosi del principio di Gauss.

Principio di Gauss. Per un sistema di n masse discrete il principio di Gauss asserisce:

“per ogni istante di tempo l’accelerazione che compete al sistema soggetto a vincoli è quella che più si avvicina all’accelerazione del medesimo sistema non vincolato.”

Ciò si ottiene minimizzando la seguente quantità

$$G(\ddot{q}) = \frac{1}{2} (\ddot{q} - \ddot{q}_f)^T M (\ddot{q} - \ddot{q}_f) = \frac{1}{2} (\ddot{q}_N - \ddot{q}_{f_N})^T (\ddot{q}_N - \ddot{q}_{f_N})$$

dove il pedice $_N$ indica le seguenti accelerazioni normalizzate

$$\begin{aligned} \ddot{q}_N &= M^{\frac{1}{2}} \ddot{q} \\ \ddot{q}_{f_N} &= M^{\frac{1}{2}} \ddot{q}_f . \end{aligned}$$

La funzione scalare $G(q)$ è definita *Gaussiana del sistema* mentre la quantità $\Delta q = \ddot{q} - \ddot{q}_f$ rappresenta quanto l’accelerazione del sistema vincolato si discosta da quella del medesimo sistema non vincolato. Generalmente l’espressione $(\ddot{q}_N - \ddot{q}_{f_N})^T (\ddot{q}_N - \ddot{q}_{f_N}) = \|\ddot{q} - \ddot{q}_f\|_M^2$ è definita come la *norma cinetica* in analogia con l’espressione dell’energia cinetica di un sistema. Ciò considerato il principio di Gauss consiste nel minimizzare la distanza cinetica tra le accelerazioni generalizzate \ddot{q} e \ddot{q}_f su tutti i set di possibili accelerazioni compatibili con i vincoli.

A questo punto è importante far osservare che la formulazione (2.66):

- può applicarsi anche nel caso in cui i vincoli del sistema siano sovrabbondanti o variabili nel corso della simulazione, oppure la matrice Jacobiana Ψ_q non abbia rango pieno [15];
- anche se si impiega un numero non minimo di coordinate per descrivere la Cinematica del sistema, consente di avvalersi nella simulazione di solutori di equazioni differenziali ordinarie pervenendo simultaneamente a tutte le variabili del sistema;
- richiede che i vincoli siano tra loro congruenti, ma non necessariamente indipendenti.

Nella presente trattazione si è implicitamente ammesso che la matrice $[M]$ delle masse fosse diagonale, ipotesi rispettata nel caso di sistema costituito da sistemi di punti materiali e per il moto rigido piano. Poiché nel moto spaziale di corpi rigidi la generica matrice associata alla massa dell' i^{mo} corpo assume l'espressione

$$[M_i] = \begin{bmatrix} m_i I & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.67)$$

l'ipotesi è valida solo se la matrice $[J_i]$ dei momenti d'inerzia è valutata rispetto ad assi principali d'inerzia.

2.3.1 La matrice pseudoinversa di Moore-Penrose

Diverse sono le metodologie disponibili per il calcolo della matrice pseudoinversa di Moore-Penrose. Le principali differenze risiedono nell'accuratezza della soluzione e nel numero di passaggi matematici necessari per la sua determinazione che si riflettono, di conseguenza, sui tempi di calcolo.

Le principali proprietà della matrice pseudoinversa di Moore-Penrose $[A]^+$ di una generica matrice $[A]$ sono:

- $([A] [A]^+)^T = [A] [A]^+$
- $([A]^+ [A])^T = [A]^+ [A]$
- $[A] [A]^+ [A] = [A]$
- $[A]^+ [A] [A]^+ = [A]^+$

Quando la matrice $[A]$ è quadratica ed ha rango pieno la sua pseudoinversa coincide con la matrice inversa.

La matrice pseudoinversa di Moore-Penrose è generalmente associata alla soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare di equazioni del tipo

$$[A] \{x\} = \{b\} , \quad (2.68)$$

dove il numero m di equazioni non è necessariamente uguale al numero n delle incognite, e la matrice $[A]$ non ha rango pieno. In particolare possono distinguersi i seguenti casi

Sistemi di equazioni sovra-determinati ($m > n$)

Assumendo che

$$h \equiv \|[A] \{x\} - \{b\}\|_2^2 \quad (2.69)$$

sia un minimo, si ottiene

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\} . \quad (2.70)$$

Di conseguenza la soluzione del sistema (2.68) può essere formulata come

$$\{x\} = [A]^+ \{b\} , \quad (2.71)$$

dove

$$[A]^+ = \left([A]^T [A] \right)^{-1} [A]^T \quad (2.72)$$

è la matrice pseudoinversa destra.

Sistemi di equazioni sotto-determinati ($m < n$)

La soluzione in questo caso si ottiene imponendo il minimo della norma Euclidea

$$g \equiv \|x\|_2^2, \quad (2.73)$$

con $\{x\}$ soddisfacente il sistema (2.68). In questo modo, introducendo la nuova funzione obiettivo come

$$g' \equiv g + \{\lambda\}^T ([A] \{x\} - \{b\}) \quad (2.74)$$

la soluzione può essere ottenuta risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix}, \quad (2.75)$$

oppure

$$\{x\} = [A]^+ \{b\} \quad (2.76)$$

dove

$$[A]^+ = [A]^T \left([A] [A]^T \right)^{-1}, \quad (2.77)$$

è la matrice pseudoinversa sinistra.

Il metodo dei minimi quadrati

Data la notevole diffusione di procedure per il calcolo della soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare di equazioni algebriche

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (2.78)$$

la matrice pseudoinversa può essere ottenuta come tale sistema. In particolare possono essere impiegate per questo scopo l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt o la fattorizzazione QR di Householder.

Siano

$$\begin{aligned} \{b_1\} &= \left\{ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \right\}^T, \\ \{b_2\} &= \left\{ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \right\}^T, \\ \{b_3\} &= \left\{ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \right\}^T, \\ &\dots\dots\dots \\ \{b_m\} &= \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \right\}^T. \end{aligned}$$

Le procedure differiscono secondo le dimensioni di $[A]$.

Caso $m > n$

1. Si risolve m volte⁴ il sistema

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\}. \quad (2.79)$$

2. Mediante le m soluzioni $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_m\}$ può essere definita la matrice pseudoinversa

$$[A]^+ = \left[\{x_1\} \ \{x_2\} \ \{x_3\} \ \dots \ \{x_m\} \right] \quad (2.80)$$

Caso $n \geq m$

1. Si risolve m volte il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

Anche in questo caso la matrice pseudoinversa viene data dall'equazione (2.80).

⁴Dal punto di vista computazionale, il sistema viene risolto una sola volta. Le matrici di fattorizzazione calcolate per la prima soluzione vengono salvate ed impiegate per le successive.

Dato che le matrici in (2.79) e in (2.81) sono singolari o mal condizionate, la loro soluzione richiede particolare cura. Per questo motivo per la soluzione di sistemi lineari mediante minimi quadrati si ricorre alla fattorizzazione QR di Householder o all'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Decomposizione al valore singolo

1. Si applica la decomposizione al valore singolo ad una matrice $[A]$

$$[A] = [U] [\Sigma] [V]^T ,$$

dove $[U] [U]^T = [I]_{m \times m}$, $[V] [V]^T = [I]_{n \times n}$ e

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale.

2. Si calcola

$$[A]^+ = [V] [\Sigma]^+ [U]^T , \quad (2.82)$$

dove

$$[\Sigma]^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^+ \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} 0 & (\sigma_i = 0) \\ \sigma_i^{-1} & (\sigma_i \neq 0) \end{cases} \quad (2.83)$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

Il metodo di Varga

1. Si applica la decomposizione QR ad una matrice $[A]$ ottenendo:

$$[A] = [U][G] = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $[G_1]$ matrice con rango pieno sulle righe e $[U]^T [U] = [I_m]$.

2. Si applica di nuovo la decomposizione QR alla matrice $[G_1]$

$$[G_1]^T = [V]^T \begin{bmatrix} G_2^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

con $[G_2]^T$ matrice non singolare e $[V][V]^T = [I_n]$.

3. Dato che

$$[A] = [U] \begin{bmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V],$$

la matrice pseudoinversa si ottiene come

$$[A]^+ = [V]^T \begin{bmatrix} G_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [U]^T. \quad (2.85)$$

Il metodo di Greville

1. Si decompone la matrice $[A]_{m \times n}$ nei vettori riga $\{a_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T & \dots & a_m^T \end{bmatrix}$$

2. Si definisce la matrice

$$[A_i]_{i \times n} = \begin{bmatrix} A_{i-1} \\ a_i \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

con $[A_1]_{1 \times n} = \{a_1\}_{1 \times n}$.

3. Per $i = 2, \dots, m$ si calcolano le matrici $[A_i]^+$ come

$$[A_i]_{n \times i}^+ = \left[[A_{i-1}]^+ - \{b_i\}^T \{d_i\} \left[\{b_i\}^T \right] \right],$$

dove

$$\begin{aligned} \{d_i\}_{1 \times (i-1)} &= \{a_i\} [A_{i-1}]^+ \\ \{c_i\}_{1 \times n} &= \{a_i\} - \{d_i\} [A_{i-1}] \\ \{b_i\}_{1 \times n} &= \begin{cases} \frac{\{c_i\}}{\{c_i\}\{c_i\}^T} & (\|c_i\| \neq 0) \\ \frac{\{d_i\}[A_{i-1}]^+}{1 + \{d_i\}\{d_i\}^T} & (\|c_i\| = 0) \end{cases} \\ [A_1]^+ &= \begin{cases} \frac{\{a_1\}^T}{\{a_1\}\{a_1\}^T} & (\|a_1\| \neq 0) \\ \{a_1\}^T & (\|a_1\| = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

4. Dopo m ripetizioni $[A_m]^+$ definisce la matrice pseudoinversa $[A]_{n \times m}^+$ della matrice $[A]$.

Il problema della determinazione del rango

Il maggiore problema che si incontra nell'implementazione del calcolo della matrice pseudoinversa risulta la accurata determinazione del rango della matrice. L'utente dovrà infatti stabilire un valore di soglia al di sotto del quale tutti i valori numerici siano considerati nulli. Questo valore limite può ragionevolmente essere posto uguale alla precisione hardware del calcolatore impiegato. Tuttavia ciò non evita perturbazioni nella soluzione numerica

dovute, principalmente, alla necessità di impiegare algoritmi in cui sia richiesto il calcolo dei reciproci di tali valori numerici prossimi allo zero. Per tale motivo metodi di stabilizzazione o regolarizzazione della soluzione, quale per esempio la troncatura, sono necessari per avere risultati accettabili.

Procedure Fortran impiegate

Per l'implementazione delle metodologie precedentemente introdotte per il calcolo della matrice pseudoinversa, sono state impiegate le librerie matematiche IMSL del Fortran [16]. In particolare sono state adoperate:

- **Pseudoinversa mediante decomposizione al valore singolo**

Le subroutine IMSL DLSGRR.

- **Pseudoinversa mediante il metodo di Varga**

Le due fattorizzazioni QR di Householder richieste per il calcolo sono state implementate mediante l'uso combinato delle procedure IMSL DLQRRR e DLQERR. Per il calcolo dell'inversa della matrice G_2 è stata inoltre impiegata la procedura DLINRT. La trasposta di una matrice ed il prodotto tra matrici sono stati effettuati mediante DTRNRR e DMRRRR, rispettivamente.

- **Pseudoinversa mediante il metodo di Greville**

E' stata realizzata un'apposita procedura Fortran mediante l'impiego della libreria LAPACK.

- **Pseudoinversa mediante soluzione ai minimi quadrati e fattorizzazione QR di Householder**

Per la soluzione ai minimi quadrati di un sistema di equazioni sono state adoperate le procedure DLQRRR e DLQRSLS. In particolare la DLQRRR fornisce informazioni riguardo alla fattorizzazione QR, mentre la DLQRSLS calcola la soluzione ai minimi quadrati.

- **Pseudoinversa mediante metodo ai minimi quadrati e fattorizzazione QR modificata di Gram-Schmidt**

In questo caso è stato impiegato il codice realizzato da R.H. Wapler [17].

Esempio 1

Si vuole applicare la formulazione dinamica di Udwadia-Kalaba alla simulazione di un pendolo semplice soggetto all'azione della gravità ed in cui le equazioni della Dinamica si presentino quale sistema di equazioni algebrico-differenziali nella forma (Figura 2.2)

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ \gamma \end{Bmatrix}. \quad (2.87)$$

Per facilitare l'implementazione di un software multibody si consiglia di considerare il membro telaio alla stregua dei membri mobili. Si dovranno quindi introdurre delle equazioni algebriche di vincolo che obblighino le coordinate generalizzate assegnate al telaio a rimanere costanti.

Si indicheranno con

- $\{q_1 \ q_2 \ q_3\}^T$, il vettore delle coordinate generalizzate del pendolo;
- $\{q_4 \ q_5 \ q_6\}^T$, il vettore delle coordinate generalizzate del telaio;
- $m_1=1$, $I_{G_1}=0.1$, massa e momento d'inerzia del pendolo valutato attorno all'asse baricentrico;
- m_2 , I_{G_2} , massa e momento d'inerzia del telaio⁵.
- L , la distanza del baricentro dal centro della coppia rotoidale.

⁵Tali grandezze, qui indicate solo per congruenza, possono assumere qualsiasi valore numerico, tranne lo zero, in quanto non influenzano il processo di calcolo.

Ciò premesso

- il vettore dei vincoli si presenterà nella forma

$$\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} q_1 - L \cos q_3 - q_4 \\ q_2 - L \sin q_3 - q_5 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \{0\} ;$$

- il vettore formato dagli elementi della diagonale della matrice $[M]$ delle masse sarà

$$\left\{ m_1 \ m_1 \ I_{G_1} \ m_2 \ m_2 \ I_{G_2} \right\}^T ;$$

- il vettore delle forze esterne risulta essere

$$\{F_e\} = \left\{ 0 \ -m_1 g \ 0 \right\}^T$$

Adottate quali condizioni iniziali del moto i vettori

$$\{q\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \frac{3\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \right\}^T ,$$

$$\{\dot{q}\} = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right\}^T ,$$

all'istante $t = 0$, la matrice pseudoinversa $[D]^+$ (v. eq. (2.65)), vale

$$[D]^+ = \begin{bmatrix} 0.5455 & -0.4545 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.4545 & 0.5455 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2033 & -0.2033 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} .$$

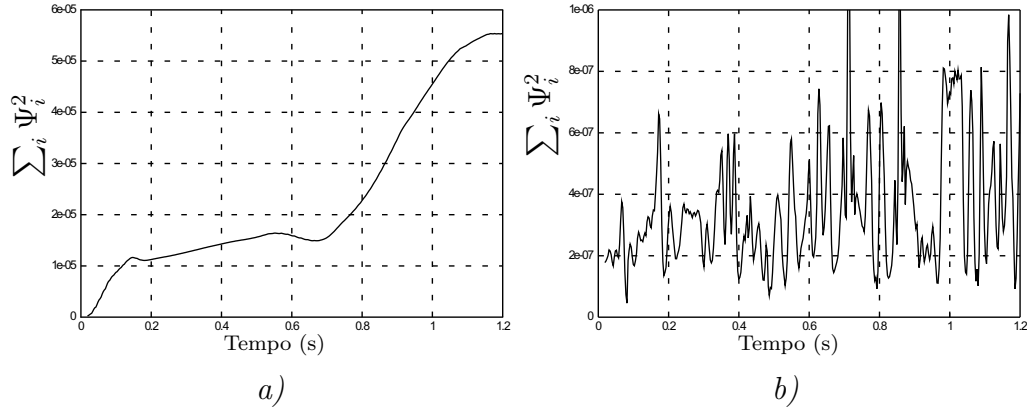


Figura 2.4: Confronto dell'entità della violazione dei vincoli di posizione: a) Senza stabilizzazione b) Con stabilizzazione di Baumgarte

Infine, tramite la (2.66), si ottiene il vettore delle accelerazioni al tempo t

$$\{\ddot{q}\} = \left\{ -6.2997 \quad -6.2997 \quad -8.9091 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \right\}^T$$

da impiegare per la stima, tramite differenze finite, dei vettori posizione $\{q\}$ e velocità $\{\dot{q}\}$ al tempo $t + \Delta t$.

L'integrazione numerica è stata eseguita impiegando la subroutine DIVPRK della libreria IMSL. Tale subroutine si avvale del metodo di Runge-Kutta-Verner del quinto ordine, nel presente esempio utilizzata con un parametro di tolleranza all'errore pari a $TOL = 10^{-8}$.

Appare interessante mettere in luce in questo esempio il fenomeno della *deriva* nell'integrazione numerica dei sistemi di equazioni algebrico – differenziali, nonché gli effetti dell'applicazione del metodo di Baumgarte per contenere l'entità dell'errore. Con la stabilizzazione, qui operata imponendo $\alpha = \beta = 200$, l'errore viene mantenuto entro limiti accettabili (v. Figura 2.4 b), mentre tende a crescere con andamento monotono senza stabilizzazione (v. Figura 2.4 a). Nell'interpretare i grafici si richiama l'attenzione del lettore

sulle differenti scale degli assi delle ordinate. La stabilizzazione comporta un non trascurabile incremento del tempo di calcolo. Per il caso in argomento, il tempo necessario per completare la simulazione aumenta di un fattore 2.5 circa.

Esempio 2

La formulazione di Udwadia-Kalaba ben si presta all'analisi dinamica diretta di meccanismi a vincoli sovrabbondanti. Ad esempio, il meccanismo schematizzato in Figura 2.5 appartiene a tale categoria in quanto la sua mobilità dipende dalle particolari dimensioni delle aste.

Le caratteristiche geometriche ed inerziali dei membri sono le seguenti:

- lunghezza, massa e momento d'inerzia dei tre membri paralleli $L=1$, $m=1$ e $I=0.1$, rispettivamente;
- lunghezza, massa e momento d'inerzia della biella $L_2=2$, $m=2$ e $I=0.2$.

Le coppie cinematiche sono tutte rotoidali ed il moto dei membri è ipotizzato piano per semplicità. Poiché la posizione di ciascun corpo è definita tramite tre coordinate, vi sono $n=12$ coordinate. Le sei coppie rotoidali danno luogo a $k=12$ equazioni algebriche di cui solo undici indipendenti. La forza di gravità viene applicata, mentre vengono trascurati gli effetti dissipativi di energia.

Il grafico di Figura 2.6 rappresenta la posizione angolare assoluta delle aste parallele. Sono stati inoltre confrontati al variare della tolleranza richiesta nel calcolo della soluzione i vari metodi proposti per il calcolo della matrice pseudoinversa. In particolare si è fatto riferimento a: il risultato raggiunto, l'accuratezza della soluzione ed i tempi di calcolo. Il tutto è stato riportato nelle Tabelle 2.1, 2.2, 2.3.

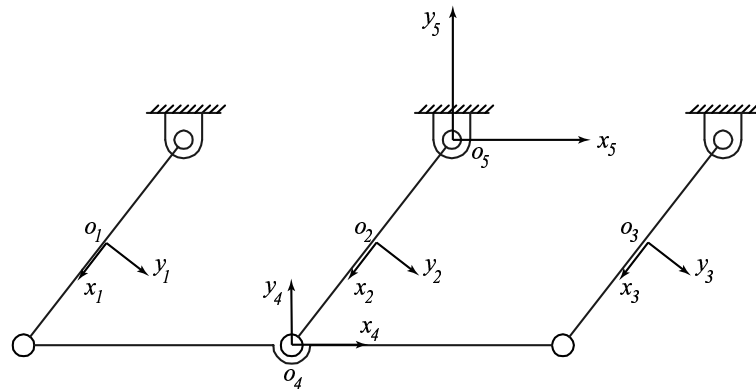


Figura 2.5: Pentalatero articolato piano

Tabella 2.1: TOL= 10^{-10} . Metodo di integrazione: Adams-Moulton.

Passo temporale iniziale, $\Delta t = 0.66 \cdot 10^{-2}$ s.

Metodo	Risultato	$\sum_i \Psi_i^2$	NFUNC	NSTEPS	CPU
SVD	Fallisce ¹	$3.7 \cdot 10^{-7}$	-	-	-
Varga	Fallisce ²	$9.9 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
Greville	Corretto fino a 17.5 s	$4.5 \cdot 10^{-5}$	2.961.955	2.633.811	0.93
LS-Householder	Corretto fino a 16.5 s	$2.3 \cdot 10^{-4}$	6.131.159	4.177.395	11.57
LS-Modified GS	Corretto fino a 17.0 s	$1.1 \cdot 10^{-4}$	3.749.766	3.015.354	36.85

¹ Dopo 9.1 s in cui la simulazione è corretta, l'integrazione viene arrestata a causa di un errore ripetuto (si veda [16], p. 668).

² Dopo 8.0 s in cui la simulazione è corretta, l'integrazione viene arrestata a causa di un errore ripetuto (si veda [16], p. 668).

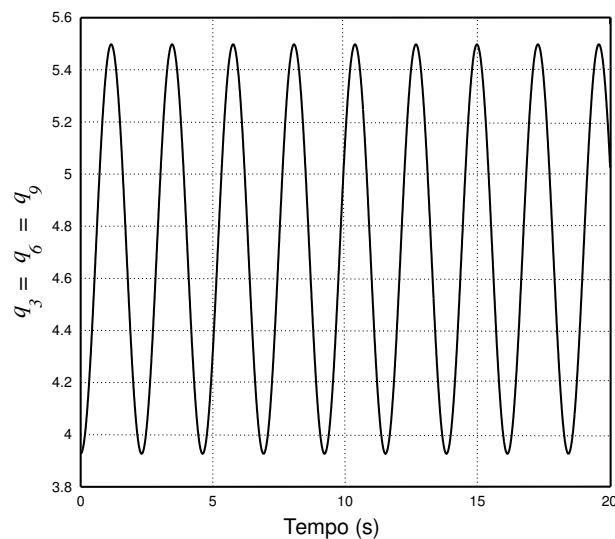


Figura 2.6: Posizione angolare delle aste parallele

Tabella 2.2: TOL= 10^{-8} . Metodo di integrazione: Adams-Moulton.
 Passo temporale iniziale, $\Delta t = 0.66 \cdot 10^{-2}$ s.

Metodo	Risultato	$\sum_i \Psi_i^2$	NFUNC	NSTEPS	CPU
SVD	Fallisce ¹	$3.4 \cdot 10^{-6}$	-	-	-
Varga	Fallisce ²	$9.9 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
Greville	Corretto fino a 17.5 s	$1.86 \cdot 10^{-4}$	1,648,055	1,422,689	0.53
LS-Householder	Corretto fino a 18.0 s	$7.9 \cdot 10^{-4}$	1,641,751	1,422.297	1.28
LS-Modified GS	Corretto fino a 18.0 s	$5.2 \cdot 10^{-4}$	1,644,341	1,424,864	6.03

¹ Dopo 12.07 s di simulazione corretta, l'integrazione si interrompe per errore fatale di tipo 1 dalla DIVPAG (si veda [16], p. 668).

² Dopo 8.06 s di simulazione corretta, l'integrazione si arresta a causa di una precisione eccessivamente bassa nel soddisfacimento delle equazioni di vincolo.

Tabella 2.3: TOL= 10^{-6} . Metodo di integrazione: Adams-Moulton.
 Passo temporale iniziale, $\Delta t = 0.66 \cdot 10^{-2}$ s.

Metodo	Risultato	$\sum_i \Psi_i^2$	NFUNC	NSTEPS	CPU
SVD	Corretto fino a 17.5 s	$4.1 \cdot 10^{-4}$	1,033,381	847,294	0.28
Varga	Fallisce ¹	$9.9 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
Greville	Corretto fino a 19.0 s	$9.7 \cdot 10^{-4}$	1,017,558	1,422.689	0.37
LS-Householder	Corretto	$7.9 \cdot 10^{-4}$	1,641.751	1,422.297	0.76
LS-Modified GS	Corretto	$6.9 \cdot 10^{-4}$	1,013,795	839,020	3.40

¹ Dopo 7.3 s di simulazione corretta, l'integrazione si arresta a causa di una precisione eccessivamente bassa nel soddisfacimento delle equazioni di vincolo.

CAPITOLO 3

Sistemi a vincoli sovrabbondanti

Nel Capitolo 2 sono state esaminate diverse metodologie di integrazione del sistema di equazioni algebrico–differenziali descriventi la dinamica di un sistema meccanico mediante approccio multibody. Il limite maggiore di alcune delle metodologie proposte risiede nella difficoltà di gestire sistemi con vincoli sovrabbondanti che, nella realtà costruttiva, rappresentano la maggioranza. Si pensi, infatti, che un quadrilatero articolato costituito da telaio e tre membri mobili collegati tra loro da quattro coppie rotoidali, nello spazio presenta tre gradi di vincolo in eccesso.

La metodologia di seguito presentata consente, per mezzo di trasformazioni algebriche a contenuto costo computazionale, di ridurre l'insieme di equazioni algebrico differenziali in un sistema di sole equazioni differenziali del primo ordine, integrabile a partire dalle condizioni iniziali per mezzo di una qualsiasi metodologia nota.

3.1 Decomposizione QTZ della matrice Jacobiana dei vincoli

Il sistema sia descritto per mezzo di n coordinate generalizzate, con relative derivate

$$\begin{aligned}\{q\} &= \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T \\ \{\dot{q}\} &= \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}^T \\ \{\ddot{q}\} &= \{\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n\}^T\end{aligned}\tag{3.1}$$

e da m vincoli, in generale reonomi, ossia dipendenti esplicitamente dal tempo:

$$\{\Psi(\{q\}, t)\} = \{0\} .\tag{3.2}$$

La trattazione di Kim e Vanderploeg [13] ipotizzava $m \leq n$ e la matrice Jacobiana dei vincoli a rango pieno, ovvero $rank([\Psi_q]) = m$, che si traduce in sistemi a vincoli non sovrabbondanti. Nell'intento di realizzare un codice multibody *general purpose* questa ipotesi viene rimossa.

Sia $[\Psi_q]$ matrice ($m \times n$) di rango $r \leq \min(m, n)$. È sempre possibile effettuare la decomposizione QR con pivoting delle colonne della matrice Jacobiana trasposta, ovvero

$$[\Psi_q]^T [P] = [Q] [R]\tag{3.3}$$

dove $[P]$ è una matrice di permutazione¹ delle colonne di $[\Psi_q]^T$, $[Q]$ è una matrice ortogonale di dimensioni ($n \times n$) ed $[R]$ è una matrice ($n \times m$) composta

¹Tramite la matrice di permutazione, la decomposizione individua un set di colonne indipendenti del Jacobiano trasposto, ovvero di righe indipendenti del Jacobiano, cioè di vincoli indipendenti, in numero pari al rango. Gli algoritmi correntemente implementati, ad esempio nel pacchetto LaPack 3.0, consentono di operare una prima selezione, spostando alcune colonne, scelte adeguatamente, nelle prime posizioni della matrice permutata. Questo permette, se opportunamente implementato, di ridurre il numero di correzioni necessarie nella soluzione ottenuta, riducendo leggermente i tempi di calcolo complessivi.

come segue, nel caso in cui $r \leq m \leq n$:

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dove:

- $[R_{11}]$ matrice triangolare superiore ($r \times r$)
- $[R_{21}]$ matrice nulla (esattamente) ($(m - r) \times r$)
- $[R_{22}]$ matrice nulla (almeno numericamente) ($(m - r) \times (m - r)$)
- $[R_{12}]$ matrice non nulla ($r \times (m - r)$)

o altrimenti, nel caso in cui sia $r \leq n < m$:

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

dove:

- $[R_{11}]$ matrice triangolare superiore ($r \times r$)
- $[R_{21}]$ matrice nulla (esattamente) ($(n - r) \times r$)
- $[R_{22}]$ matrice nulla (almeno numericamente) ($(n - r) \times (m - r)$)
- $[R_{12}]$ matrice non nulla ($r \times (m - r)$)

Dalla forma che assume la matrice $[R]$ se ne ricava una metodologia molto rapida ed efficiente per il calcolo del rango della matrice Jacobiana. È sufficiente infatti contare gli elementi della diagonale principale che risultano *significativamente* diversi da zero.

In tutti i casi, la matrice Jacobiana trasposta si decompone come:

$$[\Psi_q]^T [P] = [Q] \begin{bmatrix} [R'] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

dove $[R']$ è una matrice trapezoidale superiore di dimensioni $(r \times m)$, mentre il blocco $[0]$ ha dimensioni $((n - r) \times m)$.

È molto importante osservare che, con una opportuna scelta della soglia di significatività per la determinazione del rango ², la matrice $[R_{11}]$ è sempre ben condizionata.

3.1.1 Decomposizione ortogonale di $[R']$

La matrice trapezoidale $[R']$ può essere decomposta come

$$[R'] = [[R_{11}] [R_{12}]] = [[T] [0]] [Z] \quad (3.7)$$

dove $[T]$ è una matrice triangolare superiore a rango pieno di dimensioni $(r \times r)$ e $[Z]$ è una matrice ortogonale di dimensioni $(m \times m)$.

3.1.2 Decomposizione QTZ

Da quanto sopra esposto, si deduce che la matrice Jacobiana trasposta può essere decomposta come segue:

$$[\Psi_q]^T [P] = [Q] \begin{bmatrix} [T] [0] \\ [0] [0] \end{bmatrix} [Z] \quad (3.8)$$

Questa decomposizione è ottenibile per una qualsiasi matrice di qualsivoglia rango. Da notare che, nel caso in cui la matrice sia a rango pieno, cioè $r = m$ per un sistema con almeno un grado di libertà, $[Z] = [I]_{m \times m}$.

²Ad esempio, nel codice sviluppato in doppia precisione, si è scelto un valore di soglia di 1×10^{-10} che ha sempre fornito risultati attendibili. Ciò non toglie che in casi particolari possa essere necessario modificare questo valore

Più in dettaglio, si possono individuare due parti distinte della matrice $[Q]$, ovvero:

$$[\Psi_q]^T [P] = [[Q_1] [Q_2]] \begin{bmatrix} [T] [0] \\ [0] [0] \end{bmatrix} [Z] \quad (3.9)$$

dove $[Q_1]$ ha dimensioni $(n \times r)$ e $[Q_2]$ $(n \times (n - r))$. Dalla (3.9) si ricava

$$[\Psi_q]^T [P] [Z]^T = [[Q_1] [Q_2]] \begin{bmatrix} [T] [0] \\ [0] [0] \end{bmatrix} = [[Q_1] [T] [0]] \quad (3.10)$$

ovvero

$$[\Psi_q]^T [P] = [[Q_1] [T] [0]] [Z] . \quad (3.11)$$

Questo mette in evidenza che, a meno della trasformazione ortogonale, quindi rigida, introdotta da $[Z]$, le colonne di $[Q_1]$ formano una base ortonormale dello spazio delle colonne di $[\Psi_q]^T$, ovvero dello spazio delle righe della matrice Jacobiana. Premoltiplicando la (3.11) per $[Q_2]^T$ si ha

$$[Q_2]^T [\Psi_q]^T [P] = [Q_2]^T [[Q_1] [T] [0]] [Z] = [0] \quad (3.12)$$

da cui si perviene alla seguente condizione di ortogonalità

$$[\Psi_q] [Q_2] = [0] . \quad (3.13)$$

La (3.13) mette in evidenza come le colonne di $[Q_2]$ siano vettori di base del kernel della matrice Jacobiana.

Data la matrice di permutazione $[P]$ e la matrice ortogonale $[Z]$, si dimostrerà, per mezzo dell'unicità della decomposizione di Cholesky, che la matrice $[Q_1]$ è unica. Lo stesso però non avviene per $[Q_2]$, la cui unica condizione è che le sue colonne formino una base ortonormale del sottospazio complemento ortogonale allo span delle colonne di $[Q_1]$ in \mathbb{R}^n .

3.1.3 Riduzione del numero di vincoli

I vincoli sovrabbondanti, individuati dalla decomposizione QR con pivoting delle colonne, possono essere agevolmente eliminati dal sistema in esame. Si pone:

$$[\Psi'_q]^T \equiv [\Psi_q]^T [P] [Z]^T \quad (3.14)$$

ottenendo, dalla (3.9)

$$[\Psi'_q]^T = [[Q_1] [Q_2]] \begin{bmatrix} [T] [0] \\ [0] [0] \end{bmatrix} = [[Q_1] [T] [0]] . \quad (3.15)$$

A seguito quindi della trasformazione ortogonale della matrice Jacobiana riordinata ne segue che le ultime colonne di $[\Psi'_q]^T$, ovvero le ultime righe di $[\Psi'_q]$, vengono annullate. Il numero di righe nulle è pari a $(m - r)$, ovvero pari al numero di colonne nulle a destra della matrice triangolare $[T]$.

Quindi la matrice $[\Psi'_q]$, di dimensioni $(m \times n)$ può essere partizionata come

$$[\Psi'_q] = \begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

dove:

- $[\Psi''_q]$, matrice $(r \times n)$, individua un insieme di vincoli *indipendenti*;
- $[0]$ è una matrice nulla di dimensione $((m - r) \times n)$.

La decomposizione QTZ completa permette quindi di individuare, in modo diretto, la matrice Jacobiana dei soli vincoli indipendenti:

$$[\Psi''_q]^T = [[Q_1] [Q_2]] \begin{bmatrix} [T] \\ [0] \end{bmatrix} . \quad (3.17)$$

3.1.4 Unicità della matrice $[Q_1]$

Dalla (3.17) si ottengono immediatamente le seguenti proprietà

$$[\Psi''_q]^T = [Q_1] [T] \quad (3.18)$$

$$[\Psi''_q] [Q_2] = [0] \quad (3.19)$$

che confermano l'interpretazione geometrica della matrice $[Q]$ fatta in precedenza.

Dalla (3.17) si ricava, inoltre

$$[Q]^T [\Psi''_q]^T = \begin{bmatrix} [T] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$[\Psi''_q] [Q] = [[T]^T \ [0]]$$

$$[\Psi''_q] [Q] [Q]^T [\Psi''_q]^T = [[T]^T \ [0]] \begin{bmatrix} [T] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$[\Psi''_q] [\Psi''_q]^T = [T]^T [T] \quad (3.20)$$

La (3.20) è la decomposizione di Cholesky della matrice $[\Psi''_q]$, la cui unicità prova l'unicità della matrice triangolare $[T]$. Dalla (3.18) si ottiene immediatamente

$$[Q_1] = [\Psi''_q]^T [T]^{-1} \quad (3.21)$$

da cui discende l'unicità di $[Q_1]$.

Per $[Q_2]$ valgono le considerazioni sopra riportate, cioè non è unica, ma le sue colonne formano una qualsiasi base ortonormale del sottospazio ortogonale allo span delle colonne di $[Q_1]$.

3.2 Definizione di velocità indipendenti

Si assuma che, al tempo t_0 , il vettore delle coordinate generalizzate $\{q_0\}$, soddisfi le equazioni di vincolo

$$\{\Psi(\{q_0\}, t_0)\} = \{0\} \quad (3.22)$$

La derivata prima rispetto al tempo delle equazioni di vincolo, calcolata al tempo t_0 , fornisce

$$[\Psi_q(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \{b_0\} , \quad (3.23)$$

dove

$$\{b_0\} = -\{\Psi_t(\{q_0\}, t_0)\} . \quad (3.24)$$

Premoltiplicando la (3.23) per $[Z][P]^T$, precedentemente introdotte, si ottiene

$$[Z][P]^T [\Psi_q(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = [Z][P]^T \{b_0\} \quad (3.25)$$

Dal confronto della (3.25) con la (3.14) si può scrivere

$$[\Psi'_q(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \{b'_0\} \quad (3.26)$$

dove

$$\{b'_0\} = [Z][P]^T \{b_0\} . \quad (3.27)$$

Dovendo essere verificata la (3.26), si vede che anche $\{b'_0\}$ deve avere gli ultimi elementi nulli, in misura pari ad $(m - r)$, infatti

$$[\Psi'_q(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \begin{bmatrix} [\Psi''_q(\{q_0\}, t_0)] \\ [0] \end{bmatrix} \{\dot{q}_0\} = \{b'_0\} = \begin{Bmatrix} \{b''_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

dove $\{b''_0\}$ è un vettore ad r elementi coincidente con i primi elementi, tutti e soli non nulli, di $\{b'_0\}$.

Ci si è quindi ricondotti all'equazione

$$[\Psi_q''(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \{b_0''\} . \quad (3.29)$$

Sostituendo $[\Psi_q'']^T = [Q_1][T]$ nella (3.29) si ottiene

$$[Q_1]^T \{\dot{q}_0\} = ([T]^T)^{-1} \{b_0''\} = \{\hat{b}_0''\}^3 . \quad (3.30)$$

La soluzione ottenuta $\{\dot{q}_0\}$ deve soddisfare sia la (3.29) che la (3.30). Da quest'ultima si ricava la *soluzione particolare*, ovvero

$$\{\dot{q}'_0\} = [Q_1] \{\hat{b}_0''\} ,$$

mentre dalla prima si ricava la *soluzione omogenea* di $[\Psi_q''(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \{0\}$, ovvero

$$\{\dot{q}''_0\} = [Q_2] \{\dot{z}\} \quad \forall \{\dot{z}\} .$$

Quest'ultima rimane giustificata quando si consideri che le colonne di $[Q_2]$ sono una base del kernel di $[\Psi_q'']$. La soluzione del sistema è quindi complessivamente data dalla somma delle due precedenti, ovvero

$$\{\dot{q}_0\} = \{\dot{q}'_0\} + \{\dot{q}''_0\} = [Q_1] \{\hat{b}_0''\} + [Q_2] \{\dot{z}\} . \quad (3.31)$$

3.2.1 Verifica della soluzione

In questa sezione si dimostra come la (3.31) soddisfi sia la (3.29) che la (3.30) e si chiarisce il significato del nome di *velocità indipendenti* con cui si indicano le componenti del vettore $\{\dot{z}\}$.

³Il vettore $\{\hat{b}_0''\}$ può essere agevolmente ottenuto senza dover invertire la matrice $[T]^T$ risolvendo il sistema lineare $[T]^T \{\hat{b}_0''\} = \{b_0''\}$, operazione resa ancor più semplice dalla triangolarità di $[T]$, che risulta inoltre essere sempre ben condizionata.

Verifica del primo sistema

Sostituendo la soluzione proposta (3.31) nel sistema da verificare, ovvero

$$[\Psi_q''(\{q_0\}, t_0)] \{\dot{q}_0\} = \{b_0''\}$$

e tenendo presente la definizione di $\{\hat{b}_0''\}$ data in (3.30), si ottiene:

$$[\Psi_q''(\{q_0\}, t_0)] \{\hat{b}_0''\} + [\Psi_q''(\{q_0\}, t_0)] [Q_2] \{\dot{z}\} = \{b_0''\} . \quad (3.32)$$

Considerando che

$$\begin{aligned} \{\hat{b}_0''\} &= [Q_1] \left([T]^T \right)^{-1} \{b_0''\} , \\ [\Psi_q''] &= [T]^T [Q_1]^T , \end{aligned}$$

l'espressione precedente diviene

$$[T]^T [Q_1]^T [Q_1] \left([T]^T \right)^{-1} \{b_0''\} + [T]^T [Q_1]^T [Q_2] \{\dot{z}\} = \{b_0''\} . \quad (3.33)$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} [T]^T [Q_1]^T [Q_1] \left([T]^T \right)^{-1} &= [I] \\ [Q_1]^T [Q_2] &= [0] , \end{aligned}$$

la (3.29) risulta così essere verificata.

Verifica del secondo sistema

Sostituendo la soluzione proposta (3.31) nel sistema da verificare, ovvero

$$[Q_1]^T \{\dot{q}_0\} = \{\hat{b}_0''\}$$

si ottiene:

$$[Q_1]^T [Q_1] \{\hat{b}_0''\} + [Q_1]^T [Q_2] \{\dot{z}\} = \{\hat{b}_0''\} . \quad (3.34)$$

Considerando le proprietà della matrice $[Q]$ precedentemente discusse, anche la (3.30) risulta essere verificata.

Dalle precedenti verifiche si vede come il vettore $\{\dot{z}\}$ non contribuisca mai alla soluzione, in quanto si trova sempre moltiplicato per una matrice identicamente nulla. Questo giustifica il nome di *velocità indipendenti* e fa sì che gli elementi del vettore siano effettivamente liberi, possano cioè essere scelti arbitrariamente.

3.3 Metodo di aggiornamento della base del kernel

La matrice $[Q_2]$, quindi una base ortogonale del kernel della matrice Jacobiana ridotta, può essere ricavata ad ogni tempo t di simulazione decomponendo la matrice Jacobiana stessa. Non essendone però garantita l'unicità, non è numericamente semplice garantirne la continuità. Inoltre gli algoritmi di decomposizione QR reperibili, seppur molto robusti ed affidabili, non danno alcuna indicazione al riguardo.

Si sceglie, quindi, analogamente a quanto proposto da Kim e Vanderploeg [13], di seguire quanto possibile uno schema di aggiornamento del kernel che ne mantenga la continuità direzionale.

Nel corso della simulazione, però, come descritto più avanti, sarà di quando in quando necessario procedere nuovamente alla decomposizione della matrice Jacobiana, da cui seguirà una nuova base per il kernel, data dalle nuove colonne di $[Q_2]$.

Il vettore velocità al tempo t può essere immaginato come somma delle sue proiezioni sui sottospazi, tra loro ortogonali, individuati dalle colonne di

$[Q_1]$ e $[Q_2]$, rispettivamente, ovvero:

$$\{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} [Q_1] & [Q_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{c}\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix}. \quad (3.35)$$

Al tempo t le velocità devono anche soddisfare le relazioni di vincolo

$$[\Psi''_q] \{\dot{q}\} = \{b''\}. \quad (3.36)$$

Sostituendo la (3.35) nella (3.36) si ottiene

$$[\Psi''_q] [Q_1] \{\dot{c}\} + [\Psi''_q] [Q_2] \{\dot{z}\} = \{b''\} \quad (3.37)$$

dove è importante notare che le matrici $[Q_1]$ e $[Q_2]$ sono calcolate al tempo t_0 , mentre le altre quantità si riferiscono al tempo t .

Se il rango della matrice Jacobiana non cambia⁴ da t_0 a t , la matrice $[\Psi''_q] [Q_1]$ è una matrice quadrata, di dimensioni $(r \times r)$ non singolare e ben condizionata. È quindi possibile esplicitare il vettore $\{\dot{c}\}$:

$$\{\dot{c}\} = ([\Psi''_q] [Q_1])^{-1} (\{b''\} - [\Psi''_q] [Q_2] \{\dot{z}\}). \quad (3.38)$$

⁴La variazione del rango della matrice Jacobiana, è però fortemente condizionata dal valore di soglia scelto per effettuarne il calcolo.

Definendo quindi⁵

$$[\hat{Q}_1] = [Q_1] ([\Psi''_q] [Q_1])^{-1} \quad (3.39)$$

$$[\hat{Q}_2] = [Q_2] - [\hat{Q}_1] [\Psi''_q] [Q_2] , \quad (3.40)$$

e sostituendo la (3.38) nella (3.35) si ottiene

$$\{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} [Q_1] & [Q_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ([\Psi''_q] [Q_1])^{-1} (\{b''\} - [\Psi''_q] [Q_2] \{\dot{z}\}) \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

da cui, con alcuni passaggi, si ricava

$$\begin{aligned} \{\dot{q}\} &= [Q_1] ([\Psi''_q] [Q_1])^{-1} (\{b''\} - [\Psi''_q] [Q_2] \{\dot{z}\}) + [Q_2] \{\dot{z}\} \\ &= [\hat{Q}_1] \{b''\} + [Q_2] \{\dot{z}\} - [\hat{Q}_1] [\Psi''_q] [Q_2] \{\dot{z}\} \\ &= [\hat{Q}_1] \{b''\} + [\hat{Q}_2] \{\dot{z}\} \end{aligned}$$

che, in forma più compatta, si scrive

$$\{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1] & [\hat{Q}_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b''\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} . \quad (3.42)$$

⁵Per il calcolo di $[\hat{Q}_1]$ è possibile evitare il calcolo esplicito della matrice inversa. La (3.39) può essere riscritta come

$$([\Psi''_q] [Q_1])^T [\hat{Q}_1]^T = [Q_1]^T$$

La precedente può essere vista come un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti $([\Psi''_q] [Q_1])^T$ è associata a più vettori dei termini noti, ovvero le colonne di $[Q_1]^T$. Il vantaggio computazionale di questa lettura è chiaro quando si nota che è sufficiente effettuare una sola decomposizione LU della matrice dei coefficienti per risalire alle soluzioni dei sistemi associati ad ogni vettore di termini noti, e quindi alle colonne della matrice $[\hat{Q}_1]^T$. Trasponendo quest'ultima, si ricava la matrice cercata.

Relazione sulle accelerazioni

Derivando la (3.42) rispetto al tempo, si ottiene la relazione che permette di risalire alle accelerazioni generalizzate. Riscrivendo infatti la (3.42) come

$$\{\dot{q}\} = -[\hat{Q}_1] [\bar{I}] [Z] [P]^T \{\Psi_t\} + [\hat{Q}_2] \{\dot{z}\} \quad (3.43)$$

dove $[\bar{I}]$ è una matrice $(r \times n)$ avente elementi pari ad 1 sulla diagonale principale e 0 altrove, e derivandola rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{\dot{q}\} &= \frac{d}{dt} \left(-[\hat{Q}_1] [\bar{I}] [Z] [P]^T \{\Psi_t\} + [\hat{Q}_2] \{\dot{z}\} \right) \\ &= [\hat{Q}_1] [\bar{I}] [Z] [P]^T \frac{d}{dt} (-\{\Psi_t\}) + [\hat{Q}_2] \frac{d}{dt} \{\dot{z}\} \\ &= [\hat{Q}_1] [\bar{I}] [Z] [P]^T (-[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\}) + [\hat{Q}_2] \{\ddot{z}\} \end{aligned}$$

Che, con le posizioni

$$\{a\} = -[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\} , \quad (3.44)$$

$$\{a''\} = [\bar{I}] [Z] [P]^T \{a\} \quad (3.45)$$

diventa

$$\{\ddot{q}\} = \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1] & [\hat{Q}_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a''\} \\ \{\ddot{z}\} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

dove $\{\ddot{z}\}$ rappresenta il vettore delle accelerazioni indipendenti, avente dimensione pari al numero di gradi di libertà del sistema, cioè pari a $(n - r)$.

3.3.1 Proprietà della matrice $[\hat{Q}]$

La matrice $[\hat{Q}_1]$ è la *inversa destra* della matrice Jacobiana ridotta, che è in generale rettangolare:

$$[\Psi''_q] [\hat{Q}_1] = [\Psi''_q] [Q_1] ([\Psi''_q] [Q_1])^{-1} = [I]_{r \times r} . \quad (3.47)$$

Inoltre è anche una base delle colonne di $[\Psi_q'']^T$ al tempo t_0 , poiché

$$\text{span} \left([Q_1] ([\Psi_q''] [Q_1])^{-1} \right) \in \text{span}([Q_1]) .$$

Le colonne della matrice $[\hat{Q}_2]$ definiscono invece la base del kernel della matrice Jacobiana ridotta aggiornata al tempo t , senza però incorrere nei problemi di continuità che si avrebbero con una nuova decomposizione:

$$[\Psi_q''] [\hat{Q}_2] = [\Psi_q''] [Q_2] - [\Psi_q''] [\hat{Q}_1] [\Psi_q''] [Q_2] = [0]_{r \times (n-r)} . \quad (3.48)$$

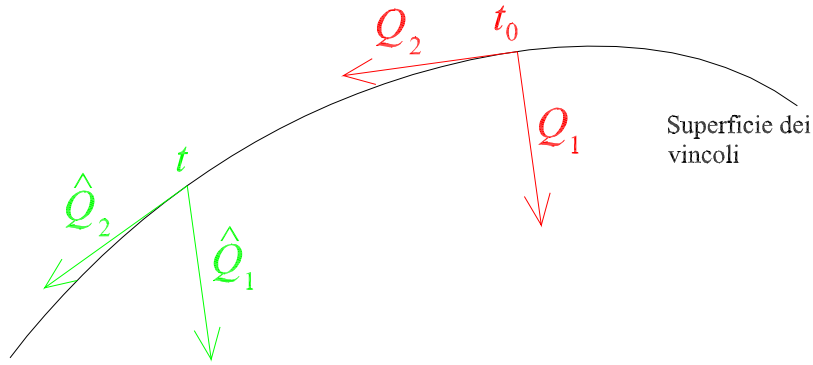


Figura 3.1: Interpretazione geometrica dei sottospazi $[\hat{Q}_1]$ e $[\hat{Q}_2]$

In figura 3.1 viene riportata una interpretazione geometrica nel piano dei sottospazi individuati da $[\hat{Q}_1]$ e $[\hat{Q}_2]$. È importante mettere in evidenza, come si vede dalla figura, che il primo rimane *parallelo*⁶ al sottospazio individuato dalle colonne di $[Q_1]$, mentre il secondo rimane tangente alla superficie dei vincoli. I due sottospazi non sono quindi, in generale, ortogonali tra loro, ovvero $[\hat{Q}_1]^T [\hat{Q}_2] \neq [0]$.

⁶In realtà, le colonne di $[\hat{Q}_1]$ sono una base del sottospazio individuato dalle colonne di $[Q_1]$, non di uno spazio ad esso affine, come si potrebbe essere portati a pensare osservando la figura.

3.3.2 Criteri per determinare quando decomporre nuovamente la matrice Jacobiana

Col procedere della simulazione dal tempo t_0 in cui era stata calcolata la matrice ortogonale $[Q]$, i sottospazi effettivi della matrice Jacobiana possono scostarsi eccessivamente da quelli definiti dalla matrice $[Q]$ stessa. È dunque necessario individuare un criterio per determinare quando sia necessario procedere con una nuova decomposizione.

Notando che quando cambia il rango della matrice Jacobiana o quando uno dei vettori di base del suo spazio delle righe giace sul kernel $[Q_2]$ la matrice $[\Psi''_q][Q_1]$ diventa singolare, si può individuare un criterio generale basato sul controllo del numero di condizione di tale matrice. Quando questo diventa *troppo grande* si procede con una nuova decomposizione.

Nel caso in cui le equazioni di vincolo non siano esplicitamente dipendenti dal tempo, la componente normale della velocità, $\{\dot{c}\}$, si annulla. Notando che $\{\dot{q}\}^T \{\dot{q}\} = \{\dot{c}\}^T \{\dot{c}\} + \{\dot{z}\}^T \{\dot{z}\}$, essendo $\{\dot{z}\}$ la componente di velocità tangente alla superficie dei vincoli, l'allontanamento del kernel attuale da $[Q_2]$ può essere identificato dal parametro

$$\alpha = \frac{\{\dot{z}\}^T \{\dot{z}\}}{\{\dot{q}\}^T \{\dot{q}\}}. \quad (3.49)$$

Quando α scende sotto un prefissato valore, la matrice Jacobiana viene nuovamente decomposta. Non è superfluo notare che $\alpha \leq 1$, e che un valore del parametro esattamente pari all'unità implica che la matrice Jacobiana venga decomposta ad ogni passo temporale.

3.4 Equazioni del moto in forma di stato

In questa sezione vengono proposte due differenti metodologie che permettono di eliminare le reazioni vincolari dalle equazioni del moto per mezzo della matrice $[\hat{Q}]$ precedentemente introdotta. Il primo passo da compiere per entrambe le formulazioni è quello di dedurre l'equazione del moto in forma ridotta, eliminando cioè i vincoli sovrabbondanti. La differenza risiede nel modo in cui tale sistema ridotto viene formulato:

- mediante le accelerazioni indipendenti $\{\ddot{z}\}$ precedentemente dedotte, nel primo caso;
- mediante un set minimo di coordinate (pari al numero di g.d.l. del sistema), nel secondo.

3.4.1 Equazione del moto in forma ridotta

L'equazione del moto di Lagrange per un sistema vincolato si scrive

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} = \{g\} . \quad (3.50)$$

Dalla (3.14) discende, per semplice inversione:

$$[\Psi'_q]^T = [\Psi_q]^T [P] [Z]^T \Rightarrow [\Psi_q]^T = [\Psi'_q]^T [Z] [P]^T \quad (3.51)$$

che, sostituita nella (3.50) fornisce

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi'_q]^T [Z] [P]^T \{\lambda\} = \{g\} . \quad (3.52)$$

Sapendo che, come mostrato in precedenza,

$$[\Psi'_q]^T = [[\Psi''_q]^T \quad [0]] \quad (3.53)$$

e definendo

$$\{\lambda'\} \equiv [Z][P]^T \{\lambda\}^7 \quad (3.54)$$

si arriva alla relazione

$$[M] \{\ddot{q}\} + [[\Psi_q'']^T \ [0]] \begin{Bmatrix} \{\lambda'_1\} \\ \{\lambda'_2\} \end{Bmatrix} = \{g\} \quad (3.55)$$

dove $\{\lambda'_1\}$ è un vettore di dimensione r formato dai primi r elementi di $\{\lambda'\}$, mentre $\{\lambda'_2\}$ è un vettore di dimensione $(m - r)$ formati dagli elementi restanti, tutti nulli a seguito della trasformazione introdotta da $[Z]$. Dalla (3.55) si ottiene l'equazione del moto in forma ridotta, dove cioè sono stati eliminati i vincoli sovrabbondanti:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q'']^T \{\lambda'_1\} = \{g\} \quad (3.56)$$

3.4.2 Ortogonalizzazione dei vincoli

Premoltiplicando la (3.56) per $[\hat{Q}]^T$ e ricordando le proprietà (3.47) e (3.48) si ha:

$$\begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T \\ [\hat{Q}_2]^T \end{bmatrix} [M] \{\ddot{q}\} = \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T \\ [\hat{Q}_2]^T \end{bmatrix} \{g\} - \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T \\ [\hat{Q}_2]^T \end{bmatrix} [\Psi_q'']^T \{\lambda'_1\} ,$$

quindi

$$\begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T [M] \{\ddot{q}\} \\ [\hat{Q}_2]^T [M] \{\ddot{q}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T \{g\} \\ [\hat{Q}_2]^T \{g\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\hat{Q}_1]^T [\Psi_q'']^T \\ [\hat{Q}_2]^T [\Psi_q'']^T \end{bmatrix} \{\lambda'_1\} ,$$

che può essere riscritta come

$$\begin{cases} [\hat{Q}_1]^T [M] \{\ddot{q}\} = [\hat{Q}_1]^T \{g\} - \{\lambda'_1\} \\ [\hat{Q}_2]^T [M] \{\ddot{q}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} \end{cases}$$

⁷Sia $\{\lambda\}$ che $\{\lambda'\}$ sono vettori a m elementi

ovvero

$$\begin{cases} \{\lambda'_1\} = [\hat{Q}_1]^T (\{g\} - [M] \{\ddot{q}\}) \\ [\hat{Q}_2]^T [M] \{\ddot{q}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} \end{cases} \quad (3.57)$$

3.4.3 Formulazione mediante le accelerazioni indipendenti

Sostituendo l'equazione delle accelerazioni (3.46) nella seconda delle (3.57) si ottiene:

$$[\hat{Q}_2]^T [M] \left([\hat{Q}_1] \{a''\} + [\hat{Q}_2] \{\ddot{z}\} \right) = [\hat{Q}_2]^T \{g\} \quad (3.58)$$

da cui

$$[\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_1] \{a''\} + [\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_2] \{\ddot{z}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} \quad (3.59)$$

che, con le posizioni

$$[\hat{M}] = [\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_2] \quad (3.60)$$

$$[M'] = [\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_1] \quad (3.61)$$

e ricordando la definizione di $\{a''\}$ data nella (3.45), diventa

$$[\hat{M}] \{\ddot{z}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} - [M'] [\bar{I}] [Z] [P]^T (-[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\}) \quad (3.62)$$

Ricordando inoltre, come trovato in (3.42), che

$$\{\dot{q}\} = [\hat{Q}] \begin{Bmatrix} \{b''\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

e con la posizione

$$[M''] = [M'] [\bar{I}] [Z] [P]^T \quad (3.64)$$

⁸Poiché la matrice delle masse generalizzata $[M]$ è definita positiva e le colonne di $[\hat{Q}_2]$ sono tra loro linearmente indipendenti, anche la matrice $[\hat{M}]$ risulta definita positiva.

si può costruire il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [-[M''] [\Psi_{qt}]] & [\hat{M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\hat{Q}] \begin{Bmatrix} \{b''\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} \\ [M''] \{\Psi_{tt}\} + [\hat{Q}_2]^T \{g\} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

È importante notare che la matrice dei coefficienti al primo membro della (3.65) è quadrata di dimensioni $((2n - r) \times (2n - r))$, triangolare a blocchi e con i blocchi sulla diagonale definiti positivi, ed è quindi sempre ben condizionata. Nel caso particolare in cui i vincoli non siano esplicitamente dipendenti dal tempo, $[\Psi_{qt}] = [0]$, la matrice dei coefficienti diventa diagonale a blocchi. Dalla risoluzione del sistema (3.65) si possono ottenere direttamente le posizioni $\{q\}$, le velocità $\{\dot{q}\}$, come uscita dell'integratore utilizzato o per mezzo delle velocità indipendenti $\{\dot{z}\}$, le accelerazioni $\{\ddot{q}\}$ mediante la (3.46), essendo ormai calcolabile il vettore $\{\dot{z}\}$, ed infine, se richiesti, i moltiplicatori di Lagrange.

È molto importante mettere in evidenza come l'algoritmo possa procedere con la simulazione senza mai calcolare le accelerazioni $\{\ddot{q}\}$, essendo sufficienti le accelerazioni indipendenti per il passaggio allo step di integrazione successivo.

Il sistema differenziale in (3.65) non descrive però *globalmente* il sistema meccanico in esame, ma ne fornisce solamente una rappresentazione *locale*. Per questo motivo non è possibile lasciare all'integratore ODE il compito di calcolare l'intera soluzione dall'istante iniziale a quello finale, ma è necessario intervenire dopo ogni step temporale per correggere la soluzione ottenuta e modificare il sistema differenziale stesso, con lo scopo di far rientrare l'errore al di sotto di una specifica tolleranza. Questo aspetto verrà approfondito

in seguito, quando verrà discussa l'implementazione della metodologia sopra proposta.

3.4.4 Formulazione mediante un set minimo di coordinate

Con riferimento a quanto riportato nel paragrafo 2.2, si introduce una matrice $[B]$, avente le righe indipendenti dalle righe del Jacobiano ridotto $[\Psi''_q]$, tale che

$$\{\dot{p}\} = [B] \{\dot{q}\} . \quad (3.66)$$

Inoltre deve essere soddisfatta la

$$\begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix} \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} -\{\Psi''_t\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \{\dot{q}\} &= \begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\{\Psi''_t\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} = [[S] [V]] \begin{Bmatrix} -\{\Psi''_t\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} = \\ &= -[S] \{\Psi''_t\} + [V] \{\dot{p}\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dalla precedente si può dedurre

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix} [[S] [V]] = \\ &= \begin{bmatrix} [\Psi''_q] [S] [\Psi''_q] [V] \\ [B] [S] [B] [V] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] [0] \\ [0] [I] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dal confronto della precedente con le proprietà (3.47) e (3.48) si ricava ⁹

$$[S] = [\hat{Q}_1] \quad (3.70)$$

$$[V] = [\hat{Q}_2] \quad (3.71)$$

$$[B] = [\hat{Q}_2]^T \quad (3.72)$$

Una relazione sulle accelerazioni può essere ricavata differenziando rispetto al tempo la (3.67). Così facendo si ottiene

$$\begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\gamma''\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

dove ¹⁰

$$\{\gamma''\} = [\bar{I}] [Z] [P]^T \{\gamma\} \quad (3.74)$$

e

$$\{\gamma\} = -([\Psi_q] \{\dot{q}\})_q \{\dot{q}\} - 2[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\} . \quad (3.75)$$

Dalla definizione di $[S]$ e $[V]$ le accelerazioni possono essere quindi ottenute come

$$\{\ddot{q}\} = [S] \{\gamma''\} + [V] \{\ddot{p}\} = [\hat{Q}_1] \{\gamma''\} + [\hat{Q}_2] \{\ddot{p}\} . \quad (3.76)$$

Integrando rispetto al tempo la (3.66) si può ricavare la relazione che lega le posizioni in termini di coordinate generalizzate e coordinate indipendenti. Si

⁹In precedenza si era detto che $[\hat{Q}_2]^T [\hat{Q}_1] \neq 0$. Nonostante ciò, nella pratica computazionale, se la decomposizione QR viene svolta abbastanza spesso e il passo di integrazione è sufficientemente piccolo, la differenza tra la matrice $[S]$, formata esattamente dalle prime r colonne di $\begin{bmatrix} [\Psi''_q] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1}$, e la matrice $[\hat{Q}_1]$ è numericamente trascurabile. Inoltre, utilizzando quest'ultima, si evita il calcolo esplicito dell'inversa di una matrice $(n \times n)$, con i conseguenti benefici dal punto di vista della velocità e della stabilità della simulazione.

¹⁰Come detto in precedenza, la matrice $[\bar{I}]$ estrae le prime righe della matrice a cui viene premoltiplicata

ottiene quindi

$$\{p\} = [B] (\{q\} + \{\bar{q}\}) \quad (3.77)$$

dove il vettore di costanti di integrazione $\{\bar{q}\}$ può essere facilmente valutato prima di ogni step di calcolo a partire dai valori delle coordinate $\{q\}$. Si hanno a questo punto tutti gli strumenti necessari per poter arrivare ad una formulazione in forma di stato delle equazioni del moto del sistema. L'ortogonalizzazione dei vincoli aveva portato alla relazione (3.57), che viene di seguito riscritta

$$\begin{cases} \{\lambda_1\} = [\hat{Q}_1]^T (\{g\} - [M] \{\ddot{q}\}) \\ [\hat{Q}_2]^T [M] \{\ddot{q}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} \end{cases} .$$

La seconda equazione del precedente sistema può essere riscritta in funzione del set minimo di variabili $\{p\}$ anziché dell'insieme completo di coordinate generalizzate $\{q\}$. Sostituendo, infatti, la (3.76) nella seconda delle (3.57) si ottiene

$$[\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_2] \{\ddot{p}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} - [\hat{Q}_2]^T [M] [\hat{Q}_1] \{\gamma''\} \quad (3.78)$$

che, con le posizioni (3.60) e (3.61), si riscrive in forma più compatta come

$$[\hat{M}] \{\ddot{p}\} = [\hat{Q}_2]^T \{g\} - [M'] \{\gamma''\} . \quad (3.79)$$

Questa è la formulazione cercata. Integrando due volte, infatti, a partire da condizioni iniziali sulle $\{p\}$ immediatamente ricavabili da quelle sulle $\{q\}$, si ottengono $\{p\}$, $\{\dot{p}\}$ e di conseguenza $\{\ddot{p}\}$ al passo temporale successivo. Da queste si ricavano, sfruttando le relazioni sopra riportate, le posizioni, velocità e accelerazioni in termini di coordinate generalizzate $\{q\}$. Dopo aver aggiornato, quindi, la matrice Jacobiana, il vettore $\{\gamma\}$ e tutto ciò che dipende dalle coordinate generalizzate e dal tempo, si costruisce un nuovo sistema

di equazioni differenziali (3.79), con nuove condizioni al contorno, e si procede integrando per un altro passo temporale.

È importante notare che il sistema di equazioni differenziali (3.79) ha un numero di equazioni pari ai gradi di libertà del sistema, quindi minore di quante se ne avrebbero se si considerassero tutte le coordinate generalizzate e comunque minore della soluzione basata sulle accelerazioni indipendenti.

CAPITOLO 4

Il codice

Nel presente capitolo vengono descritte le caratteristiche principali del codice NumDyn3D (acronimo dell'inglese Numerical Dynamic 3D System). L'obiettivo principale da perseguire era quello di realizzare un codice *general purpose* per l'analisi dinamica, mediante approccio multibody, di sistemi spaziali di corpi rigidi vincolati. Il codice venne per la prima volta implementato in linguaggio Fortran nel 2001 [18], ed utilizzato per l'analisi del comfort vibrazionale per gli occupanti di autoveicoli [19]. Il limite maggiore di questa prima versione risultava nell'impossibilità di gestire sistemi con vincoli sovrabbondanti. Per questo motivo nel 2003 si aggiornò il codice [20], implementando tutte le metodologie teoriche sviluppate nel Capitolo 3 e migliorandone le prestazioni computazionali.

4.1 Interfaccia utente

Il codice NumDyn3D si interfaccia ad un utilizzatore tramite delle *card*, ovvero dei file di testo formattati in maniera tale da contenere tutte le informazioni necessarie al codice per svolgere la simulazione.

Per rendere più agevole la creazione e la modifica di tutte la card è stato sviluppato il programma *Card Manager* cui si farà riferimento durante la descrizione del contenuto di ogni file.

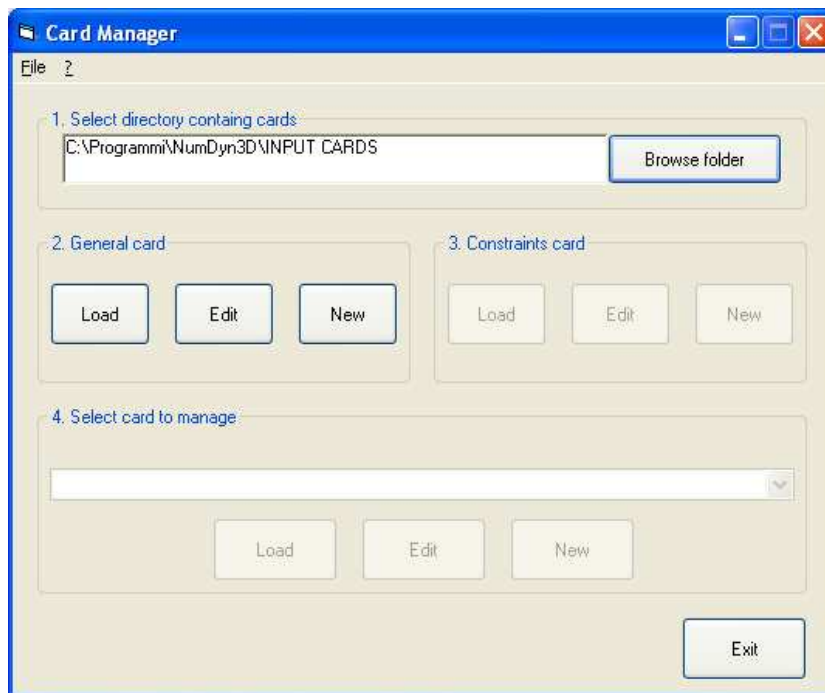
4.2 Descrizione delle card di dati

Come anticipato, il codice NumDyn3D riceve i dati di ingresso tramite dei file di testo, dall'estensione `.s3d`, chiamati *card*, generabili sia mediante un qualsiasi editor di testo, sia mediante una più comoda interfaccia grafica.

Il programma *Card Manager* è stato sviluppato in Visual Basic 6, per sfruttarne le potenzialità nel generare agevolmente un ambiente grafico con gestione degli eventi del sistema operativo. La lettura delle card già esistenti, però, viene effettuata richiamando le stesse routine Fortran implementate in NumDyn3D, tramite una DLL scritta appositamente per interfacciarsi al Visual Basic. Questo garantisce che le informazioni lette da file e visualizzate all'interno di *Card Manager* siano esattamente le stesse che verranno poi lette dal codice Multibody, scavalcando gli eventuali problemi di formato dei file di testo e di impostazioni internazionali nella rappresentazione dei numeri.

La finestra principale (Figura 4.1) del programma consente di selezionare la directory dove sono presenti o si vogliono salvare le card relative al progetto corrente e successivamente di gestire tutte le informazioni necessarie al NumDyn3D per eseguire la simulazione.

L'utente viene guidato ad inserire i dati in un preciso ordine, per quanto riguarda le prime due card. Infatti inizialmente permette di lavorare solo sulla card *General*, in cui, tra le altre cose, vengono definiti il numero e il nome di tutti i corpi che costituiscono il sistema meccanico da simulare. Una volta creata o caricata da disco questa, si passa alla definizione della topologia

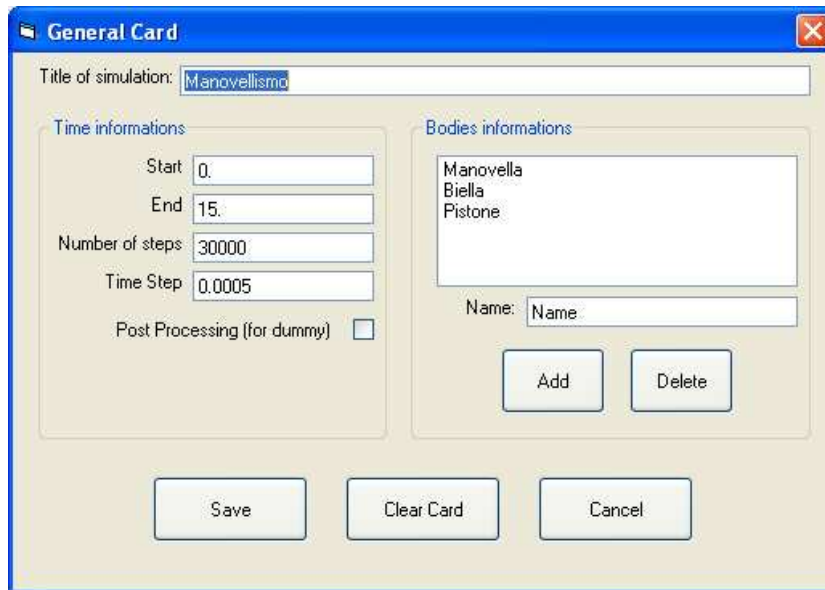
Figura 4.1: *Card Manager*: Finestra Principale

del sistema, assegnata tramite le coppie cinematiche presenti tra i vari corpi. Tutte le altre card, invece, possono essere definite senza dover seguire alcun ordine prestabilito.

4.2.1 La card *General.s3d*

In questa card vengono definiti il titolo, istante iniziale e finale della simulazione, il numero di linee di output che si vogliono ottenere, a intervalli costanti tra di esse, l'eventuale post processing dei dati calcolati ed il nome di tutti i corpi che costituiscono il meccanismo.

Come si vede in Figura 4.2, possono essere impostati sia il numero di intervalli di tempo, sia la lunghezza di ogni intervallo. Sulla card, in ogni caso, è presente solo il numero degli intervalli.

Figura 4.2: *Card Manager*: Card General

Di seguito si riporta il contenuto del file `General.s3d` come generato a partire dai dati riportati in Figura 4.2. Va notato che il numero identificativo dei diversi corpi deve essere progressivo e cominciare da 1. Nelle altre card, dove necessario, con l'identificativo 0 verrà indicato il telaio.

General.s3d

```

Manovellismo
NB          3
TI          0.
TE          15.
ST          30000
PP N
ID |        BODY NAME
  1 |        Manovella
  2 |        Biella
  3 |        Pistone

```

4.2.2 La card *Connection.s3d*

In questa card viene definita la topologia del sistema meccanico attraverso la definizione di tutte le coppie cinematiche esistenti tra i diversi corpi costituenti il meccanismo. Le informazioni vengono lette tramite una matrice, detta di connettività, in cui ogni riga rappresenta una coppia cinematica, mentre le colonne sono, nell'ordine, un identificativo della coppia, gli identificativi dei due corpi da essa collegati, il tipo di coppia cinematica (e.g. rotoidale, prismatica, etc.), le coordinate dei punti P , Q ed R che individuano univocamente il riferimento del giunto su ogni corpo, come descritti nel paragrafo 1.2.1.

L'interfaccia grafica, però, consente di introdurre per ogni tipo di coppia il numero minimo di informazioni significative, generando poi automaticamente le eventuali informazioni mancanti. Ad esempio, nel caso di coppia rotoidale, basta definire su ogni corpo il centro del riferimento del giunto e la direzione dell'asse di rotazione, non necessariamente normalizzato, entrambi nel sistema di riferimento locale del corpo stesso. È poi il programma ad occuparsi di normalizzare il vettore dell'asse di rotazione, a calcolare un qualsiasi versore ad esso ortogonale ed infine a traslare entrambi nel centro del riferimento del giunto, ottenendo così i tre punti cercati a partire da dati di più facile individuazione da parte dell'utente.

Non sempre è stato possibile ridurre la quantità di informazioni necessarie, come nel caso della coppia prismatica, e rimane comunque possibile modificare o creare la card di input attraverso un editor di testo. Di seguito si illustrano i moduli per l'inserimento di informazioni di ogni tipo di coppia.

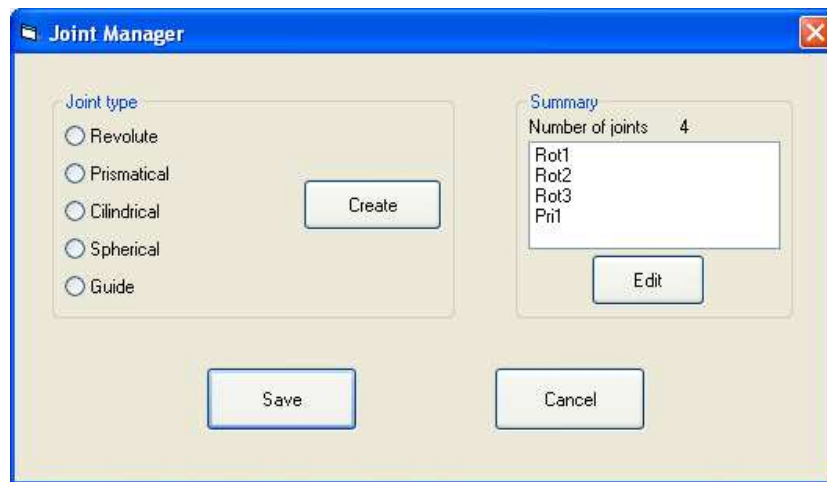


Figura 4.3: *Card Manager*: Finestra principale di gestione delle coppie cinematiche

Finestra principale

La Figura 4.3 fa riferimento alle coppie cinematiche presenti nel progetto definito nella card *General*. Le quattro coppie necessarie a definire la topologia di un manovellismo di spinta sono state già inserite. È inoltre possibile sia modificare quelle già esistenti, sia crearne delle altre.

Coppia rotoidale

Come si vede dalla Figura 4.4, assegnato un nome alla coppia, attraverso due menù a tendina si possono scegliere i due corpi collegati. Successivamente, nei rispettivi riquadri individuati dal nome del corpo, bisogna introdurre il centro del riferimento del giunto (punto P) e la direzione dell'asse di rotazione, entrambi naturalmente nel sistema di riferimento locale. Verranno così generate automaticamente le coordinate dei punti Q e R definiti nel paragrafo 1.2.1 richiesti in ingresso dal NumDyn3D.

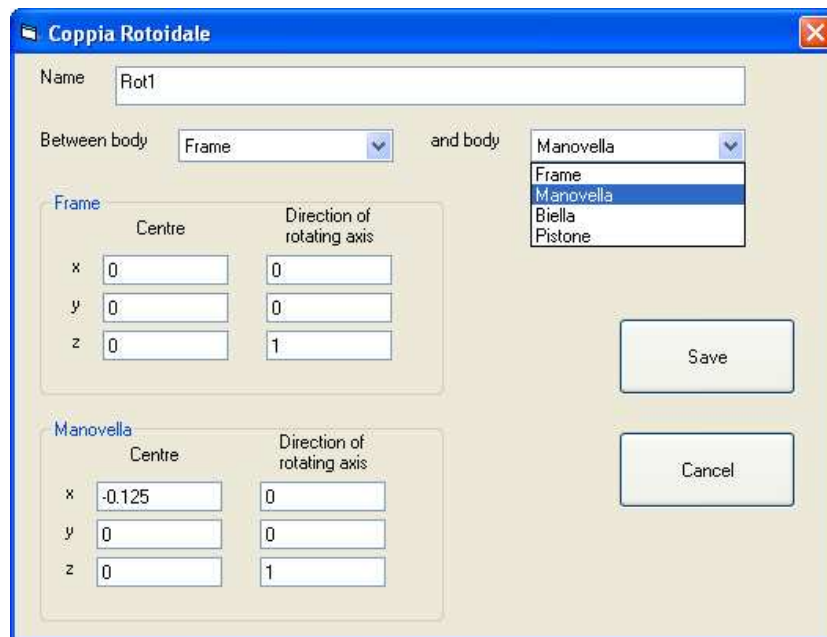


Figura 4.4: *Card Manager*: Finestra di gestione della coppia rotoidale

Coppia prismatica

In questo caso non è possibile ridurre il numero di informazioni necessarie al fine di individuare interamente la coppia prismatica. Si è preferito quindi far riferimento alla definizione di riferimento del giunto data nel paragrafo 1.2.1, chiedendo all'utente l'introduzione, per entrambi i corpi collegati dalla coppia, dei punti P , Q ed R come precedentemente specificati.

Coppia cilindrica

Nel progetto relativo al manovellismo di spinta che si sta utilizzando come esempio non è presente alcuna coppia cilindrica. I dati richiesti all'utente, però, come appare chiaro in figura 4.6, sono gli stessi richiesti per una coppia rotoidale. Quello che cambia è il gruppo di equazioni di vincolo associate a questa coppia e generate automaticamente dal NumDyn3D.

Coppia prismatica			
Name	Pri1		
Between body	Pistone	and body	Frame
Pistone			
	P	Q	R
x	0	1	0
y	0	0	0
z	0	0	1
Frame			
	P	Q	R
x	0.5	1.5	0.5
y	0	0	-1
z	0	0	0

Figura 4.5: *Card Manager*: Finestra di gestione della coppia prismatica

Coppia sferica

Anche questa coppia non è presente nel manovellismo di spinta in esame. Viene comunque richiesto all'utente di introdurre, nei rispettivi sistemi di riferimento locali dei due corpi collegati, solamente le coordinate del centro della coppia.

Guida

Anche questa coppia non è presente nel manovellismo di spinta in esame. All'utente viene richiesto di introdurre le coordinate del centro della sfera per un corpo, le coordinate di un punto sull'asse della guida e la direzione dell'asse stesso per l'altro, tutto naturalmente nei rispettivi sistemi di riferimento locali.

Cylindrical Joint

Name

Between body and body

Body 1

	Centre	Direction of rotating axis
x	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
y	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
z	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>

Body 2

	Centre	Direction of rotating axis
x	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
y	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
z	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>

Salva

Annulla

Figura 4.6: *Card Manager*: Finestra di gestione della coppia cilindrica

Spherical Joint

Name

Between body and body

Body 1

	Centre
x	<input type="text" value="0"/>
y	<input type="text" value="0"/>
z	<input type="text" value="0"/>

Body 2

	Centre
x	<input type="text" value="0"/>
y	<input type="text" value="0"/>
z	<input type="text" value="0"/>

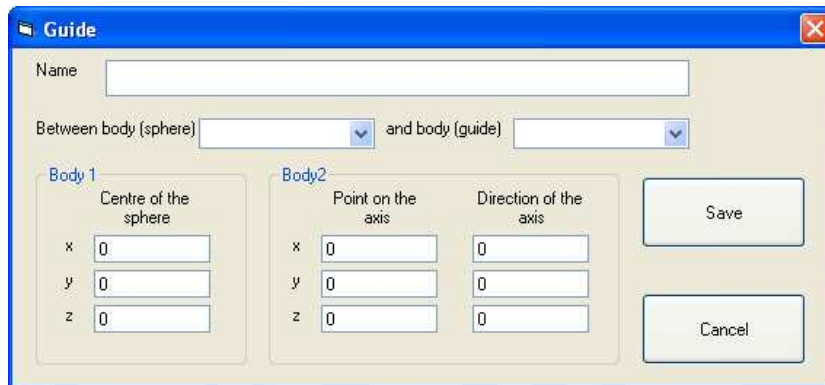
Save

Cancel

Figura 4.7: *Card Manager*: Finestra di gestione della coppia sferica

Esempio di file di input

Con i dati introdotti per tutte le coppie cinematiche presenti nel meccanismo in esame viene generata la card di seguito riportata.

Figura 4.8: *Card Manager*: Finestra di gestione della guida

Connection.s3d

NumDyn3D ver. 7.0a

!Kinematic pairs

begin(1)

name=Rot1

type=1

body1=0

body2=1

P1=0. 0. 0.

Q1=0. 0. 1.

R1=0.70710678119 0.70710678119 0.

P2=-0.125 0. 0.

Q2=-0.125 0. 1.

R2=0.58210678119 0.70710678119 0.

end(1)

begin(2)

name=Rot2

type=1

body1=1

body2=2

P1=0.125 0. 0.

Q1=0.125 0. 1.

R1=0.83210678119 0.70710678119 0.

```
P2=-0.25  0.  0.
Q2=-0.25  0.  1.
R2=0.45710678119  0.70710678119  0.
end(2)

begin(3)
  name=Rot3
  type=1
  body1=2
  body2=3
  P1=0.25  0.  0.
  Q1=0.25  0.  1.
  R1=0.95710678119  0.70710678119  0.
  P2=0.04  0.  0.
  Q2=0.04  0.  1.
  R2=0.74710678119  0.70710678119  0.
end(3)

begin(4)
  name=Pri1
  type=2
  body1=3
  body2=0
  P1=0.  0.  0.
  Q1=1.  0.  0.
  R1=0.  0.  1.
  P2=0.5  0.  0.
  Q2=1.5  0.  0.
  R2=0.5  -1.  0.
end(4)
```

La struttura del file di testo è data da diversi blocchi `begin(i) ... end(i)`, all'interno di cui sono contenute tutte le informazioni relative alla coppia i -esima. In particolare, l'etichetta `name` identifica il nome della coppia, `type` identifica il tipo ¹, `body1` e `body2` corrispondono agli identi-

¹ I tipi di coppia cinematica riconosciuti sono gli stessi descritti sopra, in particolare: 1 Coppia rotoidale; 2 Coppia prismatica; 3 Coppia cilindrica; 4 Coppia sferica; 5 Guida.

ficativi dei corpi collegati dalla coppia, come definiti in `General.s3d`, P1, Q1 e R1 per il corpo identificato da `body1`, P2, Q2 e R2 per l'altro hanno il significato descritto nel paragrafo 1.2.1.

Ogni riga che inizia con il carattere ! viene considerata commento e non processata, così come non vengono considerate le righe vuote. Non è superfluo sottolineare il fatto che tutto il contenuto delle card è *case sensitive*.

4.2.3 La card *Inertial.s3d*

Con questa card vengono definite le caratteristiche inerziali di tutti i corpi costituenti il meccanismo, calcolate nel sistema di riferimento locale di ciascun corpo, che non deve necessariamente coincidere col sistema principale d'inerzia.

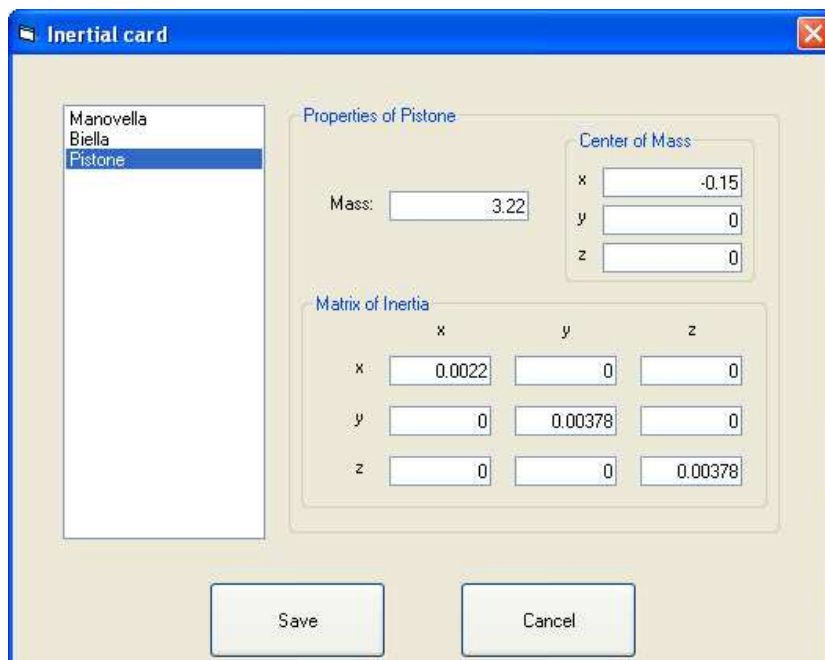


Figura 4.9: *Card Manager*: Finestra di gestione delle caratteristiche inerziali

Per ogni corpo definito nella card *General*, selezionandone il nome che compare nella lista a sinistra nel form, è possibile definire massa, tensore d'inerzia e posizione del baricentro nel sistema di riferimento locale. Il file generato, nel caso del sistema che si sta utilizzando come esempio, è di seguito riportato.

Inertial.s3d

```
NumDyn3D ver. 7.0a
!Matrici d'inerzia e masse....
begin(1)
mass=0.2
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.0000034 0. 0.
0. 0.001 0.
0. 0. 0.001
]
end(1)

begin(2)
mass=0.4
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.00000679 0. 0.
0. 0.008 0.
0. 0. 0.008
]
end(2)

begin(3)
mass=3.22
CoM=-0.15 0. 0.
inertia=[
0.0022 0. 0.
0. 0.00378 0.
0. 0. 0.00378
]
end(3)
```

Ogni riga che inizia con il carattere ! viene considerata commento e non processata, così come non vengono considerate le righe vuote.

In ogni gruppo `begin(i) ... end(i)` vengono inserite le caratteristiche inerziali del corpo i -esimo, nel suo sistema di riferimento locale. I numeri possono esseri espressi con quante cifre significative si voglia o in notazione scientifica, purché separati tra loro da almeno uno spazio, o una tabulazione, all'interno delle righe della matrice d'inerzia. Non è inoltre importante l'ordine in cui vengono inseriti i corpi, né genera errore l'eventuale presenza nel file di gruppi facenti riferimento a corpi non esistenti (es. `begin(4) ... end(4)` nell'esempio precedente), che vengono ignorati. Viene invece generato un errore nel caso in cui vengano omesse informazioni relative ad uno dei corpi dichiarati.

I valori seguenti l'etichetta `CoM` rappresentano le coordinate, x , y e z del centro di massa del corpo nel sistema di riferimento locale del corpo. Questa informazione viene utilizzata solamente dall'interfaccia grafica per la corretta determinazione della forza peso. Nel caso in cui sia omessa la riga contenente questa etichetta, vengono automaticamente considerati coincidenti il baricentro e l'origine del sistema di riferimento, ovvero $x = y = z = 0$.

4.2.4 La card *Force.s3d*

Questa card contiene informazioni riguardo le coppie e le forze esterne agenti sul sistema. Se sono presenti più forze, o coppie, agenti su uno stesso corpo, è sufficiente specificarle separatamente nella card, lasciando poi che sia `NumDyn3D` a sommarne gli effetti, istante per istante.

Figura 4.10: *Card Manager*: Finestra di gestione di forze e coppie

L'aggiunta di un'azione agente su di un corpo si effettua semplicemente selezionando il corpo, scegliendo se si tratta di una forza o di una coppia, definendo il sistema di riferimento in cui sono espresse le sue componenti (riferimento locale o globale), specificando le componenti del vettore forza o momento nel sistema di riferimento scelto, specificando le coordinate del punto di applicazione nel sistema di riferimento locale del corpo ed infine premendo il bottone => per aggiungerla alla lista sulla parte destra del form.

Selezionando inoltre in tale lista un'azione già inserita se ne visualizzano i dettagli, mentre premendo il bottone <= viene rimossa dalla lista ed è possibile, se si desidera, modificarla.

Un'altra caratteristica è la possibilità di aggiungere automaticamente l'azione della forza peso, selezionando l'apposita opzione nella parte bassa del

form e la direzione, nel sistema di riferimento globale, dell'accelerazione di gravità, di cui è inoltre possibile specificare un valore qualsiasi. L'aggiunta della forza peso genera nel file di testo l'aggiunta di tante righe quanti sono i corpi, corrispondenti ad una forza globale pari al prodotto della massa del corpo stesso per l'accelerazione di gravità specificata, nella direzione richiesta. Tali forze hanno nome **Grav1**, **Grav2**, ... e, nel caso la card venga caricata in un secondo momento da file per la modifica, compaiono come forze qualsiasi nella lista delle azioni già dichiarate.

La card generata con le impostazioni in Figura 4.10 viene qua di seguito riportata.

Force.s3d

```
NumDyn3D ver. 7.0a
! Forces and torques

begin(1)
  name=Coppia
  body=1
  type=1
  Fx=0
  Fy=0
  Fz=0
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=50*step(4-t)
  px=-0.125
  py=0
  pz=0
end(1)

begin(2)
  name=Grav1
  body=1
  type=1
  Fx=0
  Fy=0
```

```
Fz=-1.962
Tx=0
Ty=0
Tz=0
px=0.
py=0.
pz=0.
end(2)
```

```
begin(3)
  name=Grav2
  body=2
  type=1
  Fx=0
  Fy=0
  Fz=-3.924
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=0.
  py=0.
  pz=0.
end(3)
```

```
begin(4)
  name=Grav3
  body=3
  type=1
  Fx=0
  Fy=0
  Fz=-31.5882
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=-0.15
  py=0.
  pz=0.
end(4)
```

Il file di testo è costituito da una riga contenente la versione del programma per il quale è stato generato e da una sequenza di blocchi `begin(i) ... end(i)` contenenti tutte le informazioni necessarie per identificare correttamente la forza i -esima.

Ogni blocco è costituito da un campo `name` che identifica il nome della forza, o coppia, da un campo `body` che identifica il corpo sul quale agisce la sollecitazione, `type` che ne identifica il tipo (1 per sollecitazione espressa nel sistema di riferimento globale, 2 nel sistema locale), `Fx`, `Fy` e `Fz` che identificano le componenti del vettore forza nel sistema di riferimento scelto, `Tx`, `Ty` e `Tz` che identificano le componenti del vettore momento nel sistema di riferimento scelto, `px`, `py` e `pz` che identificano le coordinate del punto di applicazione della sollecitazione nel sistema di riferimento locale del corpo.

Una caratteristica interessante, che si evince dal file di testo sopra riportato, è la possibilità di assegnare leggi di variabilità qualsiasi a tutte le componenti della sollecitazione e alle coordinate del punto di applicazione. È possibile quindi introdurre forze o coppie variabili nel tempo o in funzione di posizione, velocità o accelerazione dei corpi²

La forza peso, infine, viene correttamente applicata nel baricentro di ogni corpo, le cui coordinate sono state inserite nella card riguardante le caratteristiche inerziali, come si vede dalla forza identificata dall'etichetta `Grav3`, generata automaticamente dall'interfaccia. Il pistone, infatti, è descritto in un sistema di riferimento locale la cui origine non coincide con il centro di massa.

Per quanto sia possibile specificare, in uno stesso blocco, un vettore for-

²Nel file di testo riportato come esempio, la prima sollecitazione è una coppia del valore di 50Nm che agisce per i primi 4 secondi di simulazione. Successivamente la funzione `step(4-t)` vale 0, quindi la sollecitazione si annulla.

za ed uno momento, l'interfaccia grafica consente l'introduzione di una sola azione alla volta. Questo non costituisce un limite, perché NumDyn3D è in grado di sommare azioni diverse agenti sullo stesso corpo, come scritto sopra. L'unica accortezza sta nell'aprire con *Card Manager* file scritti con un normale editor di testo, in quanto una delle due azioni presenti nella stessa riga verrebbe persa al momento del salvataggio.

4.2.5 La card *Initial Configuration.s3d*

Questa card contiene la configurazione iniziale di tutti i corpi costituenti il sistema meccanico, sia in termini di posizione che in termini di velocità.

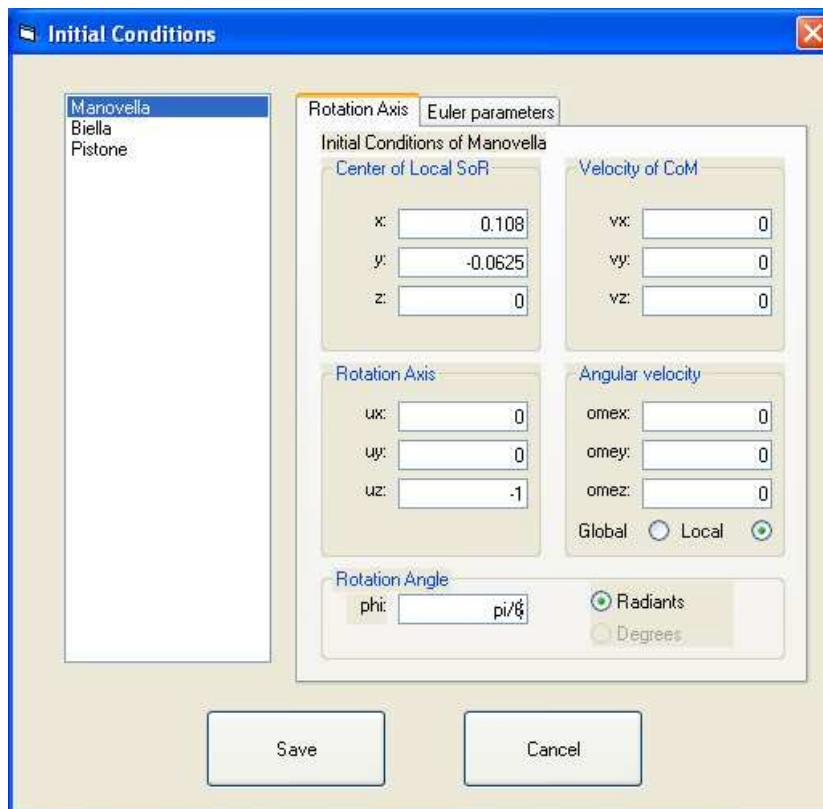


Figura 4.11: *Card Manager*: Condizioni iniziali tramite asse di rotazione

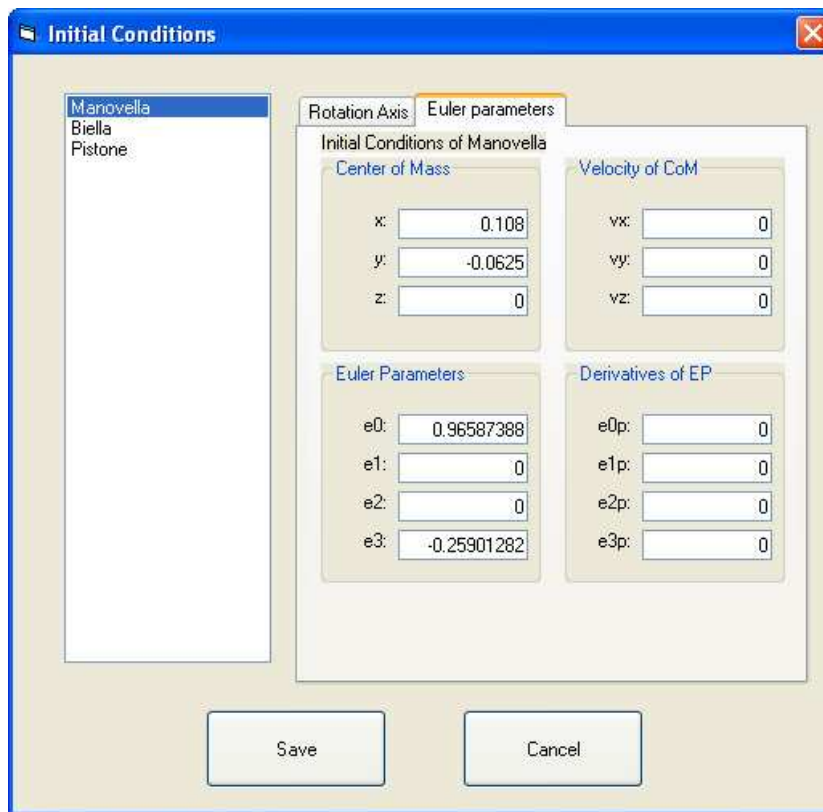


Figura 4.12: *Card Manager*: Condizioni iniziali tramite parametri di Eulero

Per ragioni di affidabilità e di univocità di interpretazione dell'orientamento, questo viene espresso internamente al codice NumDyn3D in termini di parametri di Eulero. Per facilitare l'introduzione delle condizioni iniziali, in particolar modo per quanto riguarda l'assegnazione di velocità angolare non nulla ad un corpo, che viene richiesta dal NumDyn3D in termini di derivate dei parametri di Eulero, viene data la possibilità all'utente di scegliere tra due diverse rappresentazioni.

Come si vede dalle figure 4.11 e 4.12, si può scegliere la maniera più comoda di introduzione dei parametri, normalmente la prima, potendo visualizzare subito, cambiando scheda, come siano stati modificati i parametri omologhi

nell'altra.

Una caratteristica importante di questo form è la possibilità di introdurre espressioni matematiche comunque complesse oltre ai semplici numeri, come ad esempio $\text{sqrt}(2)*\sin(\text{pi}/3)$, in una qualsiasi casella di testo. Questo risulta molto utile sia quando si ha a che fare con angoli espressi in radianti, sia quando si voglia lavorare direttamente con i parametri di Eulero, utilizzando le (1.2).

Il file di testo generato per il meccanismo utilizzato come esempio è di seguito riportato.

```
----- Initial configuration.s3d -----  
  
NumDyn3D ver. 7.0a  
!INITIAL CONFIGURATION RELATED TO THE COORDINATES  
begin(1)  
  q1=0.108  
  q2=-0.0625  
  q3=0.  
  q4=0.9658738845942  
  q5=0.  
  q6=0.  
  q7=-0.259012816399  
  qp1=0.  
  qp2=0.  
  qp3=0.  
  qp4=0.  
  qp5=0.  
  qp6=0.  
  qp7=0.  
end(1)  
  
begin(2)  
  q1=0.459  
  q2=-0.0625  
  q3=0.  
  q4=0.9920095389772  
  q5=0.
```

```
q6=0.  
q7=0.1261628890689  
qp1=0.  
qp2=0.  
qp3=0.  
qp4=0.  
qp5=0.  
qp6=0.  
qp7=0.  
end(2)  
  
begin(3)  
q1=0.661  
q2=0.  
q3=0.  
q4=1.  
q5=0.  
q6=0.  
q7=0.  
qp1=0.  
qp2=0.  
qp3=0.  
qp4=0.  
qp5=0.  
qp6=0.  
qp7=0.  
end(3)
```

Come si può notare, il file riporta nella prima riga l'indicazione della versione di NumDyn3D per cui è stato generato, per far sì che il codice multibody possa provare ad aprire i file di configurazione e condizioni iniziali utilizzati nelle versioni precedenti. Ogni riga che ha come primo carattere il simbolo ! viene considerata commento, così come vengono saltate tutte le righe vuote. All'interno di ogni blocco `begin(i) ... end(i)`, che non deve essere collocato necessariamente in ordine crescente rispetto agli altri, sono contenute, in qualsiasi ordine, le sette coordinate di posizione e le sette di

velocità. Nel caso in cui non venga trovata un valore iniziale per una velocità, questa viene letta come nulla dal NumDyn3D, mentre è necessario assegnare un valore a tutte le coordinate posizionali di ogni corpo. L'interfaccia grafica *Card Manager* genera, come si evince da quanto sopra riportato, un file ordinato ed assegna tutti i valori di velocità, compresi quelli nulli.

Le sette coordinate rappresentano da q_1 a q_3 le coordinate X , Y e Z dell'origine del sistema di riferimento locale, espresse naturalmente nel riferimento assoluto, mentre da q_4 a q_7 i quattro parametri di Eulero.

Nel caso in cui vengano assegnate velocità non nulle e non congruenti a coordinate tra loro dipendenti, o a un numero di coordinate maggiore del numero di gradi di libertà del sistema, NumDyn3D determina automaticamente la soluzione più vicina ai valori immessi tramite il metodo dei minimi quadrati.

È molto importante evidenziare il fatto che le coordinate di posizione assegnate come configurazione iniziale rappresentano in realtà solo una stima della posizione effettivamente assunta dal sistema. NumDyn3D provvede ad un calcolo iniziale di una configurazione il più possibile vicina a quella indicata dall'utente e congruente con i vincoli cinematici. Non è necessario indicare quante e quali siano le coordinate indipendenti del sistema.

4.2.6 La card *SPDamp.s3d*

Questa card contiene l'elenco di gruppi molla-smorzatore-attuatore eventualmente presenti nel sistema da simulare. I parametri richiesti cambiano nel caso in cui il gruppo sia di tipo traslazionale o torsionale, come si può osservare nelle figure 4.13 e 4.14.

Nel caso in cui venga introdotto un gruppo traslazionale, infatti, vengono richiesti i punti di applicazione sui due corpi collegati dal gruppo stesso.

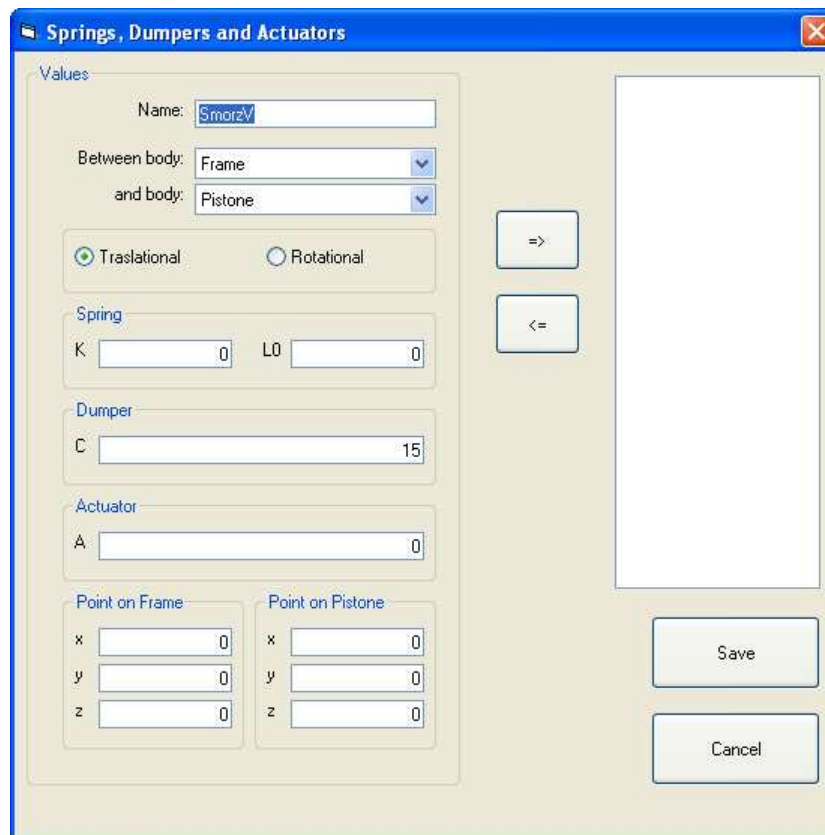


Figura 4.13: *Card Manager*: Gruppi molla–smorzatore–attuatore estensionali

Nel caso si richieda invece quello torsionale viene richiesto di selezionare una coppia cinematica che permetta movimenti rotazionali a cui associare il gruppo.

Una caratteristica innovativa è la possibilità di inserire molle, smorzatori o attuatori non lineari, legandone i valori alle coordinate assolute dei corpi del sistema meccanico.

Un esempio di file generato da *Card Manager* viene riportato di seguito.

SPDamp.s3d

NumDyn3D ver. 7.0a

!Springs, dampers and actuators

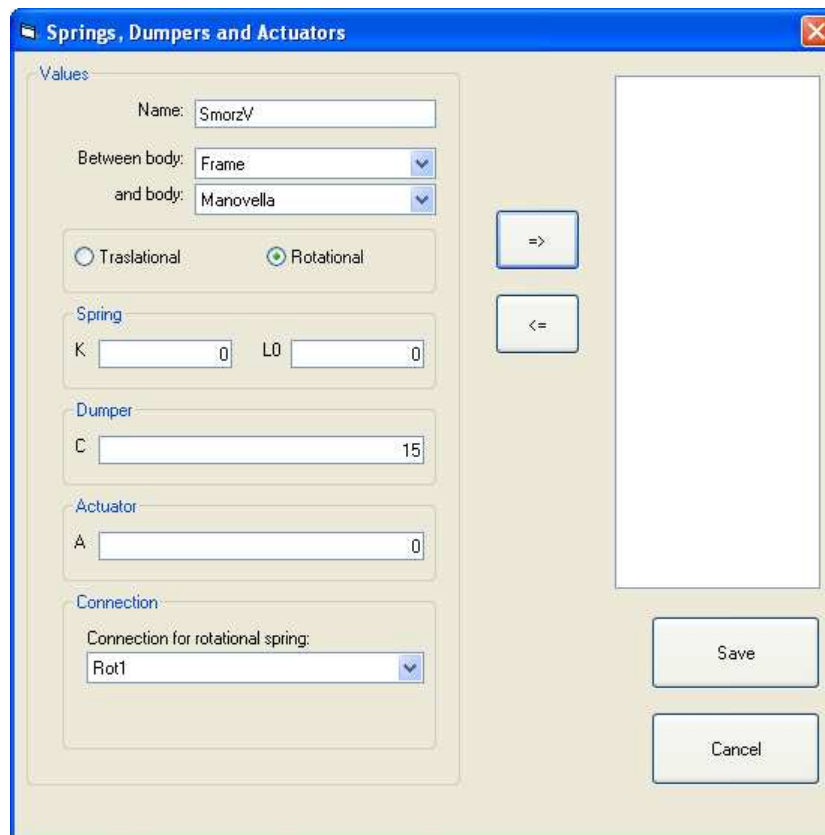


Figura 4.14: *Card Manager*: Gruppi molla-smorzatore-attuatore torsionali

```

begin(1)
  name=Molla
  type=1
  body1=0
  body2=3
  K=10*abs(q15-0.661)
  L0=0.661
  C=0
  A=0
  p1x=0.
  p1y=0.
  p1z=0.
  p2x=0.
  p2y=0.

```

```
p2z=0.  
end(1)  
  
begin(2)  
  name=SmorzV  
  type=2  
  body1=0  
  body2=1  
  K=0  
  L0=0.  
  C=2*abs(qp4)*step(t-4)+step(4-t)*8  
  A=0  
  ConnectionID=1  
end(2)
```

Nella card sono specificati due diversi gruppi molla-smorzatore-attuatore. Il primo è in realtà una sola molla traslazionale (tipo 1) dal coefficiente elastico variabile linearmente con l'allontanarsi dalla condizione di riposo (L_0), applicata nell'origine del pistone (corpo 3) e del telaio (corpo 0). Il secondo è uno smorzatore viscoso angolare (tipo 2) dalla viscosità costante durante i primi 4 secondi, variabile linearmente con la velocità angolare (tramite la derivata del primo parametro di Eulero del primo corpo) successivamente, connesso alla coppia rotoidale 1 (ConnectionID 1), ovvero quella che collega manovella (corpo 1) e telaio (corpo 0), come riportato nella matrice di connettività.

La struttura del file di testo è analoga a quanto visto per altre card, ovvero la prima riga contiene la versione del simulatore per cui è stata scritta la card, le righe che cominciano con ! o vuote vengono saltate, tra ogni **begin** ed il rispettivo **end** sono presenti tutte le informazioni necessarie a definire il gruppo molla-smorzatore-attuatore.

In particolare, senza un ordine prestabilito, vengono richiesti il nome del

gruppo, il tipo (`type=1` indica traslazionale, 2 torsionale), i corpi collegati (`body1` e `body2`), il coefficiente elastico della molla (K), la sua lunghezza a riposo (L_0), il coefficiente di viscosità dello smorzatore (C) e l'attuatore (A), per entrambi i tipi di gruppo. Per quello traslazionale vengono richieste anche le coordinate dei punti di applicazione sui rispettivi corpi, nel sistema di riferimento relativo ad ognuno di essi ($p1x$, $p1y$ e $p1z$ per il corpo indicato nel campo `body1`, $p2x$, $p2y$ e $p2z$ per quello indicato in `body2`), mentre per il gruppo torsionale viene richiesto soltanto l'identificativo della coppia cinematica associata (`ConnectionID`).

Una caratteristica interessante è la possibilità di introdurre tramite una legge opportuna su un attuatore, una legge di controllo funzione della posizione e della velocità dei diversi corpi costituenti il sistema, o del tempo di simulazione.

4.2.7 La card *Driving Pos.s3d*

Questa card contiene tutte le informazioni necessarie per la dichiarazione completa dei vincoli di moto agenti sul sistema. In particolare, detto $\Psi(\{q\}, t)$ un generico vincolo di moto, è necessario definire in forma analitica, oltre al vincolo stesso, le seguenti quantità

$$\begin{aligned}
 \Psi_t(\{q\}, t) &= \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\
 \Psi_{tt}(\{q\}, t) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\
 \Psi_{q_i}(\{q\}, t) &= \frac{\partial \Psi}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots 7 \times NB \\
 \Psi_{q_i t}(\{q\}, t) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_i \partial t}, \quad i = 1 \dots 7 \times NB
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Poiché, normalmente, la maggior parte delle derivate parziali rispetto al-

le coordinate generalizzate q_i sono nulle, è sufficiente riportare nella card solamente quelle significative, mentre le altre verranno automaticamente impostate pari a 0.

Un esempio di file di input viene di seguito riportato.

Driving Pos.s3d

```

NumDyn3D ver. 7.0a
! Card delle leggi di moto

begin(constants)
  A=0.125
  omega=3
end(constants)

begin(1)
  position = q1-A*cos(omega*t)+A-.108
  PSI_t = A*sin(omega*t)*omega
  PSI_tt = A*cos(omega*t)*omega^2
  PSI_q(1) = 1
  PSI_qt(1) = 0
end(1)

```

Come si vede, il file è suddiviso in diversi blocchi. Uno, delimitato da `begin(constants) ... end(constants)`, contiene la dichiarazione di un numero arbitrario di costanti utilizzate nelle leggi di moto. Gli altri blocchi contengono invece le espressioni analitiche delle leggi di moto con le relative derivate. La legge sulle posizioni $\Psi(\{q\}, t)$ viene identificata con l'etichetta `position`, la sua derivata parziale prima rispetto al tempo con `PSI_t` e la seconda con `PSI_tt`. Le espressioni analitiche di queste quantità sono necessarie e, se non trovate, viene generato un errore. Le successive quantità sono invece opzionali e poste uguali a zero se non trovate. In particolare, nell'esempio precedente, l'unica derivata rispetto alle coordinate non nulla è quella

rispetto a q_1 , e viene quindi riportata. Viene espressa, solo per completezza, anche la derivata mista $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1 \partial t}$, ma non sarebbe necessaria, essendo nulla.

È importante sottolineare che le coordinate sono espresse nel sistema di riferimento assoluto e che, per maggior generalità, si è preferito non legare la legge di moto ad un singolo corpo. Così le coordinate sono identificate da $q_1, q_2, \dots, q_{7 \times NB}$, dove NB indica il numero di corpi costituenti il meccanismo. Quindi al corpo con identificatore 1 nella card **General** fanno riferimento le coordinate $q_1 \dots q_7$, al 2 le coordinate $q_8 \dots q_{14}$, all' i -esimo le coordinate $q_{7(i-1)+1} \dots q_{7i}$.

La gestione di questa card non è prevista all'interno di *Card Manager*, ma è stato sviluppato un programma in Maple V che, inserendo la legge di moto ed il numero di corpi costituenti il sistema, restituisce tutte e sole le derivate significative in formato adatto per essere interpretato correttamente dal NumDyn3D. Rimane quindi da fare manualmente una semplice operazione di copia-incolla per inserire le funzioni calcolate all'interno della card.

4.2.8 La card *QRTol.s3d*

Questa card contiene alcune opzioni che permettono di configurare, secondo le proprie esigenze o secondo il particolare sistema meccanico, la risoluzione delle equazioni del moto della simulazione. I parametri impostabili possono influenzare molto sia la velocità di esecuzione, sia l'accuratezza della simulazione o la stabilità per tempi lunghi, sia l'effettiva soluzione del problema.

NumDyn3D utilizza dei parametri di default, che possono essere una buona scelta per la maggior parte dei sistemi o comunque come impostazioni di primo tentativo. Nel caso in cui lo si desideri, si possono modificare i seguenti parametri:



Figura 4.15: *Card Manager*: Opzioni di risoluzione

Metodo di risoluzione

Consente di scegliere fra l'uso del codice Radau5 per la risoluzione di equazioni algebrico-differenziali con indice di formulazione 3 per sistemi a vincoli non sovrabbondanti, QTZ in forma di stato o QTZ con ortogonalizzazione dei vincoli.

Radau. Consiste nel risolvere, tramite il codice Radau5 [6], appunto, il sistema di equazioni algebrico differenziali come scritto nella (2.1). Rappresenta una buona scelta sul fronte della stabilità della simulazione, ma è vincolato dalla possibilità di risolvere solamente sistemi meccanici a vincoli non sovrabbondanti. Ad esempio, il manovellismo di spin-

ta utilizzato come esempio non è risolvibile tramite questo metodo, in quanto nella sua rappresentazione spaziale presenta tre gradi di vincolo di troppo.

QTZ in forma di stato. Come descritto in linea teorica nel paragrafo 3.4, tramite una decomposizione QTZ completa della matrice jacobiana dei vincoli è possibile formulare le equazioni del moto in forma di stato, o in termini di accelerazioni indipendenti o su di un set minimo di coordinate. La selezione tra i due metodi viene fatta automaticamente all'interno di NumDyn3D, a seconda delle caratteristiche del sistema meccanico. Entrambe le metodologie sono in grado di eseguire simulazioni di sistemi a più gradi di libertà e a vincoli sovrabbondanti, con una velocità maggiore della formulazione algebrico-differenziale, soprattutto all'aumentare del numero di corpi. Di contro presentano maggiori problemi di stabilità della soluzione per simulazioni lunghe e di violazione dei vincoli cinematici, che può comunque essere limitata a valori fisicamente trascurabili tramite le altre opzioni di risoluzione.

QTZ con ortogonalizzazione. Consiste nel risolvere, tramite il codice Radau5, il sistema algebrico differenziale (3.57), ottenuto dopo l'ortogonalizzazione dei vincoli cinematici per mezzo della matrice $[\hat{Q}]$, come descritto nel paragrafo 3.4.2. Questa metodologia, utilizzata di default, è in grado di risolvere sistemi a vincoli sovrabbondanti con un qualsiasi numero di gradi di libertà, con maggiore velocità dei precedenti per sistemi di piccole dimensioni, pagando qualcosa invece per sistemi più complessi. Presenta inoltre un'elevata stabilità della soluzione e un rispetto dei vincoli limitato principalmente dalla precisione dell'unità di virgola mobile del processore, ben al di sotto, comunque, di qualsia-

si apprezzabilità fisica. Di contro può presentare problemi ad iniziare la simulazione di sistemi con elevato numero di vincoli ridondanti, nel qual caso si consiglia l'uso della QTZ in forma di stato.

Integratore ODE

Le opzioni contenute in questa sezione hanno effetto solo nel caso in cui si utilizzi come metodo di risoluzione la decomposizione QTZ con equazioni in forma di stato. È stato utilizzato l'integratore per sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODE) *RKSuite* per Fortran [22], basato su metodologie Runge–Kutta esplicite, che permette di scegliere fra diversi ordini di sviluppo e di fissare tolleranze diverse. In particolare si ha:

Metodo ODE. Permette di selezionare la coppia Runge–Kutta che si vuole utilizzare, (2,3), (4,5) o (6,7). Più è alto l'ordine della coppia, maggiore è la precisione del risultato e maggiore è il tempo di calcolo. Per gli usi normali all'interno di una simulazione con NumDyn3D, la coppia di ordine minore (2,3) restituisce risultati paragonabili a quella di ordine massimo, con un risparmio di tempo di calcolo dell'ordine del 60%. Tra le tre diverse scelte varia l'accuratezza, che è dell'ordine di 10^{-3} , 10^{-5} e 10^{-8} , rispettivamente.

Tolleranza. Permette di impostare un valore dell'accuratezza richiesta, ed è legato al metodo ODE utilizzato. I metodi consigliati sono:

$10^{-2} : 10^{-4}$ coppia (2,3)

$10^{-3} : 10^{-6}$ coppia (4,5)

10^{-5} coppia (6,7)

Soglia. Da scegliere in maniera tale che il valore di una coordinata è trascurabile se sta al di sotto del valore di soglia.

Radau5

È possibile impostare l'errore massimo relativo ammesso da Radau5 durante l'integrazione. Questo parametro incide sulla possibilità di eseguire o meno una simulazione, in particolare per sistemi a vincoli sovrabbondanti. Nel caso in cui, durante l'esecuzione del codice, si ricevesse un messaggio di errore da Radau sulle dimensioni troppo piccole del passo di integrazione interna che dovrebbe adottare, si può tentare di aumentare il valore di questa tolleranza e lanciare nuovamente la simulazione.

Violazione dei vincoli

Il codice NumDyn3D, nel caso in cui si utilizzi come metodo di risoluzione la decomposizione QTZ con equazioni in forma di stato, può avere bisogno, di quando in quando, di correggere le posizioni trovate nel corso della simulazione per far scendere al di sotto di un valore fissato l'eventuale violazione dei vincoli cinematici imposti. Questa eventualità non è così remota, soprattutto per simulazioni lunghe, in quanto la riscrittura in forma di stato del sistema di equazioni algebrico differenziale che viene risolto ha validità solo locale. Più ci si allontana dalla configurazione nella quale è stata svolta la decomposizione e sono state corrette le posizioni, più cresce la possibilità che vengano violati alcuni vincoli cinematici al di sopra di valori fisicamente tollerabili. Per questo motivo è prevista la possibilità di effettuare, in fase di simulazione, la correzione delle posizioni quando la violazione delle equazioni dei vincoli cinematici superi un valore assegnato. Nel caso in cui l'utente voglia effettuare la correzione, viene richiesto:

Violazione massima. Valore massimo che può assumere la somma dei va-

lori assoluti delle violazioni dei vincoli cinematici prima che venga effettuata la correzione.

Violazione massima dopo la correzione. Valore sotto il quale deve venir riportata la somma dei valori assoluti delle violazioni dei vincoli dopo la correzione.

Questa operazione richiede la soluzione di un sistema sovrabbondante di equazioni algebriche non lineari. Di conseguenza impostare un valore troppo basso della violazione dopo la correzione può significare aumentare molto il numero di iterazioni necessarie per portare la soluzione al di sotto di tale soglia.

Il valore di soglia prima di effettuare la correzione se scelto molto piccolo può portare a correggere le coordinate posizionali praticamente ad ogni step temporale, mentre se viene scelto troppo alto può portare problemi di congruenza tra velocità (non corrette) e posizioni (corrette) all'inizio del passo temporale successivo all'esecuzione della routine.

È evidente che il valore della violazione massima dopo la correzione deve essere inferiore al valore ammesso prima di effettuarla.

Aggiornamento della decomposizione

Questo parametro è esattamente α , come definito nel paragrafo 3.3.2. Un valore tanto più vicino all'unità, quindi, implica una sempre più frequente decomposizione QTZ della matrice Jacobiana del sistema.

Per sistemi meccanici a più di un grado di libertà, questo valore non dovrebbe essere posto esattamente pari ad 1, perché questo potrebbe introdurre instabilità dovute a problemi di risoluzione dell'unità a virgola mobile del processore che non consentono il calcolo di nuovi sottospazi ortogona-

li sufficientemente vicini ai precedenti³. Questi problemi non si presentano, invece, per sistemi ad un grado di libertà.

Valutazione del rango

È il valore di soglia al di sotto del quale viene considerato nullo un elemento sulla diagonale della matrice $[T]$ della decomposizione QTZ. Il numero di gradi di libertà del sistema meccanico in esame coincide col numero di elementi nulli sulla diagonale di tale matrice. Il valore di questo parametro può essere incrementato nel caso in cui si incontrino problemi nel simulare un sistema meccanico con vincoli ridondanti di cui non siano state assegnate con sufficiente accuratezza le caratteristiche geometriche.

Output

Il valore dell'output a schermo rappresenta la percentuale dei passi da calcolare per ogni incremento dell'indicatore di processo. Il valore del parametro che regola l'output su file indica invece il numero di passi intermedi che si richiedono tra due linee consecutive sul file di output, che corrispondono ad uno step temporale definito nella card *General*.

Esempio di card

Viene qui di seguito riportato un esempio della card descritta in questa sezione, come generata da *Card Manager*.

```
_____ QRTol.s3d _____  
NumDyn3D ver. 7.0a  
!Integration method
```

³Vedere la figura (3.1) per un'interpretazione geometrica dei sottospazi ortogonali citati nel testo.

```
ResMethod = 2

!Tolerances required by ODE integrator
ODEmethod = 2
tolODE = 1.E-7
threshold = 1.E-18

!Tolerances required by Radau
tolRadau = 1.E-8

!Tolerances for constraints violation
tolConst = 1.E-9
tolCorr = 1.E-12

!QTZ Updating
tolQRUpdate = 1

!Rank evaluation
tolRank = 1.E-10

!Console progress indicator
DeltaPerc = 5

!Number of time steps between two consecutive lines in output file
DeltaWrite = 10

!Perform constraints correction
Correzione = 1
```

4.3 Metodi numerici

4.3.1 La libreria LAPACK

Come visto nella sezione teorica, nella metodologia proposta si fa largo uso di operazioni di algebra lineare, come trasformazioni QR, risoluzioni di sistemi lineari sovrabbondanti e non, e molto altro. Si è scelto quindi di avvalersi il

più possibile della libreria di algebra lineare LAPACK [23], distribuita gratuitamente dagli autori e proveniente da anni di uso da parte della comunità scientifica internazionale.

In particolare è stata da poco rilasciata la versione 3, in cui sono state riscritte alcune delle routine più frequentemente utilizzate nell'attuale versione di NumDyn3D. Le variazioni hanno riguardato, in particolare, l'introduzione di algoritmi di decomposizione a blocchi, che permettono un più efficiente utilizzo dei processori di recente generazione, per via della *pipeline* multiple di cui praticamente tutti sono dotati e che consentono notevoli miglioramenti nelle prestazioni senza riscrittura del codice nel caso si utilizzino architetture multiprocessore.

Un altro parametro di scelta per l'adozione di questa libreria risiede nell'utilizzo che viene fatto, nella libreria, dei *BLAS*, ovvero *Basic Linear Algebra Subprograms*. Questo set di routine, ormai standard consolidato, viene sviluppato dai diversi produttori di CPU appositamente per ogni processore di alto livello della loro produzione⁴. Solo questo fattore può fornire un elevatissimo incremento delle prestazioni della libreria Lapack e, di conseguenza, del codice NumDyn3D.

Ciò premesso, durante la scrittura di NumDyn3D si è prestata particolare attenzione ad una organizzazione del codice che permettesse di sfruttare il più possibile le potenzialità di tutti questi strumenti. Ad esempio si è completamente evitato l'uso del comando Fortran `matmul` per eseguire prodotti matriciali, sostituendolo con il più veloce e robusto `DGEMM` contenuto all'interno dei BLAS, che esegue l'operazione $C \leftarrow \alpha AB + \beta C$, con α e β valori scalari

⁴Ad esempio, AMD include i BLAS all'interno della *AMD Core Math Library* (ACML), scritte appositamente per i processori AMD Opteron™ e distribuite gratuitamente per i più diffusi sistemi operativi. Intel, invece, rilascia una versione a pagamento ottimizzata per tutti i suoi processori.

e A , B e C matrici di dimensioni qualsiasi, purché ovviamente compatibili fra loro.

Di Lapack si utilizza frequentemente anche la subroutine per eseguire la decomposizione QR completa, con pivoting delle colonne, di una matrice di dimensioni qualsiasi, sia per arrivare alla decomposizione QTZ descritta nella sezione teorica, sia per risolvere i sistemi di equazioni sovradeterminati che si incontrano, ad esempio, quando vengono calcolate le velocità iniziali congruenti.

4.3.2 Risoluzione di sistemi non lineari

Per eseguire correttamente la simulazione è necessario poter risolvere dei sistemi di equazioni algebriche non lineari, eventualmente sovradimensionati, ovvero con più equazioni che incognite. In particolare, sistemi di questo tipo, all'interno del codice sviluppato, vengono impiegati sia per la determinazione di una configurazione congruente con i vincoli imposti ed attinente alle condizioni iniziali specificate dall'utente, sia, nel corso della simulazione, per la minimizzazione dell'errore commesso nel rispettare i vincoli imposti, qualora si impieghino metodologie che prevedano la riscrittura del sistema algebrico differenziale in forma di stato. Per la risoluzione di tali sistemi si è scelto l'impiego della routine `Lmder`, contenuta nel pacchetto `Minpack`⁵ costituito da strumenti per l'ottimizzazione di molte classi di problemi matematici. `Lmder` è in grado di minimizzare la somma dei quadrati di m funzioni non lineari in n variabili, con $m \geq n$, utilizzando una variante dell'algoritmo di Levenberg–Marquardt. È necessario fornire una routine che calcoli le funzioni ed il relativo Jacobiano in corrispondenza di assegnati valori delle

⁵Argonne National Laboratory – Minpack project – march 1980. – AA.: Burton S. Garbow, Kenneth E. Hillstrom, Jorge j. More

variabili. Questa strategia risolutiva ben si adatta all'approccio Multibody implementato nel codice NumDyn3D.

4.3.3 Soluzione di sistemi differenziali ordinari

Come accennato in precedenza, le metodologie che prevedono la riscrittura del sistema in forma di stato comportano la soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODE), o in termini di accelerazioni indipendenti o di un set minimo di coordinate, a seconda del metodo scelto dal codice. Per la risoluzione di tali sistemi si è fatto uso di una libreria di integratori ODE [22], basati sull'algoritmo di Runge-Kutta con coppie di diversi ordini.

4.3.4 Soluzione di sistemi algebrico-differenziali

Per la risoluzione di sistemi algebrico-differenziali si è fatto uso del codice Radau5, sviluppato da Ernst Hairer e da Gerhard Wanner [6] appartenenti al dipartimento di matematica dell'università di Ginevra. Questo codice consente di risolvere sistemi algebrico-differenziali impliciti od espliciti, con Jacobiano fornito dall'utente o calcolato internamente per differenze finite. Il sistema (2.1) viene riscritto come un sistema differenziale del primo ordine nell'incognita $\{y\}$:

$$[K] \{y'\} = \{\phi(y)\} \quad (4.2)$$

dove:

$$[K] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$\{y'\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \ddot{\ddot{q}} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

ed infine

$$\{\phi(y)\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \\ [M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} - \{Q\} \\ \{\Psi(q, t)\} \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Lo svantaggio maggiore nell'impiego del codice Radau5 risiede nel fatto che non accetta sistemi sovradimensionati. A meno di una ortogonalizzazione dei vincoli, non può quindi essere impiegato per la soluzione di sistemi meccanici a vincoli sovrabbondanti.

4.4 Lettura delle card

Per facilitare l'introduzione delle caratteristiche del sistema meccanico da simulare, e quindi l'uso complessivo del programma, si sono impiegati dei file di input descriventi le caratteristiche del sistema meccanico. Come già precedentemente descritto, si è cercato di rendere la formattazione dei file di input molto libera e intuitiva. Ciò è stato possibile grazie all'uso di strumenti resi disponibili dallo standard Fortran90 e successivi, in particolare la ricorsività delle subroutine e i tipi di dati puntatori. Ogni subroutine di lettura delle

card è quindi suddivisa essenzialmente in due sezioni, delle quali la prima esegue la lettura da file vera e propria, con separazione delle etichette dai valori assegnati, riconoscimento delle etichette stesse e memorizzazione dei valori in una lista dinamica di dati strutturati; la seconda scansiona la lista appena creata e memorizza i dati in essa contenuti, dopo averle allocate in memoria secondo le dimensioni dedotte dalla lettura del file, nelle matrici utilizzate all'interno del codice. Per comprendere meglio come ciò avvenga, si prenda come riferimento la struttura dati dedicata alla lettura della card con le caratteristiche inerziali dei corpi. La definizione del tipo utilizzato è di seguito riportata e ne viene fornita una rappresentazione grafica nella Figura 4.16.

```

type, public :: TInertialList
  integer           :: body
  double precision  :: mass
  double precision  :: CoM(3)
  double precision  :: MatInerzia(3,3)
  type(TInertialList), pointer :: next => null()
end type TInertialList

```

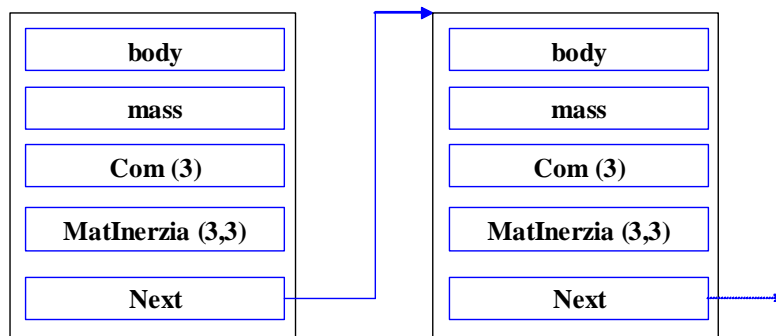


Figura 4.16: Struttura dati per lettura card

All'interno del codice NumDyn3D, le informazioni inerziali sono richieste come facenti parte di una matrice avente una riga per ogni corpo e, all'interno

di ogni riga, 11 elementi rappresentanti, nell'ordine, il numero identificativo del corpo, la massa e i nove elementi del tensore d'inerzia. I dati letti da file e memorizzati nella lista tramite una sola scansione di questa vengono riportati nella matrice delle inerzie e la lista viene successivamente eliminata dalla memoria mediante una compatta procedura ricorsiva, riportata di seguito come esempio.

```
recursive subroutine PulisciInertialList(Current)
implicit none
type (TInertialList) :: Current

if (associated(Current%next)) then
    call PulisciInertialList(Current%next)
end if
if (associated(Current%next)) deallocate(Current%next)
end subroutine PulisciInertialList
```

Non è quindi necessario dichiarare preventivamente il numero di corpi, o il numero di dati contenuti all'interno della relativa card, poiché questi vengono dedotti durante la lettura del file e memorizzati in strutture dati flessibili come la lista sopra riportata. Non è inoltre necessario riportare i dati, all'interno di un blocco `begin ... end` di una card, in un ordine prestabilito, perché le subroutine di lettura sono in grado di riconoscere l'etichetta che identifica il valore e memorizzare questo nel campo corrispondente della struttura dati.

4.5 Risoluzione mediante QTZ

In questa sezione, piuttosto che descrivere singolarmente tutte le subroutine scritte per implementare le tre diverse metodologie sviluppate nella sezione teorica, si vuole centrare l'attenzione su alcuni accorgimenti di tipo computazionale e su quanto è stato aggiunto rispetto alla trattazione strettamente matematica.

4.5.1 Ricerca di una configurazione iniziale congruente

Tutti i metodi implementati in NumDyn3d hanno bisogno, per poter cominciare l'integrazione del sistema algebrico–differenziale generato, di una configurazione iniziale in termini di posizione e velocità il più possibile congruente con i vincoli cinematici. Per questo motivo i valori dati in ingresso dall'utente vengono utilizzati solo come primo tentativo per la ricerca della configurazione più vicina a quanto indicato.

In particolare, la ricerca di un set di coordinate che soddisfino le equazioni di vincolo, richiede la soluzione del sistema algebrico non lineare delle equazioni di vincolo cinematico. Nel caso in cui siano presenti vincoli sovrabbondanti, ovvero si abbiano più equazioni che incognite, la routine `Lmder` descritta nel paragrafo 4.3.2 è in grado di trovare la soluzione che minimizzi lo scarto quadratico medio della violazione dei vincoli, anche se questi sono dipendenti tra loro. Nel caso in cui si abbiano invece meno equazioni che incognite, ovvero vincoli non sovrabbondanti, bisogna completare il sistema. In questo caso vengono generate automaticamente un insieme di equazioni di vincolo in più, basate sull'ipotesi di inestensibilità dei corpi e sulla caratteristica di alcune coppie cinematiche di mantenere un punto fisso nel sistema di riferimento locale di almeno uno dei membri da esse connessi. Non bisogna preoccuparsi dell'effettiva indipendenza di queste equazioni dalle altre, poiché si è già detto sopra che la routine utilizzata consente di trovare la configurazione più vicina a quella proposta che rispetti le equazioni di vincolo, anche se queste sono fra loro dipendenti. Per quanto riguarda la ricerca delle velocità iniziali congruenti, questa viene effettuata per mezzo della risoluzione di un sistema algebrico lineare che può essere anch'esso sovra o sottodimensionato. La routine usata, basata su una minimizzazione dei minimi quadrati per mezzo di decomposizione QR con pivoting, è in grado di

gestire entrambe le situazioni, restituendo sempre il risultato ottimale. Nel caso in cui vengano assegnate velocità non nulle ad alcune coordinate del sistema meccanico, queste vengono aggiunte come ulteriori equazioni del sistema lineare sopra citato. Se tali coordinate sono indipendenti tra loro ed in numero minore o uguale ai gradi di libertà, tutte le altre vengono modificate in modo da rispettare quelle imposte. Se invece i valori impostati sono incongruenti tra loro, il codice minimizza automaticamente lo scarto quadratico tra le velocità calcolate e quelle assegnate dall'utente, modificandole in maniera opportuna.

4.5.2 Correzione delle posizioni

Durante la simulazione mediante la riscrittura in forma di stato delle equazioni del moto, può essere necessario, qualora richiesto dall'utente, correggere le posizioni calcolate per limitare la violazione dei vincoli cinematici. La metodologia seguita è esattamente la stessa della ricerca di una configurazione iniziale congruente. Si faccia riferimento al paragrafo 4.5.1 per maggiori dettagli.

4.5.3 Scelta del metodo di risoluzione

Oltre alla scelta effettuata dall'utente riguardo la metodologia risolutiva da adottare per eseguire la simulazione, nel caso in cui sia stata scelta la riscrittura in forma di stato tramite decomposizione QTZ, il codice decide autonomamente tra l'utilizzo delle accelerazioni indipendenti o di un set minimo di variabili indipendenti. L'uso di un set minimo di variabili indipendenti è generalmente la migliore soluzione, poiché conduce alla risoluzione di un sistema differenziale composto dal minor numero possibile di equazioni, ottenendo quindi notevoli miglioramenti sul piano delle prestazioni, soprattutto

per sistemi complessi. Nel caso in cui, di contro, siano presenti tanti vincoli di moto indipendenti quanti sono i gradi di libertà del sistema, questo metodo non è più utilizzabile, in quanto il set minimo di variabili avrebbe un numero di elementi pari a 0. In questo caso è dunque indispensabile ricorrere alla formulazione sulle accelerazioni indipendenti. Di contro quest'ultima, che può avere comportamenti indesiderati quando i gradi di libertà sono in numero superiore o uguale a due, a causa di una non sempre garantita continuità del sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^{7 \cdot NB}$ di dimensione pari proprio ai gradi di libertà, si comporta in maniera efficiente quando i gradi di libertà sono pari a 0, ovvero quando la soluzione richiesta è puramente cinematica.

4.6 Accorgimenti computazionali

In questa sezione si vogliono esaminare le soluzioni più importanti utilizzate all'interno del codice per l'incremento delle prestazioni di calcolo. Si vuole sottolineare, comunque, che si è in ogni occasione cercato di preservare il più possibile la leggibilità del codice.

4.6.1 Allocazione di variabili locali

Le subroutine richiamate dalla decomposizione QTZ della matrice Jacobiana, nonché tutte quelle dedicate al calcolo delle quantità vettoriali o matriciali in forma ridotta, fanno uso di una serie di variabili utilizzate per lo più localmente, le cui dimensioni o rimangono costanti durante tutta la simulazione, o cambiano solamente nel caso in cui cambino i gradi di libertà del sistema durante il moto.

Per limitare sia il tempo necessario per l'allocazione di una variabile dinamica e per la sua deallocazione in uscita dalla subroutine, sia l'uso fram-

mentario della memoria del calcolatore, che può portare in molti casi ad un accentuato decadimento delle prestazioni, anche alcune variabili ad uso locale sono state dichiarate globali e vengono allocate solamente nella subroutine di preparazione alla risoluzione mediante decomposizione QTZ oppure deallocate e riallocate nuovamente solo quando cambiano i gradi di libertà del sistema.

4.6.2 Trattamento dei vincoli di moto

Nella struttura del sistema di equazioni generato automaticamente da NumDyn3D, le ultime si riferiscono ai vincoli di moto definiti dall'utente.

In alcuni casi, ad esempio se il sistema è soggetto a soli vincoli di moto e la sezione di matrice Jacobiana ad essi relativa, all'istante iniziale, risulta linearmente dipendente dalle altre righe della matrice stessa, potrebbe capitare che la decomposizione QR con pivoting delle colonne vada ad eliminare proprio le righe relative ad i vincoli di moto, lasciando di fatto il sistema fermo. Per ovviare a questo problema, è stata data una priorità maggiore alle righe facenti riferimento ai vincoli di moto all'interno della decomposizione, così da eliminare, eventualmente, altre informazioni che possono poi essere ricostruite con le trasformazioni inverse, una volta che il meccanismo si sia mosso rispettando il movimento imposto.

4.7 Esempi numerici

In questa sezione vengono presentati alcuni esempi numerici riguardanti sistemi meccanici a vincoli sovrabbondanti. In particolare il pentalatero articolato, il manovellismo di spinta in configurazione critica ed il giunto Cardanico.

4.7.1 Pentalatero articolato

In Figura 4.17 viene riportata la configurazione iniziale del pentalatero articolato in cui le aste sono inclinate rispetto all'orizzontale di 45° . Sul sistema agisce la sola forza peso. I sistemi di riferimento locali sono disposti nel baricentro di ciascuna asta. Il sistema è quindi libero di oscillare sotto il proprio peso.

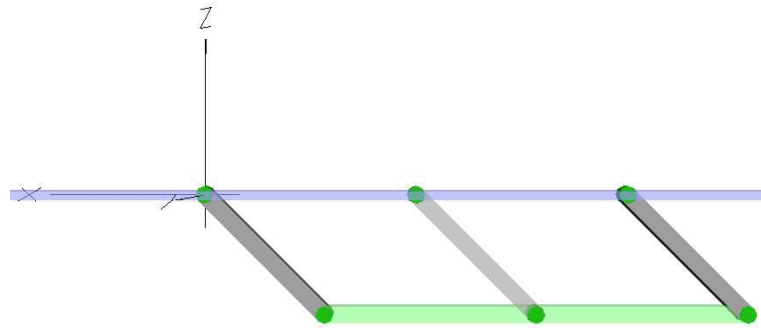


Figura 4.17: Pentalatero – Configurazione iniziale

Da un conto preliminare dei gradi di libertà mediante la formula di Kutzbach (1.11)

$$F = 6(l - 1) - \sum_{i=1}^j (6 - f_i) = -6 ,$$

il sistema risulterebbe non avere alcuna possibilità di movimento. In realtà, date le caratteristiche geometriche delle aste (di uguale lunghezza e parallele fra loro), presenta un grado di libertà. Questo comporta la presenza di 7 vincoli sovrabbondanti. Si vede, infatti, che una qualunque delle tre aste uguali non è necessaria per la determinazione del moto del sistema, ma ha influenza sotto i punti di vista dinamico e strutturale. Dal punto di vista computazionale, quindi, la simulazione dinamica del pentalatero articolato

risulta un problema di non facile soluzione. In Figura 4.18 si riportano le traiettorie dei baricentri dei corpi sul piano XZ .

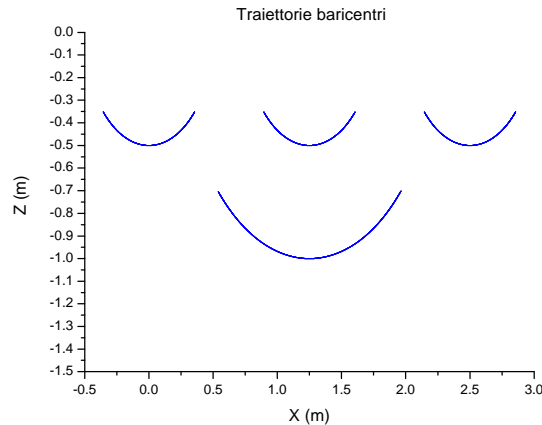


Figura 4.18: Pentaltero – Traiettorie dei baricentri

In Figura 4.19a e 4.19b vengono riportati gli andamenti nel tempo rispettivamente della coordinata X del baricentro e della velocità angolare dell’asta più a sinistra. In particolare vengono confrontati i risultati ottenuti mediante diverse metodologie: rappresentazione in forma di stato, ortogonalizzazione dei vincoli e Working Model. Non si rilevano significative discrepanze fra i risultati ottenuti con le diverse metodologie. Significativo invece risulta il confronto, tra le medesime metodologie, riguardante la violazione dei vincoli cinematici sulle posizioni. In Figura 4.20 si vede come la maggiore violazione si riscontra nella riduzione in forma di stato del sistema algebrico – differenziale, mentre pressoché nulla è la violazione dei vincoli nella risoluzione del sistema mediante ortogonalizzazione dei vincoli con l’uso del codice Radau5.

A titolo di esempio si riportano le card impiegate per la descrizione del sistema meccanico in esame. Per brevità non si riportano le card impiegate per gli altri esempi applicativi.

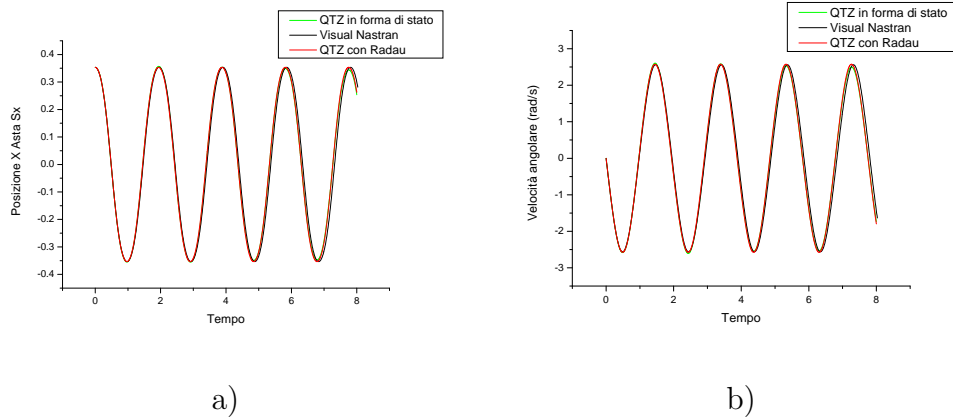


Figura 4.19: Pentapodero – Confronto risultati

General.s3d

```

Pentalatero articolato 1 gdl
NB          4
TI          0.
TE          8.
ST          5000
PP N
ID |        BODY NAME
 1 |         Asta Sx
 2 |         Biella
 3 |         Asta Dx
 4 |         Asta Ce

```

Connection.s3d

```

NumDyn3D ver. 7.0a
!Kinematic pairs

begin(1)
  name=C1
  type=1
  body1=1
  body2=0
  P1=-0.5 0. 0.
  Q1=-0.5 0. 1.
  R1=0.2071067811865 0.7071067811865 0.
  P2=0. 0. 0.
  Q2=0. 0. 1.
  R2=0.7071067811865 0.7071067811865 0.
end(1)

begin(2)

```

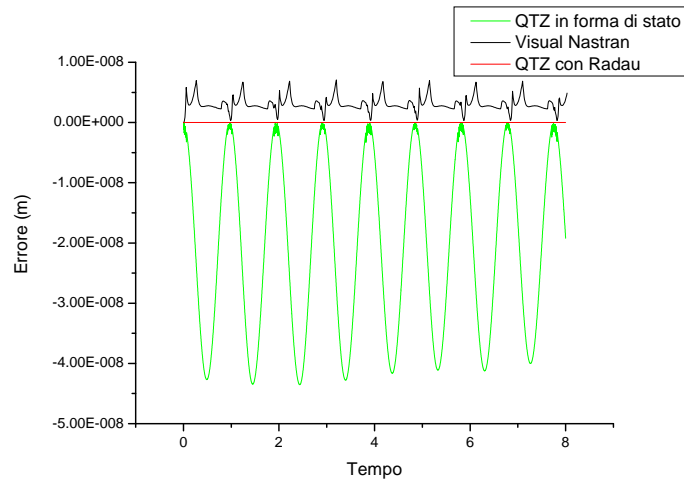


Figura 4.20: Pentalatero – Violazione vincolo cinematico

```

name=C2
type=1
body1=1
body2=2
P1=0.5 0. 0.
Q1=0.5 0. 1.
R1=1.2071067811866 0.7071067811865 0.
P2=-1.25 0. 0.
Q2=-1.25 0. 1.
R2=-0.5428932188135 0.7071067811865 0.
end(2)

begin(3)
name=C3
type=1
body1=3
body2=2
P1=0.5 0. 0.
Q1=0.5 0. 1.
R1=1.2071067811866 0.7071067811865 0.
P2=1.25 0. 0.
Q2=1.25 0. 1.
R2=1.9571067811866 0.7071067811865 0.
end(3)

begin(4)

```

```
name=C4
type=1
body1=3
body2=0
P1=-0.5 0. 0.
Q1=-0.5 0. 1.
R1=0.2071067811865 0.7071067811865 0.
P2=2.5 0. 0.
Q2=2.5 0. 1.
R2=3.2071067811866 0.7071067811865 0.
end(4)

begin(5)
name=C5
type=1
body1=4
body2=0
P1=-0.5 0. 0.
Q1=-0.5 0. 1.
R1=0.2071067811865 0.7071067811865 0.
P2=1.25 0. 0.
Q2=1.25 0. 1.
R2=1.9571067811866 0.7071067811865 0.
end(5)

begin(6)
name=C6
type=1
body1=4
body2=2
P1=0.5 0. 0.
Q1=0.5 0. 1.
R1=1.2071067811866 0.7071067811865 0.
P2=0. 0. 0.
Q2=0. 0. 1.
R2=0.7071067811865 0.7071067811865 0.
end(6)
```

```
NumDyn3D ver. 7.0a
!Matrici d'inerzia e masse....
begin(1)
mass=78.
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.13 0. 0.
0. 6.565 0.
0. 0. 6.565
]
end(1)

begin(2)
mass=195.
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.325 0. 0.
0. 101.725 0.
0. 0. 101.725
]
end(2)

begin(3)
mass=78.
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.13 0. 0.
0. 6.565 0.
0. 0. 6.565
]
end(3)

begin(4)
mass=78.
CoM=0. 0. 0.
inertia=[
0.13 0. 0.
0. 6.565 0.
0. 0. 6.565
]
end(4)
```

```
NumDyn3D ver. 7.0a
!INITIAL CONFIGURATION RELATED TO THE COORDINATES
begin(1)
  q1=0.3535533905
  q2=-0.3535533905
```

```
q3=0.  
q4=0.9238795325  
q5=0.  
q6=0.  
q7=-0.3826834323  
qp1=0.  
qp2=0.  
qp3=0.  
qp4=0.  
qp5=0.  
qp6=0.  
qp7=0.  
end(1)
```

```
begin(2)  
q1=1.957106781  
q2=-0.707106781  
q3=0.  
q4=1.  
q5=0.  
q6=0.  
q7=0.  
qp1=0.  
qp2=0.  
qp3=0.  
qp4=0.  
qp5=0.  
qp6=0.  
qp7=0.  
end(2)
```

```
begin(3)  
q1=2.85355339  
q2=-0.3535533905  
q3=0.  
q4=0.9238795325  
q5=0.  
q6=0.  
q7=-0.3826834323  
qp1=0.  
qp2=0.  
qp3=0.  
qp4=0.  
qp5=0.  
qp6=0.  
qp7=0.  
end(3)
```

```
begin(4)
```

```
q1=1.60355339
q2=-0.3535533905
q3=0.
q4=0.9238795325
q5=0.
q6=0.
q7=-0.3826834323
qp1=0.
qp2=0.
qp3=0.
qp4=0.
qp5=0.
qp6=0.
qp7=0.
end(4)
```

NumDyn3D ver. 7.0a *Force.s3d*
! Forces and torques

```
begin(1)
  name=Grav1
  body=1
  type=1
  Fx=0
  Fy=-765.18
  Fz=0
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=0.
  py=0.
  pz=0.
end(1)
```

```
begin(2)
  name=Grav2
  body=2
  type=1
  Fx=0
  Fy=-1912.95
  Fz=0
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=0.
  py=0.
  pz=0.
end(2)
```

```
begin(3)
  name=Grav3
  body=3
  type=1
  Fx=0
  Fy=-765.18
  Fz=0
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=0.
  py=0.
  pz=0.
end(3)
```

```
begin(4)
  name=Grav4
  body=4
  type=1
  Fx=0
  Fy=-765.18
  Fz=0
  Tx=0
  Ty=0
  Tz=0
  px=0.
  py=0.
  pz=0.
end(4)
```

QRTol.s3d

```
NumDyn3D ver. 7.0a
!Integration method
ResMethod = 2
```

```
!Tolerances required by ODE integrator
ODEmethod = 1
tolODE = 1.E-4
threshold = 1.E-14
```

```
!Tolerances required by Radau
tolRadau = 1.E-8
```

```
!Tolerances for constraints violation
tolConst = 1.E-10
tolCorr = 1.E-13
```

```
!QTZ Updating
```

```
tolQRUpdate = 0.999

!Rank evaluation
tolRank = 1.E-10

!Console progress indicator
DeltaPerc = 5

!Number of time steps between two consecutive lines in output file
DeltaWrite = 10

!Perform constraints correction
Correzione = 1
```

4.7.2 Manovellismo in configurazione critica

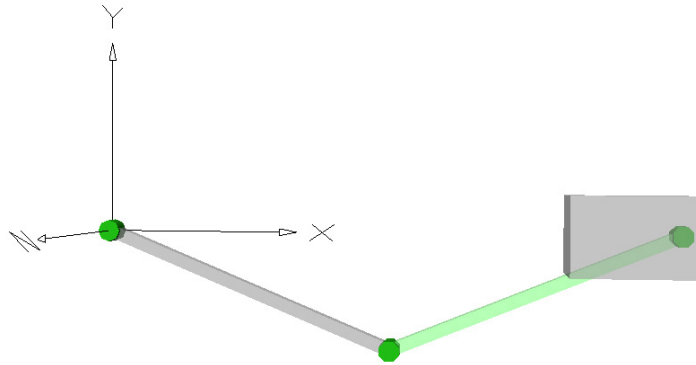


Figura 4.21: Configurazione iniziale

Si consideri un manovellismo di spinta, soggetto a sola forza peso negativa rispetto all'asse X , caratterizzato dall'aver biella e manovella della stessa lunghezza. Il meccanismo si trova quindi a passare per una configurazione *critica*, in cui biella e manovella risultano sovrapposte, la coppia rotoidale che unisce pistone e biella si trova ad essere coincidente con quella che unisce manovella e telaio ed il sistema assume, istantaneamente, due gradi di libertà. Da notare, inoltre, che anche in questo caso il sistema è a vincoli sovrab-

bondanti. Una rappresentazione grafica del meccanismo nella configurazione iniziale, in cui la manovella è inclinata di 30° rispetto all'orizzontale, viene riportata in Figura 4.21. Il passaggio attraverso la configurazione critica viene risolto efficacemente dal codice NumDyn3D, mentre genera un comportamento anomalo e fisicamente inaccettabile in Working Model. Questo

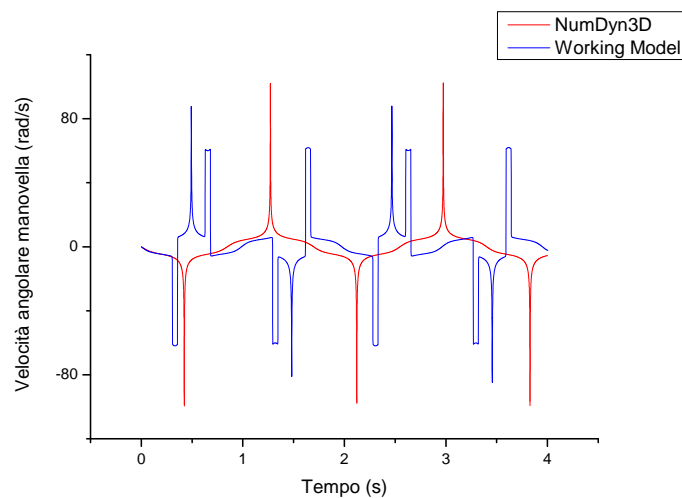


Figura 4.22: Velocità angolare manovella

appare evidente osservando la Figura 4.22, in cui viene riportata la velocità angolare della manovella, ottenuta con entrambi i programmi. Altre conferme di ciò vengono dagli andamenti nel tempo delle coordinate X (Figura 4.23a) ed Y (Figura 4.23b) del centro di massa della manovella. In particolare, dalla Figura 4.24 si vede come il pistone, raggiunta la posizione critica⁶, nella simulazione di Working Model (Figura 4.24b) rimanga fermo per un periodo di tempo, durante il quale biella e manovella, appaiate, compiono una rotazione

⁶Si ricorda che la coppia rotoidale che unisce pistone e biella ha centro, sul primo, nel punto $\{0.04, 0, 0\}$

di 180° attorno alle coppie rotoidali ora coincidenti. Successivamente, il moto del pistone riprende nella stessa direzione.

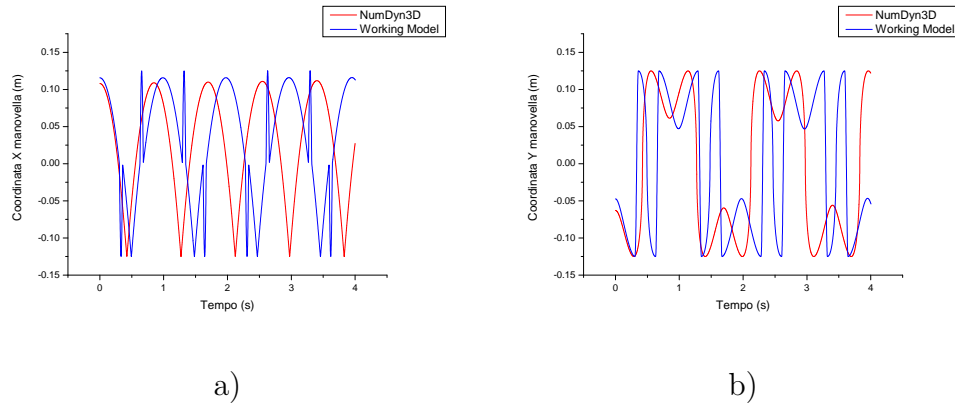


Figura 4.23: Coordinata X ed Y del CM della manovella

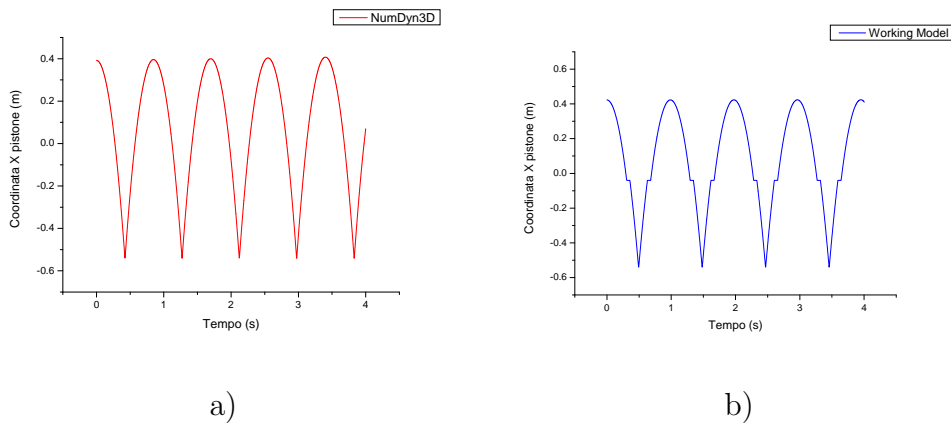


Figura 4.24: Posizione del CM del pistone

È stato inoltre analizzato il contenuto energetico del sistema durante la simulazione. In Figura 4.25a è rappresentata l'energia cinetica, scomposta in parte traslazionale e parte rotazionale, mentre in Figura 4.25b viene riportata l'energia totale, come somma di energia cinetica complessiva e di energia potenziale. Si possono notare dei leggeri picchi di energia cinetica rotazionale

in corrispondenza delle configurazioni critiche, che influiscono sul mancato rispetto del bilancio energetico complessivo in quegli istanti, ma complessivamente il risultato ottenuto è rilevante, vista la peculiarità del meccanismo.

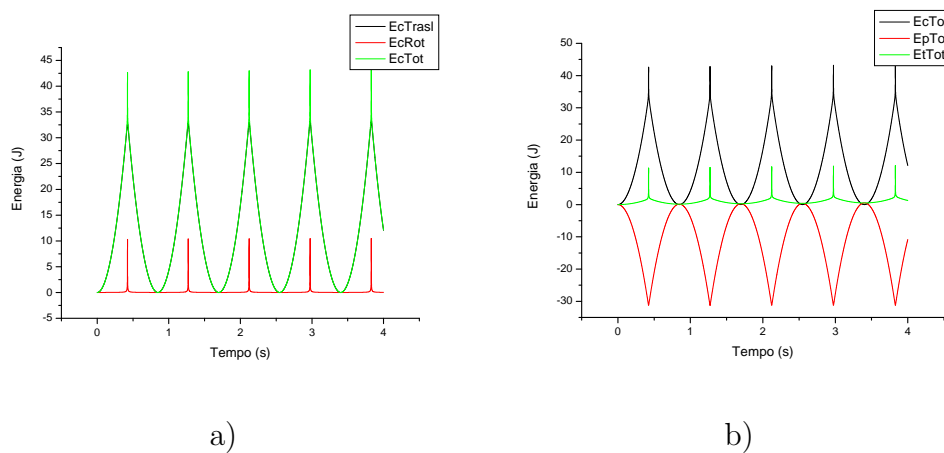


Figura 4.25: Contenuto di energia cinetica a) e totale b)

4.7.3 Giunto cardanico

Si vuole qui simulare il comportamento del giunto cardanico riportato in Figura 4.26.

Il sistema qui preso in esame è di difficile trattazione, in quanto presenta una notevole ridondanza di vincoli cinematici. Da un conto sui gradi di libertà del sistema, infatti, risultano essere presenti ben 13 equazioni di vincolo dipendenti dalle altre 20, per un totale di 33 vincoli, compresi quelli di normalizzazione dei parametri di Eulero. Ai fini dell'effettivo moto del sistema assume fondamentale importanza la precisione con cui viene assegnata la geometria al meccanismo. Se, infatti, gli assi di rotazione delle forchette non si intersecano esattamente nel centro della crociera, il giunto non può

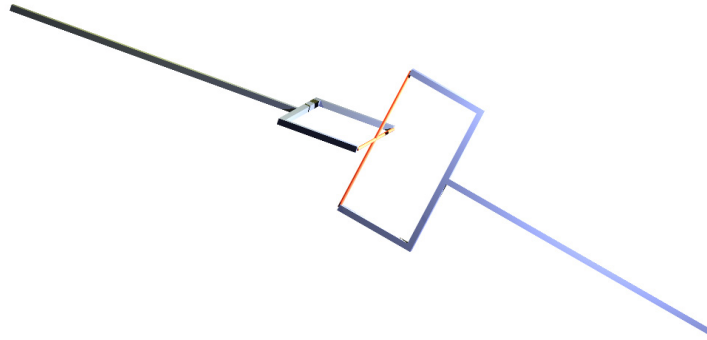


Figura 4.26: Configurazione iniziale

muoversi. Questa esigenza è responsabile della difficoltà nell'eseguire la simulazione utilizzando come strumento risolutivo il codice *Radau5*, naturalmente previa ortogonalizzazione dei vincoli. I risultati di seguito riportati sono stati ottenuti mediante la trasformazione in forma di stato delle equazioni del moto.

Il sistema, non soggetto a forze esterne, si muove a seguito di un vincolo di moto assegnato ad una delle due *forchette*, inclinate tra loro di un angolo pari a 10° . Nella formulazione utilizzata è possibile assegnare solamente vincoli sulle posizioni, non sulle loro derivate. Per ottenere, quindi, il vincolo voluto di velocità angolare costante in ingresso, sono state assegnate le due seguenti leggi di moto, tra loro dipendenti, agenti sui due parametri di Eulero diversi da 0 dell'asse di ingresso.

```

Driving Pos.s3d
begin(constants)
  omega=2
end(constants)

```

```

begin(1)
  position = q4-cos(1/2*omega*t)
  PSIit = 1/2*sin(1/2*omega*t)*omega
  PSIitt = 1/4*cos(1/2*omega*t)*omega^2
  PSIQ(4) = 1
end(1)

begin(2)
  position = q5-sin(1/2*omega*t)
  PSIit = -1/2*cos(1/2*omega*t)*omega
  PSIitt = 1/4*sin(1/2*omega*t)*omega^2
  PSIQ(5) = 1
end(2)

```

Il valore indicato con `omega` rappresenta la velocità angolare voluta, mentre le leggi di moto sono derivate direttamente dalle definizioni dei parametri di Eulero. La necessità di introdurre la seconda, evidentemente ridondante rispetto alla prima, sta nella non univocità nella determinazione di q_5 assegnando solo q_4 . Infatti, dalla condizione di normalizzazione generata automaticamente dal codice NumDyn3D si ha

$$q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 - 1 = 0$$

da cui, poiché, a seguito di come è orientato il corpo nel sistema di riferimento globale, $q_6 = q_7 = 0$,

$$q_5 = \pm \sqrt{1 - q_4^2}$$

Questo portava ad una errata valutazione del secondo parametro di Eulero e_1 , corrispondente alla coordinata q_5 , come si vede nella Figura 4.27.

Con la legge di moto corretta, è stato dunque possibile simulare il funzionamento del giunto in esame, per il quale si deve avere, a seguito di una velocità angolare costante in ingresso, una velocità variabile in uscita. In Figura 4.28a viene riportata la velocità angolare degli alberi di ingresso ed

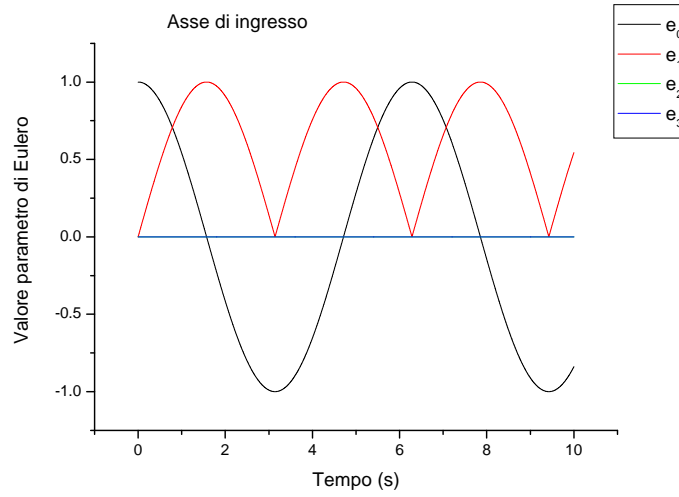


Figura 4.27: Errato calcolo di un parametro di Eulero

uscita, in Figura 4.28b le tre componenti di velocità angolare della crociera. In Figura 4.29 si riportano gli andamenti corretti dei parametri di Eulero dei

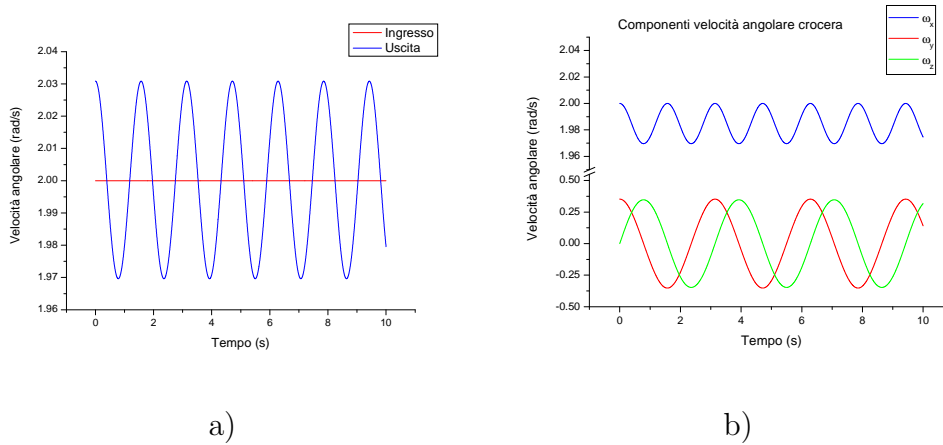


Figura 4.28: Velocità angolare dei corpi

corpi costituenti gli assi di ingresso e di uscita. In quest'ultimo, la variazione

degli ultimi due parametri è dovuta come è orientato il corpo nel sistema di riferimento assoluto.

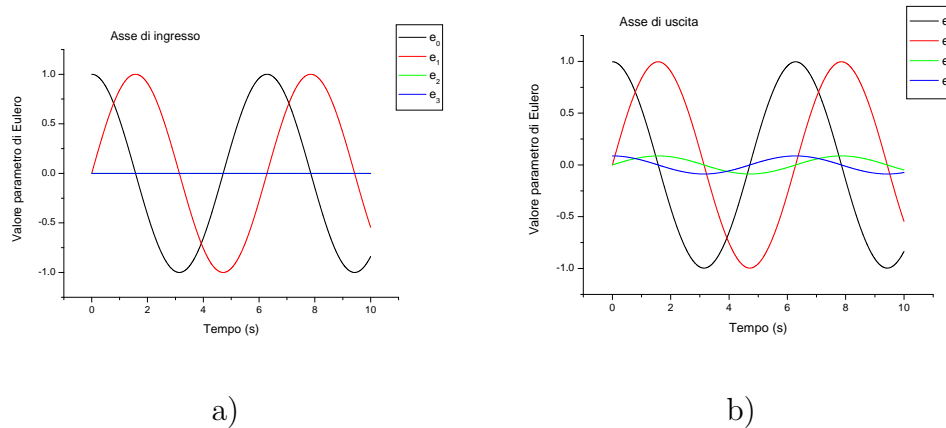


Figura 4.29: Parametri di Eulero dell'asse di ingresso a) e di uscita b)

4.8 Modellazione cuscinetti a strisciamento

In molti campi applicativi della meccanica l'analisi dei sistemi rotativi mediante accurati modelli numerici gioca un ruolo fondamentale per migliorare le prestazioni e l'affidabilità. L'assunzione di coppie rotoidali ideali spesso si dimostra essere una semplificazione eccessiva poiché, con questa modellazione, vengono trascurate tutte le elasticità e le eccentricità che in molti casi influiscono in maniera notevole sulla dinamica dell'intero sistema rotante. In questa sezione si affronterà il problema della modellazione dei cuscinetti a strisciamento in regime di lubrificazione idrodinamica (*fluid film bearings*).

Un generico cuscinetto di questo tipo è composto da due gusci cilindrici coassiali, uno solidale con l'albero rotante, l'altro montato sulla cassa di supporto (Figura 4.30). Un film fluido di lubrificante viene interposto tra la superficie esterna del guscio dell'albero e quella interna del guscio di sup-

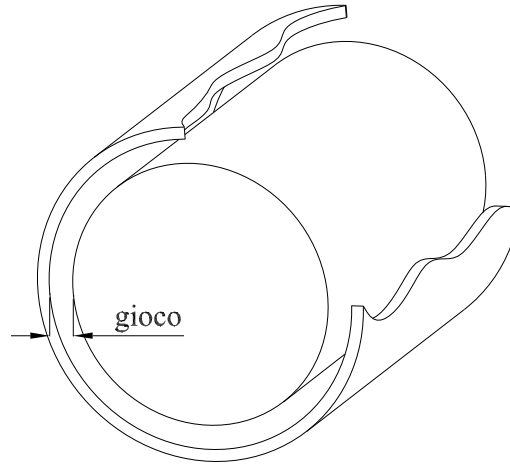


Figura 4.30: Cuscinetto a strisciamento in regime di lubrificazione idrodinamica

porto. Tra i due gusci viene lasciato, pertanto, un opportuno gioco radiale (dell'ordine dei decimi di millimetro) che permette al lubrificante di disporsi nel meato durante la rotazione in maniera tale da generare un campo di pressioni che garantisca la separazione tra le superfici stesse (sostentamento) anche sotto l'applicazione di un carico elevato. In letteratura vengono riportati diversi modelli di cuscinetti a strisciamento per investigazioni sulla dinamica dei rotori [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Molti di questi modelli non appaiono adeguati per un'implementazione in programmi di simulazione multibody vista la loro complessità, altri non si prestano ugualmente poiché prevedono una linearizzazione delle elasticità che appare spesso riduttiva. Nei paragrafi successivi, pertanto, verranno proposti due approcci distinti al problema. Il primo riguarderà un modello di cuscinetto adatto per implementazioni in sistemi piani, il secondo un modello completo tridimensionale.

4.8.1 Modello di cuscinetto bidimensionale

In questo paragrafo verrà proposta una modellazione di un cuscinetto a strisciamento valido per sistemi piani che si baserà sulla scrittura di equazioni di vincolo opportunamente modificate. Questo permetterà di non stravolgere la deduzione delle equazioni del moto mediante l'approccio illustrato nei capitoli precedenti, ma di integrarsi agevolmente.

La descrizione di una coppia rotoidale piana prevede che si imponga la coincidenza degli assi delle due superfici cilindriche tra i due corpi i e j da vincolare, condizione che può essere espressa mediante la coincidenza di due punti P_i e P_j :

$$\vec{P}_i \equiv \vec{P}_j \quad (4.7)$$

Nel caso in cui si preveda che le superfici a contatto debbano avere un certo gioco radiale (δ) le equazioni si modificano in:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_j + \vec{\varepsilon} \quad (4.8)$$

dove $\vec{\varepsilon}$ rappresenta l'eccentricità dell'accoppiamento e il suo modulo resta compreso tra 0 (assenza di eccentricità) e δ (contatto tra le due superfici). In un funzionamento a regime il valore e la posizione angolare (anomalia) dell'eccentricità risulta una funzione dell'entità e della direzione del carico. I loro valori possono essere calcolati con le teorie della sustentazione idrodinamica. Come è stato accennato il sottosistema cuscinetto a strisciamento a regime di lubrificazione idrodinamico è composto da due corpi e da un fluido che si interpone tra essi. Nell'ipotesi di stazionarietà⁷, le equazioni che governano

⁷ In realtà per la corretta introduzione delle equazioni di Reynolds nelle equazioni della dinamica bisognerebbe includere nell'espressione anche i termini non stazionari ($\frac{d}{dt}$). Questi termini comportano notevoli complicazioni computazionali che verranno tuttavia

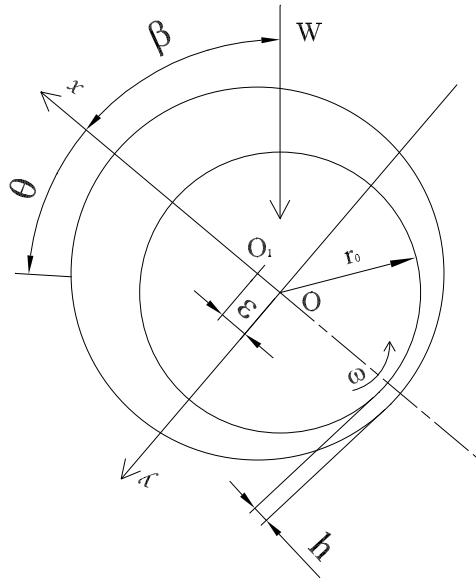


Figura 4.31: Nomenclatura del cuscinetto bidimensionale

la fluidodinamica del fluido nel meato sono quelle dedotte da Reynolds [26]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu V_0 \frac{dh}{dx} \quad (4.9)$$

dove p è la pressione, h è l'altezza del meato, μ è la viscosità del fluido, V_0 è la velocità periferica relativa nel punto ad eccentricità minima, x rappresenta la coordinata curvilinea circonferenziale e z quella assiale.

Aggiungendo l'ulteriore ipotesi (detta ipotesi di Michell) secondo la quale si trascura in direzione longitudinale la portata indotta dal gradiente di pressione si riesce a semplificare la (4.9) in:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega r_0 \frac{dh}{dx} \quad (4.10)$$

affrontate nel paragrafo successivo riguardo la modellazione di un cuscinetto completo.

Poiché il meato h è una funzione solo della x (i.e. $h = h(x)$) l'equazione (4.10) può essere riscritta come:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu\omega \frac{r_0}{h^3} \frac{dh}{dx} \quad (4.11)$$

Imponendo adesso come condizioni al contorno che la pressione sia nulla per $z = \pm B/2$ ovvero sia nulla ai bordi del cuscinetto e che presenti un massimo per $z = 0$ (condizione di simmetria) e risolvendo rispetto alla pressione l'equazione (4.11) otteniamo:

$$p = 3\mu\omega \frac{r_0}{h^3} \frac{dh}{dx} \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right) \quad (4.12)$$

Se si impone adesso un andamento del meato del tipo:

$$h = \delta (1 + n \cos \theta) \quad , \quad (4.13)$$

dove

$$n = \frac{|\vec{\epsilon}|}{\delta}$$

è detto rapporto di eccentricità. Considerato che $x = r_0\theta$ si ottiene:

$$p = -3\mu \frac{\omega n}{\delta^2} \frac{\sin \theta}{(1 + n \cos \theta)^3} \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right) \quad (4.14)$$

La pressione p agisce radialmente lungo l'arco definito dai valori $0 \leq \theta \leq \pi$. Se si scompone la pressione secondo le due direzioni X e Y è possibile, integrando sull'intero arco, calcolare il carico $\vec{W} = \{ W_x \ W_y \}^T$ risultante:

$$W_x = \int_{B/2}^{-B/2} \int_{\pi}^0 p \sin \theta r_0 d\theta dz = \frac{\mu\omega r_0 B^3}{\delta^2} \frac{\pi}{4} \frac{n}{(1 - n^2)^{3/2}} \quad (4.15)$$

$$W_y = \int_{B/2}^{-B/2} \int_{\pi}^0 p \cos \theta r_0 d\theta dz = \frac{\mu\omega r_0 B^3}{\delta^2} \frac{n^2}{(1 - n^2)^2} \quad (4.16)$$

$$W = \sqrt{W_y^2 + W_x^2} \quad (4.17)$$

Dalle (4.15), (4.16) e (4.17) si definisce la capacità di carico del cuscinetto in funzione delle caratteristiche geometriche (r_0, B, δ), cinematiche (ω) e delle proprietà del fluido (μ).

Esempio numerico: manovellismo di spinta con cuscinetto a strisciamento

Per meglio comprendere come inserire le (4.15) e (4.16) nella simulazione di un sistema multibody si analizzi il seguente esempio. Si consideri il manovellismo ordinario mostrato in Figura 4.32. Il meccanismo si compone di tre membri (manovella, biella e pattino) più il telaio. Ai fini della modellazione si può ridurre a due i membri mobili e trascurare il pattino preservandone però la condizione di vincolo. E' stata inoltre modellata la coppia rotoidale tra manovella e telaio come ideale mentre quella tra manovella e biella come un cuscinetto con regime di lubrificazione idrodinamico.

Con riferimento alla nomenclatura di Figura 4.32 è possibile scrivere le equazioni cinematiche di vincolo come:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= q_1 - \frac{l}{2} \cos q_3 \\
 \Psi_2 &= q_2 - \frac{l}{2} \sin q_3 \\
 \Psi_3 &= q_1 + \frac{l}{2} \cos q_3 - q_4 + \frac{L}{2} \cos q_6 + \epsilon_1 \\
 \Psi_4 &= q_2 + \frac{l}{2} \sin q_3 - q_5 + \frac{L}{2} \sin q_6 + \epsilon_2 \\
 \Psi_5 &= q_5 + \frac{L}{2} \sin q_6
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

dove ϵ_1 e ϵ_2 sono rispettivamente le proiezioni di $\vec{\epsilon}$ lungo X e Y . La strategia risolutiva sarà la seguente:

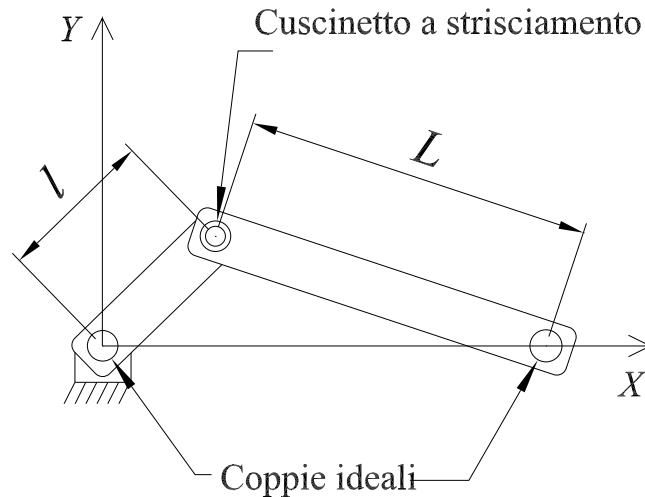


Figura 4.32: Manovellismo di spinta con cuscinetto a strisciamento

1. Per ogni step di integrazione si calcolano le reazioni vincolari, $\lambda_3 = W_X$ e $\lambda_4 = W_Y$ ⁸
2. A partire dalla conoscenza del carico totale $W = \sqrt{W_y^2 + W_x^2} = \sqrt{W_X^2 + W_Y^2}$ e della velocità angolare relativa $\omega = \dot{q}_6 - \dot{q}_3$ per mezzo delle (4.15) e (4.16) si calcola n da cui W_x e W_y e quindi $\vec{\epsilon}$ e le sue componenti ϵ_1 e ϵ_2 rispettivamente lungo X e Y .
3. I valori di ϵ_1 e ϵ_2 calcolati al punto precedente serviranno per aggiornare le equazioni di vincolo (4.18).
4. Il procedimento si ripete iterativamente fino a convergenza per ogni step di integrazione.

⁸Attenzione a non confondere le W_x e W_y con le W_X e W_Y , in quanto le prime sono le proiezioni del carico nel sistema locale del cuscinetto (Figura 4.31) mentre le seconde sono le componenti del carico nel sistema inerziale (Figura 4.32).

Assumendo per il manovellismo in esame i dati numerici riassunti in Tabella 4.1, l'integrazione delle equazioni del moto offre risultati interessanti, specie se confrontati con la simulazione dello stesso manovellismo con tutte le coppie cinematiche ideali.

Massa della manovella	m_1	0.20 kg
Massa della biella	m_2	0.40 kg
Momento di inerzia baricentrico della manovella	I_1	0.15e-4 kg m ²
Momento di inerzia baricentrico della biella	I_2	4.03e-4 kg m ²
Lunghezza manovella	l	0.030 m
Lunghezza biella	L	0.110 m
Raggio perno	r_0	0.025 m
Lunghezza perno	B	0.040 m
Gioco radiale	δ	.254e-4 m
Viscosità dell'olio	μ	0.0242 kg/(ms)

Tabella 4.1: Dati numerici

Si considerino i risultati relativi alla biella. Mentre le differenze tra la traiettoria del suo baricentro sono praticamente nulle, esaminando le accelerazioni (Figura 4.33), si nota che la modellazione del cuscinetto a strisciamento porta ad una leggera differenza tra i grafici (particolare a destra). Questa diversità è dovuta al sovrapporsi al moto periodico della biella, di un moto dovuto alla variazione di posizione del guscio interno rispetto a quello esterno. Graficando infatti l'andamento della traiettoria del centro del guscio interno del cuscinetto rispetto al guscio esterno si ottiene la legge oraria dell'eccentricità (Figura 4.34). Come è facile notare dopo un brevissimo transitorio la traiettoria risulta periodica. E' importante notare che tale periodicità si giustifica considerando che l'eccentricità è funzione dell'entità del

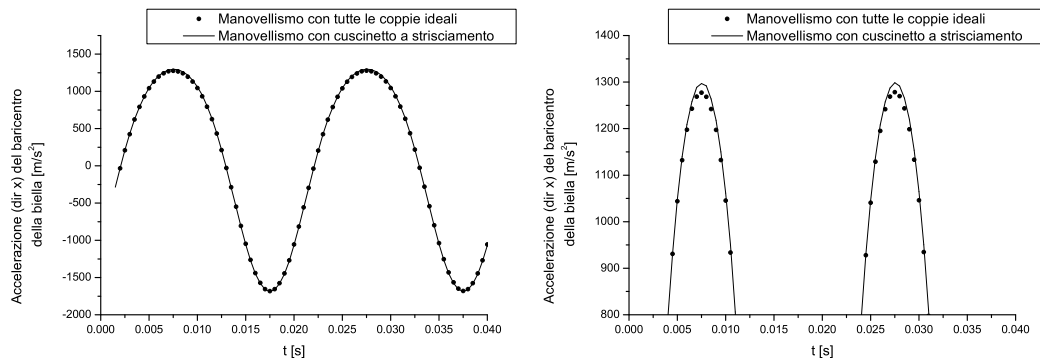


Figura 4.33: Confronto tra le accelerazioni della biella: a scala piena sulla sinistra, un particolare sulla destra

carico agente sulla coppia cinematica, della sua direzione e della velocità di rotazione relativa tra il guscio interno ed esterno.

4.8.2 Modello di cuscinetto tridimensionale

In questo paragrafo verrà descritto un modello che permetta l'implementazione di un cuscinetto a strisciamento comprensivo degli effetti di *squeeze*, di inclinazione del proprio asse e comprensivo di effetti di attrito.

L'introduzione di una coppia rotoidale in un sistema multibody spaziale comporta l'aggiunta di 5 equazioni scalari (5 gradi di vincolo cinematico). Il modello proposto non comporterà la scrittura di equazioni di vincolo, bensì verranno introdotte nelle equazioni del moto 5 reazioni generalizzate (forze e coppie). Così facendo anziché avere vincoli cinematici sulle posizioni avremo dei vincoli per così dire di forza. Questa soluzione ha l'ulteriore vantaggio di lasciare inalterati i gradi di libertà del sistema, evitando in molti casi di avere a che fare con sistemi sovrabbondanti. A tale proposito si consideri il caso di un rotore (ovvero un albero con al centro un volano) montato tra

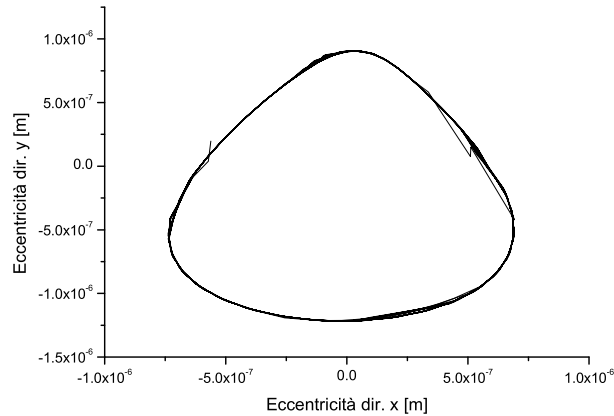


Figura 4.34: Traiettorie del centro del guscio interno rispetto a quello del guscio esterno del cuscinetto

due cuscinetti a strisciamento. La modellazione di tali cuscinetti mediante coppie rotoidali ideali comporta che le equazioni di vincolo siano sovrabbondanti, rendendo impossibile il calcolo esatto delle reazioni vincolari⁹. Con la modellazione dei cuscinetti mediante vincoli di forza, per contro, non si corre il rischio di avere sistemi sovrabbondanti e si riesce correttamente ad avere una stima di tutte le reazioni vincolari.

Anche per questo caso il sottosistema cuscinetto a strisciamento a regime di lubrificazione idrodinamico è composto da due corpi e da un fluido che si interpone tra essi. Nell'ipotesi di bidimensionalità del fluido, le equazioni che governano la sua dinamica nel meato sono quelle dedotte da Reynolds (comprensive dei termini dipendenti dal tempo) [26]:

⁹È appena il caso di notare che per la risoluzione di sistemi con vincoli sovrabbondanti le strategie di soluzione comportano l'eliminazione di alcuni vincoli. Questo procedimento non permette la determinazione delle reazioni di tali vincoli eliminati e la stima errata di quelle dei vincoli preservati.

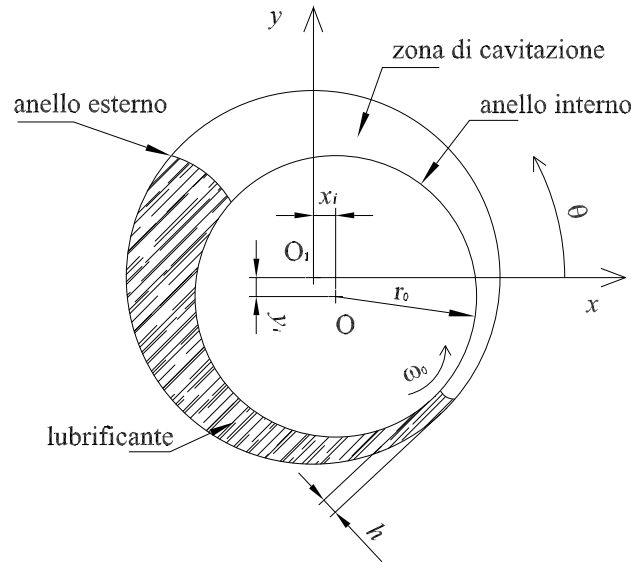


Figura 4.35: Nomenclatura del cuscinetto

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left(\omega_0 \frac{dh}{d\theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \quad (4.19)$$

dove p è la pressione del fluido, h è l'altezza del meato, μ è la viscosità del fluido, r_0 il raggio del guscio interno, ω_0 è la velocità angolare del guscio interno relativa a quello esterno, θ rappresenta la coordinata angolare e z quella assiale. L'altezza del meato h si può calcolare (Figura 4.35) come:

$$h = \delta - x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \quad (4.20)$$

dove δ è il gioco massimo tra i due gusci e x_i e y_i sono le coordinate del centro del guscio interno rispetto ad un sistema di riferimento centrale sul guscio esterno (Figura 4.35).

Nel caso in cui per il cuscinetto valga l'ipotesi geometrica¹⁰ $B/2r_0 < 1$

¹⁰Tale ipotesi è soddisfatta da molti cuscinetti a strisciamento di comune applicazione.

dove con B si è indicata l'estensione assiale del cuscinetto, si può semplificare nella (4.19) il termine $h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta}$ e ottenere:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left(\omega_0 \frac{dh}{d\theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \quad (4.21)$$

Integrando la (4.21) tenendo conto della (4.20), si ottiene per il profilo di pressione il seguente andamento:

$$p(\theta, z) = \frac{3\mu z(z-B)}{h^3} [\omega_0 (x_i \sin \theta - y_i \cos \theta) - 2(\dot{x}_i \cos \theta - \dot{y}_i \sin \theta)] \quad (4.22)$$

Il primo termine della (4.22) dentro le parentesi quadre è il contributo dovuto alla velocità tangenziale relativa tra il guscio esterno e quello interno; il secondo termine è il contributo dovuto all'effetto di *squeeze* e dipende dalla velocità relativa tra i due gusci in direzione radiale.

Si è inoltre considerato l'effetto di una possibile leggera inclinazione dell'asse del cuscinetto (Figura 4.36). In tali condizioni lo spessore del meato può essere calcolato mediante la seguente espressione:

$$h = \delta - \left[x_i - (x_i - x_j) \frac{z}{B} \right] \cos \theta - \left[y_i - (y_i - y_j) \frac{z}{B} \right] \sin \theta \quad (4.23)$$

nella quale x_i e y_i sono le coordinate del centro del guscio interno all'estremità $z = 0$ rispetto al corrispondente centro del guscio esterno, mentre le x_j e y_j sono le coordinate del centro del guscio interno all'estremità $z = B$ rispetto al corrispondente centro del guscio esterno.

In questo caso il meato diventa dipendente anche dalla variabile z e ciò rende alquanto complessa l'integrazione della (4.21). A questo punto, considerando che la possibilità di inclinazione dell'asse del cuscinetto è comunque

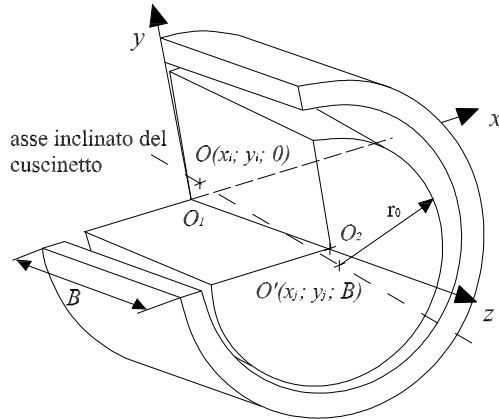


Figura 4.36: Cuscinetto con asse inclinato

ridotta, è possibile considerare la soluzione (4.22) ancora valida con la differenza che adesso si sostituirà al suo interno l'espressione di h data dalla (4.23), ottenendo pertanto:

$$p(\theta, z) = 3\mu z(z - B) \frac{[\omega_0(x \sin \theta - y \cos \theta) - 2(\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta)]}{\delta - x \cos \theta - y \sin \theta} \quad (4.24)$$

dove:

$$\begin{aligned} x &= x_i - (x_i - x_j) \frac{z}{B} \\ y &= y_i - (y_i - y_j) \frac{z}{B} \\ \dot{x} &= \dot{x}_i - (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \frac{z}{B} \\ \dot{y} &= \dot{y}_i - (\dot{y}_i - \dot{y}_j) \frac{z}{B} \end{aligned}$$

Il modello descritto, quindi, richiede la conoscenza della posizione e velocità delle due estremità di ciascun cuscinetto rispetto al corrispondente

guscio esterno. In tal caso le reazioni del cuscinetto possono essere calcolate come:

$$W_x = - \int_0^B \int_0^{2\pi} p(\theta, z) r_0 \cos \theta d\theta dz \quad (4.25a)$$

$$W_y = \int_0^B \int_0^{2\pi} p(\theta, z) r_0 \sin \theta d\theta dz \quad (4.25b)$$

$$M_x = - \int_0^B \int_0^{2\pi} p(\theta, z) z r_0 \sin \theta d\theta dz \quad (4.25c)$$

$$M_y = \int_0^B \int_0^{2\pi} p(\theta, z) z r_0 \cos \theta d\theta dz \quad (4.25d)$$

Per tenere in conto gli effetti della cavitazione le formule precedenti dovranno essere calcolate solo nel dominio di integrazione nel quale la pressione p assume valore positivo.

L'attrito nei cuscinetti a strisciamento

Si esaminerà ora come tenere in conto gli effetti dell'attrito nel cuscinetto a strisciamento. Sebbene sia possibile calcolare l'attrito mediante complesse forme integrali [24], la pratica mostra che formule semiempiriche alquanto semplici riescono a stimare tali effetti in una maniera soddisfacente [31]. Un importante parametro tipico di un cuscinetto a strisciamento è il numero di Sommerfeld S , che può essere definito come:

$$S = \frac{p_m \phi^2}{\mu \omega_0} \quad (4.26)$$

nella quale la pressione media p_m e il gioco relativo ϕ , possono essere calcolati come

$$p_m = \frac{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{2r_0 B} \quad \phi = \frac{\delta}{2r_0}$$

A partire dalla (4.26) è possibile calcolare il coefficiente di attrito f mediante la seguente espressione semiempirica:

$$f = \frac{3\phi}{S} \quad S < 1 \quad (4.27a)$$

$$f = \frac{3\phi}{\sqrt{S}} \quad S \geq 1 \quad (4.27b)$$

Appare chiaro che si possono avere due comportamenti distinti: il primo è quando $S < 1$ ovvero il cuscinetto sta ruotando ad alta velocità; il secondo è quando $S > 1$ ovvero quando il cuscinetto sopporta elevati carichi e ruota a velocità basse. A partire dalla conoscenza del coefficiente f di attrito, la coppia resistente M_z può essere calcolata come:

$$M_z = fr_0\sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (4.28)$$

È interessante notare che nel caso di $S < 1$ la coppia d'attrito non dipende dai carichi applicati ma solo dalla velocità di rotazione, ovvero:

$$M_z = \frac{6r_0^2 B\omega_0\mu}{\phi} \quad S < 1 \quad (4.29)$$

Il modello d'attrito espresso dalla (4.28) può essere inserito anche in una coppia rotoidale ideale come coppia di azione-reazione lungo l'asse di rotazione relativa e ben si presta all'implementazione anche in un sistema piano come integrazione del modello di cuscinetto a strisciamento bidimensionale proposto nei precedenti paragrafi.

Un ulteriore vantaggio nell'applicazione della (4.28) è quello di avere un coefficiente di attrito che dipende dalla velocità di rotazione, dal carico, dalla viscosità del lubrificante e dalle proprietà geometriche del cuscinetto. In Figura

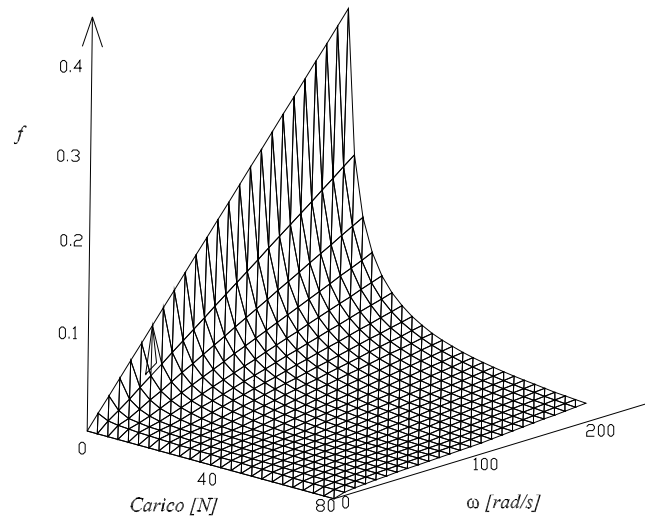


Figura 4.37: Coefficiente di attrito per un cuscinetto a strisciamento

4.37 un tipico andamento di tale coefficiente di attrito è stato tracciato in funzione del carico e della velocità di rotazione. Le altre proprietà del cuscinetto sono deducibili dalla Tabella 4.3. Si tenga presente che valori usuali del coefficiente di attrito per cuscinetti a strisciamento con regime di lubrificazione idrodinamica è compreso tra 0.015 e 0.03.

Osservazioni utili per l'implementazione numerica

Si Affronterà adesso il problema dell'implementazione del modello di cuscinetto proposto all'interno di sistemi multibody spaziali. Gli input costanti durante l'integrazione sono le proprietà geometriche del cuscinetto e la viscosità del lubrificante¹¹. Gli input variabili sono la velocità angolare relativa

¹¹A rigore la viscosità dipende dalla temperatura del lubrificante che a sua volta dipende dalla potenza dissipata e dalla tipologia di raffreddamento utilizzata. Per normali applicazioni si può scegliere una viscosità alla temperatura supposta di funzionamento.

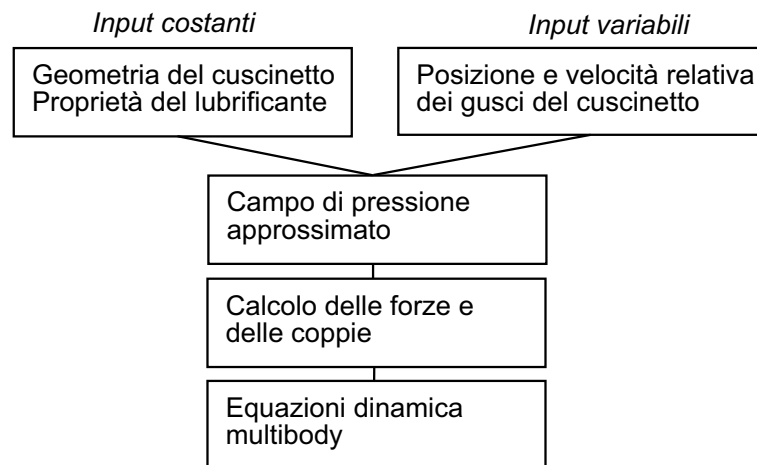


Figura 4.38: Schema di calcolo per un cuscinetto a strisciamento

tra i due gusci, la posizione e la velocità relativa tra i centri estremali del cuscinetto (ovvero dei punti O e O' rispetto a O_1 e O_2 , si veda a tal proposito la Figura 4.36). Ad ogni passo di integrazione le espressioni (4.25) e (4.28) devono essere calcolate (Figura 4.38).

La funzione p assume rapidamente elevati valori quando $h \rightarrow 0$ e la sua integrazione risulta spesso inaccurata o impossibile. A tal proposito, un controllo intelligente sul valore di h può essere eseguito per evitare che lo spessore del meato sia insufficiente a garantire la separazione delle superfici e il valore del coefficiente di attrito raggiunga valori troppo elevati. In questi casi un algoritmo ibrido che tenga in conto anche un possibile contatto tra le superfici [28] può essere impiegato con successo. In alcuni casi si possono introdurre ulteriori semplificazioni per risolvere gli integrali (4.25): se il cuscinetto ruota con elevata velocità il termine $2(x \cos \theta - y \sin \theta)$, che descrive l'effetto di *squeeze* nella (4.24), può essere trascurato. Nel caso in cui la velocità di rotazione sia costante e i carichi siano pressochè costanti, il coefficiente d'attrito f può essere assunto costante e si può evitare di aggiornare il suo valore ad

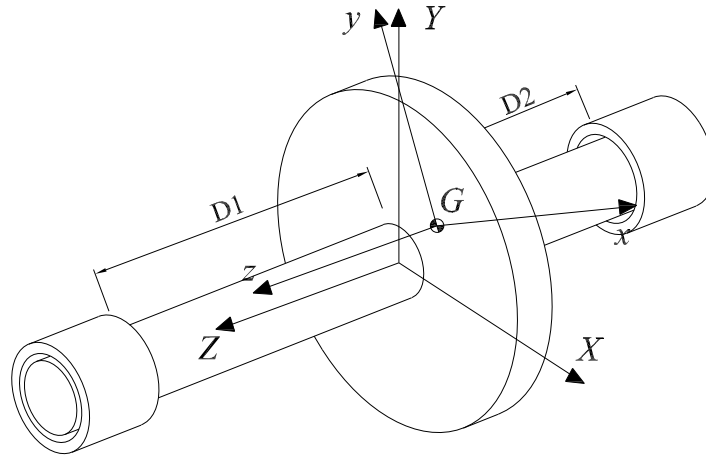


Figura 4.39: Rotore non bilanciato tra due cuscinetti a strisciamento

ogni step di integrazione.

Inoltre, l'effetto di inclinazione dell'asse può essere trascurato se il cuscinetto è sufficientemente lungo. In questa evenienza il campo di pressioni che entra negli integrali (4.25) può stimarsi con la (4.22) anzichè con la (4.24) e gli integrali possono essere risolti algebricamente.

Un esempio

Si consideri un rotore montato tra due cuscinetti a strisciamento lubrificati. Si assume che tale corpo stia ruotando a velocità costante e che sia sbilanciato, ovvero che il suo baricentro non si trovi sull'asse di rotazione determinato dai cuscinetti (Figura 4.39).

Le proprietà geometriche e di massa del rotore sono riassunte in Tabella 4.2, mentre le caratteristiche dei cuscinetti e del lubrificante sono riportate in Tabella 4.3.

Massa del rotore	m	1.0 kg
Momenti di Inerzia baricentrici	$[I1; I2; I3]$	[0.01; 0.01; 0.3] kg m ²
Eccentricità	e	0.001 m
Distanza del cuscinetto 1 da G	$D1$	0.2 m
Distanza del cuscinetto 2 da G	$D2$	0.1 m
Velocità di rotazione	ω	100.0 rad/s

Tabella 4.2: Proprietà geometriche e inerziali del rotore

Raggio dei cuscinetti	r_0	0.02 m
Lunghezza dei cuscinetti	B	0.02 m
Gioco radiale	δ	0.0003 m
Viscosità del lubrificante	μ	0.0242 kg/ms

Tabella 4.3: Proprietà dei cuscinetti e del lubrificante

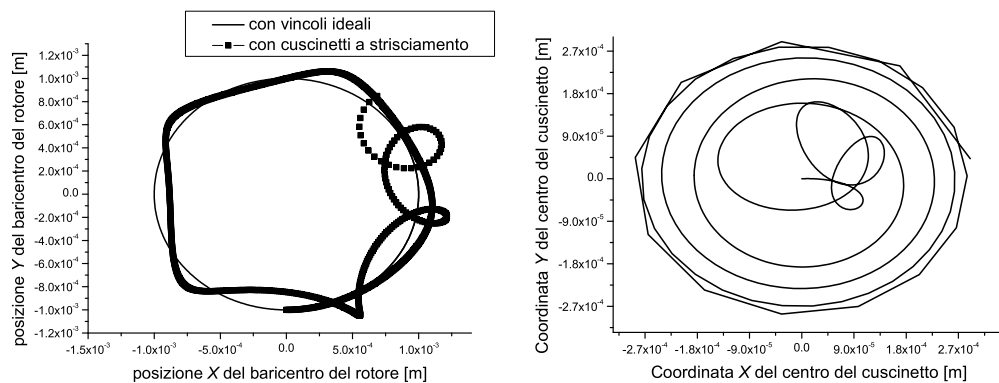


Figura 4.40: Traiettoria del baricentro del rotore e traiettoria del centro di uno dei cuscinetti a strisciamento

La posizione nello spazio del rotore può essere descritta mediante 7 coordinate generalizzate $\{q\} = \{X \ Y \ Z \ e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3\}^T$. Le equazioni della dinamica possono essere scritte usando una formulazione di indice 3 (vincoli imposti sulle posizioni) come:

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_q]^T \{\lambda\} = \{Q\} \\ \{\Psi\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.30)$$

Le equazioni di vincolo presenti saranno quella relativa alla normalizzazione dei parametri di Eulero e quella di impedimento della traslazione lungo l'asse Z :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 = 0 \\ \Psi_2 &\equiv z = 0 \end{aligned}$$

Il vettore delle forze generalizzate Q si calcola come:

$$\{Q\} = \begin{cases} W_{xA} + W_{xB} \\ W_{yA} + W_{yB} \\ 0 \\ 8 [\dot{G}]^T [J] [\dot{G}] \{e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3\}^T + 2 [E]^T \{\tau\} \end{cases} \quad (4.31)$$

dove il vettore delle coppie $\{\tau\}$ si calcola come:

$$\{\tau\} = \begin{cases} M_{xA} + M_{xB} - W_{yA}D1 + W_{yB}D2 \\ M_{yA} + M_{yB} + W_{xA}D1 - W_{xB}D2 \\ M_{zA} + M_{zB} \end{cases} \quad (4.32)$$

Uno dei risultati interessanti dalla soluzione delle equazioni del moto è il grafico della traiettoria del baricentro del rotore (Figura 4.40, a sinistra). Nel

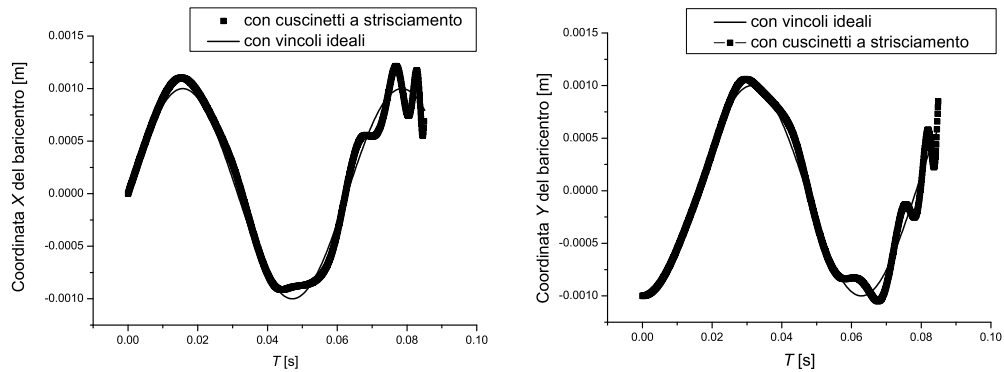


Figura 4.41: Coordinate del baricentro in funzione del tempo

caso di sistema vincolato con coppie rotoidali ideali, tale traiettoria sarebbe una circonferenza con raggio pari all'eccentricità del centro di massa. Dalla simulazione si evince che, quando il rotore è montato su cuscinetti a strisciamento, la sustentazione idrodinamica modifica la traiettoria del baricentro creando, dopo un breve transitorio, delle orbite nell'intorno della traiettoria circolare ideale. Tale comportamento è imputabile al fatto che i centri dei cuscinetti descrivono una traiettoria circolare (Figura 4.40, a destra). A completamento dell'indagine in Figura 4.41 gli andamenti della coordinata X e Y del baricentro del rotore calcolati mediante la simulazione sono stati confrontati con quelli di un rotore montato su due coppie rotoidali ideali.

CAPITOLO 5

Algebra duale

In questo capitolo vengono richiamate le basi teoriche dell'algebra duale. In particolare mediante questa formulazione è stato possibile modellare la presenza di giochi, tolleranze ed errori di montaggio nei sistemi meccanici. Come esempio applicativo si riporta l'analisi del rendimento di un giunto Cardanico in condizioni di funzionamento reali. I risultati ottenuti hanno permesso di condurre una identificazione dei parametri validata dai risultati ottenuti dall'analisi sperimentale per mezzo del banco giunti allestito presso il Laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Meccanica.

5.1 Algebra dei numeri duali

Si definisce numero duale \hat{a} la somma

$$\hat{a} = a + \varepsilon a_0 \quad (5.1)$$

in cui:

- per definizione

$$\varepsilon \neq 0 , \quad (5.2)$$

$$\varepsilon^2 = 0 , \quad (5.3)$$

- i numeri reali a e a_0 costituiscono, rispettivamente, la componente reale e quella duale.

Appare evidente l'analogia tra numeri duali e numeri complessi. Dicesi parametro del numero duale il rapporto

$$p = \frac{a}{a_0} . \quad (5.4)$$

5.1.1 Operazioni sui numeri duali

Per i numeri duali possono definirsi le note operazioni algebriche.

Somma e sottrazione

$$\widehat{a} \pm \widehat{b} = (a \pm b) + \varepsilon (a_0 \pm b_0) . \quad (5.5)$$

Moltiplicazione

$$\begin{aligned} \widehat{a} \cdot \widehat{b} &= (a + \varepsilon a_0) \cdot (b + \varepsilon b_0) \\ &= ab + \varepsilon (ab_0 + a_0b) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Divisione

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}} &= \frac{a + \varepsilon a_0}{b + \varepsilon b_0} \\ &= \frac{a + \varepsilon a_0}{b + \varepsilon b_0} \frac{b - \varepsilon b_0}{b - \varepsilon b_0} \\ &= \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a_0 b - ab_0}{b^2} . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Da tale espressione è evidente che resta non definita la divisione per un numero duale puro, ovvero per un numero duale senza componente reale.

Elevazione a potenza

$$\begin{aligned}\widehat{a}^n &= (a + \varepsilon a_0)^n \\ &= a^n + \varepsilon n a_0 a^{n-1} .\end{aligned}\quad (5.8)$$

Per $n = \frac{1}{2}$ si ha l'operazione di radice quadrata e la precedente si particularizza nella seguente

$$\sqrt{\widehat{a}} = \sqrt{a} + \varepsilon \frac{a_0}{2\sqrt{a}} , \quad (5.9)$$

valida per $a > 0$.

Si definisce valore assoluto di un numero duale la quantità

$$|\widehat{a}| = \sqrt{\widehat{a}^2} = \sqrt{(a^2 + \varepsilon a a_0)} . \quad (5.10)$$

Stante la (5.9), quest'ultima fornisce

$$|\widehat{a}| = |a| + \varepsilon \frac{a}{|a|} a_0 . \quad (5.11)$$

Conseguentemente, la seguente formula può in alternativa essere impiegata

$$|\widehat{a}| = \begin{cases} \widehat{a} & a > 0 \\ -\widehat{a} & a < 0 \\ 0 & \widehat{a} = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

5.1.2 La funzione di un numero duale

Al fine di definire la funzione $F(\widehat{a})$ di un numero duale, è opportuno esprimere tale funzione in forma duale, ovvero porre

$$\widehat{y}(\widehat{x}) = f(x, x_0) + \varepsilon f_0(x, x_0) , \quad (5.13)$$

con $f(x, x_0)$ e $f_0(x, x_0)$ funzioni reali delle variabili reali x ed x_0 e procedere in maniera analoga al caso di funzioni di una variabile complessa. Una funzione duale \widehat{y} a valore singolo di una variabile duale \widehat{x} dicesi analitica¹ all'interno di un dominio se per ogni punto del dominio medesimo possiede la derivata. Tale derivata può formalmente esprimersi come segue

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \frac{df(x, x_0) + \varepsilon df_0(x, x_0)}{dx + \varepsilon dx_0}$$

Si sviluppano ora le condizioni necessarie affinché una funzione \widehat{y} sia analitica.

Se si mantiene $\Delta x_0 = 0$, si avrà

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \lim_{\Delta\widehat{x}=\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\widehat{y}}{\Delta\widehat{x}} \right)_{x_0} = \frac{\partial\widehat{y}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial x} . \quad (5.14)$$

Similmente, per $\Delta x = 0$, si avrà

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \lim_{\Delta\widehat{x}=\varepsilon\Delta x_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\widehat{y}}{\Delta\widehat{x}} \right)_x = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\widehat{y}}{\partial x_0} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) . \quad (5.15)$$

Poiché il valore del limite del rapporto incrementale dovrà essere sempre lo stesso, indipendentemente dalle modalità con le quali Δx ed Δx_0 tendono a zero, si impone che sia

$$\frac{\partial\widehat{y}}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\widehat{y}}{\partial x_0} , \quad (5.16)$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x_0} , \quad (5.17)$$

condizione richiesta affinché la funzione sia analitica.

Da tale uguaglianza, discendono le condizioni²

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0 , \quad (5.18a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} , \quad (5.18b)$$

¹Talvolta il termine analitica è sostituito da altri, quali *monogenica*, *olomorfa*, *regolare*.

²Tali condizioni, nel campo delle funzioni complesse, sono note quali *equazioni differenziali di Cauchy-Riemann*.

dalle quali si possono trarre le seguenti conclusioni:

- la funzione f può essere funzione solo di x ;
- la funzione f_0 dovrà presentarsi nella forma

$$f_0(x, x_0) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + h(x), \quad (5.19)$$

con $h(x)$ funzione solo di x .

In definitiva, stante le (5.18) e la (5.19), la derivata di \hat{y} vale

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \left(x_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Osservando la precedente espressione, si può quindi affermare che la derivata rispetto alla variabile duale \hat{x} è formalmente identica a quella rispetto alla componente reale x .

Inoltre, la funzione analitica duale di una variabile reale x dovrà assumere la seguente espressione

$$\hat{y}(x) = f(x) + \varepsilon f_0(x). \quad (5.21)$$

Quanto detto ci consente di affermare che l'espansione in serie di Taylor di una funzione \hat{y} di una variabile \hat{x} risulta essere

$$\hat{y}(\hat{x}) = \hat{y}(x) + \varepsilon x_0 \frac{d\hat{y}}{dx}. \quad (5.22)$$

Ai fini pratici, si può immaginare di svolgere tutte le operazioni come se si stesse operando con le normali regole dell'algebra e del calcolo differenziale, salvo poi imporre $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0$.

5.1.3 Funzioni trigonometriche di numeri duali

Un angolo duale è definito dall'espressione

$$\widehat{\theta} = \theta + \varepsilon s , \quad (5.23)$$

ove, con riferimento a due rette sghembe a e b ,

- θ è l'angolo tra le rette medesime;
- s è la minima distanza.

L'applicazione della (5.22) conduce alle seguenti uguaglianze:

$$\sin \widehat{\theta} = \sin \theta + \varepsilon s \cos \theta , \quad (5.24)$$

$$\cos \widehat{\theta} = \cos \theta - \varepsilon s \sin \theta , \quad (5.25)$$

$$\tan \widehat{\theta} = \tan \theta + \varepsilon s (1 + \tan^2 \theta) , \quad (5.26)$$

E' utile far osservare che tutte le uguaglianze notevoli della trigonometria si estendono agli angoli duali. In questo modo è possibile scrivere

$$\sin^2 \widehat{\theta} + \cos^2 \widehat{\theta} = 1 , \quad (5.27a)$$

$$\sin 2\widehat{\theta} = 2 \sin \widehat{\theta} \cos \widehat{\theta} , \quad (5.27b)$$

$$\cos 2\widehat{\theta} = \cos^2 \widehat{\theta} - \sin^2 \widehat{\theta} , \quad (5.27c)$$

$$\tan \frac{\widehat{\theta}}{2} = \frac{1 - \cos \widehat{\theta}}{\sin \widehat{\theta}} \quad (5.27d)$$

5.2 Algebra dei vettori linea

5.2.1 La teoria delle *screw*

La teoria delle screw è basata principalmente su due teoremi [32], uno riguardante gli spostamenti di un corpo rigido, l'altro le forze agenti su un corpo

rigido. Il primo di tale teoremi è dovuto al matematico Giulio Giuseppe Mozzi del Garbo e consente di ridurre univocamente uno spostamento rigido ad una rotazione attorno ad un asse a e ad una simultanea traslazione attorno allo stesso. Dunque, per il moto relativo tra due corpi si stabilisce una corrispondenza tra quello effettivo e quello che gli stessi avrebbero allorché collegati attraverso una coppia elicoidale di asse a .

Il secondo teorema, invece, è sulla riduzione di un sistema di forze agenti su un corpo rigido ad una risultante \vec{R} e ad un momento \vec{C} parallelo alla risultante medesima. Alla riduzione può associarsi una linea retta a rispetto ai cui punti valutare i momenti delle forze.

5.2.2 Torsore, *screw*, *twist* e *wrench*

Si definisce *torsore* (*screw* nella letteratura anglosassone) $\mathbb{T} \equiv \left\{ \vec{W} \vec{V} \right\}^T$ una coppia di vettori \vec{W} e \vec{V} per i quali, in generale,

$$\vec{W} \cdot \vec{V} \neq 0, \quad (5.28)$$

$$\left| \vec{W} \right| \neq 1. \quad (5.29)$$

Con riferimento allo schema di Figura 5.1, a ciascun torsore \mathbb{T} si può associare un asse, ovvero un vettore linea \mathcal{S} . È possibile scomporre il vettore \vec{V} in due componenti \vec{V}^n , normale, e \vec{V}^p , parallela, al vettore \vec{W} , cosicché

$$\vec{V} = \vec{V}^p + \vec{V}^n = p\vec{W} + \vec{V}^n. \quad (5.30)$$

Essendo

$$\vec{W} \cdot \vec{V}^n = 0, \quad (5.31)$$

esisterà un punto P dello spazio per il quale

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{W} = \vec{V}^n. \quad (5.32)$$

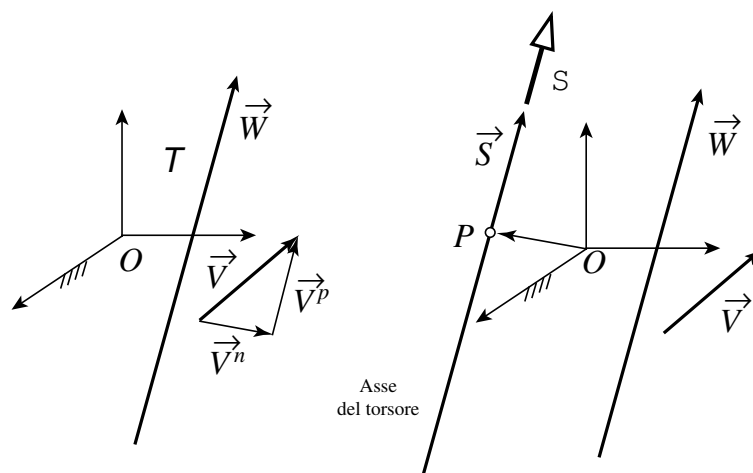


Figura 5.1: Definizione dell'asse di un torsore

Risolvendo la (5.32) rispetto a \overrightarrow{OP}^3 si ottiene la posizione del punto di riferimento P

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{W} \times \vec{V}^n}{\vec{W} \cdot \vec{W}}. \quad (5.33)$$

Resta così definito il vettore linea S passante per P e parallelo a \vec{W} , denominato *asse del torsore* T . In particolare, indicati con

$$w = \left| \vec{W} \right|, \quad (5.34)$$

il *modulo* del torsore, e con

$$p = \frac{\vec{W} \cdot \vec{V}}{\vec{W} \cdot \vec{W}}, \quad (5.35)$$

³Infatti, premoltiplicando a primo ed a secondo membro per la medesima quantità segue

$$\vec{W} \times (\overrightarrow{OP} \times \vec{W}) = \vec{W} \times \vec{V}^n,$$

ovvero

$$\overrightarrow{OP} (\vec{W} \cdot \vec{W}) - \vec{W} (\vec{W} \cdot \overrightarrow{OP}) = \vec{W} \times \vec{V}^n.$$

Stante l'ortogonalità di \vec{W} e \vec{P} resta giustificata la (5.33).

il *passo* o *parametro* del torsore, sarà $\vec{W} = w\vec{S}$ ed il suddetto vettore linea resta quindi definito come

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{c} w\vec{S} \\ w\vec{OP} \times \vec{S} + pw\vec{S} \end{array} \right\}. \quad (5.36)$$

In definitiva,

- al torsore può associarsi un vettore linea S e quindi è rappresentabile attraverso un vettore duale $\hat{S} = \vec{W} + \varepsilon\vec{V}$;
- l'asse del torsore si identifica con l'asse principale del sistema di vettori;

Se \vec{W} e \vec{V} sono paralleli, il parametro o passo del torsore resta definito dal rapporto

$$p = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{W}|}. \quad (5.37)$$

In Cinematica ed in Dinamica i torsori ricevono applicazioni notevoli, consentendo nuove formulazioni per definire i campi di spostamenti e di forze cui sono sottoposti i corpi.

Ad esempio, poiché lo spostamento di un corpo rigido consiste in un moto elicoidale composto da una rotazione attorno ad un asse e ad una traslazione lungo l'asse medesimo, il *torsore cinematico* o *twist about a screw* ben si presta a caratterizzare tale spostamento.

Nel caso di spostamenti finiti, si possono instaurare le seguenti corrispondenze:

- l'asse del moto elicoidale coincide con il vettore principale;
- l'angolo di rotazione è dato dal modulo del vettore principale;
- lo spostamento lungo l'asse del moto è pari al parametro del torsore.

Nel caso di spostamenti infinitesimi, ovvero per un generico atto di moto, indicato con \vec{u} il vettore allineato con l'asse di tale moto, si possono instaurare le seguenti corrispondenze:

- la velocità angolare $\omega\vec{u}$ è rappresentata dal vettore principale;
- la velocità $v\vec{u}$ dei punti sull'asse di istantanea rotazione è rappresentata dal momento principale.

Dunque, il *torsore cinematico istantaneo* o *velocity screw*⁴ assume la forma

$$\widehat{V} = (\omega + \varepsilon v) \vec{u} \quad (5.38)$$

In Dinamica un qualsivoglia sistema di forze può ridursi ad un *torsore dinamico* o *wrench on a screw*. In tal caso le corrispondenze sono:

- il risultante è il vettore principale;
- il momento di tutte le forze rispetto ad un qualsivoglia punto dell'asse centrale è il momento principale.

Dunque, detto A un qualsivoglia punto dell'asse centrale, il vettore duale

$$\widehat{F}_A = \vec{F}_A + \varepsilon \vec{C}_A \quad (5.39)$$

rappresenta il sistema di forze.

Da ultimo si osserva che per un sistema di vettori, di cui sia noto il torsore, si può da questo risalire al relativo motore per qualsivoglia punto e viceversa.

In precedenza⁵ è stata introdotta la nozione di *screw*, discussa la corrispondenza di tale ente con un vettore linea L e si è altresì accennato alla possibilità della sua rappresentazione algebrica mediante un *vettore duale* \widehat{L} a 3 componenti.

⁴Talvolta si impiega anche il termine *twist velocity*.

⁵v. p. 192.

Appare dunque necessario trattare le operazioni che possono essere compiute sulle screw, della loro interpretazione geometrica, nonché delle possibilità offerte dall'algebra dei vettori duali ai fini della esecuzione algebrica delle operazioni medesime. In particolare, si definisce *vettore duale*, la serie ordinata di numeri duali⁶

$$\widehat{A} = \left\{ \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \widehat{a}_3 \right\} , \quad (5.40)$$

con $\widehat{a}_i = a_i + \varepsilon a_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$).

Nel caso in cui ci si riferisca allo spazio euclideo a tre dimensioni, comune in numerose applicazioni, è utile introdurre una terna cartesiana ortogonale destrorsa $O - xyz$ in cui i versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} caratterizzano il verso positivo degli assi.

Considerato un vettore $\widehat{V} = \left\{ \widehat{v}_x \widehat{v}_y \widehat{v}_z \right\}$, i termini \widehat{v}_x , \widehat{v}_y e \widehat{v}_z si diranno *componenti del vettore duale*.

5.2.3 Moltiplicazione di un vettore linea unitario per un numero reale

Il *versore linea* è un vettore linea avente modulo unitario, per cui qualsiasi vettore linea appartenente che ne condivide la linea di appartenenza può essere ritenuto un multiplo scalare del versore stesso.

Un *versore linea* può rappresentarsi attraverso il vettore duale

$$\widehat{E} = \vec{e} + \varepsilon \vec{e}_0 , \quad (5.41)$$

⁶In generale i vettori duali possono avere più componenti. Tuttavia, i vettori duali composti da una serie ordinata di 3 numeri duali sono quelli più comunemente impiegati nelle applicazioni.

con

$$|\vec{e}| = 1 , \quad (5.42a)$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e}_0 = 0 . \quad (5.42b)$$

E' opportuno chiarire che, di regola, i vettori duali non necessariamente soddisfano le condizioni (5.42). Per distinguere i vettori duali le cui componenti, primaria e duale, soddisfano le (5.42) si utilizzerà il simbolo $\hat{\ } \curvearrowright$ invece di $\hat{\ }$.

Moltiplicando il versore linea per un numero a reale, avremo

$$\begin{aligned} \hat{A} &= a\hat{E} = a\vec{e} + \varepsilon a\vec{e}_0 \\ &= \vec{a} + \varepsilon\vec{a}_0 , \end{aligned} \quad (5.43)$$

per cui le componenti reale e duale sono dunque moltiplicate per lo stesso fattore.

I due vettori linea \hat{E} e \hat{A} avranno lo stesso asse. Infatti, applicando la (5.33), che fornisce la posizione del punto di riferimento P , è immediato verificare l'uguaglianza

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{e} \times \vec{e}_0}{\vec{e} \cdot \vec{e}} = \frac{a\vec{e} \times a\vec{e}_0}{a\vec{e} \cdot a\vec{e}} .$$

La direzione di \vec{e} è identica a quella di $a\vec{e}$.

Si osserva, con riferimento all'espressione (5.43), che a è una quantità definita *modulo del vettore linea*.

5.2.4 Moltiplicazione di un vettore linea unitario per un numero duale

Moltiplicando il vettore linea unitario $\hat{E} = \vec{e} + \varepsilon\vec{e}_0$ per il numero duale $\hat{a} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}_0$ avremo

$$\hat{A} = \hat{a}\hat{E} = a\vec{e} + \varepsilon(a\vec{e}_0 + a_0\vec{e}) . \quad (5.44)$$

Le screw associate a \widehat{A} e \widehat{E} mantengono lo stesso asse. Infatti, è immediato verificare l'uguaglianza

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{e} \times \vec{e}_0}{\vec{e} \cdot \vec{e}} = \frac{\vec{e} \times (a\vec{e}_0 + a_0\vec{e})}{a\vec{e} \cdot a\vec{e}}, \quad (5.45)$$

quando si tengano presenti le (5.42).

Il passo o il parametro p per la screw unitaria \widehat{E} è sempre nullo. Il parametro di \widehat{A} , ovvero il passo della screw associata, sarà

$$p = \frac{a\vec{e} \cdot (a\vec{e}_0 + a_0\vec{e})}{a\vec{e} \cdot a\vec{e}} = \frac{a_0}{a}, \quad (5.46)$$

pari a quello del parametro del fattore duale \widehat{a} .

Moltiplicando per $\widehat{a} = a + \varepsilon a_0$ un qualsivoglia vettore duale $\widehat{Q} = \vec{q} + \varepsilon \vec{q}_0$, avremo

$$\widehat{R} = \widehat{a}\widehat{Q} = a\vec{q} + \varepsilon (a\vec{q}_0 + a_0\vec{q}) \quad (5.47)$$

Le screw associate a \widehat{Q} e \widehat{R} mantengono lo stesso asse. Mentre, indicato con p_Q il passo della screw prodotto, avremo

$$p_Q = \frac{a\vec{q} \cdot (a\vec{q}_0 + a_0\vec{q})}{a\vec{q} \cdot a\vec{q}} = \frac{a_0}{a} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{q}_0}{|\vec{q}|^2}. \quad (5.48)$$

I risultati ottenuti possono riassumersi nei punti seguenti:

- la moltiplicazione di una screw per un numero, sia esso reale o duale, dà luogo ad una screw con il medesimo asse principale;
- la moltiplicazione di una screw per un numero dà luogo ad una screw il cui passo è pari alla somma del parametro del numero e del passo della screw fattore.

La *norma* del vettore duale $\widehat{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0$ è definita dall'espressione

$$\|\widehat{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}_0}{\|\vec{a}\|}, \quad (5.49)$$

per $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \neq 0$.

5.2.5 Vettore linea di minima distanza tra due rette

Con riferimento alla Figura 5.2, siano:

- assegnate due linee sghembe rappresentate dai vettori linea \widehat{E}_1 ed \widehat{E}_2 ;
- θ , l'angolo formato dai vettori ed s la minima distanza tra le linee medesime;
- \widehat{E}_{12} il vettore linea ortogonale sia a \widehat{E}_1 che \widehat{E}_2 ;

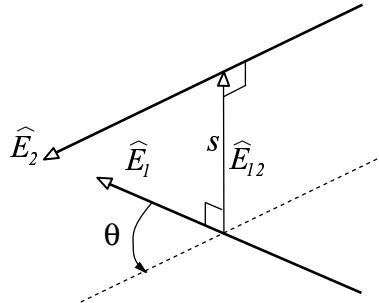


Figura 5.2: Vettore linea di minima distanza

Il moto che conduce \widehat{E}_1 a \widehat{E}_2 è un moto elicoidale lungo l'asse \widehat{E}_{12} . In corrispondenza di tale moto, \widehat{E}_1 ruoterà di un angolo θ e traslerà di una distanza pari ad s .

L'angolo θ è convenzionalmente ritenuto positivo se un osservatore posto dalla parte di \widehat{E}_{12} vede ruotare \widehat{E}_1 in verso antiorario, mentre s è una quantità positiva se \widehat{E}_1 , per sovrapporsi a \widehat{E}_2 , si muove nel verso di \widehat{E}_{12} .

L'angolo compreso tra i due vettori linea \widehat{E}_1 ed \widehat{E}_2 è definito da

$$\angle (\widehat{E}_1, \widehat{E}_2) = \widehat{\theta} \widehat{E}_{12}, \quad (5.50)$$

con

$$\widehat{\theta} = \theta + \varepsilon s \quad (5.51)$$

misura dello stesso.

5.2.6 Prodotti tra vettori linea

In analogia all'algebra vettoriale, per i vettori linea, possono definirsi sia il prodotto scalare che quello vettoriale. Prima di procedere, con riferimento alla Figura 5.3, è opportuno tener presente le seguenti identità:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta, \quad (5.52a)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta \vec{s}^*, \quad (5.52b)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = s \vec{s}^*, \quad (5.52c)$$

ove \vec{s}^* è il versore che individua la direzione della retta di minima distanza tra due vettori linea sghembi.

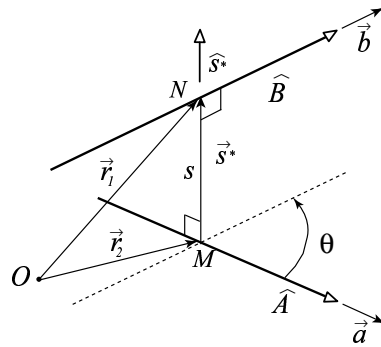


Figura 5.3: Prodotto di vettori duali: Nomenclatura

Il prodotto scalare tra i vettori linea $\widehat{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0$ e $\widehat{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}_0$ è definito come segue

$$\begin{aligned} \widehat{A} \cdot \widehat{B} &= (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0) \cdot (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}_0) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon (\vec{a}_0 \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}_0) \end{aligned} \quad (5.53)$$

In alternativa, tale prodotto può esprimersi anche in funzione dell'angolo duale $\widehat{\theta}$.

Infatti, tenuto conto che i vettori linea \widehat{A} e \widehat{B} possono assumere la forma

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \vec{a} + \varepsilon (\vec{r}_2 \times \vec{a}) , \\ \widehat{B} &= \vec{b} + \varepsilon (\vec{r}_1 \times \vec{b}) ,\end{aligned}$$

lo sviluppo del prodotto scalare fornisce, tenute presenti le (5.52) e la definizione di coseno di un angolo duale,

$$\begin{aligned}\widehat{A} \cdot \widehat{B} &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon \left[\vec{a} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{a}) \right] \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon \left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right] \\ &= ab \cos \theta - \varepsilon [(s\vec{s}^*) \cdot (ab \sin \theta \vec{s}^*)] \\ &= ab [\cos \theta - \varepsilon s \sin \theta] = ab \cos \widehat{\theta} .\end{aligned}\tag{5.54}$$

Pertanto, resta dimostrato il seguente teorema

Il prodotto scalare tra due vettori linea è pari al prodotto dei loro moduli e del coseno dell'angolo duale formato dalle linee associate ai vettori medesimi.

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, per definizione, si avrà:

$$\begin{aligned}\widehat{A} \times \widehat{B} &= (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0) \times (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}_0) \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon (\vec{a}_0 \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}_0) .\end{aligned}\tag{5.55}$$

Per esprimere tale prodotto in funzione dell'angolo duale $\widehat{\theta}$, è necessario

sviluppare il prodotto⁷

$$\begin{aligned}
 \widehat{A} \times \widehat{B} &= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon \left[\vec{a} \times (\vec{r}_2 \times \vec{b}) + (\vec{r}_1 \times \vec{a}) \times \vec{b} \right] \\
 &= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon \left[(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{r}_2 - (\vec{a} \cdot \vec{r}_2) \vec{b} + (\vec{r}_1 \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{r}_1 \right] \\
 &= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon \left[(\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - (\vec{a} \cdot \vec{r}_2) \vec{b} + (\vec{r}_1 \cdot \vec{b}) \vec{a} \right] \\
 &= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon \left[(\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{r}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) \right] . \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

Tenute presenti le (5.52), il risultato appena ottenuto può porsi nella forma

$$\begin{aligned}
 \widehat{A} \times \widehat{B} &= ab \{ \vec{s}^* \sin \theta + \varepsilon [s \cos \theta \vec{s}^* + \sin \theta (\vec{r}_1 \times \vec{s}^*)] \} \\
 &= ab \widehat{S}^* (\sin \theta + \varepsilon s \cos \theta) \\
 &= ab \widehat{S}^* \sin \widehat{\theta} , \tag{5.57}
 \end{aligned}$$

con

$$\widehat{S}^* = \vec{s}^* + \varepsilon \vec{r}_1 \times \vec{s}^* ,$$

vettore duale unitario.

Pertanto, resta dimostrato il seguente teorema sul prodotto vettoriale di due vettori linea

Il prodotto vettoriale tra due vettori linea \widehat{A} e \widehat{B} è un vettore linea, che interseca ortogonalmente le linee associate ai vettori medesimi, con modulo pari al prodotto dei moduli dei fattori per il seno dell'angolo duale formato dalle linee medesime

⁷ Negli sviluppi è utile richiamare le uguaglianze di seguito riportate

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{r}_1 \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{r}_1 \cdot \vec{a}) \vec{b} , \\
 -(\vec{a} \cdot \vec{r}_2) \vec{b} + (\vec{r}_1 \cdot \vec{b}) \vec{a} &= -(\vec{a} \cdot \vec{r}_2) \vec{b} + (\vec{r}_1 \cdot \vec{b}) \vec{a} + \vec{b} (\vec{r}_1 \cdot \vec{a}) - \vec{b} (\vec{r}_1 \cdot \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \vec{b} + \vec{r}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{r}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) .
 \end{aligned}$$

La Tabella 5.1 riassume i risultati dei prodotti scalare e vettoriale di vettori linea in varie situazioni.

Tabella 5.1: Casi notevoli di prodotti tra vettori linea

Vettori linea	$\widehat{A} \cdot \widehat{B}$	$\widehat{A} \times \widehat{B}$
Sghembi	$ab \cos \widehat{\theta}$	$ab \widehat{S}^* \sin \widehat{\theta}$
Convergenti ($s = 0$)	$ab \cos \theta$	$ab \widehat{S}^*$
Paralleli ($\theta = 0$)	ab	$\varepsilon ab \overline{s}^*$
Coassiali ($\theta = s = 0$)	ab	0

5.3 Matrici duali

Dicesi *matrice duale* quella nei cui elementi figurano numeri duali, ovvero

$$[\widehat{A}] = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{a}_{1n} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{a}_{m1} & \widehat{a}_{m2} & \dots & \widehat{a}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

con $\widehat{a}_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{0ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$).

Se si pone

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

e

$$[A_0] = \begin{bmatrix} a_{011} & a_{012} & \dots & a_{01n} \\ a_{021} & a_{022} & \dots & a_{02n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{0m1} & a_{0m2} & \dots & a_{0mn} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

la matrice duale può anche essere espressa nella forma

$$[\widehat{A}] = [A] + \varepsilon [A_0] . \quad (5.61)$$

Per le matrici duali restano definite le operazioni di somma, sottrazione e trasposta in piena analogia con l'algebra delle matrici di numeri reali.

Per quanto riguarda il prodotto tra due matrici duali,

$$[\widehat{A}] = [A] + \varepsilon [A_0]$$

e

$$[\widehat{B}] = [B] + \varepsilon [B_0]$$

si ha

$$[\widehat{A}] [\widehat{B}] = [A] [B] + \varepsilon ([A] [B_0] + [A_0] [B]) . \quad (5.62)$$

Si definisce *ortogonale* quella matrice duale $[\widehat{A}]$ per la quale è soddisfatta la condizione

$$[\widehat{A}]^T [\widehat{A}] = [\widehat{A}] [\widehat{A}]^T = [I] , \quad (5.63)$$

con $[I]$ matrice unitaria.

Si definisce *inversa* $[\widehat{A}]^{-1}$ di una matrice duale $[\widehat{A}]$ quella per la quale è soddisfatta l'uguaglianza

$$[\widehat{A}] [\widehat{A}]^{-1} = [I] . \quad (5.64)$$

Se poniamo

$$[\widehat{A}]^{-1} = [X] + \varepsilon [X_0]$$

dalla (5.64) si ha

$$([A] + \varepsilon [A_0]) ([X] + \varepsilon [X_0]) = [I] .$$

Da quest'ultima, segue il sistema di equazioni

$$\begin{cases} [A] [X] = [I] \\ [A_0] [X] + [A] [X_0] = [0] \end{cases} \quad (5.65)$$

la cui soluzione fornisce

$$\begin{aligned} [X] &= [A]^{-1} \\ [X_0] &= - [X] [A_0] [X] . \end{aligned}$$

Dunque la formula per il calcolo dell'inversa della matrice $[\widehat{A}] = [A] + \varepsilon [A_0]$ risulta essere

$$[\widehat{A}]^{-1} = [A]^{-1} - \varepsilon [A]^{-1} [A_0] [A]^{-1} . \quad (5.66)$$

Tale operazione è dunque lecita solo se la matrice reale $[A]$ possiede l'inversa.

5.4 Applicazione dell'algebra duale al moto di un corpo rigido

5.4.1 Movimenti spaziali finiti: descrizione matriciale

La matrice che descrive la rotazione di un corpo attorno all'asse Z di un riferimento fisso risulta essere

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Tale matrice, com'è noto, definisce altresì la trasformazione tra i riferimenti cartesiani fisso $O - XYZ$ e solidale con il corpo $O_i - x_i y_i z_i$.

E' opportuno far osservare che le colonne della $[A]$ rappresentano anche le componenti dei versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} degli assi del riferimento mobile nel riferimento $O - XYZ$.

Introducendo i vettori duali

$$\hat{i} = \vec{i} + \varepsilon \overrightarrow{OO_i} \times \vec{i} \quad (5.68a)$$

$$\hat{j} = \vec{j} + \varepsilon \overrightarrow{OO_j} \times \vec{j} \quad (5.68b)$$

$$\hat{k} = \vec{k} + \varepsilon \overrightarrow{OO_k} \times \vec{k} \quad (5.68c)$$

che definiscono i versori linea associati ai versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , si caratterizza non solo l'orientamento del riferimento mobile, ma anche la rispettiva posizione nello spazio. È così possibile definire la matrice duale di trasformazione

$$[\hat{A}] = [\hat{i} \hat{j} \hat{k}] \quad (5.69)$$

che, per analogia con quella $[A]$ associata ad una rotazione pura, definirà un generico moto spaziale.

Un esempio servirà a chiarire il significato della precedente affermazione.

Si consideri un movimento finito costituito da

- una traslazione s lungo l'asse Z per una distanza s ;
- una rotazione di un angolo θ attorno a tale asse.

Poiché

$$\begin{aligned} \{i\} &= \left\{ \cos \theta \sin \theta 0 \right\}^T, \\ \{j\} &= \left\{ -\sin \theta \cos \theta 0 \right\}^T, \\ \{k\} &= \left\{ 0 0 1 \right\}^T, \end{aligned}$$

la matrice che descrive la rotazione assume la forma

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Essendo

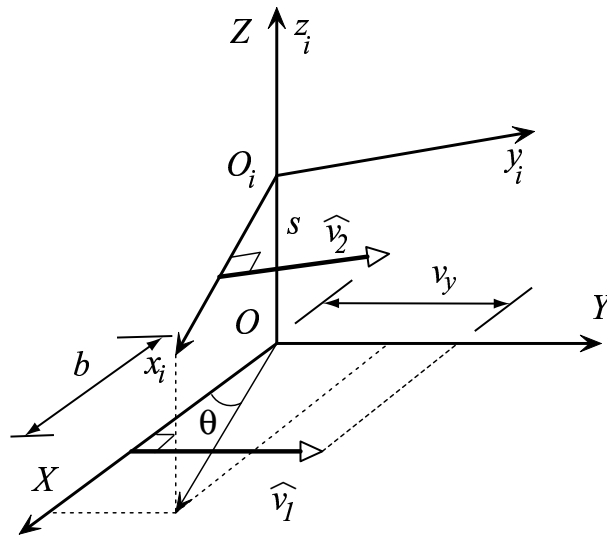


Figura 5.4: Nomenclatura

$$\{OO_i\} = \{0 \ 0 \ s\}^T$$

le (5.68) forniscono

$$\begin{aligned} [\widehat{i}] &= \begin{Bmatrix} \cos \theta - \varepsilon s \sin \theta \\ \sin \theta + \varepsilon s \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [\widehat{j}] &= \begin{Bmatrix} -\sin \theta - \varepsilon s \cos \theta \\ \cos \theta - \varepsilon s \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [\widehat{k}] &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} . \end{aligned}$$

pertanto la (5.69), tenute presenti le identità (5.26), si particolarizza nella

$$[\widehat{A}] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{\theta} & -\sin \widehat{\theta} & 0 \\ \sin \widehat{\theta} & \cos \widehat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

con

$$\widehat{\theta} = \theta + \varepsilon s$$

angolo duale. Utilizzando la (5.70) è possibile quindi conoscere la posizione di vettori linea solidali con il corpo dopo che lo stesso è stato soggetto ad un movimento finito. Pertanto, se

$$\{\widehat{v}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_y \\ \varepsilon b v_y \end{Bmatrix}$$

è il vettore duale che rappresenta la posizione iniziale di un vettore linea, la

posizione del vettore stesso, dopo il moto elicoidale lungo l'asse Z , sarà

$$\{\widehat{v}_2\} = [\widehat{A}] \{\widehat{v}_1\} = \begin{Bmatrix} -v_y \sin \widehat{\theta} \\ v_y \cos \widehat{\theta} \\ \varepsilon b v_y \end{Bmatrix},$$

ovvero

$$\{\widehat{v}_2\} = \begin{Bmatrix} -v_y \sin \theta \\ v_y \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -v_y s \cos \theta \\ -v_y s \sin \theta \\ b v_y \end{Bmatrix}$$

La parte reale del vettore duale \widehat{v}_2 è costituita dalle componenti del relativo vettore linea in $O - XYZ$, mentre la parte duale è il momento di quest'ultimo vettore rispetto ad O . Il risultato può essere verificato geometricamente osservando la Figura 5.4.

5.4.2 Matrice di trasformazione duale tra due riferimenti cartesiani

Spesso la posizione relativa tra due sistemi di riferimento viene definita assegnando le coordinate di tre punti $P \equiv (P_x, P_y, P_z)$, $Q \equiv (Q_x, Q_y, Q_z)$ ed $R \equiv (R_x, R_y, R_z)$ appartenenti agli assi del riferimento mobile. Una scelta comunemente adottata in letteratura consiste nel posizionare, come in Figura 5.5:

- il punto P nell'origine degli assi;
- il punto R sull'asse delle x ed a distanza unitaria da P ;
- il punto Q sull'asse delle z ed a distanza unitaria da P .

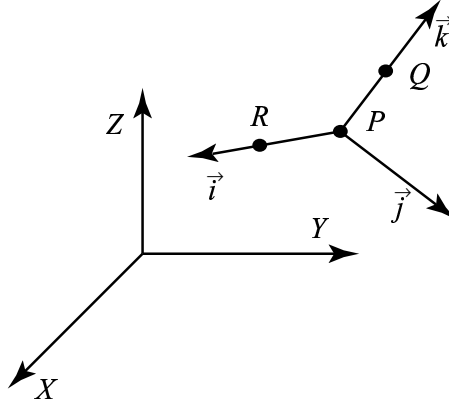


Figura 5.5: Definizione sistema di riferimento: Nomenclatura

In tal modo i versori degli assi mobili saranno

$$\{i\} = \left\{ R_x - P_x \quad R_y - P_y \quad R_z - P_z \right\}^T, \quad (5.71a)$$

$$\{k\} = \left\{ Q_x - P_x \quad Q_y - P_y \quad Q_z - P_z \right\}^T, \quad (5.71b)$$

$$\{j\} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix}. \quad (5.71c)$$

Considerando tali versori alla stregua di vettori linea, la loro rappresentazione in termini duali sarà

$$\{\widehat{i}\} = \{i\} + \varepsilon [\widetilde{OP}] \{i\}, \quad (5.72a)$$

$$\{\widehat{k}\} = \{k\} + \varepsilon [\widetilde{OP}] \{k\}, \quad (5.72b)$$

$$\{\widehat{j}\} = \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{k}_z & \widehat{k}_y \\ \widehat{k}_z & 0 & -\widehat{k}_x \\ -\widehat{k}_y & \widehat{k}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{i}_x \\ \widehat{i}_y \\ \widehat{i}_z \end{Bmatrix}, \quad (5.72c)$$

con

$$\left[\widetilde{OP} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

La matrice $\left[\widehat{A} \right]$, che trasforma vettori linea dal riferimento mobile a quello fisso, risulta dunque essere

$$\left[\widehat{A} \right] = \begin{bmatrix} \widehat{i}_x & \widehat{j}_x & \widehat{k}_x \\ \widehat{i}_y & \widehat{j}_y & \widehat{k}_y \\ \widehat{i}_z & \widehat{j}_z & \widehat{k}_z \end{bmatrix}. \quad (5.74)$$

5.4.3 Quantità di moto duale di un corpo

Con riferimento alla Figura 5.6, sia \mathbf{C} un corpo rigido al quale sono solidali i seguenti sistemi di riferimento:

- $G_i - x_i y_i z_i$, con origine nel baricentro i del corpo;
- $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$ con origine in punto C qualunque del corpo.

La generica massa infinitesima dm si ipotizza in P , punto origine di un riferimento cartesiano equiorientato rispetto a $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$. Il riferimento assoluto è $O - xyz$.

La velocità duale assoluta in C del corpo i , misurata nel riferimento i_k vale,

$$\widehat{V}_{C(i)}^{(i_k)} = \vec{\omega}_i^{(i_k)} + \epsilon \vec{v}_{C(i)}^{(i_k)}, \quad (5.75)$$

con le componenti primaria e duale espresse nel riferimento $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$.

Tale velocità può anche valutarsi in un generico punto P del corpo i . Infatti, applicando la trasformazione dei vettori duali in corrispondenza ad

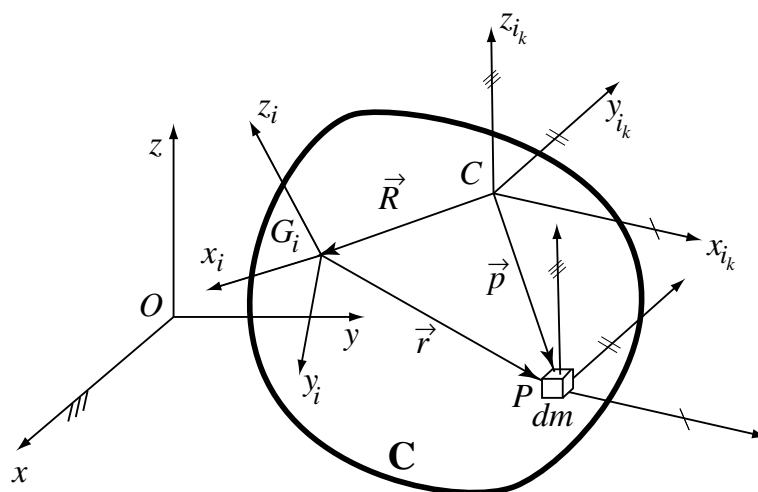


Figura 5.6: Quantità di moto: Nomenclatura

una traslazione del riferimento ⁸ si ha

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{P(i)}^{(i_k)} &= \vec{\omega}_i^{(i_k)} + \varepsilon \vec{v}_{P(i)}^{(i_k)} \\ &= \vec{\omega}_i^{(i_k)} + \varepsilon \left(\vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} + \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times \overrightarrow{CP}^{(i_k)} \right),\end{aligned}\quad (5.76)$$

dove il vettore $\overrightarrow{CP}^{(i_k)}$ si scompone nella somma

$$\overrightarrow{CP}^{(i_k)} = \vec{R}^{(i_k)} + T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)}, \quad (5.77)$$

con

- $T_i^{i_k}$ matrice di trasformazione delle componenti di un vettore dal riferimento $G_i - x_i y_i z_i$ a $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$.
- $\vec{r}^{(i)} = \overrightarrow{G_i P}$, vettore espresso in $G_i - x_i y_i z_i$;

⁸Si consideri la seguente relazione:

$$\widehat{L}_{O_1} = \widehat{L}_O + \varepsilon \vec{W} \times \overrightarrow{OO_1}.$$

- $\vec{R}^{(i_k)} = \overrightarrow{CG}_i$, vettore espresso in $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$.

Ciò premesso, la quantità di moto ed il momento della quantità di moto, calcolata rispetto a C della massa dm in P , saranno, rispettivamente

$$d\vec{Q}_P^{(i_k)} = \vec{v}_P^{(i_k)} dm, \quad (5.78a)$$

$$d\vec{H}_C^{(i_k)} = \overrightarrow{CP}^{(i_k)} \times d\vec{Q}_P^{(i_k)} \quad (5.78b)$$

Introdotta quindi la quantità di moto duale della massa dm in P

$$d\widehat{H}_C^{(i_k)} = d\vec{Q}_P^{(i_k)} + \varepsilon d\vec{H}_C^{(i_k)}, \quad (5.79)$$

la quantità di moto duale dell'intero corpo i , resta definita dall'integrale

$$\widehat{H}_{C(i)}^{(i_k)} = \int_{m_i} d\widehat{H}_C^{(i_k)}. \quad (5.80)$$

Sostituendo la (5.79), tenute presenti le (5.78), nella (5.80) segue

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{C(i)}^{(i_k)} &= \int_{m_i} \left[\vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} + \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} + T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \right) \right] dm \\ &+ \varepsilon \int_{m_i} \left(\vec{R}^{(i_k)} + T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \right) \times \left[\vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} + \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} + T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \right) \right] dm \\ &= \int_{m_i} \vec{v}_C^{(i_k)} dm + \int_{m_i} \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times \vec{R}^{(i_k)} dm + \int_{m_i} \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} dm \\ &+ \varepsilon \int_{m_i} \vec{R}^{(i_k)} \times \vec{v}_C^{(i_k)} dm + \varepsilon \int_{m_i} T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \vec{v}_C^{(i_k)} dm \\ &- \varepsilon \int_{m_i} \vec{R}^{(i_k)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm - \varepsilon \int_{m_i} \vec{R}^{(i_k)} \times \left(T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm \\ &- \varepsilon \int_{m_i} T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm \\ &- \varepsilon \int_{m_i} T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \left(T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{C(i)}^{(i_k)} &= \int_{m_i} \left[\vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} + \vec{\omega}_i^{(i_k)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} + T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \right) \right] dm \\
&+ \varepsilon \int_{m_i} \vec{R}^{(i_k)} \times \vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} dm + \varepsilon \int_{m_i} T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \vec{v}_{C(i)}^{(i_k)} dm \\
&- \varepsilon \int_{m_i} \vec{R}^{(i_k)} \times \left(\vec{R}^{(i_k)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm \\
&- \varepsilon \int_{m_i} T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \left(T_i^{i_k} \vec{r}^{(i)} \times \vec{\omega}_i^{(i_k)} \right) dm .
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Ai fini pratici appare conveniente utilizzare la notazione matriciale, cosicché la precedente si riscrive nella forma

$$\left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} = \int_{m_i} \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} dm + \{A\} + \{B\} + \{C\} , \tag{5.82}$$

avendo indicato con

$$\begin{aligned}
\{A\} &= - \int_{m_i} \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} dm - \int_{m_i} [T]_i^{i_k} \left[\tilde{r}^{(i)} \right] [T]_{i_k}^i \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} dm , \\
\{B\} &= + \varepsilon \int_{m_i} \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} dm + \varepsilon \int_{m_i} [T]_i^{i_k} \left[\tilde{r}^{(i)} \right] [T]_{i_k}^i \left\{ v_C \right\}^{(i_k)} dm , \\
\{C\} &= - \varepsilon \int_{m_i} \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} dm \\
&- \varepsilon \int_{m_i} [T]_i^{i_k} \left[\tilde{r}^{(i)} \right] \left[\tilde{r}^{(i)} \right] [T]_{i_k}^i \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} dm .
\end{aligned}$$

Introducendo la matrice dei momenti statici baricentrici (in questo caso tutti nulli in quanto calcolati rispetto al baricentro)

$$\begin{bmatrix} 0 & -S_{C_x}^{(i)} & S_{C_y}^{(i)} \\ S_{C_z}^{(i)} & 0 & -S_{C_x}^{(i)} \\ -S_{C_y}^{(i)} & S_{C_x}^{(i)} & 0 \end{bmatrix} = \int_{m_i} \left[\tilde{r}^{(i)} \right] dm , \tag{5.83}$$

e la matrice d'inerzia, calcolata rispetto agli assi con origine nel baricentro G_i del corpo,

$$\left[J_{G_i}^{(i)} \right] = - \int_{m_i} \left[\tilde{r}^{(i)} \right] \left[\tilde{r}^{(i)} \right] dm , \tag{5.84}$$

la (5.82) si semplifica nella seguente

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} &= m_i \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} - m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} \\ &\quad + \varepsilon m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} \\ &\quad + \varepsilon \left([T]_i^{i_k} \left[J_{G_i}^{(i)} \right] [T]_{i_k}^i - m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \right) \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Infine, tenuto conto del teorema di Huyghens, si può indicare con

$$\left[J_{C(i)}^{(i_k)} \right] = [T]_i^{i_k} \left[J_{G_i}^{(i)} \right] [T]_{i_k}^i - m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \quad (5.86)$$

la matrice d'inerzia del corpo i calcolata rispetto al riferimento $C - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$, e la (5.85) si semplifica ulteriormente nella

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} &= m_i \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} - m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} \\ &\quad + \varepsilon \left(m_i \left[\widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} + \left[J_{C(i)}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} \right). \end{aligned} \quad (5.87)$$

5.4.4 Equazioni di Newton-Euler in forma duale

Com'è noto, la derivata del momento della quantità di moto di un corpo, rispetto ad un punto C è pari alla somma dei momenti delle forze agenti sul corpo medesimo, tutti calcolati rispetto a C .

Tale principio può essere espresso in forma duale

$$\frac{d}{dt} \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} = \left\{ \widehat{F}_{C(i)} \right\}^{(i_k)}, \quad (5.88)$$

dove il vettore duale $\widehat{F}_{C(i)}^{(i_k)}$ rappresenta le azioni esterne (forze e coppie) che agiscono sul corpo i , rispetto ad un punto C e con le componenti espresse nel riferimento i_k .

Tenuto conto che i_k non è un riferimento inerziale, ma si muove con un atto di moto definito dalla velocità duale $\left\{ \widehat{V}_{C(i)} \right\}^{(i_k)}$, la precedente si trasforma nella seguente

$$\left\{ \dot{\widehat{H}}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} + \left[\widetilde{\widehat{V}}_{C(i)}^{(i_k)} \right] \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} = \left\{ \widehat{F}_{C(i)} \right\}^{(i_k)}. \quad (5.89)$$

CAPITOLO 6

Analisi del rendimento meccanico di un giunto cardanico

Nel presente capitolo viene trattata l'analisi del rendimento di un giunto cardanico in presenza di errori di montaggio, tolleranze geometriche e dimensionali. Tale studio riveste particolare importanza considerando la diffusione del giunto cardanico nelle applicazioni industriali. L'obiettivo di tale analisi è quello di evidenziare come il rendimento meccanico del giunto cardanico venga influenzato da errori di montaggio e di costruzione e dalla presenza di attrito nelle coppie cinematiche che lo costituiscono.

Un primo modello di analisi del rendimento meccanico di tale giunto fu impostato da A. Morecki [33]. In particolare, il modello

- considerava solo le perdite nelle coppie della crociera;
- trascurava le azioni di inerzia;
- non comprendeva la presenza di errori di costruzione e montaggio.

Un'analisi dinamica completa di un giunto cardanico è stata condotta da Freudenstein ed i suoi collaboratori [34, 35, 36, 37]. Nei lavori citati sono

stati presi in considerazione gli effetti dovuti agli errori di montaggio e di costruzione, non è stato preso però in considerazione l'attrito nelle coppie cinematiche. Nella presente analisi, la modellazione degli errori di costruzione e montaggio è avvenuta considerando un meccanismo RCCC cinematicamente equivalente. È da far rilevare che la struttura cinematica ideale del giunto cardanico è rappresentata da un quadrilatero sferico $RRRR$ con tutti i membri consecutivi disposti a 90° gli uni rispetto agli altri. In tale modellazione il giunto cardanico risulterebbe un sistema a vincoli sovrabbondanti la cui mobilità è assicurata dal soddisfacimento di una condizione geometrica: la convergenza di tutti gli assi delle coppie rotoidali in un unico punto. Pertanto, mantenendo tale rappresentazione, non sarebbe possibile introdurre gli errori di montaggio e di costruzione continuando a garantire la mobilità del sistema. Per questo motivo nella letteratura tecnica [34, 35] gli effetti dei citati errori sulla cinematica e sulla dinamica del giunto in esame, vengono studiati mediante l'analisi di un meccanismo RCCC equivalente, la cui mobilità non dipende dalla succitata condizione geometrica. Sono state fatte inoltre le seguenti ipotesi:

- attrito Coulombiano;
- assenza di stiction;
- assenza di giochi o backlash nelle coppie cinematiche;
- corpi rigidi.

6.1 Analisi cinematica

Lo schema del meccanismo RCCC equivalente è riportato in Figura 6.1, dove sono anche rappresentate le quattro terne cartesiane $C_i - x_i y_i z_i$ solidali

con i quattro membri ($i = 1, 2, 3, 4$) ed orientate secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg. Con riferimento alla Figura 6.2, mediante l'algebra

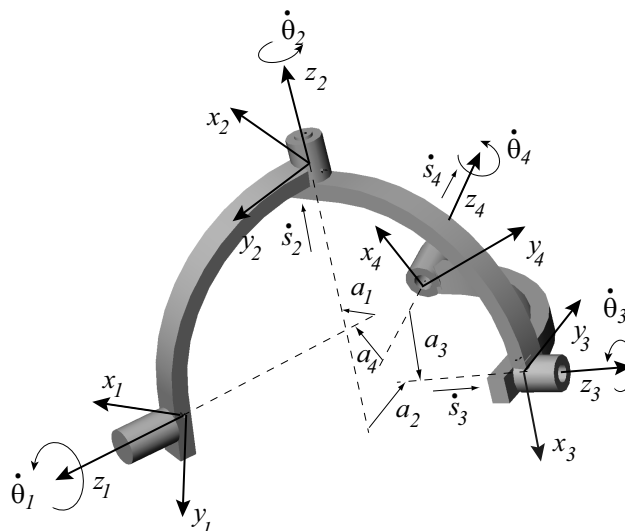


Figura 6.1: Meccanismo RCCC equivalente

duale, è possibile introdurre i seguenti parametri:

$$\widehat{\theta}_i = \theta_i + \epsilon s_i, \quad (6.1)$$

$$\widehat{\alpha}_i = \alpha_i + \epsilon a_i, \quad (6.2)$$

dove $\widehat{\theta}_i$ descrive la posizione relativa fra membri adiacenti (θ_i rappresenta la rotazione attorno all'asse della coppia congiungente il membro $i - 1$ con il membro i , s_i lo scorrimento lungo il medesimo asse), mentre $\widehat{\alpha}_i$ descrive la geometria del membro i^{mo} (α_i l'angolo tra gli assi delle coppie appartenenti al medesimo membro, a_i la minima distanza tra tali assi)¹. In questo modo

¹Nel caso di giunto cardanico ideale $\alpha_i = 90^\circ$ ($i = 1, 2, 3$), α_4 rappresenta l'inclinazione tra l'albero di ingresso e quello di uscita, $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Proprio questi parametri consentiranno l'introduzione degli errori di costruzione e di montaggio.

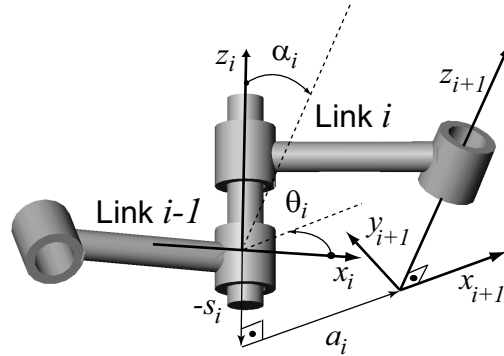


Figura 6.2: Parametri di Denavit-Hartenberg

la matrice di trasformazione dal sistema di riferimento $o_{i+1} - x_{i+1}y_{i+1}z_{i+1}$ al sistema di riferimento $o_i - x_iy_iz_i$ è data da²:

$$\left[\widehat{A} \right]_{i+1}^i = \begin{bmatrix} c\widehat{\theta}_i & -c\widehat{\alpha}_i s\widehat{\theta}_i & s\widehat{\alpha}_i s\widehat{\theta}_i \\ s\widehat{\theta}_i & c\widehat{\alpha}_i c\widehat{\theta}_i & -s\widehat{\alpha}_i c\widehat{\theta}_i \\ 0 & s\widehat{\alpha}_i & c\widehat{\alpha}_i \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Pertanto l'equazione di chiusura per il meccanismo in esame può essere espressa mediante il seguente prodotto matriciale

$$\left[\widehat{A} \right]_2^1 \left[\widehat{A} \right]_3^2 \left[\widehat{A} \right]_4^3 \left[\widehat{A} \right]_4^1 = [I], \quad (6.4)$$

dove la matrice $[I]$ rappresenta la matrice identità. La precedente espressione può essere riformulata nel modo seguente

$$\left[\widehat{A} \right]_3^2 \left[\widehat{A} \right]_4^3 = \left[\widehat{A}^T \right]_2^1 \left[\widehat{A}^T \right]_4^1. \quad (6.5)$$

²c = cos e s = sin

Sviluppando i prodotti matriciali ed uguagliando gli elementi delle medesime righe e colonne [37] si ottiene:

$$\widehat{D} \sin \widehat{\theta}_4 + \widehat{E} \cos \widehat{\theta}_4 + \widehat{F} = 0 , \quad (6.6)$$

dove

$$\widehat{D} = s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_1 , \quad (6.7)$$

$$\widehat{E} = -s\widehat{\alpha}_3 \left(c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_4 + s\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_1 \right) , \quad (6.8)$$

$$\widehat{F} = -c\widehat{\alpha}_2 + c\widehat{\alpha}_3 \left(c\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_4 - s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_1 \right) , \quad (6.9)$$

e

$$s\widehat{\theta}_2 = \frac{s\widehat{\theta}_1 \left(c\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\alpha}_4 + s\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_4 \right) + s\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\theta}_1 s\widehat{\theta}_4}{s\widehat{\alpha}_2} , \quad (6.10)$$

$$c\widehat{\theta}_2 = \frac{c\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_2 - c\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\alpha}_4 + s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_4}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2} , \quad (6.11)$$

$$s\widehat{\theta}_3 = \frac{s\widehat{\alpha}_1 \left(s\widehat{\theta}_1 c\widehat{\theta}_4 + c\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_1 s\widehat{\theta}_4 \right) + c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_4 s\widehat{\theta}_4}{s\widehat{\alpha}_2} , \quad (6.12)$$

$$c\widehat{\theta}_3 = \frac{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_4 c\widehat{\theta}_1 + c\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\alpha}_3 - c\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_4}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\alpha}_3} . \quad (6.13)$$

In questo modo è possibile ricavare il valore degli angoli duali $\widehat{\theta}_2$, $\widehat{\theta}_3$ e $\widehat{\theta}_4$ descrivendo completamente le posizioni reciproche dei membri adiacenti:

$$\widehat{\theta}_4 = 2 \tan^{-1} \frac{-\widehat{D} \pm \sqrt{\widehat{D}^2 + \widehat{E}^2 - \widehat{F}^2}}{\widehat{F} - \widehat{E}} , \quad (6.14)$$

$$\widehat{\theta}_2 = \text{ATAN2} \left(\sin \widehat{\theta}_2, \cos \widehat{\theta}_2 \right) , \quad (6.15)$$

$$\widehat{\theta}_3 = \text{ATAN2} \left(\sin \widehat{\theta}_3, \cos \widehat{\theta}_3 \right) . \quad (6.16)$$

Per quanto concerne l'analisi delle velocità relative che si registrano nei riferimenti di giunto, è possibile introdurre le seguenti relazioni ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\widehat{v}_i = \dot{\theta}_i + \varepsilon \dot{s}_i . \quad (6.17)$$

In termini di vettori duali, tali velocità possono anche esprimersi come segue

$$\left\{ \widehat{V}_{C_1(1,4)} \right\}^{(1)} = \left\{ 0 \ 0 \ \widehat{v}_1 \right\}^T, \quad (6.18a)$$

$$\left\{ \widehat{V}_{C_2(2,1)} \right\}^{(2)} = \left\{ 0 \ 0 \ \widehat{v}_2 \right\}^T, \quad (6.18b)$$

$$\left\{ \widehat{V}_{C_3(3,2)} \right\}^{(3)} = \left\{ 0 \ 0 \ \widehat{v}_3 \right\}^T, \quad (6.18c)$$

$$\left\{ \widehat{V}_{C_4(4,3)} \right\}^{(4)} = \left\{ 0 \ 0 \ \widehat{v}_4 \right\}^T. \quad (6.18d)$$

La velocità duale assoluta del corpo 2, riferita al punto C_2 ed espressa nel riferimento 2, si ottiene quale somma delle velocità duali relative

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{V}_{C_2(2,4)} \right\}^{(2)} &= \left\{ \widehat{V}_{C_2(2,1)} \right\}^{(2)} + \left\{ \widehat{V}_{C_2(1,4)} \right\}^{(2)} \\ &= \left\{ \widehat{V}_{C_2(2,1)} \right\}^{(2)} + \left[\widehat{A} \right]_1^2 \left\{ \widehat{V}_{C_1(1,4)} \right\}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Similmente, la velocità duale assoluta del corpo 2, ma riferita al punto C_3 ed espressa nel riferimento 3, vale

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{V}_{C_3(2,4)} \right\}^{(3)} &= \left\{ \widehat{V}_{C_3(2,3)} \right\}^{(3)} + \left\{ \widehat{v}_{C_3(3,4)} \right\}^{(3)} \\ &= - \left\{ \widehat{V}_{C_3(3,2)} \right\}^{(3)} - \left[\widehat{A} \right]_4^3 \left\{ \widehat{V}_{C_4(4,3)} \right\}^{(4)}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Tra le suddette velocità dovrà sussistere la relazione

$$\left\{ \widehat{V}_{C_3(2,4)} \right\}^{(3)} = \left[\widehat{A} \right]_2^3 \left\{ \widehat{V}_{C_2(2,4)} \right\}^{(2)} \quad (6.21)$$

Poiché

$$\left[\widehat{A} \right]_1^2 = \begin{bmatrix} c\widehat{\theta}_1 & s\widehat{\theta}_1 & 0 \\ -c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_1 & c\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\theta}_1 & s\widehat{\alpha}_1 \\ s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_1 & -s\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\theta}_1 & c\widehat{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad (6.22a)$$

$$\left[\widehat{A} \right]_2^3 = \begin{bmatrix} c\widehat{\theta}_2 & s\widehat{\theta}_2 & 0 \\ -c\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2 & c\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2 & s\widehat{\alpha}_2 \\ s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2 & -s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2 & c\widehat{\alpha}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.22b)$$

$$\left[\widehat{A} \right]_3^4 = \begin{bmatrix} c\widehat{\theta}_3 & s\widehat{\theta}_3 & 0 \\ -c\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3 & c\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\theta}_3 & s\widehat{\alpha}_3 \\ s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3 & -s\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\theta}_3 & c\widehat{\alpha}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.22c)$$

dalla (6.21), tenuto conto delle (6.18), (6.19), (6.20), segue

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3 \\ s\widehat{\alpha}_2 & 0 & -s\widehat{\alpha}_3 c\widehat{\theta}_3 \\ c\widehat{\alpha}_2 & 1 & c\widehat{\alpha}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{v}_2 \\ \widehat{v}_3 \\ \widehat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widehat{v}_1 s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_2 \\ -\widehat{v}_1 (c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2) \\ -\widehat{v}_1 (c\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_2 - s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2) \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

ovvero

$$\widehat{v}_2 = - \left[\frac{(c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2) s\widehat{\theta}_3 + s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_2 c\widehat{\theta}_3}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_3} \right] \widehat{v}_1, \quad (6.24)$$

$$\widehat{v}_3 = \left[\frac{(s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\alpha}_3 + c\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3) s\widehat{\theta}_2 + s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3 c\widehat{\theta}_3}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3} \right] s\widehat{\alpha}_1 \widehat{v}_1, \quad (6.25)$$

$$\widehat{v}_4 = - \frac{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_2}{s\widehat{\alpha}_3 s\widehat{\theta}_3} \widehat{v}_1. \quad (6.26)$$

Per la definizione delle accelerazioni si procederà derivando le espressioni appena dedotte, per brevità non vengono riportate tali espressioni.

6.2 Analisi statica

Per l'analisi statica del giunto cardanico si introducono i vettori duali delle reazioni vincolari ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$\widehat{F}_{xj} = F_{xj} + \epsilon M_{xj} , \quad (6.27)$$

$$\widehat{F}_{yj} = F_{yj} + \epsilon M_{yj} , \quad (6.28)$$

$$\widehat{F}_{zj} = F_{zj} + \epsilon M_{zj} . \quad (6.29)$$

Imponendo ora l'equilibrio statico dei membri del meccanismo è possibile valutare l'espressione delle singole reazioni vincolari:

Coppia 1

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{x1} &= \frac{c\widehat{\theta}_1 s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2 - s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2 c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_1}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z1} \\ &+ \frac{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_1 s\widehat{\theta}_2 - c\widehat{\theta}_1 c\widehat{\theta}_2 c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 - c\widehat{\theta}_1 c\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\alpha}_1}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z2} \\ &+ \frac{c\widehat{\theta}_1}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z3} \end{aligned} \quad (6.30a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{y1} &= \frac{c\widehat{\theta}_1 s\widehat{\theta}_2 c\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\theta}_1 s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z1} \\ &- \frac{s\widehat{\theta}_1 s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2 c\widehat{\alpha}_1 + s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\theta}_1 c\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2 c\widehat{\theta}_1}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z2} \\ &+ \frac{s\widehat{\theta}_1}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z3} \end{aligned} \quad (6.30b)$$

Coppia 2

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{x2} &= \frac{s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z1} \\ &- \frac{s\widehat{\alpha}_1 c\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\alpha}_2 c\widehat{\theta}_2 c\widehat{\alpha}_1}{s\widehat{\alpha}_1 s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \widehat{F}_{z2} + \frac{\widehat{F}_{z3}}{s\widehat{\alpha}_2 s\widehat{\theta}_2} \end{aligned} \quad (6.30c)$$

$$\widehat{F}_{y2} = \frac{\widehat{F}_{k1}}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1} - \frac{c\widehat{\alpha}_1}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1}\widehat{F}_{z2} \quad (6.30d)$$

Coppia 3

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{x3} &= \frac{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z1} \\ &- \frac{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{c}\widehat{\theta}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_2 + \widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_1}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z2} + \frac{\widehat{c}\widehat{\theta}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z3} \end{aligned} \quad (6.30e)$$

$$\widehat{F}_{y3} = \frac{\widehat{F}_{z2}}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2} - \frac{c\widehat{\alpha}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2}\widehat{F}_{z3} \quad (6.30f)$$

Coppia 4

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{x4} &= \frac{c\widehat{\theta}_3}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z1} \\ &- \frac{\widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{c}\widehat{\alpha}_2 + \widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_1 - \widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\theta}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z2} \\ &- \frac{\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_2 - \widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z3} \end{aligned} \quad (6.30g)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{y4} &= -\frac{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_3}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z1} \\ &+ \frac{\widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{c}\widehat{\alpha}_2 + \widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_1 + \widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\theta}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z2} \end{aligned} \quad (6.30h)$$

$$- \frac{\widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_2 + \widehat{c}\widehat{\alpha}_3\widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_2 - \widehat{s}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z3} \quad (6.30i)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{z4} &= \frac{\widehat{s}\widehat{\alpha}_3\widehat{s}\widehat{\theta}_3}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z1} \\ &- \frac{\widehat{c}\widehat{\theta}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{c}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_3 + \widehat{s}\widehat{\theta}_2\widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_3 + \widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_3}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_1\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z2} \\ &+ \frac{\widehat{c}\widehat{\theta}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_3\widehat{s}\widehat{\alpha}_3 + \widehat{s}\widehat{\theta}_2\widehat{c}\widehat{\theta}_3\widehat{c}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_3 + \widehat{s}\widehat{\theta}_2\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{c}\widehat{\alpha}_3}{\widehat{s}\widehat{\alpha}_2\widehat{s}\widehat{\theta}_2}\widehat{F}_{z3} \end{aligned} \quad (6.30j)$$

Il sistema di equazioni (6.30) è costituito da 18 equazioni scalari le cui incognite sono:

- le 5 reazioni vincolari relative alla coppia rotoidale;
- le $3 \times 4 = 12$ reazioni vincolari delle coppie cilindriche;
- la coppia M_{z1} in input.

Nel caso in cui non venga considerato l'attrito, il sistema (6.30) si semplifica, risultano infatti $F_{z2} = F_{z3} = F_{z4} = 0$ e $M_{z2} = M_{z3} = 0$. Nel caso invece in cui si consideri l'attrito nelle coppie cinematiche, le componenti citate non saranno più nulle, ma verranno calcolate secondo quanto riportato nella sezione 6.4. In Figura 6.3 vengono riportati gli andamenti dei momenti registrati nelle coppie cinematiche in presenza (a) o meno (b) di errori di montaggio. Le variazioni ipotizzate sui valori di a_i ed α_i sono di 0.5 mm e 10^{-4} rad, rispettivamente.

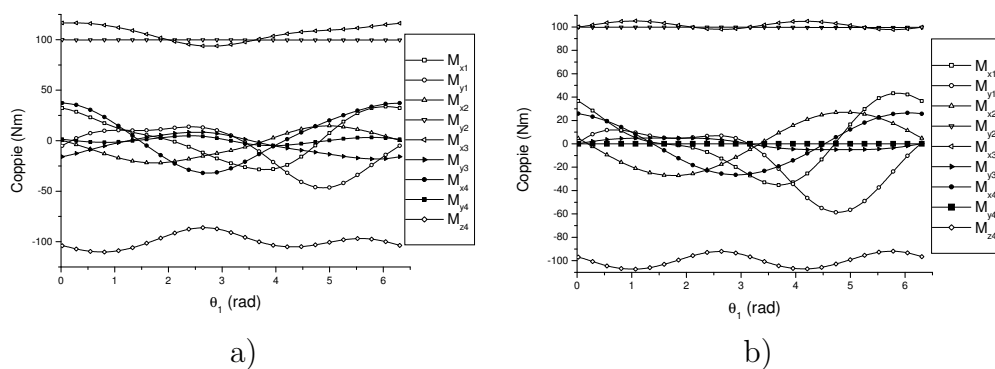


Figura 6.3: Momenti registrati nelle coppie cinematiche nel caso di giunto cardanico con errori (a) e senza (b)

6.3 Analisi dinamica

Innanzitutto è possibile scrivere per i tre corpi mobili le equazioni duali di equilibrio:

$$\left[\widehat{A}\right]_1^2 \left\{\widehat{R}_{C_1(1)}\right\}^{(1)} - \left\{\widehat{R}_{C_2(2)}\right\}^{(2)} = \left\{\widehat{F}_{C_2(1)}\right\}^{(2)}, \quad (6.31a)$$

$$\left[\widehat{A}\right]_2^3 \left\{\widehat{R}_{C_2(2)}\right\}^{(2)} - \left\{\widehat{R}_{C_3(3)}\right\}^{(3)} = \left\{\widehat{F}_{C_3(2)}\right\}^{(3)}, \quad (6.31b)$$

$$\left[\widehat{A}\right]_3^4 \left\{\widehat{R}_{C_3(3)}\right\}^{(3)} - \left\{\widehat{R}_{C_4(4)}\right\}^{(4)} = \left\{\widehat{F}_{C_4(3)}\right\}^{(4)}, \quad (6.31c)$$

ove $\left\{\widehat{R}_{C_i(j)}\right\}^{(i_k)}$ è il vettore duale delle reazioni vincolari esplicitate sul membro j , ridotte in C_i ed espresse nel riferimento i_k .

Queste ultime, tenuta presente la (5.89), forniscono, per $j = 2, 3, 4$,

$$\left\{\widehat{H}_{C_j(j-1)}\right\}^{(j)} + \left[\widetilde{v}_{C_j(j-1)}\right]^{(j)} \left\{\widehat{H}_{C_j(j-1)}\right\}^{(j)} = \left[\widehat{A}\right]_{j-1}^j \left\{\widehat{R}_{C_{j-1}(j-1)}\right\}^{(j-1)} + \left\{\widehat{R}_{C_j(j)}\right\}^{(j)}, \quad (6.32)$$

ovvero il sistema di equazioni lineari da risolvere rispetto alle componenti dei vettori duali delle forze vincolari ai giunti.

Il primo passo consiste dunque nel valutare le quantità di moto duali dei corpi mobili. Nel caso del meccanismo RCCC, particolarizzando la (5.87) e posto

$$m_i \{C_{i+1}G_i\}^{(i+1)} = \{S_i\}^{(i+1)}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.33)$$

le quantità di moto duali per i membri mobili del meccanismo valgono:

Membro 2

$$\left\{\widehat{H}_{C_2(1)}\right\}^{(2)} = m_1 \{v_{C_2(1)}\}^{(2)} - \left[\widetilde{S}_1^{(2)}\right]^{(2)} \{\omega_1\}^{(2)} + \varepsilon \left(\left[\widetilde{S}_1^{(2)}\right]^{(2)} \{v_{C_2(1)}\}^{(2)} + \left[J_{C_2(1)}^{(2)}\right] \{\omega_1\}^{(2)} \right), \quad (6.34)$$

Membro 3

$$\begin{aligned} \{\widehat{H}_{C_3(2)}\}^{(3)} &= m_2 \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} - [\widetilde{S}_2^{(3)}]^{(3)} \{\omega_2\}^{(3)} \\ &+ \varepsilon \left([\widetilde{S}_2^{(3)}]^{(3)} \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} + [J_{C_3(2)}^{(3)}] \{\omega_2\}^{(3)} \right), \end{aligned} \quad (6.35)$$

Membro 4

$$\begin{aligned} \{\widehat{H}_{C_4(3)}\}^{(4)} &= m_3 \{v_{C_4(3)}\}^{(4)} - [\widetilde{S}_3^{(4)}]^{(4)} \{\omega_3\}^{(4)} \\ &+ \varepsilon \left([\widetilde{S}_3^{(4)}]^{(4)} \{v_{C_4(3)}\}^{(4)} + [J_{C_4(3)}^{(4)}] \{\omega_3\}^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

D'altro canto, per definire i vettori velocità presenti in quest'ultime, è necessario prendere in considerazione anche le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \{\widehat{v}_{C_2(1,4)}\}^{(2)} &= \{\omega_1\}^{(2)} + \varepsilon \{v_{C_2(1,4)}\}^{(2)} \\ &= [\widehat{A}]_1^2 \{\widehat{v}_{C_1(1,4)}\}^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

ove

$$\{\widehat{v}_{C_1(1,4)}\}^{(1)} = \left\{ 0 \ 0 \ \dot{\theta}_1 \right\}^T, \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{v}_{C_3(2,4)}\}^{(3)} &= \{\omega_2\}^{(3)} + \varepsilon \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} \\ &= [\widehat{A}]_4^3 \{\widehat{v}_{C_4(3,4)}\}^{(4)} - \{\widehat{v}_{C_3(3,2)}\}^{(3)}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

ove

$$\{\widehat{v}_{C_4(3,4)}\}^{(3)} = \left\{ 0 \ 0 - (\dot{\theta}_4 + \varepsilon \dot{s}_4) \right\}^T, \quad (6.40)$$

e

$$\{\widehat{v}_{C_3(3,2)}\}^{(3)} = \left\{ 0 \ 0 (\dot{\theta}_3 + \varepsilon \dot{s}_3) \right\}^T, \quad (6.41)$$

$$\{\widehat{v}_{C_4(3,4)}\}^{(4)} = \{\omega_3\}^{(4)} + \varepsilon \{v_{C_4(3)}\}^{(4)}. \quad (6.42)$$

Se si sviluppano i prodotti matriciali si ottiene:

$$\left\{ \widehat{H}_{C_2(1)} \right\}^{(2)} = \dot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1 \\ c \alpha_1 (m_1 a_1 + S_{1x}) \\ -s \alpha_1 (m_1 a_1 + S_{1x}) \end{Bmatrix} + \varepsilon \dot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} -a_1 (S_{1y} s \alpha_1 + S_{1z} c \alpha_1) + J_{1xy} s \alpha_1 + J_{1xz} c \alpha_1 \\ a_1 s \alpha_1 S_{1x} + J_{1yy} s \alpha_1 + J_{1yz} c \alpha_1 \\ a_1 c \alpha_1 S_{1x} + J_{1yz} s \alpha_1 + J_{1zz} c \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\left\{ \widehat{H}_{C_3(2)} \right\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} m_2 \left(-s \alpha_3 s \theta_3 \dot{s}_4 - s \alpha_3 s_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 - a_3 c \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ + S_{2z} s \alpha_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 + S_{2y} \left(\dot{\theta}_3 + c \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ \hline m_2 \left(s \alpha_3 c \theta_3 \dot{s}_4 - s \alpha_3 s_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 + a_3 c \alpha_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ + S_{2z} s \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 - S_{2x} \left(\dot{\theta}_3 + c \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ \hline -m_2 \left(\dot{s}_3 + c \alpha_3 \dot{s}_4 - a_3 s \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ -\dot{\theta}_4 \left(S_{2y} s \alpha_3 s \theta_3 + S_{2x} s \alpha_3 c \theta_3 \right) \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -S_{2z} \left(s \alpha_3 c \theta_3 \dot{s}_4 - s \alpha_3 s_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 + a_3 c \alpha_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ -S_{2y} \left(\dot{s}_3 + c \alpha_3 \dot{s}_4 - a_3 s \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ -J_{2xx} s \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 + J_{2xy} s \alpha_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 - J_{2xz} \left(\dot{\theta}_3 + c \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ \hline -S_{2z} \left(s \alpha_3 s \theta_3 \dot{s}_4 + s \alpha_3 s_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 + a_3 c \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ + S_{2x} \left(\dot{s}_3 + c \alpha_3 \dot{s}_4 - a_3 s \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ (-J_{2xy} s \theta_3 + J_{2yy} c \theta_3) s \alpha_3 \dot{\theta}_4 - J_{2yz} \left(\dot{\theta}_3 + c \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ \hline S_{2y} \left(s \alpha_3 s \theta_3 \dot{s}_4 + s \alpha_3 s_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 + a_3 c \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ + S_{2x} \left(s \alpha_3 c \theta_3 \dot{s}_4 - s \alpha_3 s_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 + a_3 c \alpha_3 c \theta_3 \dot{\theta}_4 \right) \\ (-J_{2xz} s \theta_3 + J_{2yz} c \theta_3) s \alpha_3 \dot{\theta}_4 - J_{2zz} \left(\dot{\theta}_3 + c \alpha_3 \dot{\theta}_4 \right) \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\left\{ \widehat{H}_{C_4(3)} \right\}^{(4)} = \begin{Bmatrix} S_{3y}\dot{\theta}_4 \\ -S_{3x}\dot{\theta}_4 \\ m_3\dot{s}_4 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -S_{3y}\dot{s}_4 - J_{3xz}\dot{\theta}_4 \\ S_{3x}\dot{s}_4 - J_{3yz}\dot{\theta}_4 \\ -J_{3zz}\dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \quad (6.45)$$

Allorché si particolarizzi la (5.89) per i membri del quadrilatero RCCC, avremo

$$\left\{ \widehat{F}_{C_2(1)} \right\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -(-m_1 a_1 + S_{1x}) \dot{\theta}_1^2 + (S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ (S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) c \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 a_1 c \alpha_1 + S_{1x} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ -(S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) s \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 - (m_1 a_1 + S_{1x}) s \alpha_1 \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -J_{1yz} c^2 \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 + (J_{1zz} - J_{1yy}) s \alpha_1 c \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -(S_{1z} a_1 c \alpha_1 + S_{1y} a_1 s \alpha_1 - J_{1xz} c \alpha_1 - J_{1xy} s \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ \hline (J_{1xy} s \alpha_1 c \alpha_1 + J_{1xz} c^2 \alpha_1 - a_1 S_{1z}) \dot{\theta}_1^2 \\ + (S_{1x} a_1 s \alpha_1 + J_{1yy} s \alpha_1 + J_{1yz} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ \hline (a_1 S_{1y} - J_{1xy} s^2 \alpha_1 - J_{1xz} s \alpha_1 c \alpha_1) \dot{\theta}_1^2 \\ + (a_1 S_{1x} c \alpha_1 + J_{1yz} s \alpha_1 + J_{1zz} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

$$\left\{ \widehat{F}_{C_3(2)} \right\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -2m_2 s \alpha_3 c \theta_3 \dot{s}_3 \dot{\theta}_4 - S_{2x} \dot{\theta}_3^2 - 2S_{2x} c \alpha_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ + (-S_{2x} c^2 \theta_3 + S_{2z} s \alpha_3 c \alpha_3 s \theta_3 - S_{2x} s^2 \theta_3 c^2 \alpha_3 \\ - m_2 s_3 c \alpha_3 s \alpha_3 s \theta_3 - S_{2y} s \theta_3 c \theta_3 s^2 \alpha_3 + m_2 a_3 c \theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\ - (m_2 s \alpha_3 c \theta_3 s_3 - S_{2y} c \alpha_3 + m_2 a_3 c \alpha_3 s \theta_3 - S_{2z} s \alpha_3 c \theta_3) \ddot{\theta}_4 \\ - m_2 s \alpha_3 s \theta_3 \ddot{s}_4 + S_{2y} \ddot{\theta}_3 \\ \hline -2m_2 s \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 \dot{s}_3 - S_{2y} \dot{\theta}_3^2 - 2S_{2y} c \alpha_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ (m_2 c \alpha_3 s \alpha_3 c \theta_3 s_3 - S_{2z} c \alpha_3 s \alpha_3 c \theta_3 + m_2 a_3 s \theta_3 \\ - S_{2x} s \theta_3 c \theta_3 s^2 \alpha_3 - S_{2y} c^2 \theta_3 - S_{2y} c^2 \alpha_3 c^2 \theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\ + (m_2 a_3 c \alpha_3 c \theta_3 - S_{2x} c \alpha_3 - m_2 s_3 s \alpha_3 s \theta_3 + S_{2z} s \alpha_3 s \theta_3) \ddot{\theta}_4 \\ - S_{2x} \ddot{\theta}_3 + m_2 s \alpha_3 c \theta_3 \ddot{s}_4 \\ \hline (2S_{2x} s \alpha_3 s \theta_3 - 2S_{2y} s \alpha_3 c \theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ + (m_2 s_3 - S_{2z} + S_{2x} s \alpha_3 s \theta_3 c \alpha_3 - m_2 s_3 c^2 \alpha_3 - S_{2z} c^2 \alpha_3 \\ - S_{2y} s \alpha_3 c \alpha_3 c \theta_3) \dot{\theta}_4^2 + m_2 \ddot{s}_3 - m_2 c \alpha_3 \ddot{s}_4 \\ + (m_2 a_3 s \alpha_3 - S_{2y} s \alpha_3 s \theta_3 - S_{2x} s \alpha_3 c \theta_3) \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
& 2S_{2z}\dot{s}_3s\alpha_3s\theta_3\dot{\theta}_4 - J_{2yz}\dot{\theta}_3^2 - s\alpha_3c\theta_3 (J_{2xx} + J_{2zz} - J_{2yy} + 2J_{2xy}) \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 \\
& - 2J_{2yz}c\alpha_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + (-J_{2yz}c^2\alpha_3s^2\theta_3 - [S_{2z}s_3 + J_{2zz} - J_{2yy} + J_{2xy}]s\alpha_3c\alpha_3c\theta_3 \\
& \quad + J_{2yz}c^2\theta_3 - S_{2z}a_3s\theta_3 - J_{2xz}s\theta_3c\theta_3s^2\alpha_3 - S_{2y}s_3s^2\alpha_3) \dot{\theta}_4^2 - J_{2xz}\ddot{\theta}_3 \\
& \quad - S_{2y}\ddot{s}_3 + (S_{2y}a_3s\alpha_3 - J_{2xx}s\alpha_3s\theta_3 - J_{2xz}c\alpha_3 \\
& \quad \quad S_{2z}a_3c\alpha_3c\theta_3 + S_{2z}s_3s\alpha_3s\theta_3 + J_{2xy}s\alpha_3c\theta_3) \ddot{\theta}_4 \\
& \quad - (S_{2y}c\alpha_3 + S_{2z}s\alpha_3c\theta_3) \ddot{s}_4 \\
\hline
& - 2S_{2z}\dot{s}_3s\alpha_3c\theta_3\dot{\theta}_4 + J_{2xz}\dot{\theta}_3^2 + s\alpha_3s\theta_3 (J_{2xx} - J_{2yy} - J_{2zz}) \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 \\
& - 2(J_{2xy}s\alpha_3c\theta_3 - J_{2xz}c\alpha_3) \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + (-J_{2xz}s^2\theta_3 - J_{2xy}c\alpha_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2x}s_3 \\
& \quad + J_{2yz}s\theta_3c\theta_3c^2\alpha_3 + c\alpha_3s\alpha_3s\theta_3 [J_{2xx} - s_3S_{2z} - J_{2zz}] \\
& \quad a_3S_{2z}c\theta_3 - J_{2xz}c^2\alpha_3 [2 - c^2\theta_3] + J_{2yz}s\theta_3c\theta_3 + S_{2x}s_3c^2\alpha_3) \dot{\theta}_4^2 \\
& + (J_{2yy}s\alpha_3c\theta_3 - S_{2x}a_3s\alpha_3 - S_{2z}s_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2z}s_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2z}a_3c\alpha_3s\theta_3 \\
& \quad - J_{2xy}s\alpha_3s\theta_3 - J_{2yz}c\alpha_3) \ddot{\theta}_4 + (S_{2x}c\alpha_3 - S_{2z}s\alpha_3s\theta_3) \ddot{s}_4 - S_{2x}\ddot{s}_3 \\
\hline
& 2(S_{2y}c\theta_3 - S_{2x}s\theta_3) s\alpha_3\dot{\theta}_4\dot{s}_3 + (-J_{2xy}c^2\alpha_3 - S_{2y}a_3c\theta_3 - [J_{2yy} - J_{2xx}]s\theta_3c\theta_3 \\
& \quad + [S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3]s_3s\alpha_3c\alpha_3 + [J_{2yz}s\theta_3 + J_{2xz}c\theta_3]s\alpha_3c\alpha_3 \\
& \quad + [J_{2xx} + J_{2yy}]s\theta_3c\theta_3c^2\alpha_3 + J_{2xy} \\
& \quad S_{2x}a_3s\theta_3 - 2J_{2xy}c^2\theta_3s^2\alpha_3) \dot{\theta}_4^2 - J_{2zz}\ddot{\theta}_3 \\
& + [S_{2y}c\theta_3 - S_{2x}s\theta_3]s_3s\alpha_3 + [J_{2yz}c\theta_3 - J_{2xz}s\theta_3]s\alpha_3 \\
& \quad [S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3]a_3c\alpha_3 - J_{2zz}c\alpha_3) \ddot{\theta}_4 \\
& \quad (S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3) s\alpha_3\ddot{s}_4
\end{aligned} \right\} \varepsilon \tag{6.47}$$

$$\left\{ \widehat{F}_{C_4(3)} \right\}^{(4)} = \begin{Bmatrix} S_{3y}\ddot{\theta}_4 - S_{3x}\dot{\theta}_4^2 \\ -S_{3x}\ddot{\theta}_4 - S_{3y}\dot{\theta}_4^2 \\ -m_3\ddot{s}_4 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -S_{3y}\ddot{s}_4 - J_{3xz}\ddot{\theta}_4 - J_{3yz}\dot{\theta}_4^2 \\ S_{3x}\ddot{s}_4 - J_{3yz}\ddot{\theta}_4 + J_{3xz}\dot{\theta}_4^2 \\ -J_{3zz}\ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \tag{6.48}$$

La soluzione del sistema di equazioni (6.31) fornirà le componenti incognite delle forze duali ai giunti.

6.4 Coppie cinematiche con attrito

Nel caso di giunto cardanico ideale la risultante delle reazioni vincolari nelle coppie cinematiche è nulla e non vi è alcuno spostamento lungo l'asse delle coppie medesime. Ciò non è necessariamente vero in presenza di errori di costruzione e di montaggio.

Coppia rotoidale

Essendo nulla la velocità di scorrimento lungo l'asse della coppia rotoidale ($\dot{s}_i = 0$) si è trascurata l'azione dell'attrito sulla componente F_{zi} della forza vincolare. Nella i^{ma} coppia rotoidale, le forze di attrito sono dovute alla presenza:

- delle forze vincolari F_{xi} , F_{yi} e F_{zi} ;
- dei momenti vincolari M_{xi} e M_{yi} .

L'azione resistente attorno all'asse z dovuta alle coppie di reazione M_{xi} e M_{yi} può essere modellata [38, 39, 40] secondo lo schema presentato in Figura 6.4. In

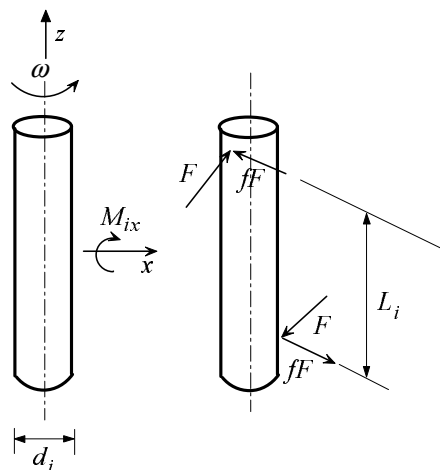


Figura 6.4: Azioni dinamiche dovute all'attrito

particolare la coppia M_{xi} è sostituita da due forze F parallele ed opposte che

agiscono normalmente all'asse della coppia rotoidale. A causa della presenza di attrito tali forze generano una coppia d'attrito:

$$\tau_f^{xi} = f \frac{d_i}{L_i} M_{xi} , \quad (6.49)$$

dove d_i è il diametro del perno, L_i la distanza tra i supporti ³ ed f il coefficiente d'attrito dinamico.

Analogamente, la coppia M_{yi} dà luogo alla coppia d'attrito

$$\tau_f^{yi} = f \frac{d_i}{L_i} M_{yi} . \quad (6.50)$$

In definitiva, è possibile calcolare la componente della coppia di attrito lungo l'asse z come

$$M_{zi} = -\text{sign}(\dot{\theta}_i) \left(\tau_f^{(i)} + \frac{f d_i}{2} \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \right) , \quad (6.51)$$

dove

$$\tau_f^{(i)} = f \frac{d_i}{L_i} \sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2} . \quad (6.52)$$

Appare evidente che la presenza dell'attrito altera l'equilibrio tra i membri.

Coppia cilindrica

Nel caso di coppia cilindrica ideale $M_{zi} = 0$ ed $F_{zi} = 0$ mentre $\dot{s}_i \neq 0$. In presenza di attrito anche la coppia M_{zi} e la forza F_{zi} dovranno essere valutate. La coppia M_{zi} viene calcolata in maniera analoga a quanto già descritto per la coppia rotoidale. Pertanto, le suddette azioni dinamiche verranno calcolate tramite le seguenti equazioni:

$$F_{zi} = -\text{sign}(\dot{s}_i) f \left(\sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} + 2 \frac{\sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2}}{L_i} \right) , \quad (6.53)$$

$$M_{zi} = -\text{sign}(\dot{\theta}_i) \left(\tau_f^{(i)} + \frac{f d_i}{2} \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \right) . \quad (6.54)$$

³Per un cuscinetto con un singolo supporto L_i rappresenta la lunghezza assiale del cuscinetto.

6.5 Analisi del rendimento meccanico

Per la valutazione del rendimento meccanico del giunto cardanico si è proceduto prendendo in considerazione il rendimento istantaneo nella seguente maniera

$$\eta_i = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{loss}}{P_{in}} = 1 - \frac{P_{loss}}{P_{in}}, \quad (6.55)$$

dove $P_{in} = \omega_1 T_1$ è la potenza in ingresso mentre P_{loss} è la sommatoria delle potenze istantaneamente perse per attrito nei singoli giunti. Queste ultime sono valutabili come il prodotto della forza d'attrito data dalla (6.54) e della velocità di traslazione lungo l'asse della coppia \dot{s}_i ; e della coppia d'attrito data dalla (6.53) e della velocità di rotazione attorno all'asse della coppia medesima $\dot{\theta}_i$. Una prima indagine è stata condotta con l'intento di evidenziare gli effetti delle tolleranze geometriche e dimensionali sul rendimento istantaneo del giunto cardanico. Sono inoltre stati valutati gli effetti della configurazione del giunto e della velocità di rotazione sempre in riferimento al rendimento istantaneo. Per queste analisi sono stati assunti i seguenti parametri nominali:

- coefficiente di attrito dinamico $f = 0.005$;
- $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$, $\alpha_4 = 15^\circ$ ed $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$);
- coppia in ingresso $T_1 = 100$ Nm;
- velocità angolare in ingresso $\omega_1 = 1500$ rpm.

Si è inoltre supposto che l'entità degli errori sia:

- disallineamento degli assi: $\Delta a_i = 0.5$ mm ($i = 1, 2, 3, 4$);
- inclinazione angolare degli assi dei giunti: $\Delta \alpha_i = 0.006^\circ$ ($i = 1, 2, 3$).

In Figura 6.5 si riporta il confronto fra il rendimento istantaneo del giunto cardanico per un giro completo dell'albero di ingresso in assenza ed in presenza di errori di montaggio. Si può notare come la presenza di errori comporti una perdita di rendimento pari a circa lo 0.15%.

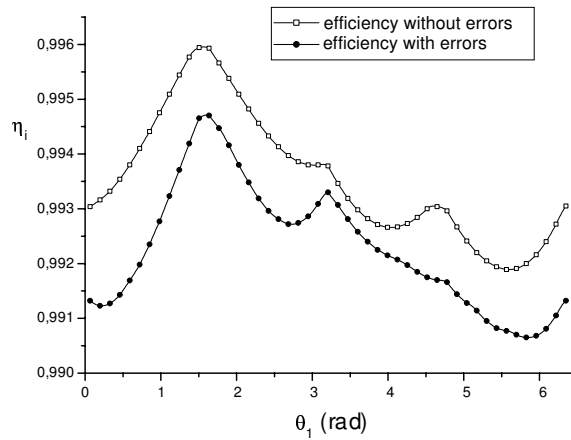


Figura 6.5: Influenza degli errori di montaggio sul rendimento meccanico

Le successive due analisi sono state effettuate assumendo i su citati parametri nominali, supponendo quindi assenza di errori, e variando rispettivamente la velocità angolare in ingresso e la configurazione del giunto. In Figura 6.6 viene riportato l'andamento del rendimento meccanico al variare della velocità angolare fra 1500 rpm e 2500 rpm. Si può osservare come un aumento della velocità angolare comporti maggiori dissipazioni e quindi riduca il rendimento meccanico di circa l'1.8%.

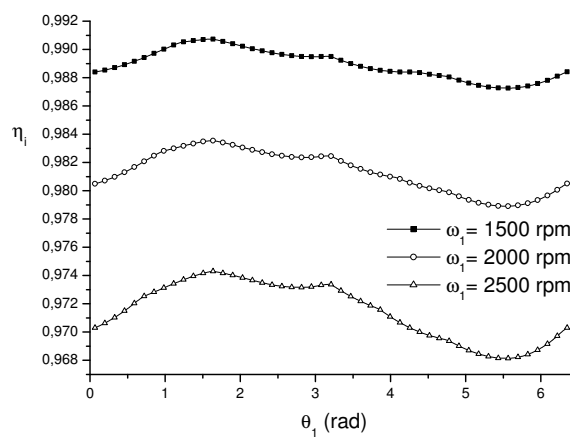


Figura 6.6: Influenza della velocità angolare sul rendimento meccanico

Mantenendo costante la velocità angolare in ingresso al valore nominale, è stata variata la configurazione dell'albero di uscita rispetto a quello di ingresso fra 5° e 15° . Anche in questo caso si può notare come una configurazione maggiormente inclinata comporti una maggiore dissipazione e quindi una riduzione del rendimento meccanico del giunto, se pur di lieve entità (Figura 6.7).

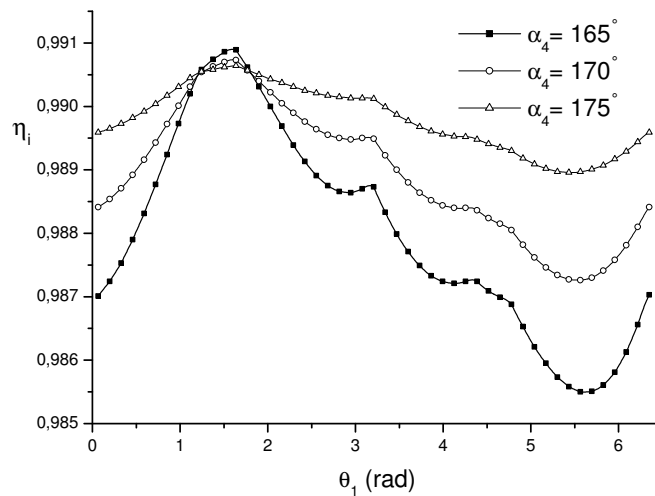


Figura 6.7: Influenza della configurazione del giunto sul rendimento meccanico

Il codice implementato è stato inoltre validato sulla base delle prove sperimentali svolte al banco giunti allestito presso il laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Meccanica (Figura 6.8).

In particolare il banco giunti, il cui schema è riportato in Figura 6.9, è costituito da:

- Una piattaforma riconfigurabile in acciaio.
- Due torsimetri modello Magtrol TMB 210 con coppia massima: 100.00 Nm; velocità massima: 4000 r.p.m.; sensibilità di coppia 100mV/Nm; sensibilità di velocità: 60 pulses per rev.

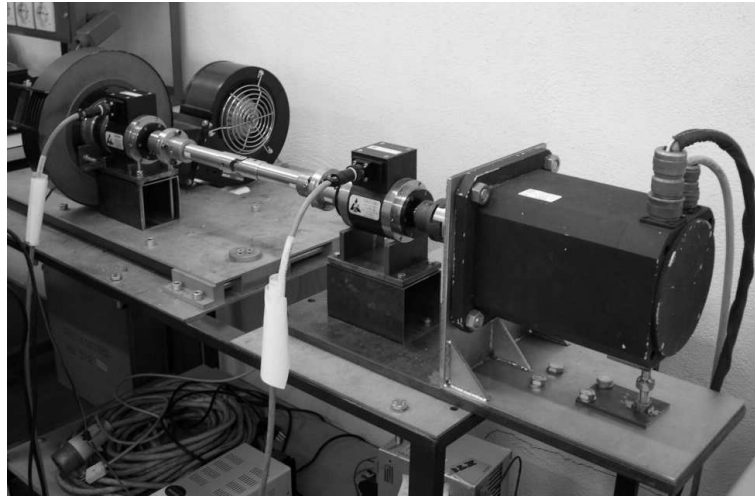


Figura 6.8: Banco giunti

- Un motore brushless (due poli, coppia max 110 Nm) con pannello di controllo e software di gestione.
- Un freno elettromagnetico (modello Merobel SA FRAT 650; coppia massima 65 Nm; coppia minima 0.63 Nm) con ventola radiale e controllore digitale DGT 200 MC.
- Un computer con convertitore analogico/digitale e sistema di acquisizione multicanale della National Instruments.

Con riferimento alla Figura 6.10 sono stati riprodotti i tre corpi mobili costituenti il giunto ed i relativi riferimenti secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg. In particolare gli elementi rappresentati in Figura 6.10a e 6.10c sono l'albero di input e quello di output rispettivamente, e sono a loro volta costituiti dai seguenti elementi: due flangie di attacco (al motore ed al freno rispettivamente), l'albero e la forchetta. L'elemento in Figura 6.10b è la crociera, organo di connessione fra i due alberi.

Le caratteristiche inerziali di questi tre corpi sono riportate in Tabella 6.1 espresse nei riferimenti del giunto.

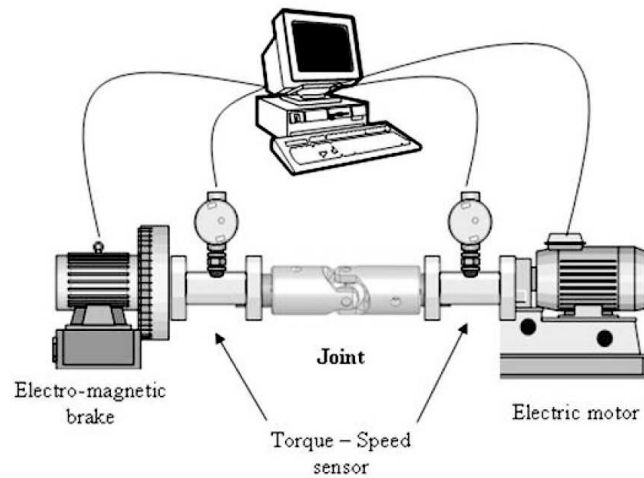


Figura 6.9: Schema del banco giunti

I restanti parametri nominali assunti sono i seguenti:

- coefficiente di attrito $f = 0.42$;
- lunghezze e diametri dei cuscinetti degli alberi $L = 10$ mm e $d = 20$ mm;
- lunghezze e diametri delle coppie della crociera $L = 5$ mm e $d = 6$ mm;
- masse dei membri $m_1 = 0.936$ kg, $m_2 = 0.0456$ kg e $m_3 = 0.936$ kg;
- $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$, $\alpha_4 = 165^\circ$ ed $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$);
- valore medio coppia in ingresso $T_1 = 0.2$ Nm;
- valore medio della velocità angolare in ingresso $\omega_1 = 6$ rad/s.

In Figura 6.11 si riporta il confronto fra l'andamento del rendimento del giunto Cardanico acquisito sperimentalmente e calcolato mediante il codice.

In particolare sono stati impiegati come dati in input del codice la posizione, la velocità e l'accelerazione angolare in ingresso, nonché la coppia in ingresso acquisiti al banco giunti. In questo modo si sono simulate le effettive condizioni di funzionamento del giunto prendendo in considerazione anche gli effetti inerziali. I

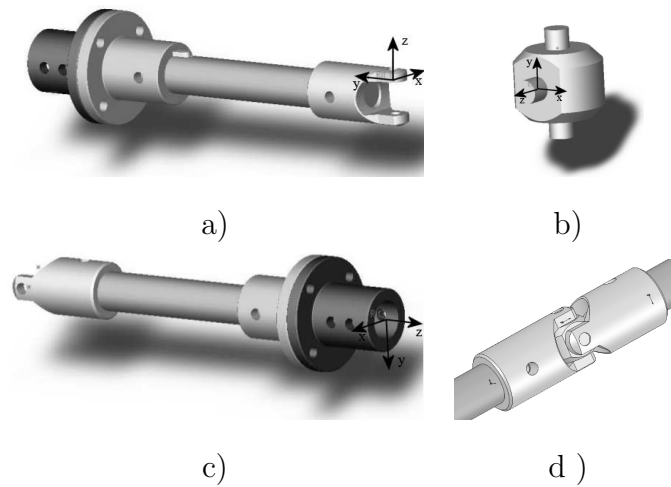


Figura 6.10: Riproduzione del giunto cardanico usato in laboratorio

segnali provenienti dai sensori sono stati preventivamente filtrati mediante filtro di Butterworth eliminando le alte frequenze (> 100 Hz). Come detto il codice valuta il rendimento meccanico andando a calcolare la potenza dissipata nelle varie coppie cinematiche. Il rendimento ottenuto sperimentalmente è stato calcolato considerando il rapporto tra la potenza in uscita e quella in ingresso, entrambe valutabili mediante i dati ottenuti dai sensori.

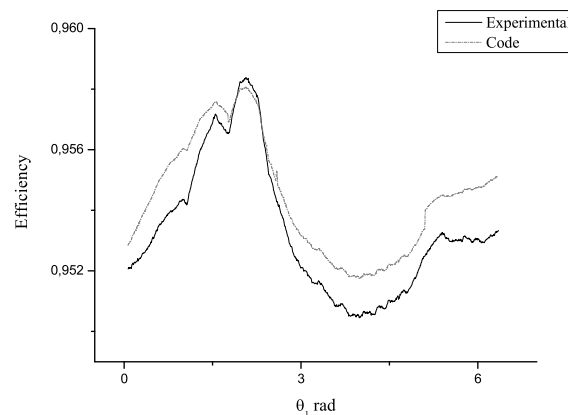


Figura 6.11: Confronto rendimento meccanico

Tabella 6.1: Caratteristiche inerziali dei membri in unità del S.I.

	x	y	z	$[J_1]^{(2)}$	x	y	z
$\{S_1\}^{(2)}$	0.119813	0.008020	0.11954	x	0.01925	0	0
$\{S_2\}^{(3)}$	0.000387	0.000387	0	y	0	0.00025	-0.00103
$\{S_3\}^{(4)}$	0.087780	0.087780	0	z	0	-0.00103	0.01918
$[J_2]^{(3)}$	x	y	z	$[J_3]^{(4)}$	x	y	z
x	0.000006	0	0	x	0.01215	0	0
y	0	0.000006	0	y	0	0.01215	0
z	0	0	0.000002	z	0	0	0.000184

Modellazione statistica delle tolleranze geometriche e dimensionali per meccanismi tridimensionali

La corretta scelta delle tolleranze è un problema di non facile soluzione. Se da una parte assegnare tolleranze strette permette di migliorare la qualità del prodotto finito e di assicurarne il corretto funzionamento, dall'altra determina un notevole incremento dei costi di realizzazione. Assegnare invece tolleranze meno restrittive potrebbe pregiudicare il corretto funzionamento con una conseguente perdita di rendimento. Il compito dell'ingegnere può essere quindi riassunto in due differenti tipi di attività:

- **Analisi delle tolleranze.** Consiste in una stima del rendimento dell'assieme mediante un modello analitico. Devono essere presi in considerazione gli effetti che ciascun elemento ha sull'intero assieme in tutte le configurazioni da esso assunte.
- **Assegnazione delle tolleranze.** Consiste nell'assegnare e distribuire le

tolleranze di ciascuna parte in modo da raggiungere il rendimento previsto e rispettare i vincoli di costi e di processo [41, 42].

In generale, per poter effettuare un'analisi delle tolleranze si ricorre a modelli lineari o non lineari del componente meccanico in esame. In questo modo può essere monitorata la variazione del rendimento dell'assieme al variare dei parametri di progetto. Può quindi essere definito "robusto" un progetto per cui le variazioni introdotte dal processo costruttivo non influenzano in modo sostanziale le funzionalità cinematiche del componente meccanico.

7.1 Metodologie per l'analisi delle tolleranze

Le metodologie proposte in letteratura per l'analisi delle tolleranze, possono essere racchiuse nelle seguenti tre categorie principali [43]:

- **Analisi del caso peggiore (worst case).** Il valore massimo e minimo associati a tutti i componenti di un assieme vengono impiegati per valutare il range di variazione delle caratteristiche cinematiche dell'assieme stesso [44, 45].
- **Simulazione Monte Carlo.** Il progettista può condurre analisi statistiche delle grandezze stocastiche proprie del problema dell'analisi delle tolleranze. Il metodo Monte Carlo prevede la definizione di un set di n valori casuali da assegnare a ciascuna delle variabili stocastiche nell'equazioni risolutive del sistema. Queste equazioni sono così risolte n volte utilizzando ciascun valore casuale presente nel set scelto. I risultati così ottenuti possono essere esaminati mediante istogrammi e campioni statistici.
- **Statistico.** Distribuzioni statistiche possono essere impiegate per predire il rendimento di un dato assieme meccanico. Per questo tipo di analisi possono essere impiegate diverse metodologie: valore medio, sei sigma, RMS, etc.

In un problema di analisi delle tolleranze il progettista deve essere in grado di prevedere il comportamento ed il rendimento del sistema in corrispondenza di imprecise condizioni di input, e fornire di conseguenza progetti alternativi. Strumenti computazionali, come quello presentato in questo capitolo, possono essere di notevole aiuto al progettista per assolvere al compito richiestogli. Per questo motivo l'approccio statistico sembra essere quello migliore per rappresentare e gestire l'incertezza dei dati legati all'analisi degli errori di realizzazione e montaggio. Gao in [46] descrive una procedura di analisi delle tolleranze per meccanismi spaziali basta sull'algebra dei numeri duali.

7.2 Modellazione della coppia cilindrica

In questa sezione viene descritto il modello cinematico della coppia cilindrica che è stato impiegato. Prima di tutto verranno introdotte le relazioni necessarie per l'analisi cinematica in condizioni ideali, successivamente verranno aggiunte le tolleranze geometriche e dimensionali.

La coppia cilindrica che collega il corpo i al corpo j è composta da due elementi cinematici:

- il perno (sul corpo i);
- il foro (sul corpo j),

ad ognuno dei quali è associato un riferimento Cartesiano. Inoltre sul corpo i in corrispondenza del perno si definisce il k^{mo} riferimento del giunto come $P_{i_k} - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$; analogamente sul corpo j in corrispondenza del foro si definisce il k^{mo} riferimento del giunto come $P_{j_k} - x_{j_k} y_{j_k} z_{j_k}$. L'origine P_{i_k} si trova a metà dell'asse del perno. Facendo l'ipotesi di condizioni di funzionamento ideali l'asse z_{i_k} e l'asse z_{j_k} sono sempre collineari. La matrice di trasformazione duale dal primo sistema

di riferimento del giunto al secondo risulta essere

$$\left[\widehat{A}_{i_k}^{j_k} \right] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{\theta}_i & -\sin \widehat{\theta}_i & 0 \\ \sin \widehat{\theta}_i & \cos \widehat{\theta}_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

dove $\widehat{\theta}_i = \theta_i + \varepsilon s_i$ è l'angolo duale formato tra i versori \widehat{i}_{i_k} e \widehat{i}_{j_k} . Di conseguenza la matrice di trasformazione dal sistema di riferimento $O_i - x_i y_i z_i$, solidale al corpo i , al sistema di riferimento $O_j - x_j y_j z_j$, solidale al corpo j , sarà data da

$$\left[\widehat{A}_i^j \right] = \left[\widehat{A}_i^{i_k} \right] \left[\widehat{A}_{i_k}^{j_k} \right] \left[\widehat{A}_{j_k}^j \right], \quad (7.2)$$

dove la matrice $\left[\widehat{A}_i^{i_k} \right]$ è definita come segue¹:

$$\left[\widehat{A}_i^{i_k} \right] = \begin{bmatrix} \widehat{i}_x & \widehat{j}_x & \widehat{k}_x \\ \widehat{i}_y & \widehat{j}_y & \widehat{k}_y \\ \widehat{i}_z & \widehat{j}_z & \widehat{k}_z \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Rimuovendo l'ipotesi di funzionamento ideale e facendo le seguenti assunzioni:

- gli elementi cinematici hanno due o infiniti punti a contatto;
- quando i punti a contatto sono due, denominati B_1 e B_2 , questi giaceranno sulla circonferenza di bordo delle estremità del perno (Figura 7.1);
- sono imposte tolleranze geometriche di cilindricità e circolarità sia per il perno che per il foro;
- sezionando il perno (foro) a qualsivoglia altezza, gli assi delle superfici così ottenute saranno sempre coincidenti con l'asse dell'intero perno (foro);
- non sono presenti runout circolari,

vengono introdotti i giochi radiali nelle coppie cilindriche. A causa di questi giochi, la posizione del perno all'interno del foro sarà deviata rispetto a quella ideale.

¹Si veda Sez.5.4.2.

Questa deviazione rappresenta l'errore di posizione. Per poter descrivere analiticamente la presenza di giochi è necessario introdurre un altro sistema di riferimento Cartesiano $P_{i'_k} - x_{i'_k} y_{i'_k} z_{i'_k}$, che avrà l'asse $z_{i'_k}$ sempre allineato con l'asse z_{j_k} . Il sistema di riferimento $P_{i_k} - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$ in condizioni ideali coincide con il sistema $P_{i'_k} - x_{i'_k} y_{i'_k} z_{i'_k}$, in presenza di giochi sarà invece necessario un moto elicoidale per poterlo ad esso sovrapporre (Figura 7.1). L'obiettivo è quello di dedurre le ca-

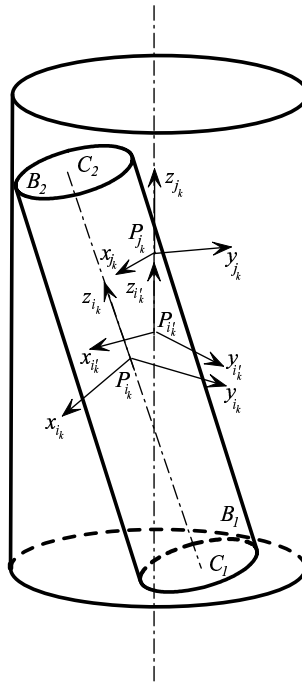


Figura 7.1: Coppia cilindrica con gioco radiale

ratteristiche di questo moto elicoidale in funzione delle posizioni dei due punti di contatto B_1 e B_2 potendo così definire la matrice di trasformazione $[\widehat{A}_{i_k}^{j'_k}]$. A causa del disallineamento tra il perno ed il foro l'equazione (7.2) viene così modificata nella seguente

$$[\widehat{A}_i^j] = [\widehat{A}_i^{j'_k}] [\widehat{A}_{i_k}^{j'_k}] [\widehat{A}_{i'_k}^{j_k}] [\widehat{A}_{j_k}^j] . \quad (7.4)$$

In Figura 7.2a viene riportato il piano Π ortogonale all'asse del foro e contenente il punto $P_{i'_k}$ su cui sono proiettate le due sezioni di estremità del perno. E'

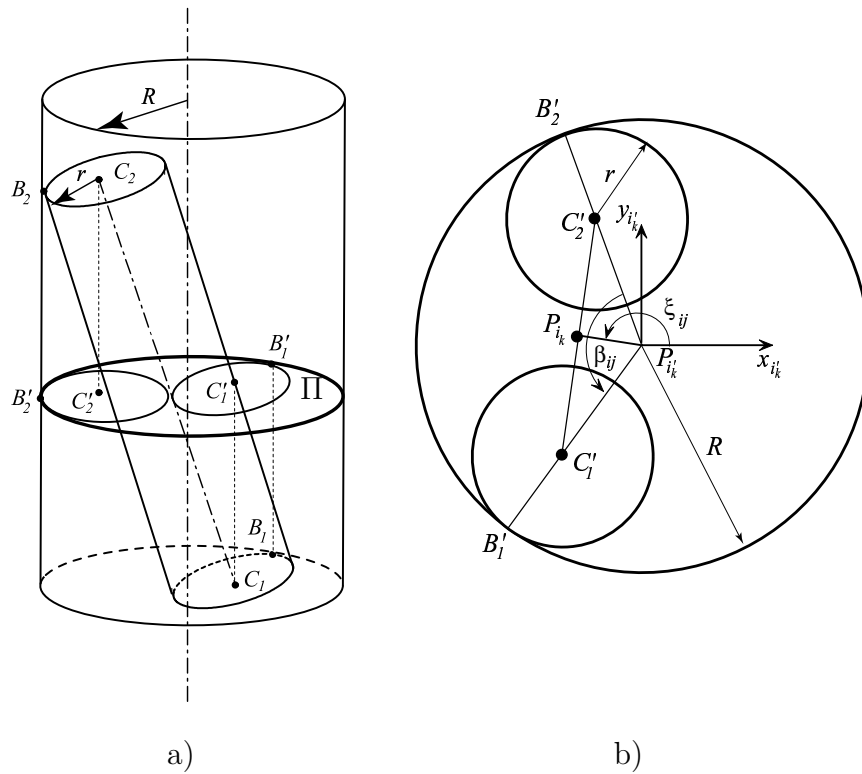


Figura 7.2: Parametri delle coppia cilindrica con gioco

da notare che le proiezioni delle due sezioni, che sarebbero due ellissi, sono state approssimate a due circonferenze. Questa approssimazione è alla base dei calcoli algebrici successivamente sviluppati. Con riferimento alla Figura 7.2b i punti C'_1 e C'_2 sono le proiezioni dei centri delle sezioni circolari delle estremità del perno (C_1 e C_2), mentre i punti B'_1 e B'_2 sono le proiezioni dei due punti di contatto B_1 e B_2 . L'angolo β_{ij} è l'angolo formato tra le congiungenti B'_2 e B'_1 con il punto $P'_{i'k}$ rispettivamente, l'angolo ξ_{ij} è quello formato tra la congiungente i punti $P'_{i'k}$ e $P'_{i'k}$ con l'asse $x'_{i'k}$. Mediante questi due angoli è possibile definire completamente la disposizione del perno all'interno del foro. Le coordinate dei punti C'_1 e C'_2 nel sistema di riferimento $P'_{i'k} x'_{i'k} y'_{i'k} z'_{i'k}$, con riferimento alle Figure 7.1 e 7.2, sono date

dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} x_{C_1} = x_{C'_1} &\approx (R - r) \cos \left(\xi_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{2} \right) , \\ y_{C_1} = y_{C'_1} &\approx (R - r) \sin \left(\xi_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{2} \right) , \\ z_{C_1} &\approx -\frac{H}{2} , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_{C_2} = x_{C'_2} &\approx (R - r) \cos \left(\xi_{ij} - \frac{\beta_{ij}}{2} \right) , \\ y_{C_2} = y_{C'_2} &\approx (R - r) \sin \left(\xi_{ij} - \frac{\beta_{ij}}{2} \right) , \\ z_{C_2} &\approx \frac{H}{2} , \end{aligned}$$

da cui

$$\{C_1 C_2\} = \left\{ x_{C_2} - x_{C_1} \quad y_{C_2} - y_{C_1} \quad z_{C_2} - z_{C_1} \right\}^T . \quad (7.5)$$

A questo punto è possibile definire il vettore unitario duale \widehat{E}_{ij} , di minima distanza fra gli assi z_{i_k} e $z_{i'_k}$, e l'angolo duale $\widehat{\tau}_{ij}$ formato dagli stessi. Introducendo infatti i vettori duali $\widehat{C_1 C_2} = \overline{C_1 C_2} + \varepsilon \overline{P'_{i'_k} C_1} \times \overline{C_1 C_2}$ e $\widehat{Z}_{i'_k} = \left\{ 0 \ 0 \ 1 \right\}^T$, è possibile calcolare il vettore unitario duale \widehat{E}_{ij} come

$$\widehat{E}_{ij} = \frac{\widehat{C_1 C_2} \times \widehat{Z}_{i'_k}}{\left\| \widehat{C_1 C_2} \times \widehat{Z}_{i'_k} \right\|} . \quad (7.6)$$

L'angolo duale $\widehat{\tau}_{ij}$ si ottiene come

$$\widehat{\tau}_{ij} = \text{atan2}(\sin \widehat{\tau}_{ij}, \cos \widehat{\tau}_{ij}) , \quad (7.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\tau}_{ij} &= \frac{\widehat{C_1 C_2} \cdot \widehat{Z}_{i'_k}}{\left\| \widehat{C_1 C_2} \right\|} \\ \sin \widehat{\tau}_{ij} &= \left\| \frac{\widehat{C_1 C_2}}{\left\| \widehat{C_1 C_2} \right\|} \times \widehat{Z}_{i'_k} \right\| . \end{aligned}$$

Attraverso questi parametri si definisce la matrice di trasformazione

$$\left[\widehat{A}_{i_k}^{i'_k} \right] = \begin{bmatrix} \widehat{E}_x^2 v \widehat{\tau}_{ij} + c \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_x \widehat{E}_y v \widehat{\tau}_{ij} - \widehat{E}_z s \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_x \widehat{E}_z v \widehat{\tau}_{ij} + \widehat{E}_y s \widehat{\tau}_{ij} \\ \widehat{E}_x \widehat{E}_y v \widehat{\tau}_{ij} + \widehat{E}_z s \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_y^2 v \widehat{\tau}_{ij} + c \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_y \widehat{E}_z v \widehat{\tau}_{ij} - \widehat{E}_x s \widehat{\tau}_{ij} \\ \widehat{E}_x \widehat{E}_z v \widehat{\tau}_{ij} - \widehat{E}_y s \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_y \widehat{E}_z v \widehat{\tau}_{ij} + \widehat{E}_x s \widehat{\tau}_{ij} & \widehat{E}_z^2 v \widehat{\tau}_{ij} + c \widehat{\tau}_{ij} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

dove $v \widehat{\tau}_{ij} = 1 - \cos \widehat{\tau}_{ij}$, $c \widehat{\tau}_{ij} = \cos \widehat{\tau}_{ij}$, $s \widehat{\tau}_{ij} = \sin \widehat{\tau}_{ij}$, $\widehat{E}_{ij} = \left\{ \widehat{E}_x \widehat{E}_y \widehat{E}_z \right\}^T$. Il moto finito descritto dalla (7.8) consente di rendere coincidente P_{i_k} con $P_{i'_k}$ e di allineare gli assi z_{i_k} e $z_{i'_k}$. La posizione assunta dagli assi $x_{i'_k}$ e $y_{i'_k}$ sarà esattamente quella assunta dagli assi x_{i_k} e y_{i_k} dopo questo moto finito. Da notare che la matrice $\left[\widehat{A}_{i_k}^{i'_k} \right]$ è funzione solamente degli angoli β_{ij} e ξ_{ij} , e quindi dei due parametri che descrivono completamente la disposizione del perno nel foro.

Il secondo moto finito necessario per avere la completa sovrapposizione del sistema di riferimento $P_{i_k} - x_{i_k} y_{i_k} z_{i_k}$ su $P_{j_k} - x_{j_k} y_{j_k} z_{j_k}$, è un moto elicoidale attorno all'asse $z_{i'_k} \equiv z_{j_k}$ descritto dalla matrice di trasformazione

$$\left[\widehat{A}_{i'_k}^{j_k} \right] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{\theta}_i & -\sin \widehat{\theta}_i & 0 \\ \sin \widehat{\theta}_i & \cos \widehat{\theta}_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

in cui il valore dell'angolo duale $\widehat{\theta}_i = \theta_i + \varepsilon s_i$ è ottenuto risolvendo le equazioni di chiusura del meccanismo. Questa procedura fallisce nel caso in cui $\widehat{C}_1 \widehat{C}_2$ e $\widehat{Z}_{i'_k}$ siano allineati. In questo caso, infatti, il perno ed il foro sono a contatto lungo una linea comune (e non in due soli punti come ipotizzato precedentemente), l'angolo duale sarà allora $\widehat{\tau}_{ij} = \varepsilon (R - r)$ e il vettore unitario duale \widehat{E}_{ij} avrà la medesima direzione del segmento $P_{i_k} P_{i'_k}$.

7.3 Strategia risolutiva

La strategia risolutiva per l'analisi statistica delle tolleranze geometriche e dimensionali può essere riassunta nella seguente maniera:

1. Deduzione delle equazioni di chiusura del meccanismo

$$\prod_{i=1}^N \left[\widehat{A}_i^{i_1} \right] \left[\widehat{A}_{i_1}^{i_2} \right] \left[\widehat{A}_{i_2}^{(i+1)_1} \right] \left[\widehat{A}_{(i+1)_1}^{(i+1)} \right] = [I] \ .$$

2. Simulazione mediante metodo Monte Carlo. Si definiscono n set di variabili stocastiche. Per ciascun set si assegnano valori causali, all'interno del range di variazione previsto, a ciascuna variabile stocastica utilizzata per la descrizione delle tolleranze geometriche e dimensionali. In particolare gli angoli β_{ij} e ξ_{ij} sono stati considerati variabili equiprobabili nel range $0^\circ \div 360^\circ$, per tutte le restanti variabili si è assunta una distribuzione Gaussiana con deviazione standard pari ad un sesto del massimo valore ammissibile nel range di variazione.
3. Analisi cinematica. Si risolvono le equazioni di chiusura e le loro derivate rispetto al tempo per ciascun set di variabili stocastiche.
4. Analisi statistica. I valori ottenuti, per ciascun set di analisi, per i parametri di output del meccanismo in esame vengono trattati mediante metodi statistici. In particolare vengono valutati il valore medio e la deviazione standard per ciascun parametro.

7.4 Esempio numerico

La metodologia proposta è stata applicata ad un giunto cardanico modellato, come già in precedenza fatto (Cap.6), come un meccanismo spaziale RCCC. I parametri nominali del meccanismo in esame sono riportati in Tabella 7.4, dove H rappresenta la lunghezza del perno, ed il disallineamento tra l'albero di ingresso e quello di uscita è di 45° . I sistemi di riferimento del giunto sono definiti secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e consistenti con quelli riportati in [37]. A causa della particolare struttura cinematica del meccanismo, il sistema di riferimento solidale con il corpo è stato preso coincidente con uno dei sistemi di riferimento del

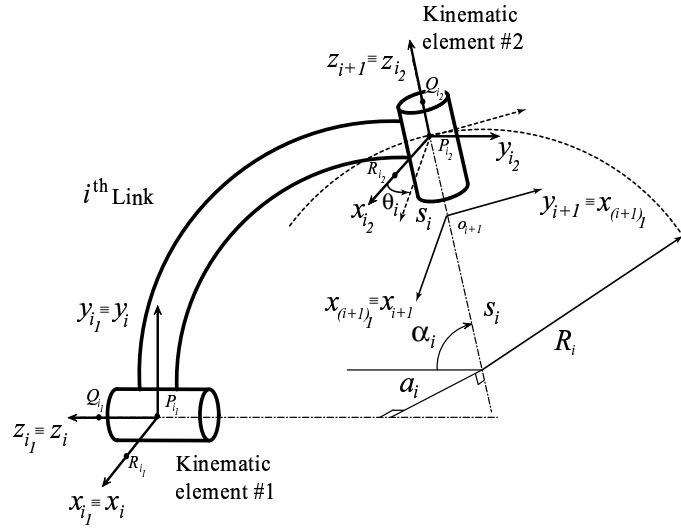


Figura 7.3: Sistemi di riferimento per un membro qualunque del meccanismo RCCC

giunto (Figura 7.3). Quindi con riferimento alla Figura 7.3 per ciascun membro i le coordinate dei punti che definiscono il sistema di riferimento del giunto, espresse nel riferimento del corpo saranno:

- Elemento cinematico del giunto 1 del corpo i ;

$$P_{i1} \equiv \{0, 0, 0\}^T, \quad (7.10a)$$

$$R_{i1} \equiv \{1, 0, 0\}^T, \quad (7.10b)$$

$$Q_{i1} \equiv \{0, 0, 1\}^T, \quad (7.10c)$$

- Elemento cinematico del giunto 2 del corpo i ;

$$P_{i2} \equiv \{a_i, R_i \sin \alpha_i, R_i (\cos \alpha_i - 1)\}^T, \quad (7.11a)$$

$$Q_{i2} \equiv \{a_i, (R_i + 1) \sin \alpha_i, (R_i + 1) \cos \alpha_i - R_i\}^T, \quad (7.11b)$$

$$R_{i2} \equiv \{1 + a_i, R_i \sin \alpha_i, R_i (\cos \alpha_i - 1)\}^T, \quad (7.11c)$$

La presenza di giochi è stata assunta nelle sole coppie cilindriche, la coppia rotoiodale che unisce il membro movente con il telaio è stata considerata ideale. Inoltre la velocità angolare di input è pari a $\omega_1 = \pi/2$ rad/s, e le variabili cinematiche incognite nell'analisi delle posizioni sono gli angoli duali $\hat{\theta}_i = \theta_i + \varepsilon s_i$ ($i = 2, 3, 4$). La velocità angolare di output è ω_4 . Per l'analisi statistica è stato implementato un generatore casuale di valori da assegnare alle variabili stocastiche (β , ξ ed i parametri di Denavit-Hartenberg) secondo i range riportati in Tabella 7.4. In particolare per ogni configurazione del meccanismo il generatore di numeri casuali, per ciascuna delle tre coppie cilindriche, assegna i valori alle variabili stocastiche secondo la funzione di probabilità definita (uniforme per β e ξ , Gaussiana per le rimanenti). Questo procedimento viene ripetuto per tutti i set di analisi considerati. In questo esempio sono stati definiti 50 set per ciascuna variabile, si è verificato che un numero maggiore di set non comportava variazioni significative nei risultati mentre incrementava in modo consistente i tempi di calcolo. Per ciascun set viene condotta l'analisi cinematica del meccanismo, i valori degli angoli, degli spostamenti e delle velocità così ottenuti vengono analizzati statisticamente definendo valori medi e deviazioni standard.

Membro	α_i	a_i	R_i
1	$90^\circ \pm 0.1^\circ$	0 ± 0.1	1 ± 0.1
2	$90^\circ \pm 0.1^\circ$	0 ± 0.1	1 ± 0.1
3	$90^\circ \pm 0.1^\circ$	0 ± 0.1	1 ± 0.1
4	$135^\circ \pm 0.1^\circ$	0 ± 0.1	1 ± 0.1
H	Δr	ξ	β
1 ± 0.1	0 ± 0.06	$0^\circ-360^\circ$	$0^\circ-360^\circ$

Tabella 7.1: Range di variazione dei parametri di Denavit-Hartenberg (vedere Figura 7.3) e delle altre variabili stocastiche.

Con riferimento alle Figure 7.4–7.11, dove si riporta il caso ideale senza tolleranze con linea continua, ed il caso reale con tolleranze con linea tratteggiata, si può notare che:

- I valori degli angoli di output non sono molto influenzati dalla presenza di tolleranze e giochi nei giunti (Figura 7.4).
- Gli spostamenti e le velocità lungo gli assi delle coppie cilindriche sono molto sensibili a tutti i tipi di errore (Figure 7.6 e 7.7).
- La velocità angolare dell'albero di output è sensibile alla presenza di errori (Figura 7.5).
- Ci sono due configurazioni in cui la deviazione standard di tutti i parametri di output attinge ad un massimo (Figure 7.8–7.11). Probabilmente queste due configurazioni sono quelle in cui la matrice Jacobiana delle equazioni di vincolo è vicina alla singolarità.

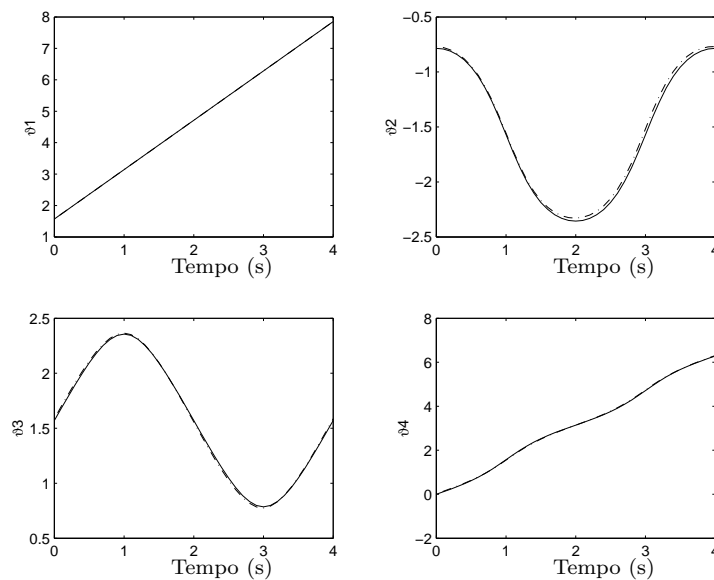


Figura 7.4: Angoli di rotazione ai giunti

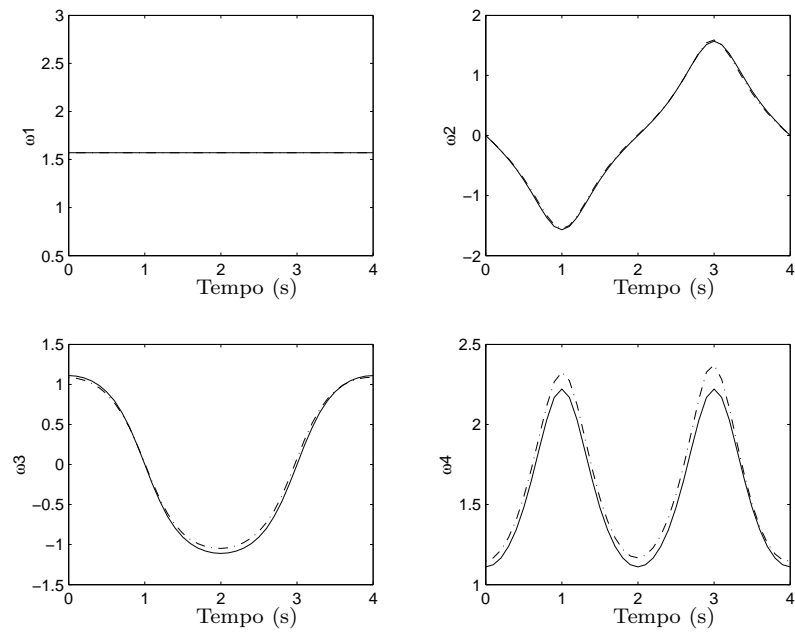


Figura 7.5: Velocità angolari ai giunti

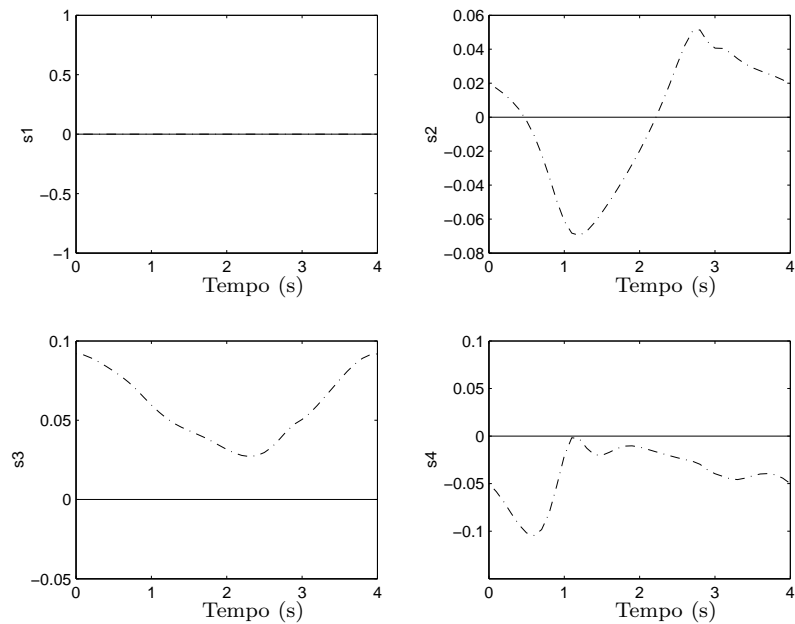


Figura 7.6: Spostamenti lungo gli assi delle coppie cilindriche

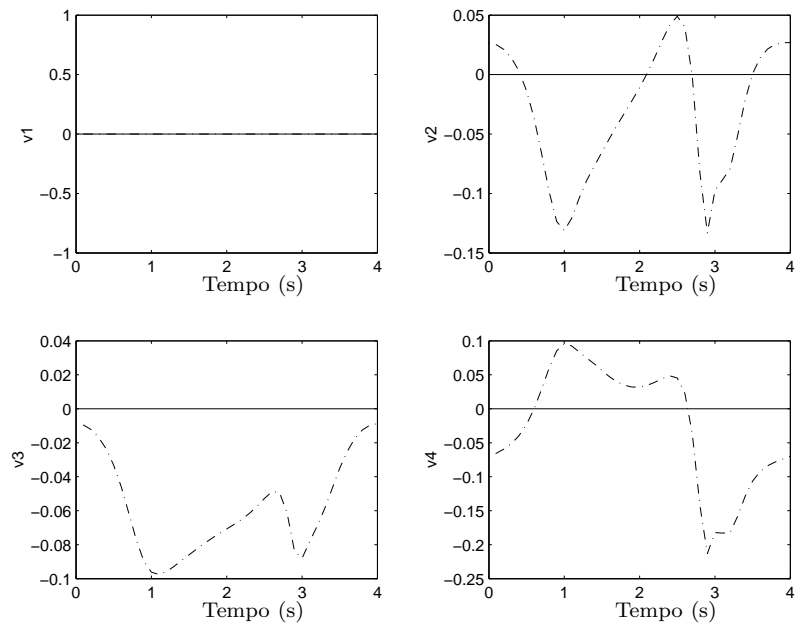


Figura 7.7: Velocità di scorrimento lungo gli assi delle coppie cilindriche

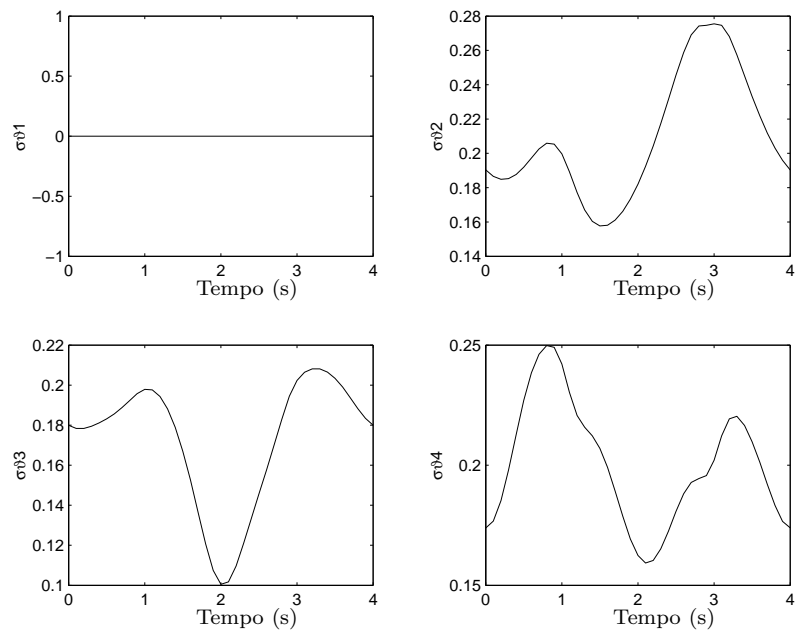


Figura 7.8: Deviazione standard degli angoli di output

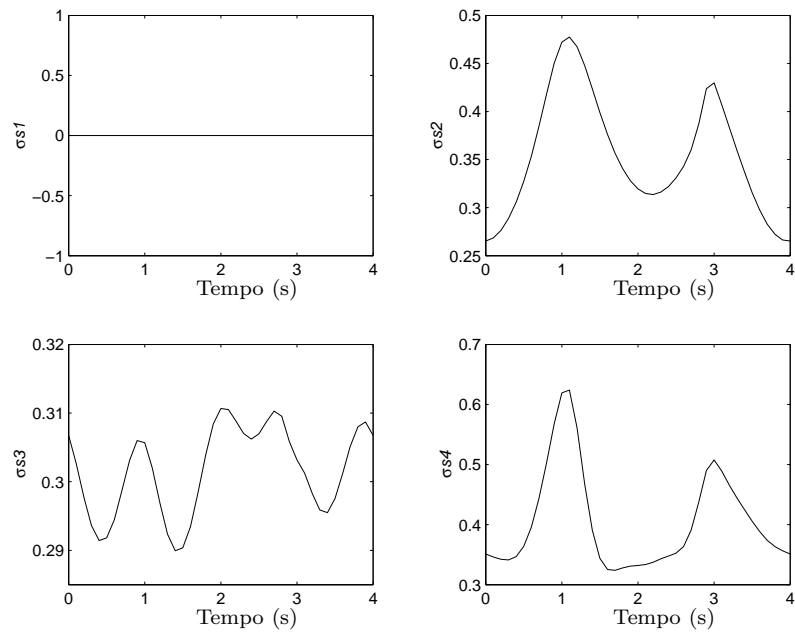


Figura 7.9: Deviazione standard degli spostamenti lungo gli assi dei giunti

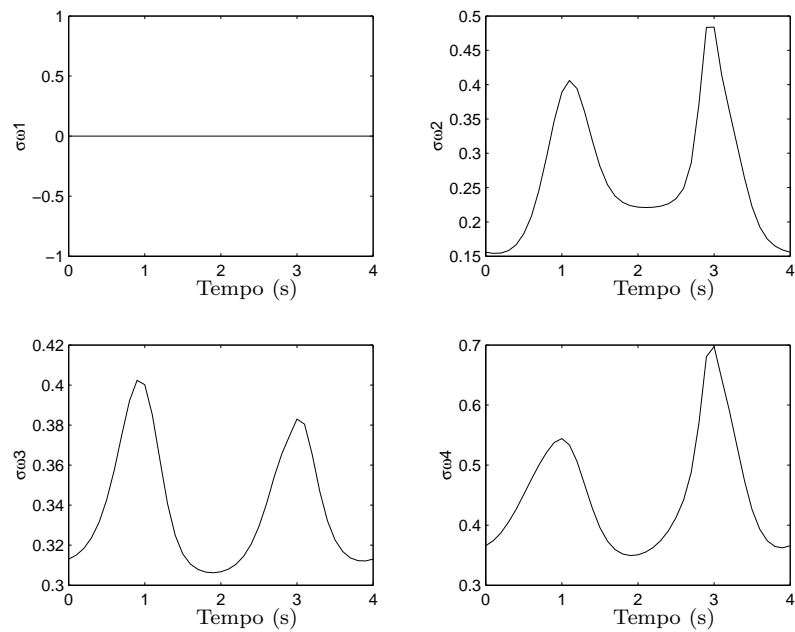


Figura 7.10: Deviazione standard delle velocità angolari

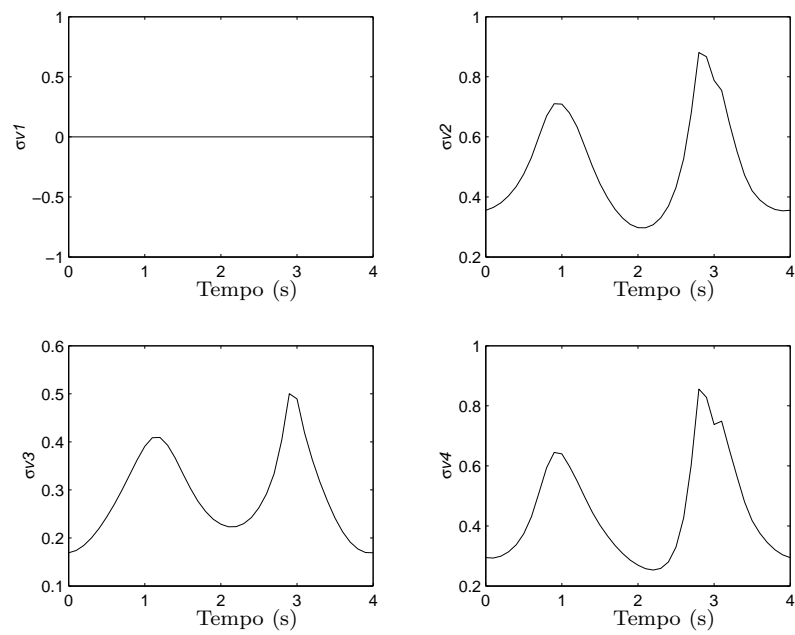


Figura 7.11: Deviazione standard delle velocità di scorrimento lungo gli assi delle coppie cilindriche

Conclusioni

Nel presente lavoro è stata presa in considerazione l'analisi dinamica di sistemi meccanici complessi. L'approccio seguito per la modellazione dei vincoli è stato quello proposto da E.J. Haug [1] e riportato, con alcune varianti, anche da P. Nikravesh in [2].

Grazie alle sue peculiari caratteristiche di modularità i vincoli cinematici vengono ottenuti mediante la combinazione dei vincoli di base. Ciò che rende il metodo flessibile, in quanto mette in condizione l'utente di introdurre nuove tipologie di vincolo, e, nel contempo, ne facilita implementazione. L'utilizzo, inoltre, dei parametri di Eulero permette l'identificazione dell'orientamento del corpo nello spazio eliminando la non univocità presente in altre formulazioni (angoli di Eulero, di Cardano, etc.).

Sono state esaminate diverse formulazioni dinamiche e indagati taluni aspetti computazionali legati all'integrazione numerica delle equazioni del moto a cui tali formulazioni conducevano.

Un serio problema con il quale le metodologie proposte si confrontano riguarda la difficoltà dell'accurata simulazione di sistemi a vincoli sovrabbondanti o variabili. Sistemi di tale natura vengono spesso analizzati nelle varie applicazioni. Per ovviare a tali problemi, è stata elaborata ed implementata una procedura di decomposizione della matrice Jacobiana delle equazioni di vincolo, così da trasfor-

mare il sistema di equazioni dalla formulazione DAE in una forma più efficiente per la gestione dei vincoli sovrabbondanti o variabili. L'apposito codice, valido per modelli tridimensionali e che implementa la formulazione suddetta, è stato messo a confronto con software commerciali sia per quanto riguarda l'efficienza computazionale (tempi di calcolo) sia per l'accuratezza numerica.

Oltre alla procedura di decomposizione, è stata anche sperimentata una formulazione dinamica proposta da Udwadia e Kalaba, fondata sul noto principio di Gauss. In particolare, si è svolta un'indagine sull'influenza del metodo di calcolo della matrice pseudoinversa sull'efficienza computazionale complessiva. La sperimentazione ha riguardato modelli bidimensionali.

Sono state inoltre implementate coppie cinematiche lubrificate (in particolare si è fatto riferimento ai cuscinetti a strisciamento), andando così ad ampliare la modellazione di sistemi meccanici reali. Si sta attualmente lavorando sulla possibilità di prevedere la presenza di corpi flessibili.

Nella seconda parte della tesi sono state analizzate le tolleranze geometriche e dimensionali mediante algebra duale. Quest'ultima infatti, combinata alla convenzione di Denavit-Hartenberg, ben si adatta alla modellazione di coppie cinematiche con giochi. Il vantaggio maggiore derivante da questa trattazione risiede nel ristretto numero di parametri e di equazioni necessari alla modellazione del sistema. La trattazione svolta ha permesso di evidenziare la dipendenza del rendimento meccanico di un giunto cardanico da errori di montaggio. Il codice sviluppato per questa analisi ha richiesto l'implementazione di alcune librerie per la gestione dell'algebra duale secondo quanto riportato nella trattazione teorica (Capitolo 5). Si è inoltre svolta un'analisi statistica delle tolleranze geometriche e dimensionali per meccanismi tridimensionali. Anche in questo caso si è ricorso all'impiego dell'algebra duale in combinazione con il metodo Monte Carlo per la trattazione statistica. La metodologia proposta è stata, anche in questo caso, applicata ad un giunto cardanico.

Bibliografia

- [1] Haug E. J., *Computer – Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, vol.I, Allyn and Bacon, 1989, pp.48-104
- [2] Nikravesh P. E., *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, 1988
- [3] Pennestrì, E., *Dinamica Tecnica e Computazionale - vol. 2*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 2002
- [4] Eich-Soellner E., Fuhrer C. *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1998
- [5] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, New York; reprinted in 1996 as Classics in Applied Mathematics 14, SIAM, Philadelphia, 1989
- [6] Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996

-
- [7] Baumgarte J.W., Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972
- [8] Baumgarte J.W., A New Method of Stabilization for Holonomic Constraints, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50: 869-870, 1983
- [9] Chang C.O., Nikravesh P.E., An Adaptive Constraint Violation Stabilization Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 107: 488-492, 1985
- [10] Wehage R.A., Haug E.J. Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 104, pp. 247-255, 1982
- [11] Haug E., Yen J., Generalized Coordinate Partitioning Methods for Numerical Integration of Differential Algebraic Equations of Dynamics, Haug E. and Deyo R. editors, *Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation*, vol. 69, NATO-ASI series, pp. 97-114, Springer-Verlag, 1991
- [12] Mani N.K., Haug E.J., Atkinson K.E., Singular Value Decomposition for Analysis of Mechanical System Dynamics, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 107, pp. 82-87, 1985
- [13] Kim, S.S., Vanderploeg, M.J., QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 108, pp. 183-188, 1986
- [14] Udwadia F., Kalaba R., *Analytical Dynamics a New Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996
- [15] Arabyan A., Wu F., An Improved Formulation for Constrained Mechanical Systems, *Multibody System Dynamics*, 2: 49-69, 1985

-
- [16] IMSL Math library, vols.I, II, 1997
- [17] Wampler, R.H., Modified Gram-Schmidt with iterative refinement, *ACM TOMS* 5, 1979, pp.494-499. Fortran code available at www.netlib.org
- [18] Vita L., *Sviluppo ed Implementazione di un Codice di Calcolo 3D per lo Studio della Dinamica per Applicazione all'Interfaccia Uomo-Veicolo*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", A.A. 2000-2001
- [19] Valentini P.P., *Modelli Virtuali Predittivi del Comfort Vibrazionale degli Occupanti di Autovetture*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", 2004
- [20] Del Citto F., *Condensazione del Numero di Coordinate ed Integrazione Numerica di Modelli Multibody*, Tesi di Laurea, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", A.A. 2002-2003
- [21] Di Benedetto A., Pennestrì E., *Introduzione alla Cinematica dei Meccanismi*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1993, vol.I, pp. 276-301
- [22] Brankin R.W. , Gladwell I. and Shampine L.F. , RKSUITE: A Suite of Explicit Runge-Kutta Codes, pp. 41-53 of *Contributions to Numerical Mathematics* (ed. R.P. Agarwal), WSSIAA 2, World Scientific, 1993
- [23] Anderson, E., et al., *LAPACK Users' Guide*, 3rd edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999
- [24] Hamrock B.J., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill, New York, 1994
- [25] Rao J.S., *Rotor Dynamics*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1983
- [26] Malvano R., Vatta F., *Fondamenti di Lubrificazione*, Levrotto&Bella, Torino, 1990

-
- [27] Pinkus O., Sternlicht S.A., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York, 1961
- [28] Flores P., Ambrosio J., Pimenta C.J., Dynamic Analysis for Planar Multibody Mechanical Systems with Lubricated Joints, *Multibody System Dynamics* **12**: 47–74, 2004
- [29] Roger R.J., Andrews G.C., Dynamic simulation of planar mechanical systems with lubricated bearing clearances using vector-network methods, *Journal of Engineering for Industry*, Series B **99**, 1977, 131–137
- [30] Cavacece M., Valentini P.P. A Comparison of Rotor Dynamics Behaviour Using Different Types of Journal Bearings, *2002 AIMETA International Tribology Conference Proceedings*, Vietri sul Mare, Salerno, Italy
- [31] Pighini, U. "Appunti di Elementi Costruttivi delle Macchine" - parte 2, Masson Ed., Milano, 1994
- [32] Ball, R.S., *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, 1998
- [33] Duditza F., *Transmissions par Cardan*, Editions Eyrolles, Paris, 1971
- [34] Fischer I., Freudenstein F., Internal Force and Moment Transmission in a Cardan Joint with Manufacturing Tolerances, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol.106, December 1984, pp.301-311
- [35] Chen C.K., Freudenstein F., Dynamic Analysis of a Universal Joint with Manufacturing Tolerances, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol.108, December 1986, pp.524-532
- [36] Freudenstein F., Macey J.P., The Inertia Torques of the Hooke Joint, *Proc. Of the 21st Biennial ASME Mechanisms Conference*, Chicago, September 16-19, 1990, DE-Vol.24, pp.407-413

- [37] Fischer I., *Dual-Number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999
- [38] Biancolini M.E., Brutti C., Pennestrì E., Valentini P.P., Dynamic, Mechanical Efficiency and Fatigue Analysis of the Double Cardan Homokinetic Joint, *International Journal of Vehicle Design*, vol.32, 2003, pp.231-249
- [39] Shih C.W., Shih M.Y., Haug E.J., Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact and Constraint Deletion - III, *Mechanism and Machine Theory*, vol.21, 1986, pp.417-425
- [40] Dhanaraj C., Sharan A.M., Efficient Modeling of Rigid Link Body Dynamic Problems with Friction, *Mechanism and Machine Theory*, vol.30, 1995, pp.749-764
- [41] Chase K.W., Tolerance Allocation Methods, ADCATS Report No.99-6
- [42] Chun Zhang, Hsu Pin Wang, Robust Design of Assembly and Machining Tolerance Allocations, *IIE Transactions*, vol.30, 1998, pp.17-29
- [43] Chase K.W., Parkinson A.R., A Survey of Research in the Application of Tolerance Analysis to the Design of Mechanical Assemblies, ADCATS Report No. 91-1
- [44] Sacks E., Joskowicz L., Parametric Kinematic Tolerance Analysis of General Planar Systems, *Computer-Aided Design*, vol.30, No.9, 1998, pp.707-714
- [45] Forouraghi B., Worst-Case Tolerance Design and Quality Assurance via Genetic Algorithms, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol.113, No.2, 2002, pp.251-268
- [46] Gao J., Chase K.W., Magleby S.P., Global Coordinate Methods for Determining the Sensitivity in Assembly Tolerance Analysis.

Publicazioni

Segue l'elenco delle pubblicazioni inerenti gli argomenti trattati nella presente tesi di dottorato.

- [1] E. Pennestrì, L. Vita, *Strategies for the numerical integration of dae systems in multibody dynamics*, Wiley Periodicals il Computer Applications in Engineering Education, Volume 12, Issue 2 , 2003, Pages 106 - 116
- [2] E. Pennestrì, L. Vita, *Multibody dynamics in advanced education*, Advances in Multibody Dynamics, Springer Verlag, Berlin, 2004
- [3] E. Pennestrì, L. Vita, *Mechanical Efficiency Analysis of a Cardan Joint with Manufacturing Tolerances'*, Proceedings RAAD 2003 12th International Workshop on Robotics, Cassino 7-10 maggio, 2003
- [4] M. Cavacece, E. Pennestrì, P.P. Valentini, L. Vita, *Analisi del Rendimento Meccanico di un Giunto Cardanico*, atti del XVII Congresso AIMETA, Ferrara 9-12 settembre, 2003
- [5] M. Cavacece, E. Pennestrì, P.P. Valentini, L. Vita, *Mechanical Efficiency Analysis of a Cardan Joint*, Proceedings of DETC'04 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Salt Lake City, Utah, USA, September 28-October 2, 2004

-
- [6] E. Cecchini, E. Pennestrì, R. Stefanelli, L. Vita, *A Dual Number Approach to the Kinematic Analysis of Spatial Linkages with Dimensional and Geometric Tolerances*, Proceedings of DETC'04 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Salt Lake City, Utah, USA, September 28-October 2, 2004
- [7] F. Del Citto, E. Pennestrì, L. Vita, *Coordinates Reduction and Numerical Integration of Models of Constrained Multibody Systems*, Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004, Jyvaskyla, 24-28 July 2004
- [8] E. Pezzuti, G. Piscopo, A. Ubertini, P.P. Valentini, L. Vita, *Analisi di Meccanismi Spaziali con Tolleranze Geometriche e Dimensionali Mediante un Approccio Basato sull'Algebra Duale*, atti Convegno Nazionale XIV ADM - XXXIII AIAS Innovazione nella Progettazione Industriale Bari, 31 Agosto - 2 Settembre 2004