



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "TOR VERGATA"

FACOLTA' DI INGEGNERIA

**DOTTORATO DI RICERCA IN
INGEGNERIA DELLE STRUTTURE E GEOTECNICA**

XXI CICLO

**ANALISI DELL'IMPATTO DI COLATE DETRITICHE AD ALTA
VELOCITÀ CONTRO STRUTTURE**

Andrea Amoruso

A.A. 2009/2010

Tutor: Prof. Ing. Francesco Federico

Coordinatore: Prof. Ing. Franco Maceri

Sommario

1. INTRODUZIONE 15

A – IMPATTO DI UNA COLATA DETRITICA FLUIDA CONTRO UNA STRUTTURA..... 20

2. ANALISI TEORICHE DELL'INTERAZIONE FLUIDO -STRUTTURA.... 21

2.1 MODELLI REOLOGICI DELLE COLATE..... 21

2.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI..... 25

2.2.1 *Equazione globale dell'equilibrio dinamico* 27

2.3 IPOTESI DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE..... 31

2.3.1 *Massa fluida contro una parete solida*..... 31

2.3.2 *Massa fluida contro un blocco disposto su un piano orizzontale*..... 40

2.3.3 *Corpo solido contro la superficie libera di un fluido in quiete* 43

2.4 IPOTESI DI FLUIDO COMPRESSIBILE 45

2.4.1 *Massa fluida contro una parete solida*..... 45

2.4.2 *Corpo solido contro la superficie libera di un fluido in quiete* 53

3. RISULTATI SPERIMENTALI..... 59

3.1 INGEGNERIA GEOTECNICA 59

3.1.1 *Esperienze di laboratorio* 59

3.1.2 *Misure effettuate in sito*..... 65

3.2 INGEGNERIA COSTIERA..... 66

3.3 RASSEGNA DI ESPRESSIONI DI PRESSIONI E FORZE D'IMPATTO 70

4. ANALISI NUMERICHE 73

4.1 DESCRIZIONE DEL CODICE DI CALCOLO AGLI ELEMENTI FINITI 73

4.1.1 *Generalità*..... 73

4.1.2 *Stabilità della formulazione numerica in forma esplicita* 74

4.1.3	<i>Descrizione delle proprietà del fluido.....</i>	75
4.1.4	<i>Adaptive meshing</i>	76
4.1.5	<i>Definizione delle condizioni di contatto.....</i>	78
4.2	CONFRONTO TRA ANALISI TEORICHE E NUMERICHE	80
4.2.1	<i>Massa fluida contro una parete solida.....</i>	81
4.2.2	<i>Massa fluida contro un blocco disposto su un piano orizzontale.....</i>	86
4.2.3	<i>Corpo solido contro la superficie libera di un fluido in quiete</i>	88
4.3	ANALISI PARAMETRICHE DELL'IMPATTO DI FLUIDI CONTRO STRUTTURE	94
4.3.1	<i>Caratteri del fenomeno e fattori governanti.....</i>	94
4.3.2	<i>Caratterizzazione numerica dell'impulso e rappresentazione semplificata del fenomeno</i>	109
4.4	INTERPRETAZIONE DI DATI SPERIMENTALI RACCOLTI CON MODELLI A PICCOLA SCALA	115

B – IMPATTO DI BLOCCHI O CORRENTI DETRITICHE GRANULARI CONTRO UNA STRUTTURA..... 118

5.	<u>ANALISI TEORICA DEL CONTATTO FRA SOLIDI.....</u>	119
5.1	CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI RIVOLUZIONE CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE	119
5.2	CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI FORMA GENERICA CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE	125
5.3	CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI RIVOLUZIONE CON COMPORTAMENTO NON ELASTICO.....	126
5.3.1	<i>Indentazione elasto-plastica – formulazioni base.....</i>	126
5.3.2	<i>Indentazione elasto-plastica – applicazioni</i>	129
6.	<u>ANALISI TEORICHE DELL'IMPATTO TRA SOLIDI</u>	137
6.1	SOLIDI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE	137
6.2	SOLIDI CON COMPORTAMENTO NON ELASTICO	142

6.3	FORMULE APPLICATIVE DALLA LETTERATURA TECNICA	145
7.	<u>ANALISI NUMERICHE</u>	<u>147</u>
7.1	BLOCCO SFERICO CONTRO UNA PARETE PIANA	147
7.2	BLOCCHI SFERICI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE CONTRO UNA PARETE PIANA	149
7.3	BLOCCO PARALLELEPIPEDO CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE CONTRO UNA PARETE PIANA	151
7.4	BLOCCHI PARALLELEPIPEDI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE.....	152
7.5	EFFETTO DELLA FORMA DEI BLOCCHI SUL MECCANISMO DI IMPATTO	154
7.6	SFERA CON COMPORTAMENTO ELASTICO PERFETTAMENTE PLASTICO CONTRO UNA PARETE PIANA	155
7.7	CARATTERIZZAZIONE NUMERICA DELL'IMPULSO E RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DEL FENOMENO	156
8.	<u>DEBRIS – FLOW CON COMPORTAMENTO GRANULARE</u>	<u>160</u>

C – EFFETTI MECCANICI DELL'IMPATTO DI COLATE

DETRITICHE AD ALTA VELOCITÀ CONTRO STRUTTURE ... 167

9.	<u>COLATE CON COMPORTAMENTO FLUIDO.....</u>	<u>168</u>
9.1	SPOSTAMENTO DI BLOCCHI.....	168
9.2	BACK-ANALYSIS DEL COLLASSO DI UN PILASTRO	169
10.	<u>IMPATTO DI BLOCCHI.....</u>	<u>176</u>
10.1	BLOCCO CONTRO UNA STRUTTURA A MENSOLA	176
10.2	BLOCCO CONTRO UN MURO FONDATO SU TERRENO ELASTICO LINEARE	179
10.3	BLOCCO CONTRO UN MURO PROTETTO DA TRANSIZIONE DI MATERIALE GRANULARE.....	184
10.3.1	<i>Effetto delle proprietà meccaniche della transizione.....</i>	<i>185</i>
10.3.2	<i>Effetto delle spessore della transizione</i>	<i>186</i>
10.3.3	<i>Effetto del profilo di contatto della transizione</i>	<i>187</i>
11.	<u>INDICAZIONI PROGETTUALI.....</u>	<u>193</u>

11.1	ESPRESSIONE ANALITICA DELLA FORZA D'IMPATTO DI COLATE A COMPORTAMENTO FLUIDO.....	193
11.2	IMPULSO DI COLATE A COMPORTAMENTO FLUIDO.....	196
11.3	IMPATTO DI BLOCCHI: RICHIAMI DELLA TEORIA DELL'ANALISI DIMENSIONALE	197
11.4	IMPATTO DI BLOCCHI: INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI ANALITICI E NUMERICI (FEM) CON L'ANALISI DIMENSIONALE	198
11.4.1	<i>Blocco contro un muro dotato di fondazione</i>	<i>199</i>
<u>CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE</u>		<u>205</u>
 <u>APPENDICE – STUDIO DELLE SOLLECITAZIONI IN CAMPO DINAMICO DI UNA STRUTTURA A MENSOLA INDOTTE DALL'IMPATTO DI UNA COLATA FLUIDA</u>		
	PREMESSA.....	219
	SOLUZIONI ANALITICHE	221
 <u>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....</u>		<u>236</u>

Sommario delle figure

Fig. 1-1. Effetti dell'impatto delle colate su strutture; Campania, maggio 1998.	16
Fig. 1-2. Massi trasportati da correnti detritiche (Wieczorek et al., 2001).	16
Fig. 1-3. Impatto di debris flows; (a): schema generale dell'impatto tra una corrente di detriti in rapido movimento ed una struttura; (b): modelli semplificati adottati nello studio dei fenomeni di propagazione ed impatto; (1): blocchi (isolati o in gruppo); (2): correnti granulari asciutte o sature; (3): correnti a comportamento fluido, per le quali è possibile una grande varietà di concentrazioni di solidi.	17
Fig. 2-1. Leggi reologiche correntemente utilizzate per lo studio dei flussi fangosi.	21
Fig. 2-2. Profili adimensionali di una corrente fluida omogenea, nell'ipotesi di moto progressivo uniforme, per diversi modelli reologici. Le soluzioni per il modello di Bingham sono per diversi valori di K ; H è l'altezza del flusso in direzione normale al fondo e Hn è la quantità $\tau / (\gamma S)$	24
Fig. 2-3 Parallelepipedo elementare	25
Fig. 2-4. Spinta esercitata da una corrente in moto permanente su una superficie solida.	32
Fig. 2-5. Modello <i>dam break</i>	33
Fig. 2-6. Schema dell'impatto dinamico nel caso in cui, al momento dell'impatto, il flusso venga deviato verso l'alto (Armanini, 1993).	34
Fig. 2-7. Schema dell'impatto dinamico nel caso in cui, al momento dell'impatto, si formi un'onda riflessa (Armanini 1993).	35
Fig. 2-8. Geometria e simbologia relativi all'analisi di Liu et al. (1997).	37
Fig. 2-9. Schema dell'impatto di un'onda (2D) su un muro verticale; (a): schema di un'onda a sezione trasversale triangolare; (b): schema di un'onda a sezione trasversale rettangolare; (c): fluido comprimibile; dinamica dello sviluppo delle sovrappressioni negli istanti successivi all'impatto: il fronte dell'onda di compressione AB si allontana dal muro a velocità c_0 . Il fronte dell'onda di compressione si riflette sulla superficie libera WT, dando origine ad un secondo fronte d'onda, BC. All'interno della regione ABCO la pressione assume un valore uniforme, pari a $\Delta p = \Delta p_{max} = \rho_0 c_0 U$	39

Fig. 2-10. Impatto di un'onda triangolare su un blocco libero di muoversi su un piano orizzontale.	41
Fig. 2-11. Problema del tuffatore; <i>a sinistra</i> : geometria del tuffatore e della piscina; la velocità iniziale del tuffatore (diretta verso il basso) è $X^- = 4.47$ m/s; l'acqua è inizialmente ferma; <i>a destra</i> : distribuzione delle velocità verticali nel fluido dopo l'impatto: (<i>a</i>) – (<i>d</i>): velocità diretta verso il basso ((<i>a</i>): velocità massima, pari a 0.75 m/s; (<i>d</i>): velocità minima); (<i>e</i>) – (<i>h</i>): velocità diretta verso l'alto ((<i>e</i>): velocità massima, (<i>h</i>): velocità minima); la velocità del tuffatore è pari alla velocità del fluido (<i>a</i>) ($X^+ = 0.75$ m/s); adattato da Frémond et al. (2003).	45
Fig. 2-12. Schematizzazione dell'impatto di un'onda triangolare su una parete rigida, vincolata alla base.	47
Fig. 2-13. Impatto di un'onda triangolare su una parete rigida, vincolata alla base; (<i>a</i>) l'onda di compressione si muove nel dominio fluido con velocità c riflettendosi sulla superficie solida, sulla base e sulla superficie libera inclinata di 45° suddividendo il dominio stesso in tre regioni di dimensione variabile nel tempo; (<i>b</i>) il campo di velocità associato al campo di pressioni è uniforme in ciascuna delle tre regioni.	48
Fig. 2-14. Sequenza delle fasi che descrivono l'impatto di un fronte fluido di forma rettangolare contro un solido (adattato da Johnson, 1983).	50
Fig. 2-15. Impatto di fluidi contro superfici - metodo approssimato per il calcolo della velocità di espulsione laterale V . Ingrandimento del bordo esterno del fronte d'impatto.	51
Fig. 2-16. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; (<i>a</i>) geometria iniziale del problema; (<i>b</i>) semplificazione della geometria; (<i>c</i>) schema di calcolo: trave elastica, appoggiata agli estremi, che colpisce il fluido ($t = 0$); (<i>d</i>) configurazione deformata della trave ($t > 0$); da Korobkin, (1998).	54
Fig. 2-17. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; velocità acquisita dalla struttura dopo l'impatto; acqua pura.	57
Fig. 2-18. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; pressione al centro della trave; acqua pura.	57
Fig. 2-19. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; velocità acquisita dalla struttura dopo l'impatto; miscela acqua – aria.	58
Fig. 2-20. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; pressioni al centro della trave; miscela acqua – aria.	58

Fig. 3-1. Schema di un tipico apparato sperimentale (<i>canaletta</i>).....	59
Fig. 3-2. Valori della pressione massima ($\Delta p/\gamma$) rispetto alla profondità di moto indisturbata (h_0) nel caso di acqua pura e (a) fondo liscio, (b) fondo scabro; la pendenza della canaletta varia tra 20° e 30° (Armanini 1993).	60
Fig. 3-3. Valori della pressione massima ($\Delta p/\gamma$) in funzione della velocità del moto (U) nel caso di miscele di acqua e materiali granulari; pendenza della canaletta pari a 25° (Armanini 1993).	61
Fig. 3-4. Valori della pressione massima ($\Delta p/4\gamma$) rispetto alla profondità di moto indisturbata (h_0) nel caso di materiale granulare a differente composizione e acqua; la pendenza è di 25°; il fondo della canaletta è scabro (Armanini 1993).	62
Fig. 3-5. Pressione di impatto misurata da un trasduttore posto 10 cm al di sopra del fondo della canaletta (Liu et al. 1997).	63
Fig. 3-6. Confronto tra la forza di impatto misurata (linea continua) e forza calcolata attraverso l'applicazione dei risultati dell'analisi teorica (Liu et al. 1997).....	63
Fig. 3-7. Pressioni d'impatto misurate lungo la verticale della piastra terminale della canaletta (Ghilardi et al., 2006).	65
Fig. 3-8. Misure in sito (Lo et al., 2000).	66
Fig. 3-9. Esperimenti condotti da Kirkgöz; (a) schema dell'apparato sperimentale; (b) rappresentazioni delle pressioni massime in forma adimensionale, organizzate secondo la distribuzione normale logaritmica, in funzione dell'inclinazione della piastra strumentata posta alla fine della vasca.....	67
Fig. 3-10. Pressione registrata all'impatto di onde sull'Admiralty Breakwater (Obhrai, 2004).	68
Fig. 3-11. Sloshing (Lugni et al. 2006).	69
Fig. 3-12. Confronto fra gli incrementi di pressione in funzione della velocità, secondo le espressioni proposte da: 1: Lo et al. (2000, $k_2 = 3$); 2: Scotton and Deganutti (1997, $k_1 = 4.4$); 3: Zhang (1993, $k_2 = 4$); 4: Fukui et al. (1963); (a): $H = 0.1$ m; (b): $H = 1$ m.	72
Fig. 4-1 Configurazione del contatto di tipo <i>pure master-slave</i>	79
Fig. 4-2. Configurazione <i>balanced master-slave</i>	79
Fig. 4-3. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; dominio di calcolo.....	81

Fig. 4-4. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; $c = 1450.6$ m/s; sviluppo delle sovrappressioni in corrispondenza del fronte fluido e della zona retrostante; (a) $t = 0.154$ ms; (b) $t = 0.266$ ms; (c) $t = 0.378$ ms; (d) $t = 0.490$ ms.	82
Fig. 4-5. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; rappresentazione della porzione estrema della <i>mesh</i> del dominio fluido interessata dallo shock.	83
Fig. 4-6. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; $c = 150$ m/s; sviluppo delle sovrappressioni in corrispondenza del fronte fluido e della zona retrostante; (a) $t = 0.26$ ms; (b) $t = 1.03$ ms; (c) $t = 2.55$ ms; (d) $t = 4.81$ ms.....	84
Fig. 4-7. Schema dell'impatto di un'onda a sezione trasversale triangolare contro una superficie solida; (velocità d'impatto $U = 5$ m/s); (a): geometria assunta nelle analisi numeriche ($\Delta z = R = h = 1$ m); (b) – (d): evoluzione, nel dominio fluido, della pressione p ; (b) $t = 0.5E-04$ s dopo l'impatto; (c): $t = 2.5E-04$ s dopo l'impatto; (d): $t = 4.5E-04$ s dopo l'impatto. La linea retta nera mostra la posizione teorica (Cooker 2003) della superficie di separazione tra la zona caratterizzata dalla $p = p_{max}$ e la zona con $p = 0$...	86
Fig. 4-8. Geometria del problema 3D. (a) Profondità pari a 5m; (b) Profondità pari a 10 m.	87
Fig. 4-9. Velocità acquisita dal blocco nei primi istanti a partire dall'impatto col fluido.	88
Fig. 4-10. Problema del tuffatore: dominio utilizzato nelle analisi numeriche.....	89
Fig. 4-11. Problema del tuffatore; (a): velocità del tuffatore (solido), in funzione del tempo, per diversi valori della rigidità del fluido e del solido: (1): solido rigido; per l'acqua, $K = K1$; (2) solido rigido; per l'acqua, $K = K2$; (3): solido elastico lineare ($E = 200$ GPa); per l'acqua, $K = K1$; (4): soluzione di riferimento (Frémond et al. 2003); (b): velocità nel fluido per $t = 1.5$ ms (appr.) dopo l'impatto (solido rigido; per l'acqua, $K = K2$).....	90
Fig. 4-12. Vettori velocità del fluido a seguito dell'impatto; (a) $t = 0.4$ ms dopo l'impatto (b) $t = 0.75$ ms dopo l'impatto.....	91
Fig. 4-13. Prospetto frontale dei vettori velocità del fluido per $t = 0.75$ ms dopo l'impatto. Zoom della porzione sommitale del dominio fluido.....	92
Fig. 4-14. Posizione dei punti del dominio fluido per i quali sono ricavati i valori della velocità. Dalla configurazione deformata del fluido si vede che i nodi 148 e 156 sono posti rispettivamente al centro e sul bordo della zona impattata.....	92

Fig. 4-15. Componenti delle velocità in funzione del tempo di due punti del dominio fluido posti sul pelo libero.....	93
Fig. 4-16. Schema di riferimento dei calcoli.	94
Fig. 4-17. Vista in pianta del sistema: a) fronte d’impatto costituito da una superficie verticale, rettangolare; b) fronte costituito da una superficie cilindrica di raggio R.	95
Fig. 4-18. Notazioni sulla superficie di contatto.....	96
Fig. 4-19. Scansione temporale delle pressioni del corpo fluido di densità 1000 kg/m^3 , viscosità pari a $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$ che urta la struttura a velocità 1 m/s ; (a): $t = 2,6\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (b): $t = 2,6\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (c): $t = 1,04\cdot 10^{-3} \text{ s}$; (d): $t = 5,2\cdot 10^{-3} \text{ s}$	97
Fig. 4-20 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte piano di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$	99
Fig. 4-21 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte piano di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$	100
Fig. 4-22. Nodo A appartenente al fronte fluido che colpisce la superficie piana.	101
Fig. 4-23. Pressioni del nodo A nei due casi di velocità di propagazione delle onde elastiche pari a 1450.6 m/s e 150 m/s , ottenuto per una velocità all’impatto del fronte di 4 m/s	101
Fig. 4-24 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte piano di densità 1300 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse e con altezza $h = 1.0 \text{ m}$; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$	103
Fig. 4-25. Scansione temporale delle pressioni del corpo fluido di densità 1300 kg/m^3 , $h = 1.0 \text{ m}$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$ e viscosità pari a $10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ che urta la struttura a velocità 15 m/s ; (a): $t = 2,05\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (b): $t = 4,1\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (c): $t = 6,02\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (d): $t = 8,1\cdot 10^{-4} \text{ s}$; (e): $t = 1\cdot 10^{-3} \text{ s}$; (f): $t = 1,2\cdot 10^{-3} \text{ s}$	105
Fig. 4-26. Diagramma delle sovrappressioni che si generano nel nodo centrale del fronte fluido cilindrico a causa dell’impatto.....	106
Fig. 4-27 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte cilindrico di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità fissate e con diverse altezze; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$	107

Fig. 4-28 (a), (b), (c). Forza d'impatto per un fronte costituito da una superficie cilindrica, di densità 1300 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ che colpisce il muro a diverse velocità fissate e con diverse altezze; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$	108
Fig. 4-29. Impulsi della forza di impatto valutati per densità $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$; onda triangolare: (a) $H = 0.5 \text{ m}$; (b) $H = 1 \text{ m}$; onda rettangolare: (c) $H = 0.5 \text{ m}$; (d) $H = 1 \text{ m}$	110
Fig. 4-30. Impatto di onde 3D; schemi geometrici dei corpi impattanti impostati nel modello agli elementi finite; (a) fronte piano; (b) fronte "a cuneo"; (c) fronte curvo; (d) fronte piano, inclinato.	111
Fig. 4-31. Evoluzione nel tempo t della forza F ; risultati ottenuti per i valori di $c_0 = 150 \text{ m/s}$; $H = b = 1 \text{ m}$; $\delta = 5 \text{ cm}$; (a): $U = 5 \text{ m/s}$; (b): $U = 10 \text{ m/s}$	112
Fig. 4-32. Contours dell'incremento di pressione Δp all'impatto; risultati ottenuti per $c_0 = 150 \text{ m/s}$; $H = b = 1 \text{ m}$; $U = 5 \text{ m/s}$	113
Fig. 4-33. Confronto fra gli impulsi I valutati con analisi numeriche agli elementi finite.	115
Fig. 4-34. Risultati del modello FEM in termini di sviluppo nel tempo delle pressioni d'impatto (Δp) sul fronte fluido, ottenute per $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $U = 5 \text{ m/s}$, $c_{00} = 150 \text{ m/s}$; (a) $H = 1 \text{ m}$; (b) $H = 0.05 \text{ m}$; (a) e (b) sono caratterizzate da scale temporali differenti.	117
Fig. 5-1. Geometria del sistema composto da due sfere in contatto. Assonometria....	120
Fig. 5-2. Geometria del sistema di due sfere a contatto. Prospetto frontale.....	122
Fig. 5-3. Pressione applicata ad una regione circolare.....	123
Fig. 5-4 . Distribuzione degli sforzi sulla superficie e lungo l'asse di simmetria causata (a sinistra) da pressione uniforme e (a destra) pressione alla Hertz agente su un'area circolare di raggio a	128
Fig. 5-5. Tensioni su un elemento circondato da slip-lines.....	130
Fig. 5-6. cerchi di Mohr relativi allo stato tensionale precedentemente considerato. .	130
Fig. 5-7. Dati sperimentali di deformazioni dovute a indentazione; (a) sfera ($a/R = 0.51$); (b) piramide.	132
Fig. 5-8. Modello di cavità in caso di penetrazione di un cono in un materiale a comportamento elasto-plastico.	133

Fig. 6-1. Impatto di una massa M dotata di velocità V su un'asta elastica. L'onda di compressione, di intensità $-\sigma$, si propaga lungo l'asta con velocità c_0	137
Fig. 6-2. Impatto tra sfere. Geometria.....	139
Fig. 6-3. Variazione della compressione δ_z e della forza P , entrambe adimensionalizzate, nel tempo; tratteggiato, è riportato l'andamento della funzione $f = \sin(\pi t/2t^*)$	141
Fig. 6-4. Abaco per la determinazione della forza di impatto, basato sulla legge di Hertz (Van Dine, 1984).	145
Fig. 7-1. Geometria del sistema costituito da un blocco sferico ed una parete piana..	147
Fig. 7-2. Forze di impatto in funzione del tempo per diversi valori del modulo di Young e per diverse velocità di impatto. (a) $v = 4$ m/s ; (b) $v = 15$ m/s.	148
Fig. 7-3. Pressioni di contatto sulla superficie della sfera che impatta alla velocità di 4 m/s; (a) $t = 0$ s; (b) $t = 1.5 \cdot 10^{-4}$ s; (c) $t = 3 \cdot 10^{-4}$ s; (d) $t = 6 \cdot 10^{-4}$ s (tempo al quale corrisponde la massima compressione).....	149
Fig. 7-4. Schema dell'impatto di blocchi sferici diversi contro un muro. Masse e raggi delle sfere: (a) $m = 1000$ kg $\rightarrow R = 0.45$ m ; (b) $m = 2 \cdot 500$ kg = 1000 kg $\rightarrow R = 0.358$ m; (c) $m = 4 \cdot 250$ kg = 1000 kg $\rightarrow R = 0.284$ m.....	150
Fig. 7-5. Forze complessive di impatto in funzione del tempo per diverse sfere che urtano il muro simultaneamente; (A) 1 sfera: massa 1000 kg e raggio 0.45 m; (B) 2 sfere: massa 500 kg ognuna e raggio 0.358 m; (C) 4 sfere: massa 250 kg ognuna e raggio 0.284 m. (a) $v = 1$ m/s ; (b) $v = 4$ m/s.	151
Fig. 7-6. Impatto di un blocco, con la forma di un parallelepipedo, sulla parete piana di un muro.	152
Fig. 7-7. Forze di impatto in funzione del tempo per un blocco parallelepipedo di massa 1000 kg che urta una superficie piana a velocità $v = 1$ m/s e $v = 4$ m/s.	152
Fig. 7-8. Confronto fra blocchi di diverse dimensioni che impattano il muro. (a) massa $m = 1000$ kg; area di impatto $A = 0.5$ m x 1 m; massa $m = 2 \cdot 500$ kg; (b) area di impatto $A = 2 \cdot (0.5$ m x 0.5 m).	153
Fig. 7-9. Confronto fra blocchi a forma di parallelepipedo che impattano il muro. A) blocco singolo; massa $m = 1000$ kg; B) due blocchi; massa globale; $m = 2 \cdot 500$ kg; (a) $v = 1$ m/s ; (b) $v = 4$ m/s.	154
Fig. 7-10. Confronto fra blocchi sferici di raggio 0.125 m e densità 2600 kg/m ³ elastici lineari ed elasto-plastici ($\sigma_y = 5 \cdot 10^7$ Pa). (a) $v = 4$ m/s; (b) $v = 15$ m/s.	156

Fig. 7-11. Risultati delle analisi parametriche dell'impulso.	158
Fig. 8-1. Geometrie utilizzate per le analisi.	160
Fig. 8-2. Dati da prova triassiale standard su una sabbia.	162
Fig. 8-3. Forza d'impatto di una corrente granulare secca a velocità 1 m/s.....	164
Fig. 8-4. Analisi in elasticità lineare; confronto tra assenza di attrito e presenza di attrito tra muro e fronte della colata. (a) velocità pari a 4 m/s (b) velocità pari a 15 m/s.	165
Fig. 8-5. Forza d'impatto di una corrente granulare secca a velocità 4 m/s.....	165
Fig. 8-6. Forza d'impatto di una corrente granulare secca a velocità 15 m/s.....	166
Fig. 9-1. Massi trasportati da correnti (Wieczorek et al., 2001).....	168
Fig. 9-2. Impatto di colate a sezione trasversale triangolare (T) e rettangolare (R) su un blocco libero di muoversi su un piano orizzontale. Combinazioni di velocità e altezze tali da indurre uno spostamento iniziale del blocco pari a (a) $s = 0.1$ m; (b) $s = 0.3$ m.	169
Fig. 9-3. Impatto di una colata fluida contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; modello costitutivo (a) del calcestruzzo e (b) dell'acciaio d'armatura.	170
Fig. 9-4. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; schema dell'analisi riportata in Faella & Nigro (2003).	171
Fig. 9-5. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis della rottura del pilastro nell'ipotesi di altezza e velocità variabili della corrente; (a) meccanismo a tre cerniere; (b) relazione tra carico di collasso adimensionalizzato $(l/4) \cdot \sqrt{(q_u/M_u)}$ e posizione della cerniera plastica ($z_p.h./l$), in funzione del rapporto h/l	172
Fig. 9-6. Coppie di valori velocità – altezza del flusso che determinano il collasso del pilastro.....	172
Fig. 9-7. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; (a) dominio impostato nell'analisi; (b) schema del dominio di calcolo impostato per le analisi numeriche (FEM).	173
Fig. 9-8. Diagrammi delle forze di impatto nel tempo, per i quattro casi analizzati. .	174
Fig. 9-9. Deformazioni e spostamenti [m] del pilastro a seguito dell'impatto con una corrente fluida; (a), (b): caso 3; (c), (d): caso 1	174
Fig. 10-1. Impatto di un blocco sferico contro una mensola (a) incastrata alla base; (b) connessa ad una fondazione. Posizione del problema; definizione delle grandezze la cui	

influenza è stata studiata per il presente lavoro: H_s identifica la posizione di impatto, S_w lo spessore della mensola, H_f lo spessore della fondazione, L_f la lunghezza della fondazione.	176
Fig. 10-2. Confronto fra le diverse forze di impatto.	177
Fig. 10-3. Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di S_w , per H_s e E fissati ($H_s = 0.2$ m, $E = 3 \cdot 10^4$ MPa).	178
Fig. 10-4. Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di E , per S_w e per H_s fissati ($H_s = 0.2$ m, $S_w = 0.2$ m).	178
Fig. 10-5. . Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di H_s , al variare di S_w e E ($S_w = 0.2$ m, $E = 3 \cdot 10^4$ MPa).	179
Fig. 10-6. Geometria impostata nelle analisi.	179
Fig. 10-7. Modello numerico.	180
Fig. 10-8. Muro di calcestruzzo dotato di fondazione.	180
Fig. 10-9. Influenza del modulo di Young della fondazione.	181
Fig. 10-10. Diversi spessori della fondazione considerati nelle analisi.	181
Fig. 10-11. Forza d’impatto e momento alla base per diversi spessori di fondazione.	182
Fig. 10-12. Schema dei diversi punti di impatto del blocco considerati nelle analisi.	183
Fig. 10-13. Forza d’impatto e momento alla base per diversi spessori della fondazione.	184
Fig. 10-14. Muro in calcestruzzo armato protetto da una transizione granulare.	185
Fig. 10-15. Forza d’impatto nel caso di transizione granulare costituita, alternativamente di sabbia o di ghiaia.	186
Fig. 10-16. Forza d’impatto per diversi valori dello spessore della transizione.	187
Fig. 10-17. Transizione costituita di sacchi di sabbia.	188
Fig. 10-18. Forza d’impatto nei due casi: transizione continua ovvero costituita da sacchi.	188
Fig. 10-19 Prima fase. Fig. 10-20. Seconda fase.	189
Fig. 10-21. Forza d’impatto: confronti.	190
Fig. 10-22. Velocità del sacco nello schema a due fasi: prima fase.	191
Fig. 10-23. Velocità del sacco nello schema a sacchi.	191
Fig. 10-24. Schemi di posa in opera della transizione granulare racchiusa in un sacco.	192

Fig. 11-1. Caratteri analitici dell'evoluzione nel tempo della forza d'impatto $F(t)$	195
Fig. 11-2. Confronto tra l'evoluzione nel tempo delle forze di impatto F valutate attraverso analisi numeriche (FEA) e attraverso le espressioni analitiche proposte in Fig. 11-1; $H = 1$ m, $b = 3H$, $c_0 = 1450$ m/s, $\rho_0 = 1000$ kg/m ³ ; dominio fluido caratterizzato da (a) sezione trasversale rettangolare, (b) sezione trasversale triangolare.	196

1. INTRODUZIONE

Il termine debris flows designa particolari e caratteristici eventi alluvionali a carattere non stazionario e con evoluzione in tempi molto brevi.

I debris flows sono costituiti da miscugli granulari a concentrazione variabile, cioè sistemi costituiti da componenti solide disperse in un fluido, in modo che i granuli siano in contatto o molto prossimi fra loro. Sono tipici di ambienti montani e pedemontani soggetti ad intense precipitazioni meteoriche e possono essere generati da:

- mobilitazione di sedimenti grossolani depositati nell'alveo di un torrente, a seguito dell'instaurarsi di una corrente liquida superficiale prodotta da intense piogge;
- dal collasso di un versante con successiva trasformazione del movimento franoso in colata detritica;
- dalla fluidificazione del materiale di una frana traslazionale o rotazionale in atto, in genere per il passaggio di una corrente idrica superficiale;
- dal crollo di una diga naturale prodotta dall'occlusione di un torrente a seguito ad esempio di un evento franoso precedente o da una ostruzione in alveo dovuti ad altro tipo di sedimenti fluitati.

Tali sistemi sono oggetto di studio di numerosi settori dell'ingegneria, tra i quali quelli dell'idraulica e della geotecnica. Destano infatti interesse anche a causa della loro potenza distruttiva estrema.

Eventi come quello accaduto a Sarno e Quindici (Campania) nel maggio 1998, in cui flussi fangosi originatisi sulle coltri piroclastiche dell'Appennino Campano hanno raggiunto i centri abitati, dopo aver percorso notevoli lunghezze (fino a 4 km, Revellino, 2004), sono esemplari: le colate hanno avuto effetti devastanti, causando più di 200 vittime e molti danni alle strutture civili (Fig. 1-1).

Altri eventi significativi nel nostro paese sono costituiti da quelli della Val di Stava in Trentino nel 1985 (268 morti) e della Val Pola nel 1987 (29 morti), ambedue frane di crollo evolute nella parte terminale in colate detritiche.

Nel loro percorso verso valle i depositi fluidificati possono inglobare ulteriore materiale colluviale, variabile in pezzatura granulometrica, dalle sabbie a trovanti di dimensioni notevoli (Fig. 1-2).



Fig. 1-1. Effetti dell'impatto delle colate su strutture; Campania, maggio 1998.



Fig. 1-2. Massi trasportati da correnti detritiche (Wieczorek et al., 2001).

Nel caso in cui la frazione solida sia prevalente, l'azione motrice dominante di tali fenomeni è costituita dalla gravità e la loro denominazione è *moti gravitazionali di sedimenti*. In tal caso, inoltre, la meccanica è legata alle azioni associate alle interazioni

granulari, e, in particolare, dagli effetti inerziali dovuti alle collisioni intergranulari ed alla deformazione del miscuglio.

Tali aspetti li contraddistinguono dai *moti di fluidizzazione* e di *sospensioni diluite* per i quali la fase fluida e le azioni idrodinamiche ad essa associate svolgono un ruolo dominante.

L'obiettivo della presente tesi è l'identificazione delle azioni esplicate dalle masse in movimento all'impatto contro strutture. A causa dell'estrema variabilità delle concentrazioni di solidi nella massa in movimento, che ne determina il comportamento, sono stati considerati modelli di comportamento semplificati (Fig. 1-3):

- a) impatto di sospensioni fluide;
- b) impatto di blocchi isolati;
- c) impatto di correnti granulari asciutte.

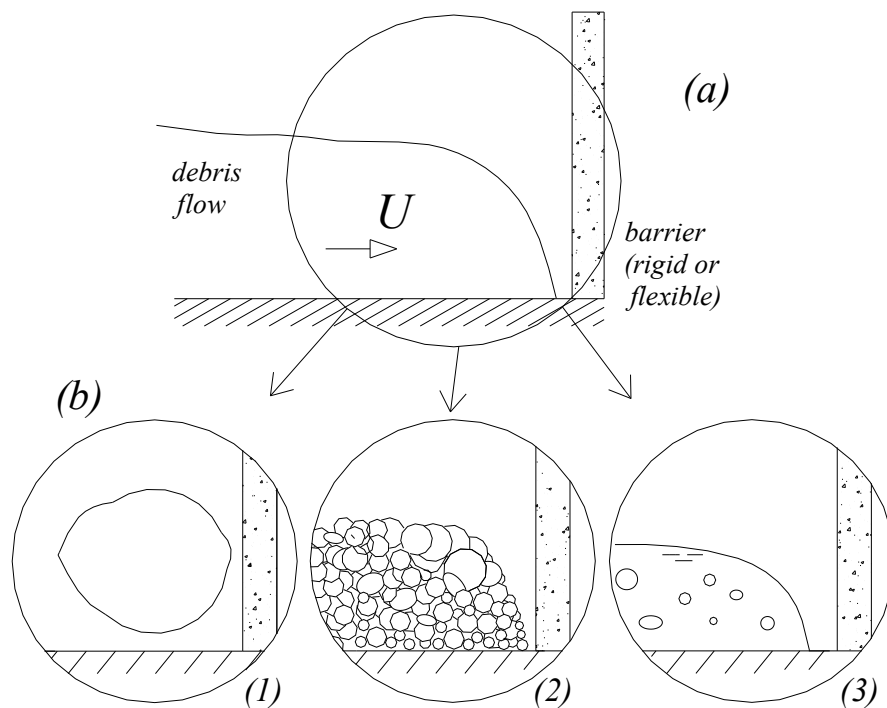


Fig. 1-3. Impatto di debris flows; (a): schema generale dell'impatto tra una corrente di detriti in rapido movimento ed una struttura; (b): modelli semplificati adottati nello studio dei fenomeni di propagazione ed impatto; (1): blocchi (isolati o in gruppo); (2): correnti granulari asciutte o sature; (3): correnti a comportamento fluido, per le quali è possibile una grande varietà di concentrazioni di solidi.

Nonostante lo studio dei fenomeni di innesco, propagazione ed arresto delle colate sia oggetto di numerosi studi, la letteratura geotecnica ed idraulica non sono particolarmente ricche di analisi avanzate dei fenomeni di impatto, in particolare per quanto riguarda le colate costituite da sospensioni diluite, con comportamento fluido (a), spesso riconducibile a modelli di tipo Newtoniano; si considera, in genere, un valore modificato della pressione idrodinamica esercitata da un fluido in moto permanente (Faella e Nigro 2003, Lo et al. 2000, Van Dine 1996, Hungr et al. 1984), oppure una pressione multipla di quella idrostatica (Armanini 1993, Scotton e Deganutti 1997).

Le medesime regole sono spesso utilizzate, nella pratica, per valutare le pressioni e le forze dovute all'impatto di altri tipi di colate, ad esempio quelle asciutte, composte essenzialmente di ghiaia e blocchi (b) – (c).

Nell'ambito dell'ingegneria costiera sono invece presenti numerosi risultati sperimentali e analisi teoriche, riguardanti l'impatto di onde marine sulle strutture costiere. Recenti studi (Peregrine 2003, Cooker 2003) mostrano che le ipotesi semplificative prima esposte, adottate in geotecnica per lo studio delle colate fluide, non sembrano accettabili; si evidenzia, infatti, che le pressioni che si destano all'impatto possono essere estremamente elevate; inoltre, la durata delle azioni massime è molto breve: la natura impulsiva del fenomeno si rivela quindi spiccata. Inoltre, numerosi sono i fattori di tipo geometrico (forma e dimensioni delle onde), fisico (densità, concentrazione di gas e di solidi), evidenziati dai medesimi autori, che possono influenzare l'azione esercitata all'impatto.

Nel presente rapporto sono innanzitutto (*Sezione A*) sinteticamente descritte soluzioni teoriche, tratte dalla letteratura tecnica, del problema dell'interazione tra fluidi e solidi; sono quindi esposti i risultati di un'attenta disamina di dati sperimentali ottenuti da ricercatori di diverse discipline (ingegneria geotecnica, idraulica, costiera) sul tema. Sono infine presentati i risultati di analisi numeriche condotte con un codice di calcolo agli elementi finiti, con lo scopo di definire le azioni che le colate con comportamento tipo fluido esplicano all'impatto contro solidi.

La medesima organizzazione della trattazione è ripetuta nella *Sezione B*, con riferimento all'impatto di blocchi e correnti granulari.

Il lavoro si chiude (*Sezione C*) con l'esposizione di alcuni casi applicativi studiati per via numerica, volti ad identificare gli effetti meccanici dell'impatto di colate, sia con comportamento fluido, sia blocchi, e con la proposta di criteri di progettazione delle strutture di mitigazione.

**A – IMPATTO DI UNA COLATA DETRITICA FLUIDA CONTRO UNA
STRUTTURA**

2. ANALISI TEORICHE DELL'INTERAZIONE FLUIDO -STRUTTURA

2.1 MODELLI REOLOGICI DELLE COLATE

La modellazione dinamica dei debris flow è oggetto di intense ricerche; la maggior parte degli studi ricorrono all'ipotesi di materiale omogeneo, adottando modelli reologici tipo Bingham ed Herschel-Bulkley.

Tali modelli si fondano sull'ipotesi che le miscele di fluidi e solidi possano essere assimilate a dei fluidi monofase dotati di "tensione di soglia".

La legge reologica, in generale, può essere scritta nel seguente modo:

$$\dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \tau < \tau_y$$

$$\dot{\gamma} \neq 0 \Leftrightarrow \tau = \tau_y + K \dot{\gamma}^n$$

in cui τ è lo sforzo tangenziale, $\dot{\gamma}$ è la velocità di deformazione e τ_y , K e n parametri (positivi).

Al variare di del parametro n variano i comportamenti reologici (Fig. 2-1): per valori di $n > 1$, la resistenza aumenta all'aumentare della deformazione ed il comportamento è definito dilatante. Per valori di $n < 1$ la resistenza diminuisce all'aumentare della deformazione ed il comportamento è definito pseudo plastico.

In particolare, per $n = 1$ si ottiene il modello di Bingham mentre per $n = 1/3$ si ottiene il modello Herschel-Bulkley.

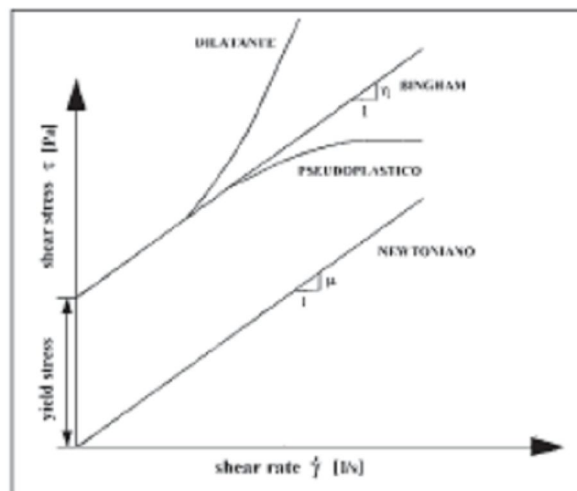


Fig. 2-1. Leggi reologiche correntemente utilizzate per lo studio dei flussi fangosi.

Nei flussi fangosi, in genere, le dissipazioni non sono solamente di tipo viscoso (approccio idrodinamico), ma sono causate anche dalla rottura dei legami elettrochimici tra le particelle: questo accade in maniera marcata per le sospensioni colloidali.

All'altro estremo, le sospensioni di materiali privi di interazioni elettrochimiche (quarzo, ad esempio) sono invece caratterizzate da processi dissipativi di tipo puramente viscoso e lubrificazionale ed i modelli reologici che le descrivono possono essere spiegati, in regime laminare, mediante meccanismi semplificati.

Tuttavia, dai dati ottenuti attraverso sperimentazioni, Bagnold (1954) mostra che il comportamento di una miscela formata da particelle granulari disperse in un fluido viscoso, può essere modellato, nel caso in cui la dissipazione sia dovuta essenzialmente alla viscosità, come un fluido Newtoniano, per il quale la viscosità del fluido sia corretta attraverso un fattore che prenda in considerazione la concentrazione del materiale solido disperso nel fluido.

Si ha, quindi:

$$\mu^* = (1 + \lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \mu$$

in cui μ è la viscosità del fluido, μ^* è la viscosità corretta, λ un parametro legato alla concentrazione delle particelle, così definito:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{C_{\max}}{C} \right)^{1/3} - 1$$

con C e $C_{\max}$ rispettivamente concentrazione corrente e massima concentrazione possibile.

Dalle formule precedenti si evince che l'effetto della presenza di particelle solide disperse nel fluido è causa di un incremento della viscosità effettiva del fluido equivalente.

E' tuttavia evidente che i debris flows non sono materiali omogenei: diverse sperimentazioni mostrano come il comportamento vari a seconda della concentrazione di solidi, del tipo di solidi dispersi nel fluido, delle condizioni di moto della corrente.

Le caratteristiche di una colata, in generale, sono differenti anche in funzione della distanza dal fronte; Pierson (1985) e Takahashi (1991) documentano una rapida diminuzione della concentrazione di solidi all'aumentare della distanza dal fronte della colata.

A dispetto di ogni considerazione riguardo la non omogeneità e non stazionarietà delle colate, possono essere impostati modelli di comportamento, nel caso in cui si ipotizzi che una colata percorra lunghe distanze, raggiungendo condizioni assimilabili a quelle di un flusso stazionario.

Soprattutto per ciò che concerne colate fluide, rilievi sul campo mostrano che lunghe distanze sono percorse mantenendo una sezione trasversale del flusso costante (Takahashi, 1991).

Hungr (2000) introduce il concetto di *moto progressivo uniforme* per descrivere il moto di una colata dalle caratteristiche approssimativamente stazionarie, ossia caratterizzate da fluttuazioni delle caratteristiche del moto nell'intorno di valori medi.

Si consideri una striscia media rappresentativa del flusso, di spessore H , di larghezza Δx in direzione del flusso e w nella direzione perpendicolare.

L'applicazione del principio di conservazione della quantità di moto per questo elemento della colata si esprime attraverso la seguente equazione (Chow, 1959):

$$\rho H w \Delta x \left(\frac{dV}{dt} + \beta V \frac{dV}{dx} \right) = \rho g H w \Delta x \sin \theta - T w \Delta x - \frac{dp}{dx} w \Delta x$$

in cui V è la velocità media, θ l'inclinazione del pendio su cui scorre la colata, β un coefficiente correttivo per la quantità di moto, ρ la densità del flusso, T la resistenza al taglio lungo la base e dp/dx il gradiente di pressione idrostatica.

Si noti che Iverson (1997) ha ottenuto la medesima equazione del flusso attraverso un'integrazione rigorosa delle equazioni che governano il moto di una miscela fluida.

I termini a primo membro dell'equazione precedente rappresentano l'inerzia della colata; i termini a secondo membro includono la componente tangenziale della velocità, la forza resistente di tipo attritivo e la risultante delle pressioni laterali.

Nell'ipotesi che la pressioni longitudinali, nel fluido, siano proporzionali alle pressioni verticali e che le linee di flusso siano parallele al fondo, il gradiente delle forze di pressione può essere espresso come:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g H \frac{dH}{dx} \cos \theta$$

Se, infine, si scrive l'equazione del moto del fluido in un sistema di coordinate in solidali con il fronte fluido, si ottiene la seguente relazione:

$$\rho H \frac{dV}{dt} = \rho g H \sin \theta - T - \frac{dp}{dx}$$

Il *moto progressivo uniforme* è definito come la condizione nella quale ogni elemento in moto rimane costante nel tempo, cioè:

$$dV / dt = 0$$

Sotto questa condizione, si ottiene:

$$\frac{dH}{dx} \cos \theta = \frac{T}{\rho g H} - \sin \theta = S_f - S$$

La precedente equazione descrive il profilo della corrente in moto stazionario, a velocità costante.

Il termine T rappresenta la forza attrittiva resistente alla base, che comprende i termini dipendenti dalla reologia del materiale S è l'inclinazione del fondo.

Nell'ipotesi di flusso omogeneo la precedente equazione si può risolvere facilmente; si ottengono, per diverse ipotesi sul comportamento reologico, i seguenti profili del fronte del flusso.

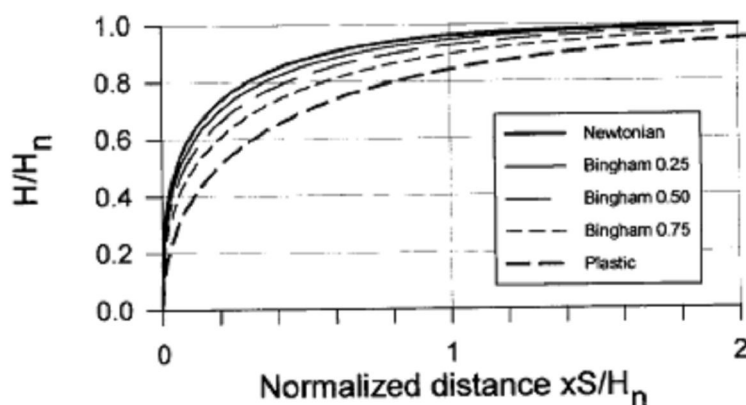


Fig. 2-2. Profili adimensionali di una corrente fluida omogenea, nell'ipotesi di moto progressivo uniforme, per diversi modelli reologici. Le soluzioni per il modello di Bingham sono per diversi valori di K ; H è l'altezza del flusso in direzione normale al fondo e H_n è la quantità $\tau / (\gamma S)$.

Sebbene i fenomeni di innesco, propagazione e deposizione delle colate siano negli ultimi anni oggetto di intensi studi, per l'impatto contro strutture non si hanno a disposizione molti risultati di studi analitici o sperimentazioni.

Nel seguito è riportata una disamina di alcuni interessanti lavori riguardanti l'interazione dinamica tra liquidi e solidi, nell'ambito sia dell'ingegneria geotecnica, sia dell'ingegneria costiera (per quanto riguarda l'impatto di onde contro strutture), nelle ipotesi di fluido incomprimibile e fluido comprimibile.

2.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

Sia O un generico punto del fluido in movimento, al quale compete, all'istante t generico, la velocità V , l'accelerazione $A = dV/dt$, e la densità ρ ; si consideri un parallelepipedo elementare con vertice in O e di lati dx , dy , dz rispettivamente paralleli ai tre assi coordinati (Fig. 2-3).

Per la massa $dm = \rho \, dx dy dz$ contenuta nel volume considerato deve essere verificata la prima equazione cardinale della dinamica:

$$R = Adm \quad (2.1)$$

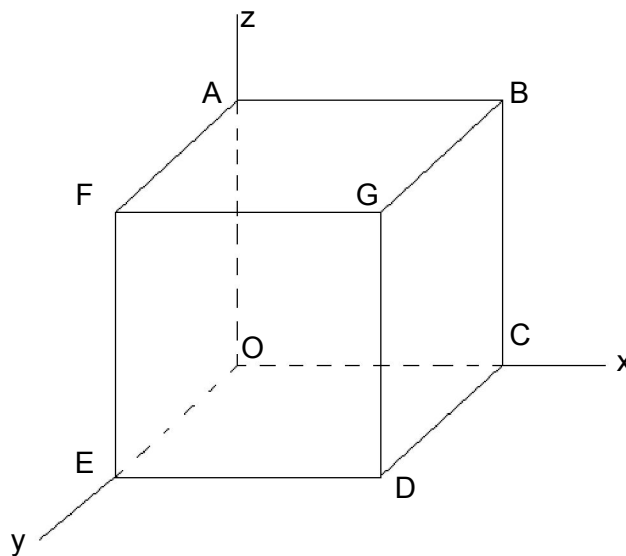


Fig. 2-3 Parallelepipedo elementare

Con $\mathbf{R}$ si è indicata la risultante delle forze agenti sulla massa stessa; questa risultante è costituita dai seguenti termini:

- la cosiddetta forza di massa $\rho \mathbf{F} dxdydz$, essendo $\mathbf{F}$ la forza di massa riferita all'unità di massa e al punto O. questa forza dipende dal campo cui si trova sottoposto il fluido. Se, in particolare, il fluido si trova nel campo gravitazionale, si ha $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ ($\mathbf{g}$ accelerazione di gravità) si può scrivere:

$$\mathbf{F} = -g \text{ grad } z$$

con z diretto verticalmente verso l'alto;

- la risultante degli sforzi trasmessi alla massa fluida considerata dal fluido circostante attraverso la superficie di contorno del parallelepipedo.

Se σ_x è lo sforzo unitario su un elemento piano normale all'asse x , passante per O , la spinta esercitata sulla faccia OEFA vale $\sigma_x dydz$, mentre quella relativa alla faccia parallela BCDG vale $-(\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx)dydz$: la loro risultante sarà quindi:

$$-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dxdydz$$

Analogamente, le risultanti degli sforzi agenti sulle coppie di facce normali agli assi y e z valgono rispettivamente:

$$-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} dxdydz$$

$$-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} dxdydz$$

la risultante delle forze sulla superficie di contorno risulta quindi:

$$-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) dxdydz$$

Esplicitando la $\mathbf{R}$ nei suoi termini, dalla (2.1) si ottiene:

$$\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) = \rho(\mathbf{F} - \mathbf{A}), \quad (2.2)$$

prima equazione indefinita del movimento.

A questa va associata l'equazione dei momenti: essa esprime la condizione di simmetria del tensore degli sforzi.

Indicando con F_x, F_y, F_z le componenti della forza di massa $\mathbf{F}$, tenendo presente che le tre componenti della accelerazione $\mathbf{A}$ sono rispettivamente $du/dt, dv/dt, dw/dt$, la proiezione della (2.2) lungo i tre assi coordinati conduce alla terna di equazioni:

$$\begin{aligned}\rho\left(F_x - \frac{du}{dt}\right) &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \\ \rho\left(F_y - \frac{dv}{dt}\right) &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \\ \rho\left(F_z - \frac{dw}{dt}\right) &= \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.3}$$

che traduce in forma scalare *l'equazione indefinita del movimento* di un fluido.

Le (2.3) devono essere soddisfatte per ogni punto del campo di moto ed in ogni istante.

2.2.1 EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

L'equazione indefinita del movimento (2.3), completata con l'equazione di continuità ($\text{div } \mathbf{V} = 0$), con quella di stato, con le relazioni fra gli sforzi e le deformazioni e con le condizioni al contorno e iniziali, proprie dello specifico processo di moto in esame, consente di giungere alla determinazione degli elementi caratteristici del moto in ogni punto del campo fornendone un quadro completo e dettagliato.

Si procederà ora ad una trattazione globale delle condizioni di moto di un volume fluido, anziché ad un dettagliato esame locale.

Isolato un volume finito W , delimitato dalla superficie chiusa di contorno A , fissa nello spazio, per ogni elemento infinitesimo dW di esso vale la (2.2).

Integrando quest'ultima su tutto il volume considerato si ha:

$$\int_W \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dW = \int_W \rho \mathbf{F} dW - \int_W \rho \mathbf{A} dW \tag{2.4}$$

Indicata con $\mathbf{n}$ la normale al generico punto della superficie di contorno, positiva verso l'interno, si può scrivere, sfruttando il teorema di Green:

$$\int_W \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dW =$$

$$= - \int_A (\sigma_x \cos nx + \sigma_y \cos ny + \sigma_z \cos nz) dA,$$

Per il teorema di Cauchy:

$$\sigma_x \cos nx + \sigma_y \cos ny + \sigma_z \cos nz = \sigma_n$$

cosicché, in definitiva, risulta:

$$\int_W \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dW = - \int_A \sigma_n dA.$$

Il termine ρA , tenuto conto della regola di derivazione euleriana, e che i termini del tipo $\rho u \partial V / \partial x$ possono scriversi nella forma:

$$\rho u \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u V)}{\partial x} - V \frac{\partial(\rho u)}{\partial x},$$

si trasforma nell'espressione:

$$\rho A = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w V)}{\partial z} - V \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right];$$

e poiché:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = \text{div}(\rho \mathbf{V}),$$

essendo, per l'equazione di continuità:

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

e tenuto presente che:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

risulta, in definitiva:

$$\rho A = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w V)}{\partial z}.$$

Il relativo integrale di volume, applicando ancora il teorema di Green, porta alla espressione:

$$\int_W \rho A dW = \int_W \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dW - \int_A \rho V (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) dA,$$

da cui, essendo:

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = v_n$$

con V_n componente della velocità in direzione normale alla superficie, si ottiene:

$$\int_W \rho A dW = \int_W \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dW - \int_A \rho V_n V dA.$$

La (2.4) allora, può essere scritta:

$$\int_W \rho F dW - \int_A \sigma_n dA + \int_A \rho V_n V dA - \int_W \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dW = 0. \quad (2.5)$$

Questa è l'*equazione globale dell'equilibrio dinamico*, che deve essere soddisfatta per qualunque volume W del campo del fluido in moto; essa presuppone già verificata l'equazione di continuità.

Ognuno dei quattro termini della (2.5) ha un suo preciso significato fisico, che si esaminerà ora in dettaglio:

- il termine

$$G = \int_W \rho F dW$$

rappresenta la risultante delle forze di massa agenti sulle singole particelle che occupano il volume W considerato. Se il fluido è sottoposto esclusivamente al campo gravitazionale questo integrale fornisce il peso del fluido contenuto nel volume W .

- L'integrale di superficie

$$II = \int_A \sigma_n dA$$

denota la risultante degli sforzi che vengono esercitati sul fluido attraverso la superficie di contorno. Si tratta cioè della *spinta* che la superficie di contorno trasmette al fluido; essa è uguale e contraria alla spinta che il fluido esercita sulla sua superficie di contorno A .

• Terzo termine: si osserva che il prodotto $V_n dA$ è pari alla portata infinitesima dQ che passa attraverso l'area dA ; il prodotto $\rho V_n dA = \rho dQ$ fornisce quindi la massa che transita nell'unità di tempo attraverso dA ; $\rho V dQ$ rappresenta la quantità di moto posseduta da detta massa: vettore diretto in ogni punto come la velocità.

L'integrale

$$M = \int_A \rho V_n V dA$$

individua in definitiva la *quantità di moto* di tutta la massa fluida che attraversa nell'unità di tempo la superficie di contorno A del volume W .

Nell'intera superficie A possiamo distinguere tre porzioni: una A_1 che è attraversata da fluido che entra in W , una A_2 attraversata da fluido che esce ed una terza A_0 non attraversata da fluido; indichiamo con:

$$M_1 = \int_{A_1} \rho V dQ$$

$$M_2 = \int_{A_2} \rho V dQ$$

le risultanti della quantità di moto relative alle due porzioni A_1 e A_2 ; poiché sulla prima V_n è positiva, mentre sulla seconda è negativa, si può assai semplicemente scrivere:

$$M = \int_A \rho v_n V dA = M_1 - M_2$$

dove il secondo membro rappresenta la differenza fra le quantità di moto posseduta dalla massa entrante nell'unità di tempo nel volume W , e quella relativa alla massa contemporaneamente uscente.

Si tenga presente che le grandezze M , M_1 , M_2 , sono in realtà *quantità di moto nell'unità di tempo ed hanno perciò le dimensioni di una forza*; più precisamente, possono essere indicate come *flussi di quantità di moto*.

Il calcolo effettivo della quantità di moto può essere ovviamente condotto quando sia nota la distribuzione del vettore velocità e della densità in tutti i punti della superficie; una notevole semplificazione interviene in molte situazioni della pratica relative ai moti sotto forma di corrente. Una sezione trasversale di questa può ritenersi spesso piana, con il vettore velocità diretto normalmente alla superficie; le velocità sono perciò parallele fra loro ed il loro modulo è pari alla componente normale V_n .

La quantità di moto posseduta dalla massa che attraversa la sezione vale perciò:

$$M = \int_A \rho V^2 dA$$

essendo $\mathbf{n}$ il vettore normale alla superficie; il suo calcolo richiede ancora la conoscenza della distribuzione della velocità e della densità nell'ambito della sezione; in pratica è utile fare riferimento agli elementi medi della corrente: velocità media $V = Q/A$ e densità media ρ_m ; si scrive allora:

$$M = \mathbf{n} \beta \rho_m Q V$$

con β il rapporto:

$$\beta = \frac{\int_A \rho V^2 dA}{\rho_m V^2 A}.$$

• L'ultimo termine

$$\mathbf{I} = - \int_W \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dW$$

rappresenta la risultante delle cosiddette *inerzie locali*, che dipendono esclusivamente dal modo in cui la velocità e la densità variano col tempo nei singoli punti del volume W .

Questo integrale, che ha valore evidentemente nullo in caso di moto permanente, può anche scriversi nella forma:

$$\mathbf{I} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho V dW$$

che mostra come esso stia a rappresentare la diminuzione complessivamente subita, nell'unità di tempo, dalla quantità di moto dell'intera massa fluida contenuta nel volume W .

Adottando i simboli ora introdotti la (1.5) può essere in definitiva sinteticamente scriversi:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{I} = 0;$$

si tratta di una relazione vettoriale fra quantità che hanno le dimensioni di una forza; dei diversi termini, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}$ dipendono dai valori che le grandezze in gioco assumono nei punti all'interno del volume W , mentre gli altri ($\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$) dipendono unicamente dalle condizioni che si verificano alla superficie di contorno.

Si vedrà ora un esempio su come, negli istanti appena successivi all'impatto di una massa fluida, non possa ritenersi trascurabile il termine legato all'inerzia del fluido.

2.3 IPOTESI DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE

2.3.1 MASSA FLUIDA CONTRO UNA PARETE SOLIDA

Un criterio teorico applicato per valutare la forza di impatto esercitata da un fluido incompressibile, all'impatto contro una superficie solida, è basato sul bilancio della quantità di moto di un fluido in moto stazionario; sfruttando le equazioni descritte nella precedente sezione, infatti, diversi autori (Hung et al. 1984; Van Dine 1996) risalgono al valore di pressione esercitata all'impatto sulla parete solida.

Nell'ipotesi di moto stazionario, nell'equazione globale dell'equilibrio dinamico si può porre

$$I = 0$$

La spinta Π può essere suddivisa in quattro termini:

Π_{AB} : la spinta esercitata dalla superficie AB (Fig. 2-4) sul volume è nulla, in quanto pari alla pressione atmosferica (si vogliono analizzare in questa fase gli incrementi di pressione rispetto al valore di riferimento, pari proprio alla pressione atmosferica)

$\Pi_{AA'}$, $\Pi_{BB'}$: le pressioni agenti sulle sezioni trasversali sono pari alla pressione atmosferica, quindi nulle.

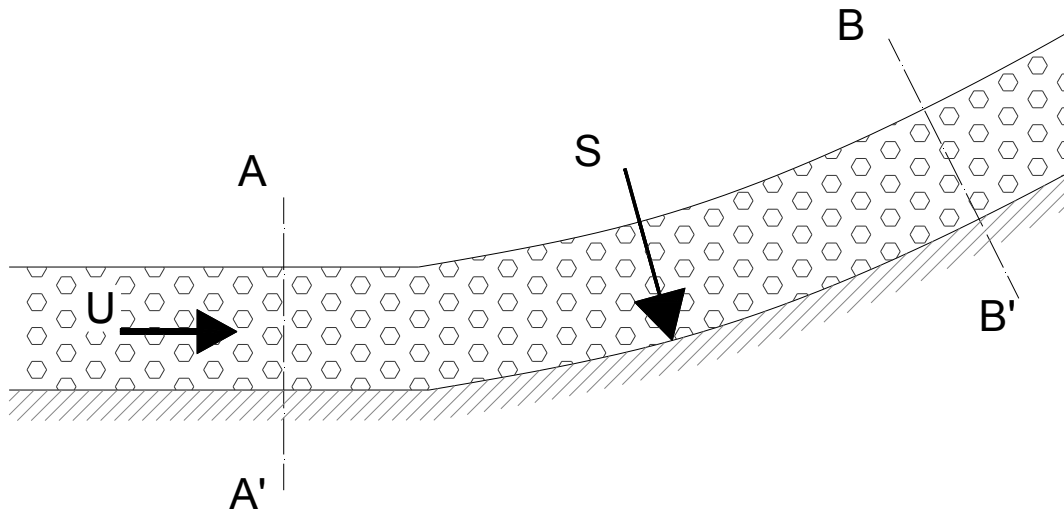


Fig. 2-4. Spinta esercitata da una corrente in moto permanente su una superficie solida.

La spinta Π si riduce quindi al valore che la piastra esercita sul volume; essa è uguale e contraria alla spinta S del getto sulla piastra; quindi:

$$\Pi = -S$$

Le quantità di moto entrante ed uscente (rispettivamente M_1 , M_2) hanno modulo pari a

$$M = \rho q U$$

in cui $q = a U$. Si ottiene, quindi:

$$M = \rho a U^2$$

La M_1 è diretta come il getto in arrivo, la M_2 come il getto in uscita attraverso la sezione BB'.

Dall'equazione globale di equilibrio dinamico si ottiene, quindi:

$$S = M_1 - M_2$$

La spinta è pari quindi alla differenza vettoriale delle quantità di moto entrante ed uscente. Se l'angolo formato dalle superfici AA' – BB' è pari ad α , si ottiene, per il modulo della spinta, il valore:

$$S = \rho q U \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

Armanini (1993) calcola la pressione d'impatto teorica dal bilancio della quantità di moto del fluido. Ipotizzando una velocità del fronte U pari a quella fornita dal modello *dam-break* (Fig. 2-5), si ottiene la pressione (Δp) attraverso la relazione:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 4h_0$$

la pressione Δp , che si genera all'impatto, è quindi pari a 4 volte la pressione del fluido alla base del serbatoio di monte. La soluzione è valida anche nel caso di pendenza del fondo pari alle perdite per unità di lunghezza causate dall'attrito sul fondo del canale. In tal caso, maggiore è la pendenza del canale, maggiore sarà la velocità del fronte e la pressione d'impatto; viceversa nel caso di riduzione della pendenza.

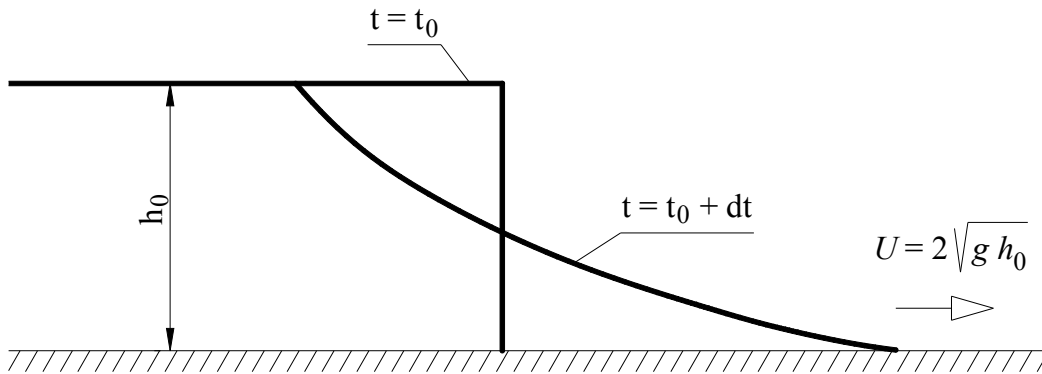


Fig. 2-5. Modello *dam break*.

Dopo aver analizzato dati sperimentali, l'Autore suggerisce che, in generale, possono avvenire due differenti tipi di impatto.

Nel primo tipo, il flusso è completamente deviato in direzione verticale (*jet-like*); nel secondo (*onda riflessa*) si forma un'onda riflessa che si propaga verso monte.

La differenza tra i due comportamenti sembra sia da attribuire al profilo del fronte al momento dell'impatto:

- se le forze d'attrito prevalgono sulle forze di gravità, il moto tende a decelerare ed il profilo tende a diventare più ripido. In questo caso, al momento dell'impatto si forma un'onda riflessa;
- al contrario, se le forze di gravità prevalgono sulle forze d'attrito, il moto tende ad accelerare e il profilo tende a diminuire nel tempo. In questo caso, al momento dell'impatto, si forma un getto verticale.

Con riferimento allo schema di Fig. 2-6, l'impatto dinamico può essere quantificato applicando il bilancio globale della quantità di moto al volume di controllo V_c :

$$\frac{1}{2} \gamma y_1^2 + \rho y_1 U^2 = \frac{1}{2} \gamma (y_1 + \delta y)^2 + \Delta p (y_1 + \delta y) + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U dV \quad (2.6)$$

In accordo con gli schemi di impatto descritti, l'applicazione del bilancio della quantità di moto in corrispondenza della parete porta a diversi risultati.

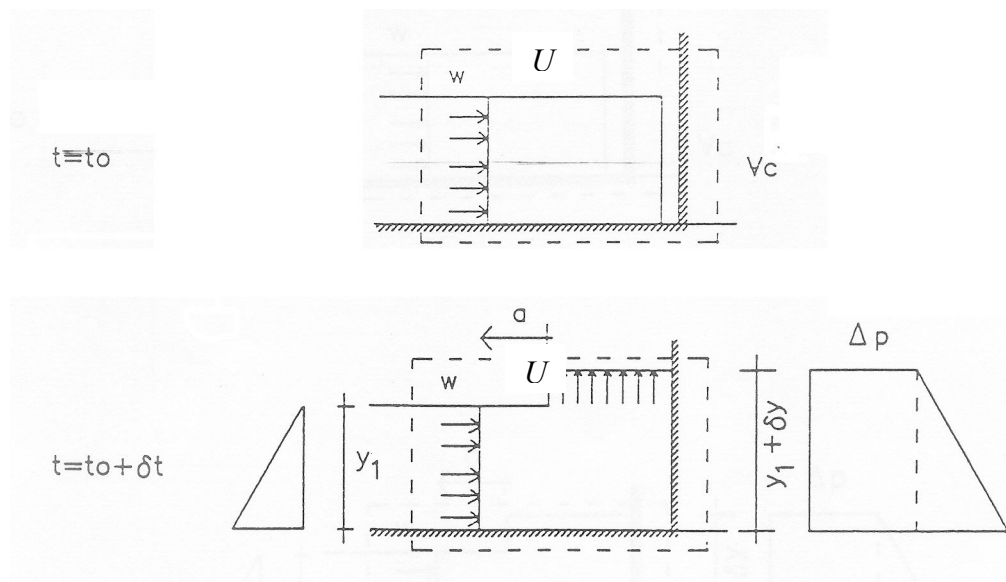


Fig. 2-6. Schema dell'impatto dinamico nel caso in cui, al momento dell'impatto, il flusso venga deviato verso l'alto (Armanini, 1993).

Nell'ipotesi che, al momento dell'impatto, il getto venga deviato nella direzione verticale, si può trascurare la variazione della quantità di moto nel tempo all'interno di V_c ottenendo:

$$\Delta p = \rho U^2 \quad (2.7)$$

Nella seconda ipotesi, al momento dell'impatto il fluido non viene deviato nella direzione verticale, ma riflesso in senso opposto, formando un'onda che si propaga verso monte (Fig. 2-7). In questo caso non è più accettabile trascurare la variazione della quantità di moto nel tempo all'interno del volume di misura.

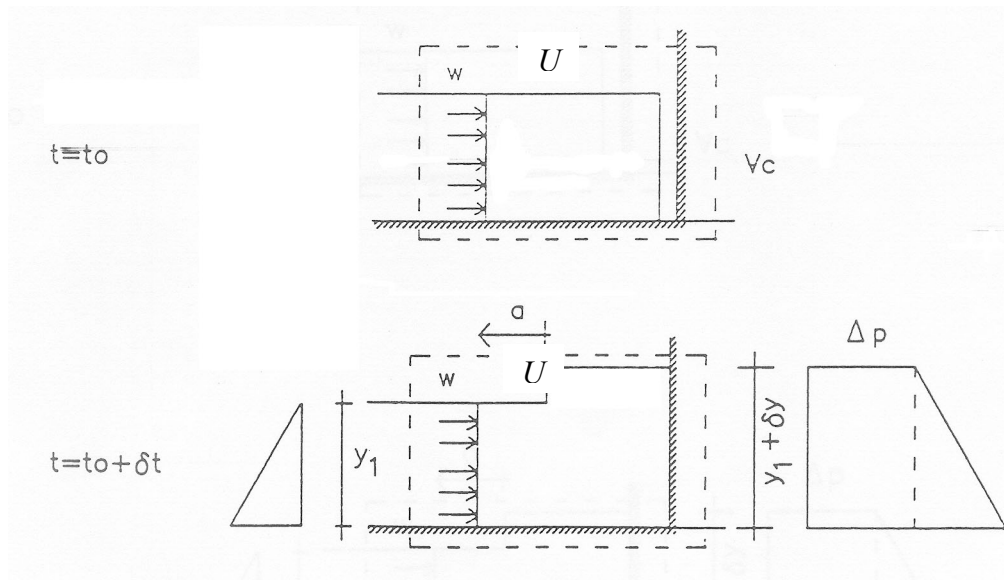


Fig. 2-7. Schema dell'impatto dinamico nel caso in cui, al momento dell'impatto, si formi un'onda riflessa (Armanini 1993).

Il bilancio fornisce:

$$\frac{1}{2} \gamma y_1^2 - \frac{1}{2} \gamma y_1^2 - \frac{2}{2} \gamma y_1 \delta y_1 - \Delta p (y_1 + \delta y) = -\rho y_1 U^2 + \frac{1}{\delta t} (\rho U y_1 (-\delta x)) \quad (2.8a)$$

$$\Delta p \cong -\gamma \delta y + \rho U (U + a) \cong \rho U (U + a) \quad (2.8b)$$

Per il valore della velocità del fronte U , che può essere stimata in generale risolvendo le equazioni di Navier-Stokes, si fa riferimento al modello Dam Break.

In accordo con le eq. (2.7) e (2.8b), le forze di impatto sono proporzionali al quadrato della velocità di propagazione U .

In conclusione, i risultati ottenuti suggeriscono che l'impatto dinamico dipende essenzialmente dalla velocità del fronte. Se si calcola la forza S di impatto in termini di pressione idrostatica, si ottiene:

$$S = \Delta p h_o + \frac{1}{2} \gamma h_o^2 = 4 \gamma h_o^2 + \frac{1}{2} \gamma h_o^2 = 9 \frac{1}{2} \gamma h_o^2 \quad (2.9)$$

Il coefficiente 9, ottenuto nella eq. (2.9), non è molto distante dai valori raccomandati da alcune autorità europee nella progettazione di strutture di difesa dalle colate di detriti (7-11 volte la pressione idrostatica).

Nei casi reali i caratteri cinematici della corrente all'impatto e la curvatura del fronte possono inficiare la validità della teoria monodimensionale. Anche il fenomeno di classazione granulometrica, che dà origine ad un accumulo di massi di grande dimensione nella porzione sommitale della colata, influenza sia la celerità del fronte che l'impatto dinamico.

Infine, si deve osservare che i fenomeni accelerativi non vengono riprodotti fedelmente in modelli a scala ridotta.

Tale aspetto sarà sviluppato in seguito.

Un approccio analogo a quello di Armanini (1993) è proposto da Liu et al. (1997); nell'ipotesi di comportamento alla Bingham, attraverso un bilancio della quantità di moto in un volume di controllo (identificato da L , Fig. 2-8), si ottiene il valore della forza d'impatto F pari a:

$$F = \rho g h \cos \theta + \rho g L \sin \theta - \frac{\tau_0 L}{h} + \frac{\rho U^2}{2} (x = -L) + \rho C_s U (x = -L) \quad (2.10)$$

in cui h è la profondità del flusso, U la velocità, τ_0 il valore della tensione di taglio limite nella schematizzazione di fluido alla Bingham, ρ la densità del flusso, θ l'inclinazione, rispetto all'orizzontale, del piano di scorrimento, C_s la velocità di fase del fronte.

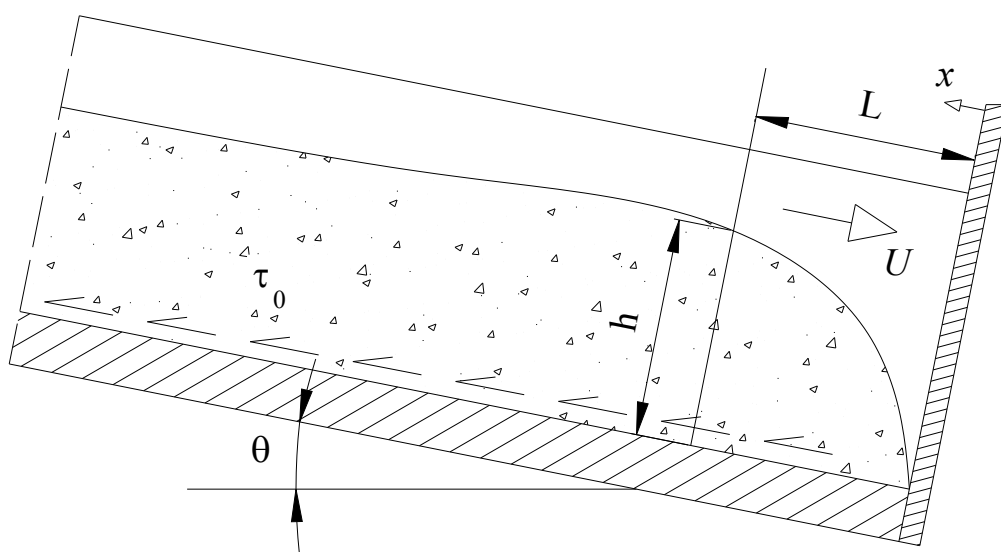


Fig. 2-8. Geometria e simbologia relativi all'analisi di Liu et al. (1997).

Nell'ambito dell'ingegneria costiera, dai lavori di numerosi ricercatori (Peregrine & Thais, 1996; Walkden et al., 2001; Bullock et al., 2000; Cooker, 2002; Bredmose et al., 2003; Peregrine et al., 2004; Obhrai et al., 2004; Bullock et al., 2004) nello studio dell'impatto di onde contro pareti solide, si rileva la natura impulsiva del fenomeno: registrazioni di impatti di onde mostrano che le pressioni che si generano raggiungono in tempi brevissimi valori estremamente elevati (pochi millesimi di secondo, Cooker, 2002), ed altrettanto rapidamente tali valori decadono.

Nello studio dell'impatto di onde contro superfici solide, Cooker (2002) introduce l'impulso di pressione P , funzione della posizione delle particelle nel dominio fluido all'istante dell'impatto.

L'impulso di pressione P è definito come l'integrale delle pressioni p nell'intervallo di tempo dt caratteristico del fenomeno.

Dati sperimentali mostrano che la pressione cresce rapidamente, ed altrettanto rapidamente decade, dando origine ad un diagramma di forma caratteristica. I fattori che governano la durata caratteristica dt non sono ancora chiari, soprattutto se si considera il fluido incompressibile.

Le misure di laboratorio mostrano che la pressione aumenta e decade in tempi compresi tra 0.5 e 10 millesimi di secondo: dt quindi è ordini di grandezza inferiore

rispetto alla scala dei tempi tipica del moto delle onde, compresa generalmente tra 1 e 10 secondi. Inoltre, per un'onda incidente di altezza L e velocità U_0 , la scala dei tempi L/U_0 è 0.1 s per le piccole onde generate in laboratorio, 1 s per le onde “reali”.

Nell'ipotesi di *fluido incompressibile*, l'equazione di continuità assume la forma:

$$\text{div } V = 0 \quad (2.11)$$

Si consideri ora un fluido che si scontra contro una superficie solida, rigida e impermeabile con normale n diretta verso il centro del solido. Sia V_{1n} la componente della velocità in direzione n . Il bilancio energetico per il fluido, incompressibile, si può scrivere:

$$V_2 - V_1 = -\rho^{-1} \nabla P$$

Se il fluido rimane in contatto con la superficie solida dopo l'impatto, vale la seguente condizione al contorno:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho V_{1n} \quad (2.12)$$

Questa condizione corrisponde a quella che nella meccanica classica deriva dalla definizione di urto *anelastico*.

Se invece si considera l'urto *elastico*, si deve porre $V_{2n} = -V_{1n}$ ed il secondo membro della (2.12) va raddoppiato:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 2\rho V_{1n} \quad (2.13)$$

Se il solido colpito può muoversi, informazioni sulla velocità del fluido prima e dopo l'impatto vanno accoppiate con un'equazione del moto del solido stesso.

Si consideri il sistema costituito da una un'onda piana ed una parete solida, con superficie piana e parallela a quella del fluido impattante (Fig. 2-9).

Si consideri, inizialmente, il caso di onda di forma triangolare isoscele. La velocità all'impatto sia pari ad U_0 .

La condizione al contorno su $x = 0$ è

$$\partial P / \partial x = \alpha \rho U_0,$$

con $\alpha = 1$ or $\alpha = 2$, rispettivamente nelle ipotesi di urto anelastico (in cui l'onda si tiene in contatto con la parete a seguito dell'impatto) e urto elastico (l'onda “rimbalza”); la condizione su $y = 0$, nell'ipotesi di contorno impermeabile, è data da:

$$\partial P / \partial y = 0.$$

Cooker (2002) propone, per questo problema, la soluzione in forma chiusa:

$$P(x, y) = \alpha \rho \frac{U_0}{2H} \left([x + H]^2 - y^2 \right) \quad (2.14)$$

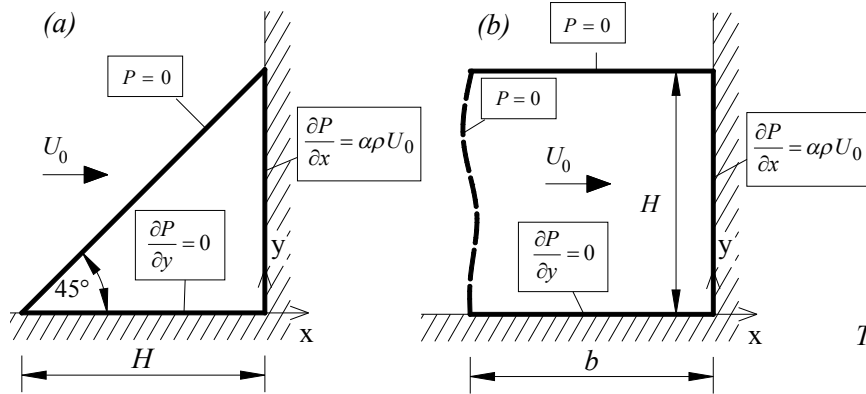


Fig. 2-9. Schema dell’impatto di un’onda (2D) su un muro verticale; (a): schema di un’onda a sezione trasversale triangolare; (b): schema di un’onda a sezione trasversale rettangolare.

La condizione di superficie libera, $P = 0$, è soddisfatta sulla linea retta $y = H + x$ per $x : -H \leq x \leq 0$.

Si noti che la differenza proposta nelle analisi di natura teorica tra urto elastico ed anelastico è parzialmente evidenziata anche dalle sperimentazioni di Armanini (1997), il quale mostra che sono possibili due tipi di impatto, per miscele composte da fluidi e resine anioniche: il primo, denominato *jet-like*, nel quale, a seguito dell’impatto, il flusso è deviato lungo la direzione verticale; il secondo, *reflected bore*, è caratterizzato dalla formazione di un’onda di riflessione del flusso verso monte.

Se si considera, a questo punto, l’impulso della forza associata all’impatto, si deve effettuare un’operazione di integrazione della funzione $P(x, y)$ lungo l’area di contatto A_c ($x = 0$), valutata per unità di sviluppo dell’onda; si ottiene la quantità I_T :

$$I_T = \alpha \cdot \int_{A_c} P dA = \alpha \cdot \int_0^H \rho \frac{U_0}{2H} (H^2 - y^2) dy = \rho \frac{\alpha \cdot U_0}{2H} \left[H^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^H = \frac{\alpha}{3} \rho U_0 H^2 \quad (2.15)$$

La medesima procedura può essere applicata allo studio di un'onda a sezione rettangolare (Cooker & Peregrine, 1995); si ottiene, per $\alpha = 1$ e $b \rightarrow \infty$:

$$I_S = 0.542 \rho U_0 H^2 \quad (2.16)$$

Si evidenzia che gli autori, sulla base dei risultati ottenuti per via analitica, indicano che la differenza, in termini di impulso, tra $b > H$ e $b \rightarrow \infty$ è trascurabile; questa caratteristica peculiare dell'impatto di fluidi contro solidi è sottolineata anche da Wu (2007), il quale, attraverso un bilancio energetico del fluido impattante, dimostra che *si hanno effetti significativi, all'impatto, nella sola porzione di fluido in prossimità della zona di impatto.*

2.3.2 MASSA FLUIDA CONTRO UN BLOCCO DISPOSTO SU UN PIANO ORIZZONTALE

Un blocco libero di muoversi, se colpito orizzontalmente da una massa fluida, può essere spostato. Un'analisi del fenomeno, è stata affrontata in condizioni di deformazioni piane da Cooker (2002), sfruttando il concetto di impulso di pressione P , precedentemente introdotto.

In caso di *impatto elastico*, si consideri la geometria di Fig. 2-10, in cui una massa fluida con forma di triangolo rettangolo e isoscele, dotato di velocità orizzontale U_0 , urta un blocco. Nell'istante successivo all'impatto il fluido sulla superficie dell'onda ha una componente orizzontale di velocità pari a U_2 .

La condizione al contorno in questo caso diventa quindi $\partial P / \partial x = \rho (U_0 - U_2)$ per $x = 0$. L'espressione di $P(x, y)$ è:

$$P(x, y) = \rho \frac{(U_0 - U_2)}{2R} ([x + R]^2 - y^2)$$

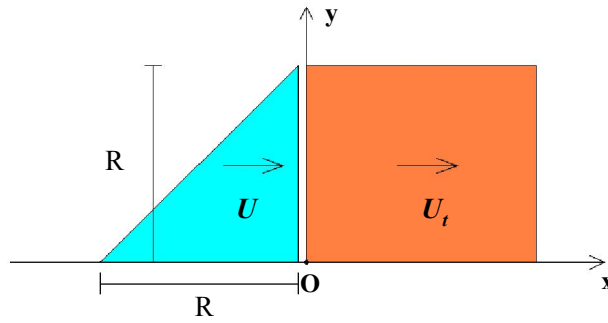


Fig. 2-10. Impatto di un'onda triangolare su un blocco libero di muoversi su un piano orizzontale.

L'impulso trasmesso al blocco è un vettore diretto come x , di modulo pari a:

$$I = \int_0^R P(0, y) dy = \frac{1}{3} \rho R^2 (U_0 - U_2) \quad (2.17)$$

Se la massa del blocco (per unità di lunghezza) è M , il blocco acquista una velocità U_t tale che, dalla (2.17):

$$\frac{1}{3} \rho R^2 (U_0 - U_2) = M U_t \quad (2.18)$$

Quindi, per un impatto elastico, nella soluzione si conserva l'energia cinetica. I risultati possono essere espressi in termini di U_0 e del rapporto adimensionale tra le masse $q = \rho R^2 / (3M)$. Il blocco acquista quindi una velocità pari a

$$U_t = U_0 \frac{q}{1+q} \quad (2.19)$$

Si consideri ad esempio un blocco di sezione trasversale rettangolare, di altezza pari a $R = 10$ m, larghezza 20 m e densità relativa (rispetto all'acqua) pari a 2.5; se si ipotizza un coefficiente di attrito μ alla base pari a 0.6 ed una velocità d'impatto pari a 10 m/s, si può calcolare facilmente lo spostamento subito dal blocco: dalla (2.19) si ricava $U_t = 1.25$ m/s. Le equazioni della dinamica, per un moto uniformemente decelerato, sono:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - a \cdot (t^2/2) \quad (2.20)$$

$$v(t) = v_0 - a \cdot t \quad (2.21)$$

Dalla (2.21) in particolare, noto v_0 , si calcola il tempo di arresto t^* :

$$t^* = v_0 / a = 1.25 / (0.6 \cdot 9.81) = 0.212 \text{ s}$$

che, sostituito nella (2.20) fornisce lo spostamento atteso del blocco:

$$s(t^*) = 0 + 1.25 \cdot 0.212 - (0.6 \cdot 9.81) \cdot 0.212^2 / 2 = 0.133 \text{ m}$$

L'autore considera però più realistico il caso in cui l'onda rimanga in contatto col blocco dopo l'urto (*impatto anelastico*), in maniera tale che $U_t = U_2$.

L'espressione generale dell'impulso è ancora data dalla (2.18), che in questo caso diventa:

$$\frac{1}{3} \rho R^2 (U_0 - U_t) = MU_t$$

Per l'impatto anelastico si trova che U_t assume un valore pari alla metà del caso precedente.

La distanza percorsa dal blocco può essere calcolata per mezzo della seguente relazione, che deriva dalle (2.20) e (2.21):

$$s = \frac{U_t^2}{2\mu g} = \frac{U_0^2}{2\mu g} \frac{q^2}{1 + q^2}$$

In questo caso, ma con i medesimi dati relativi alla geometria ed alle proprietà di onda e blocco, si determina per il blocco dell'esempio numerico uno spostamento s molto minore:

$$s = 0.033 \text{ m}$$

Cooker (2002) riporta poi dati da osservazioni di casi reali riportate in letteratura: Hitachi ad esempio (1994, Case study of breakwater damages Mutsu-Ogawara Port, in T.Takayama (ed.) *Proc. Intl. Workshop on Wave Barriers in Deep Water*. Port & Harbour Inst. of Japan) riferisce di spostamenti di cassoni marittimi (di dimensioni in sezione 18 m x 24 m) compresi tra pochi cm e 5 m; quest'ultimo valore è ovviamente riferito a una successione di spostamenti dovuti a diversi impatti con onde: applicando le equazioni introdotte precedentemente Cooker (2002) ottiene per ogni singolo impatto uno spostamento di 12 cm.

2.3.3 CORPO SOLIDO CONTRO LA SUPERFICIE LIBERA DI UN FLUIDO IN QUIETE

In caso di urto tra due o più corpi, in molte circostanze, l'impatto ha una durata molto piccola; si può ipotizzare quindi che il fenomeno sia istantaneo. Nel caso di impatto fra un fluido e un solido, tale ipotesi è compatibile con l'ipotesi di incompressibilità del fluido (Frémond et al., 2003); le velocità dei corpi, quindi, possono essere considerate funzioni discontinue del tempo, e le forze, concentrate nel tempo, diventano *percussioni*; tali percussioni sono quantità che intervengono solamente all'istante dell'impatto.

Nel modello di calcolo proposto da Frémond et al. (2003), le equazioni del moto sono ottenute a partire dal principio dei lavori virtuali, in cui sono coinvolte forze e tensioni *regolari* insieme a *percussioni* delle forze e delle tensioni.

Inoltre, equazioni costitutive (controllate dai principi della termodinamica) sono introdotte per descrivere i campi di tensioni regolari e legati alle percussioni, così come le proprietà del contatto tra i corpi.

Si ottiene un set di equazioni differenziali dal quale si ricava, in particolare, il campo delle velocità a seguito dell'impatto nel solido e nel fluido.

Il problema del tuffatore. Un particolare problema 2D è studiato: l'impatto tra un corpo solido, rigido (il tuffatore) e la superficie libera di un fluido inizialmente in quiete in un contenitore (la *piscina*). Il fluido, di densità ρ , occupa il dominio $\Omega(t)$ ed è in contatto con il solido, al momento dell'impatto, attraverso la porzione $\Gamma_1(t)$ della frontiera $\partial\Omega(t)$. La rimanente parte della frontiera ($\partial\Omega \setminus \Gamma_1$) è scomposta in due porzioni disgiunte: un contorno rigido (Γ_0) e un contorno libero (Γ_2). La massa del tuffatore è M ed il suo momento d'inerzia I ; ha forma simmetrica, è piatto e il suo spessore nullo; si ipotizza che egli si tuffi al centro della piscina.

Considerando che l'impatto avvenga al tempo t_0 , e che sia istantaneo, si avranno, per il fluido, le velocità $U^-(x, t_0)$ e $U^+(x, t_0)$, rispettivamente prima e dopo la collisione. Le velocità del centro di massa del tuffatore sono invece X^- e X^+ ; non si prende in considerazione alcuna velocità di rotazione. Al momento del contatto tra le due superfici, si assume:

$$X^- = (0, X^-) \quad (2.22)$$

Non è applicato alcun carico esterno. Tutti i punti appartenenti al tuffatore (corpo rigido) possiedono la stessa velocità verticale, che coincide con la velocità del centro di massa.

Si ipotizza che al tempo t_0 il campo di velocità nel fluido sia:

$$U^-(x, t_0) = 0$$

Lo scopo delle analisi è determinare la velocità del fluido $U^+(x, t_0)$ e del tuffatore $X^+(t_0)$ dopo l'impatto.

Analisi numeriche. Nelle analisi numeriche si assume: massa del tuffatore $M = 100$ kg; l'altezza di caduta del tuffatore è pari ad 1 m, da cui una velocità verticale pari a $X^- = -\sqrt{(2g)} = -4.47$ m/s. La densità dell'acqua (costante, proprio per l'ipotesi di incompressibilità) è $\rho = 1000$ kg/m³.

Si assume poi che durante l'impatto sia mantenuto il contatto tra la superficie solida ed il tuffatore.

I risultati mostrano che la velocità del tuffatore, a seguito dell'impatto, è uguale a quella dell'acqua sulla superficie e pari a 0.75 m/s (diretta verso il basso).

La Fig. 2-11 riporta la distribuzione delle velocità nel fluido a seguito dell'impatto.

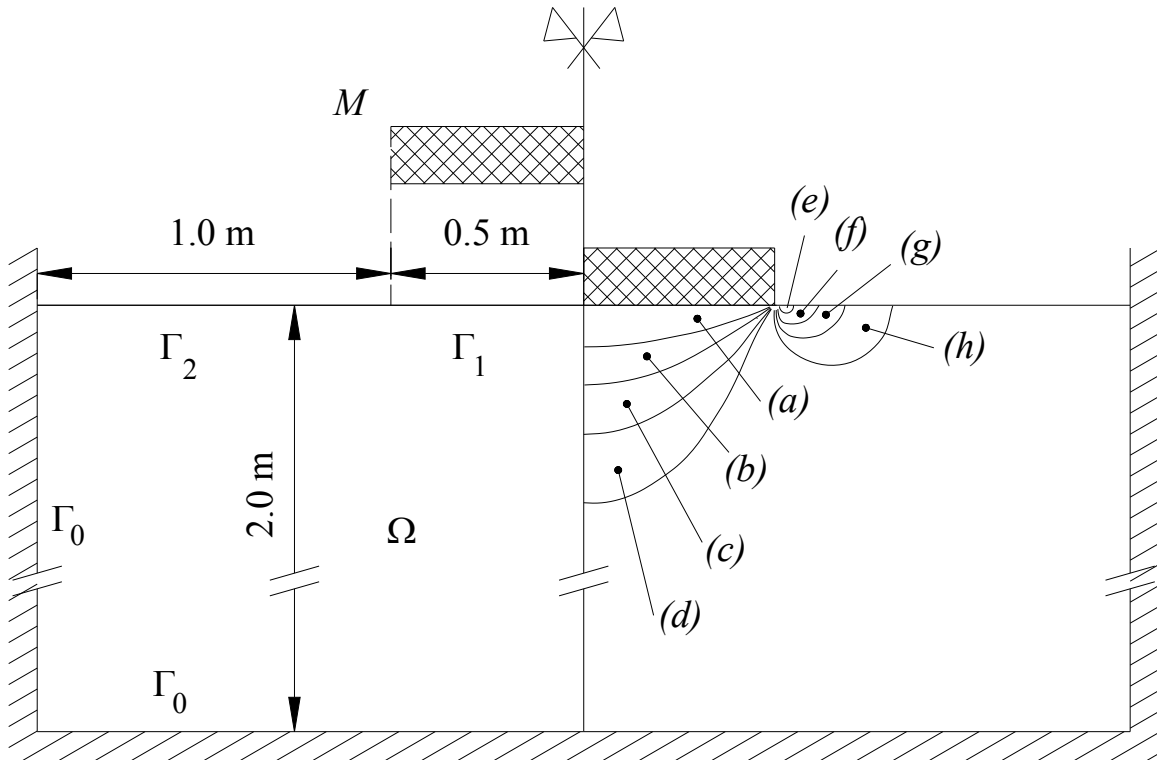


Fig. 2-11. Problema del tuffatore; a sinistra: geometria del tuffatore e della piscina; la velocità iniziale del tuffatore (diretta verso il basso) è $X^- = 4.47$ m/s; l'acqua è inizialmente ferma; **a destra:** distribuzione delle velocità verticali nel fluido dopo l'impatto: (a) – (d): velocità diretta verso il basso ((a): velocità massima, pari a 0.75 m/s; (d): velocità minima); (e) – (h): velocità diretta verso l'alto ((e): velocità massima, (h): velocità minima); la velocità del tuffatore è pari alla velocità del fluido (a) ($X^+ = 0.75$ m/s); adattato da Frémond et al. (2003).

2.4 IPOTESI DI FLUIDO COMPRIMIBILE

2.4.1 MASSA FLUIDA CONTRO UNA PARETE SOLIDA

Durante la fase impulsiva, il campo di velocità 2D non stazionario $U(x,y,t) = (u, v)$ può essere descritto per mezzo di un potenziale $\phi(x,y,t)$, tale che

$$\nabla \phi = U$$

(Korobkin 1998, Cooker 2003).

La variazione di pressione, associata alla variazione del campo di velocità, è:

$$p(x,y,t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.22)$$

Le altre equazioni alla base del modello sono:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.23b)$$

in cui ρ_0 è la densità d'equilibrio del fluido; la densità ρ gode delle seguenti proprietà:

- è funzione della sola pressione p ;
- nel corso del fenomeno le variazioni di densità sono minime rispetto al valore all'equilibrio.

Si può scrivere quindi l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.24)$$

Per chiudere il modello si introduce l'equazione di stato:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2 \quad (2.25)$$

Si dimostra, attraverso le eq. (2.23a-b), che ϕ soddisfa la equazione della propagazione delle onde in un mezzo elastico:

$$c^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

Le precedenti equazioni ammettono discontinuità in u , v , p , ρ , governate da adeguate condizioni di salto.

Successivamente, si assume la geometria di Fig. 2-12; si suppone che l'onda colpisca, a $t = 0$, la parete, con velocità $(u, v) = (U_0, 0)$ e che poi rimanga in contatto con la parete per tutto il tempo dell'impatto.

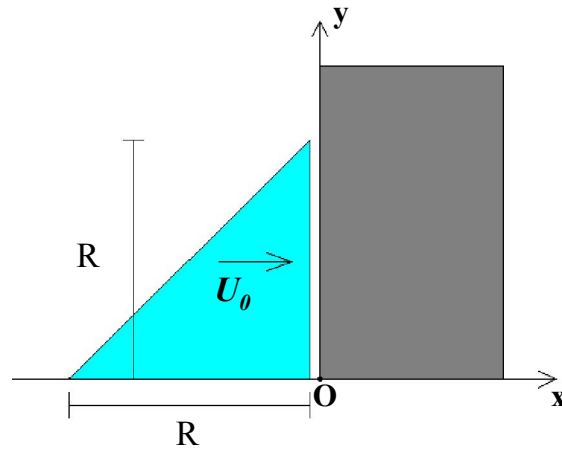


Fig. 2-12. Schematizzazione dell'impatto di un'onda triangolare su una parete rigida, vincolata alla base.

Le condizioni al contorno ed iniziali sono:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U_0 - U_0 H(t) \quad \text{per } x = 0 \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U_0 H(t) \quad \text{per } y = R \quad (2.27b)$$

$$\phi = U_0 x \quad \text{per } t = 0 \quad (2.27c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{per } t = 0 \quad (2.27d)$$

dove con $H(t)$ è indicata la funzione di Heaviside.

La pressione p può essere espressa da una serie di funzioni; si ottiene:

$$p(x, y, t) = H(t) \rho U_0 \cdot c \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi ct}{R}}{n} \left(\cos \frac{n\pi x}{R} - (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{R} \right) \quad (2.28)$$

In Fig. 2-13 è riportata graficamente la discussione del risultato fornito dalla eq. (2.28).

Con riferimento alla Fig. 2-13, al momento dell'impatto ($t = 0$) il fronte d'onda di compressione (AB) è una superficie coincidente con l'asse y ; per $t > 0$, comincia a propagarsi verso sinistra con velocità c ; incontrando la superficie libera ($y = x + R$) si riflette dando origine ad una nuova onda di compressione di uguale ampiezza (BC) che si sposta verso il basso.

I campi di pressione i cui fronti sono AB e BC si sovrappongono. Al di fuori del rettangolo ABCO e sulla superficie libera la pressione è pari a zero.

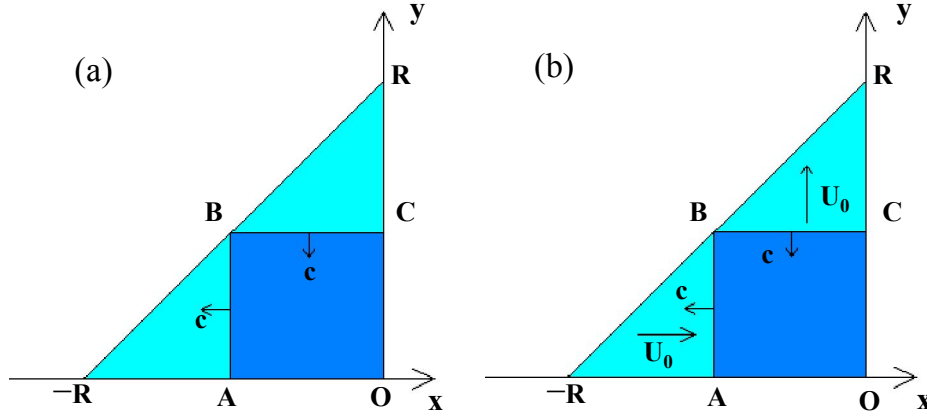


Fig. 2-13. Impatto di un'onda triangolare su una parete rigida, vincolata alla base; (a) l'onda di compressione si muove nel dominio fluido con velocità c riflettendosi sulla superficie solida, sulla base e sulla superficie libera inclinata di 45° suddividendo il dominio stesso in tre regioni di dimensione variabile nel tempo; (b) il campo di velocità associato al campo di pressioni è uniforme in ciascuna delle tre regioni.

All'interno di ABCO la pressione è costante e pari alla pressione di colpo d'ariete $\rho c U_0$. Al tempo $t = R/c$ il fronte BC raggiunge la base dell'onda e la superficie AB degenera nel punto $(-R)$. Da questo istante il fronte AB comincia a propagarsi verso destra e BC verso l'alto, fino a ripristinare le condizioni iniziali a partire dalle quali poi il ciclo ricomincia.

Con riferimento alla Fig. 2-13b si vogliono poi interpretare le variazioni di velocità. Mentre AB si muove verso sinistra la componente di velocità normale al fronte d'onda cambia secondo la condizione di salto, attraverso AB, dallo stato "1" allo stato "J", all'interno di ABCO:

$$c[u]_1^J = -\rho_0^{-1}[p]_1^J \quad (2.29)$$

Quindi, dalla eq. (2.28), si ottiene:

$$c(u_J(-ct, y) - U_0) = -\rho_0^{-1} \rho_0 c U_0 \quad (2.30)$$

e, infine:

$$u_J(x, y) = 0 \quad \text{per } (x, y) \in \text{ABCO} \quad (2.31)$$

Mentre la superficie BC si sposta verso il basso, il fronte d'onda fa variare la componente verticale della velocità. Impostando il problema come nel caso precedente, si ottiene:

$$c[v]_J^2 = -\rho_0^{-1}[p]_J^2 \quad (2.32)$$

dove con “ J ” si è di nuovo indicato il dominio all'interno di ABCO, e con “2” la zona al di sopra di BC. Ancora, dalla (2.28) si ottiene:

$$c v_2(x, R-ct) = -\rho_0^{-1} \rho_0 c U_0 \quad (2.33)$$

e quindi:

$$v_2(x, y) = U_0 \quad \text{per } (x, y) \in \text{BCR} \quad (2.34)$$

Al tempo $t = R/c$ BC si riflette sul fondo; all'interno di ABCO la pressione cambia in $-\rho c U_0$ ed in $-RAB$ la velocità è pari a U_0 e diretta come x .

Si consideri poi l'impatto tra un fronte fluido di forma rettangolare (e superficie piana) e la superficie esterna, piana, di un corpo solido (Johnson, 1983); il fluido sia in moto con velocità U ortogonale alla superficie del solido (Fig. 2-14a). All'impatto, sull'intera superficie del fluido, si genera una sovrappressione Δp ; la durata del fenomeno non stazionario dipende dalla compressibilità del fluido (definita attraverso la velocità di propagazione delle onde elastica nel mezzo, c , ipotizzato costante). Il valore massimo della sovrappressione che si genera all'impatto (Δp_{MAX}) è:

$$\Delta p_{MAX} = \rho c U \quad (2.35)$$

Se si considera poi un solido deformabile, caratterizzato dall'*impedenza acustica* $(\rho c)_s$, allora il massimo valore della massima sovrappressione del fluido Δp_{MAX} sarà:

$$\Delta p_{MAX} = v \frac{(\rho c_0) \cdot (\rho c)_s}{(\rho c_0) + (\rho c)_s} \quad (2.36)$$

La durata dell'azione della sovrappressione dipende dal tempo necessario affinché le onde di decompressione, a partire dai bordi del fronte (caratterizzati da $p = 0$), raggiungano la porzione del dominio sulla quale agisce Δp .

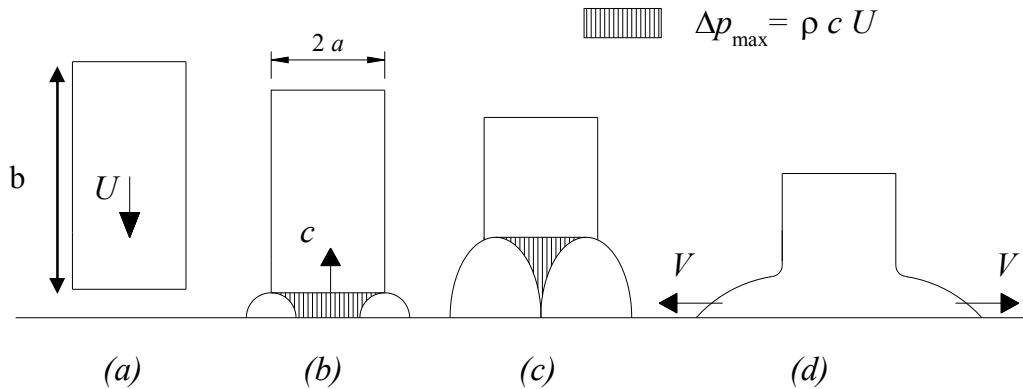


Fig. 2-14. Sequenza delle fasi che descrivono l’impatto di un fronte fluido di forma rettangolare contro un solido (adattato da Johnson, 1983).

Dalla Fig. 2-14 si nota che:

- subito dopo l’impatto, la porzione di dominio che rimane confinata, raggiunta dall’onda di compressione, è caratterizzata dalla sovrappressione Δp_{MAX} ; il fluido sul bordo, invece, è libero di fluire lateralmente; la pressione in queste zone è pari a zero (Fig. 2-14b);
- con l’avanzare del tempo, dai bordi, l’onda di decompressione $p = 0$ si propaga verso l’interno con velocità c ; il tempo richiesto all’onda di decompressione per rendere nulla la pressione sull’intero fronte è approssimativamente pari a $t = a/c$ (Fig. 2-14b-c).

Si vuole ora determinare, in maniera approssimata, la velocità V (Fig. 2-14d) con cui il fluido sul bordo esterno della zona d’impatto inizia a muoversi verso l’esterno nella direzione parallela al piano rigido.

Dopo un tempo t a partire dall’impatto, la regione di forma rettangolare di altezza pari a $c t$ è nella zona d’influenza del fronte (con $\Delta p = \Delta p_{max} = \rho c U$); tuttavia, in prossimità dei bordi esterni (non confinati) anche la condizione al contorno $p = 0$ (che dai bordi si propaga verso l’interno con velocità c) deve essere considerata; ai due angoli estremi del fronte, quindi, si creano regioni la cui pressione risultante è difficile da determinare proprio a causa della sovrapposizione dei due campi di pressione che contemporaneamente si propagano.

Si considera quindi (Lesser, 1993) una regione di transizione (S , Fig. 2-15), di pressione incognita, con forma di quarto di cerchio di raggio pari a $c t$. La velocità iniziale media V con cui il fluido è espulso lateralmente può essere determinata in maniera approssimata attraverso un bilancio della quantità di moto: la massa m di fluido contenuta nella regione S ($m = \rho \pi (ct)^2 / 4$, Fig. 2-15) è soggetta, lungo l'arco di circonferenza DC , alla pressione $\Delta p = \Delta p_{max}$.

La componente orizzontale della forza totale esercitata sul bordo è F_x :

$$F_x = pr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta) d\theta = pr [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \rho c U \cdot ct \quad (2.37)$$

Inoltre:

$$F_x = \frac{d(mV)}{dt} = V \frac{dm}{dt} = V \frac{\rho}{2} \pi c^2 t = \rho c^2 U t \quad (2.38)$$

Si ottiene quindi il valore della velocità orizzontale V :

$$V = \frac{2}{\pi} U \quad (2.39)$$

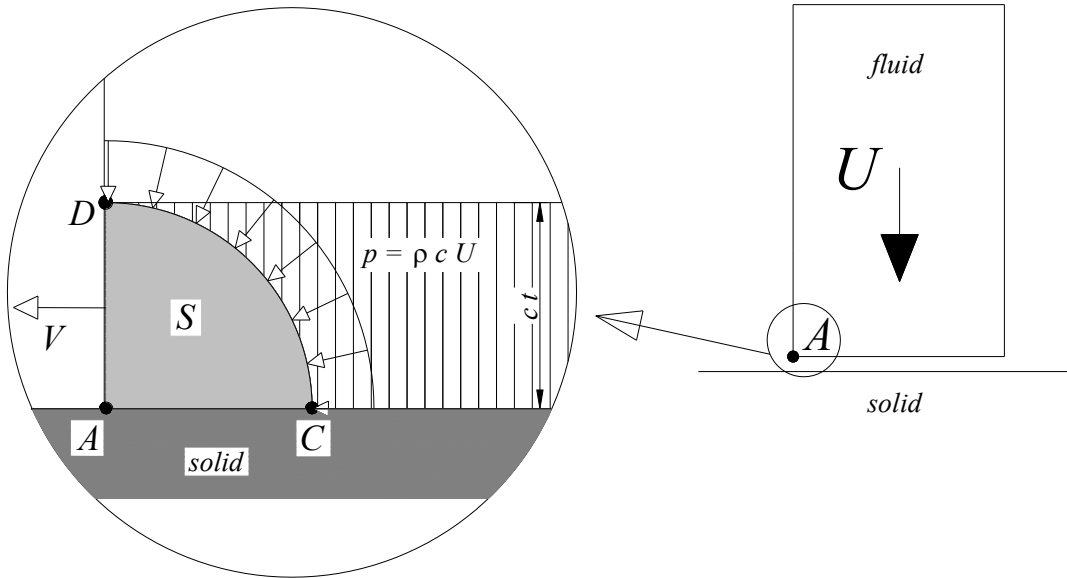


Fig. 2-15. Impatto di fluidi contro superfici - metodo approssimato per il calcolo della velocità di espulsione laterale V . Ingrandimento del bordo esterno del fronte d'impatto.

Il problema dell'impatto di un'onda a sezione longitudinale piana è stata ulteriormente studiato da Korobkin (1996), Cooker (2002) e Wu (2007).

Korobkin (1996), in particolare, nell'ipotesi di impatto anelastico, fornisce una valutazione dell'impulso trasmesso su una parete, all'impatto.

Nel caso di corrente di sviluppo infinito ($b \rightarrow \infty$), ottiene il seguente valore dell'impulso:

$$I(b \rightarrow \infty) \approx 1.052 \rho_0 a^2 U \quad (2.40)$$

Un importante risultato ottenuto nell'analisi condotta da Korobkin (1996) consiste nell'aver determinate che, all'impatto, circa un quarto dell'energia posseduta dalla corrente all'impatto è trasformato in energia di compressione del fluido, *indipendentemente dal valore assunto dalla velocità della corrente*.

Inoltre, nel caso in cui la corrente abbia dimensioni finite, ($b < \infty$), si ottiene

$$I(b) < I(b \rightarrow \infty)$$

Tuttavia, se $b/a > 1.7$,

$$I(b) \approx I(b \rightarrow \infty)$$

Questo risultato, estremamente interessante, è analogo a quello ottenuto da Cooker e Peregrine (1995) nell'ipotesi di fluido incompressibile.

Per completare l'analisi in caso di fluido comprimibile, studi recenti nel campo dell'ingegneria costiera mettono in evidenza il ruolo della compressibilità del fluido, in particolare in presenza di aria nell'acqua.

Come riportato in Chanson (1995), flussi veloci caratterizzati da elevata turbolenza sono caratterizzati da una non trascurabile frazione di gas intrappolata in acqua.

Una formula rilevante, ottenuta sperimentalmente, che lega la velocità del flusso alla massima concentrazione possibile di aria C nel fluido è fornita da:

$$C_{\max} = 0.043 U^{0.31} \quad (2.41)$$

con U velocità, espressa in m/s.

Una importante conseguenza della presenza di aria nel fluido è costituita dalla modifica della rigidità volumetrica K del fluido. Si ottiene che, anche per modesti valori della concentrazione di gas, si ottengono significative variazioni di K ; una formula che fornisce un limite inferiore della rigidità volumetrica della miscela acqua – gas è fornita da Cho et al. (2002):

$$\frac{1}{K} = \frac{C}{K_a} + \frac{1}{K_w} \quad (2.42)$$

in cui K_a e K_w sono rispettivamente la compressibilità dell'aria (circa 0.1 MPa) e dell'acqua pura (circa 2100 MPa); un valore suggerito da (1998) e Peregrine (2003), per $C = 0.01$, ad esempio, è $K = 22.5$ MPa.

Per debris – flow a comportamento fluido, nei quali acqua è mescolata ad aria e particelle solide, la presenza di quest'ultime può far supporre un maggiore valore della rigidità volumetrica K .

2.4.2 CORPO SOLIDO CONTRO LA SUPERFICIE LIBERA DI UN FLUIDO IN QUIETE

Durante la navigazione in mare, lo scafo di un catamarano subisce diversi impatti con la superficie marina; questi continui urti possono provocare vibrazioni e danni, sia localizzati, sia distribuiti, allo scafo stesso (Korobkin, 1998).

Si deve poi considerare la presenza di aria, che rende i carichi idrodinamici inferiori ma rende il problema più difficile da trattare.

Nella Fig. 2-16 è riportata la geometria del problema e le schematizzazioni introdotte per i calcoli, coi quali si vogliono determinare in particolare i valori delle deformazioni e del momento flettente nello scafo.

La teoria utilizzata per la modellazione del fluido è quella riguardante la propagazione delle onde in un mezzo elastico; la velocità delle onde elastiche nell'acqua, pari a c , subisce variazioni a causa della eventuale presenza di aria. In particolare, in acqua pura (in assenza di aria) il valore di c può essere posto pari a circa 1500 m/s; per una frazione volumetrica di aria pari appena all'1%, il summenzionato valore di velocità di propagazione delle onde elastiche è molto inferiore, 120 m/s circa.

Non è stata tuttavia considerata una eventuale riduzione di densità del fluido stesso a causa della presenza di aria. Lo scafo del catamarano è assimilato ad una trave elastica appoggiata agli estremi che a $t = 0$ impatta la superficie marina; l'analisi è svolta in condizioni di deformazione piane.

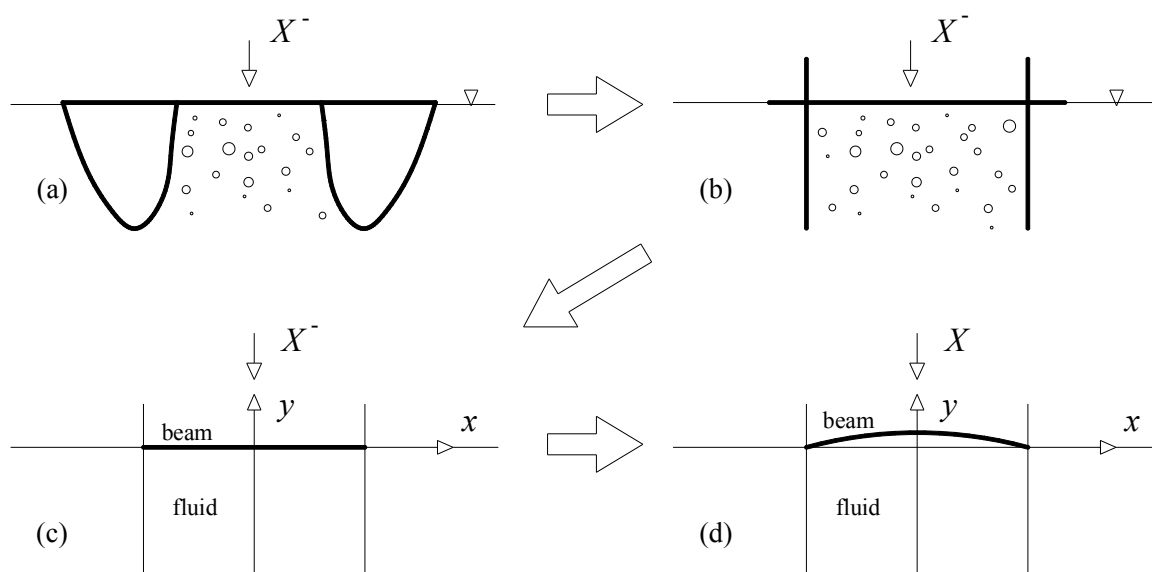


Fig. 2-16. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; (a) geometria iniziale del problema; (b) semplificazione della geometria; (c) schema di calcolo: trave elastica, appoggiata agli estremi, che colpisce il fluido ($t = 0$); (d) configurazione deformata della trave ($t > 0$); da Korobkin, (1998).

Il centro della trave è anche l'origine di un sistema di coordinate Oxy .

Inizialmente il fluido è in quiete ed occupa la regione di spazio compresa tra $y < 0$, $-1 < x < 1$ (Fig. 2-16).

La trave elastica, posta nella regione identificata da $y = 0$, $-1 < x < 1$, a $t = 0$ colpisce la superficie del fluido. La presenza di due pareti indeformabili rende impossibile il flusso laterale al fluido.

A $t = 0$ la trave colpisce, lungo tutta la sua lunghezza, la superficie marina con velocità $X = 1$ (adimensionale). A seguito dell'impatto, la trave assume la velocità X , variabile nel tempo.

E' importante sottolineare che i carichi idrodinamici sulla trave dipendono dall'inflessione della trave stessa, e viceversa: il problema risulta così accoppiato, e le equazioni riguardanti il dominio fluido e la deformazione della trave vanno risolti contemporaneamente.

Si assume che la velocità X sia molto inferiore rispetto alla velocità del suono nel fluido, c , dipendente dalla quantità di aria imprigionata nel fluido (espressa in termini di concentrazione volumetrica, β).

Le considerazioni che seguono sono riferite agli istanti iniziali dopo l'impatto, quando gli spostamenti del dominio fluido e l'inflessione della trave sono piccoli.

La teoria deriva dalla linearizzazione delle equazioni del moto del fluido: si considera infatti che il flusso sia descrivibile per mezzo del potenziale delle velocità $\phi(x, y, t)$.

Il flusso del fluido negli istanti iniziali a partire dall'impatto può essere descritto dalle equazioni seguenti:

$$c^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (y = 0, -1 < x < 1, t > 0) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm 1, y < 0) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -X + X^- \quad (y = 0, -1 < x < 1, t > 0) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi = 0 \quad (y = 0, -1 < x < 1, t = 0) \quad (2.46)$$

Per la trave si ha:

$$\epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, y = 0, t) + \epsilon \frac{\partial X}{\partial t} \quad (y = 0, -1 < x < 1, t > 0) \quad (2.47)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm 1, t > 0) \quad (2.48)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (-1 < x < 1, t > 0) \quad (2.49)$$

$$p(x, y, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.50)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\omega \gamma}{\omega - \epsilon} - \frac{\beta}{\omega - \epsilon} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1, t) \quad (t > 0) \quad (2.51)$$

$$X = X = 1 \quad (t = 0) \quad (2.52)$$

in cui sono state introdotte le variabili adimensionali $\epsilon = m/(L\rho)$, $\beta = EJ/(\rho c^2 L^3)$, $\gamma = gL/(v_0 c)$, $\omega = M/(2 \rho L^2)$; m è la massa per unità di lunghezza della trave, E è il modulo di

Young del materiale costituente la trave, J il momento d'inerzia, g l'accelerazione di gravità, M la massa totale della struttura divisa per la lunghezza totale della trave, w è lo spostamento trasversale della trave.

Il momento flettente (adimensionalizzato) nella trave è espresso da:

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.53)$$

il cui valore massimo è $Eh\nu_0/(2Lc)$, con h valore massimo dello spessore della trave. I risultati riguardanti la tensione nella trave sono presentati per mezzo della deformazione $\varepsilon(x,t)$, legata alla $\sigma(x,t)$ dalla formula

$$\varepsilon(x,t) = \frac{h\nu_0}{2Lc} \sigma(x,t) \quad (2.54)$$

oppure, reintroducendo la variabili dimensionali:

$$\varepsilon(x,t) = \sigma'(x,t) / E \quad (2.55)$$

in cui $\sigma'(x,t)$ è il momento flettente.

I dati utilizzati per la risoluzione numerica del problema sono: $L = 0.75$ m; $E = 7 \cdot 10^{10}$ N/m²; $J = 1.106 \cdot 10^{-5}$ m³; $h = 12$ cm; $m = 36.6$ kg/m²; $\rho = 1000$ kg/m³; $M = 500$ kg/m; $\nu_0 = 5.4$ m/s.

Sono state effettuate *due* simulazioni:

- la *prima* considerando acqua pura ($c = 1500$ m/s);
- la *seconda* considerando la miscela fluido-aria, tale che per una concentrazione di aria α pari all'1% si ha $c = 120$ m/s.

I parametri adimensionali introdotti prima valgono:

- per *acqua pura*: $\epsilon = 0.0488$; $\beta = 0.00088$; $\gamma = 0.0009$; $\omega = 0.444$;
- per la miscela aria-acqua: $\epsilon = 0.0488$; $\beta = 0.127$; $\gamma = 0.0009$; $\omega = 0.444$.

Per l'*acqua pura* il valore massimo delle inflessioni risultanti è pari a 2.7 mm; il valore massimo delle tensioni nella trave è 20 MPa e il valore massimo delle pressioni nel fluido è 8.1 MPa.

Nella Fig. 2-17 è riportata la velocità della struttura negli istanti successivi all'impatto: decresce, a partire dal valore iniziale, molto rapidamente; dopo un tempo pari a 3 ms la struttura inverte il moto.

In Fig. 2-18 è indicata la pressione al centro della trave. In entrambi i casi il valore massimo è raggiunto istantaneamente, all'impatto; l'andamento nel tempo è poi di tipo decrescente, ed in tempi molto piccoli (dell'ordine di pochi millisecondi) la diminuzione è notevole.

Per la *miscela acqua-aria*, invece, il valore massimo delle inflessioni è pari a 3.375 cm; quello delle tensioni nella trave è 252 MPa e la massima pressione nel fluido è 0.648 MPa.

In Fig. 2-19 è riportata la velocità acquisita dalla struttura e in Fig. 2-20 la pressione al centro della trave.

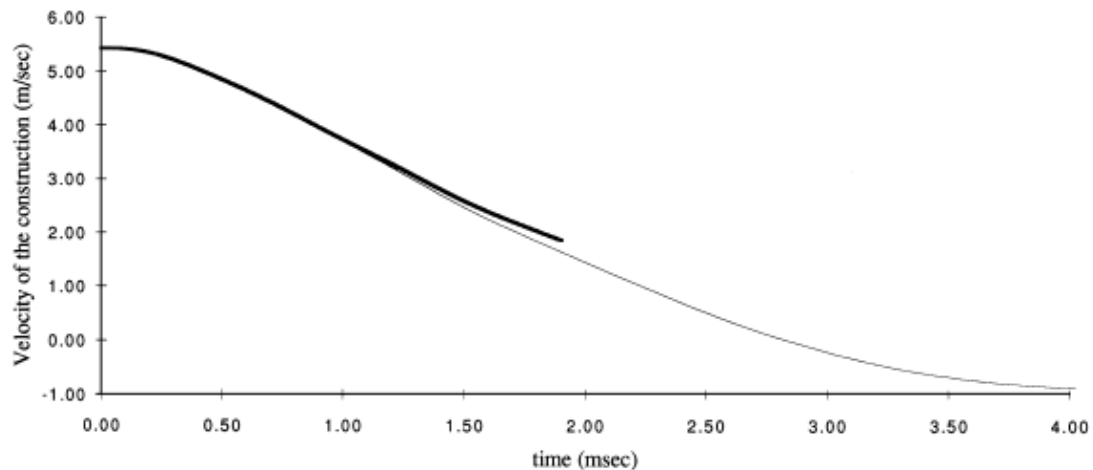


Fig. 2-17. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; velocità acquisita dalla struttura dopo l'impatto; acqua pura.

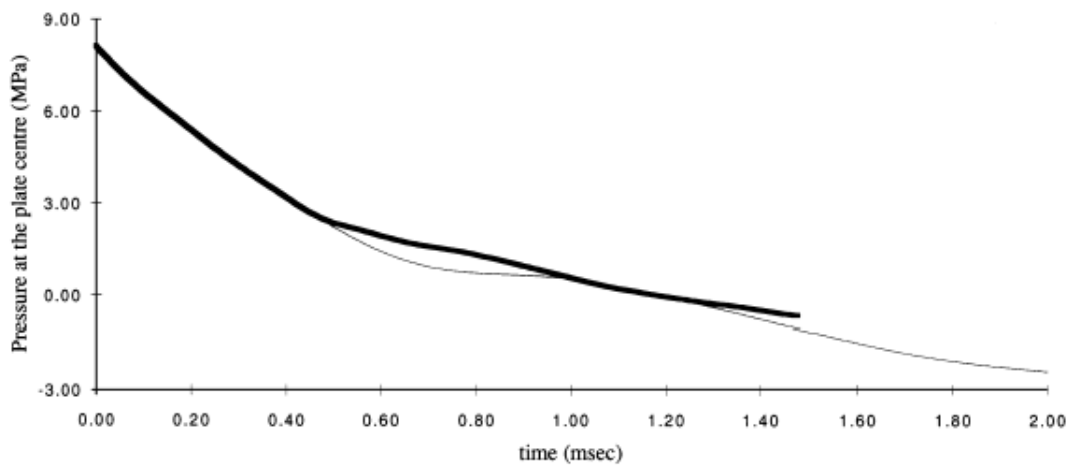


Fig. 2-18. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; pressione al centro della trave; acqua pura.

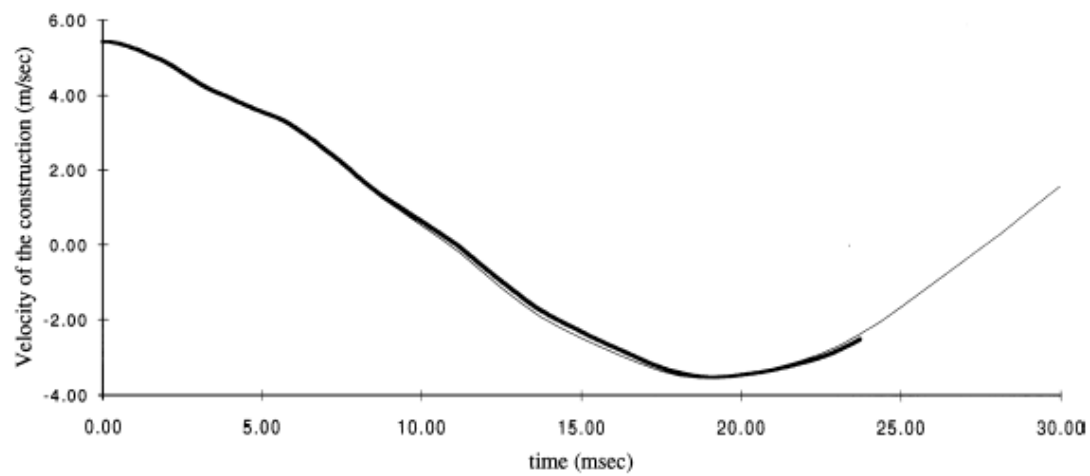


Fig. 2-19. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; velocità acquisita dalla struttura dopo l'impatto; miscela acqua – aria.

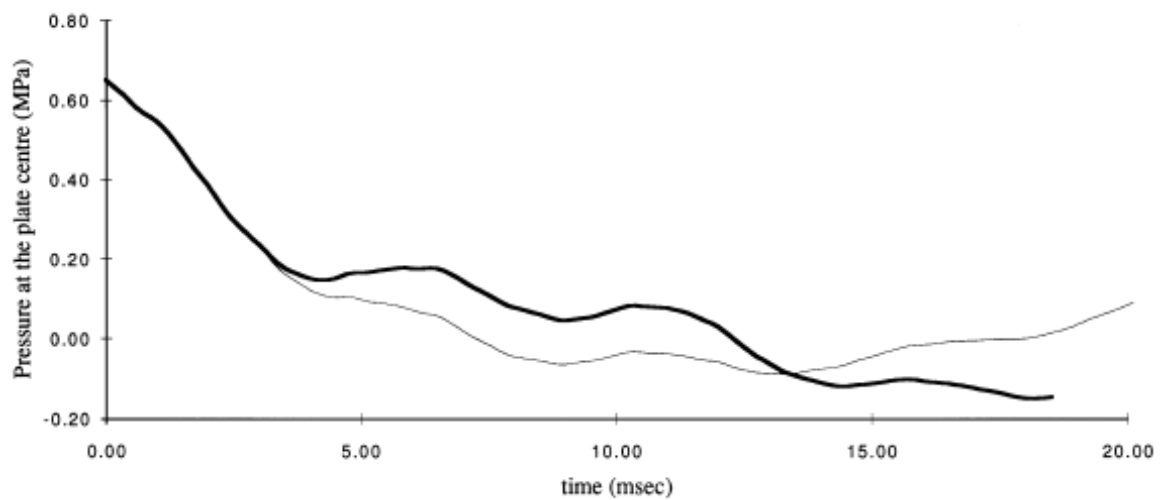


Fig. 2-20. Problema dell'impatto dello scafo di un catamarano contro la superficie del mare; pressioni al centro della trave; miscela acqua – aria.

3. RISULTATI SPERIMENTALI

3.1 INGEGNERIA GEOTECNICA

3.1.1 ESPERIENZE DI LABORATORIO

Le campagne di indagini sperimentali condotte in laboratorio, di cui sono riportati di seguito i risultati, sono effettuate utilizzando delle canalette del tipo riportato in Fig. 3-1; tramite dei sistemi di pistoni, può essere assegnata al sistema una pendenza (angolo θ) rispetto all'orizzontale; nella porzione sommitale è ricavata una zona (A, Fig. 3-1), in cui si depone il materiale oggetto di studio, che, attraverso il sollevamento di una paratoia a strappo, viene rilasciato lungo la canaletta.

Per rendere scabro il fondo della canaletta, in genere, vi è fissato del materiale granulare.

Le sponde laterali (ed a volte anche il fondo) sono in plexiglas, per consentire registrazioni video e/o fotografiche sia della fase di propagazione, sia dell'impatto finale.

In prossimità della zona terminale, poi, il fondo della canaletta e la piastra finale sono dotati di trasduttori di pressione e/o celle di carico, per la valutazione delle pressioni esercitate, all'impatto, dal materiale.

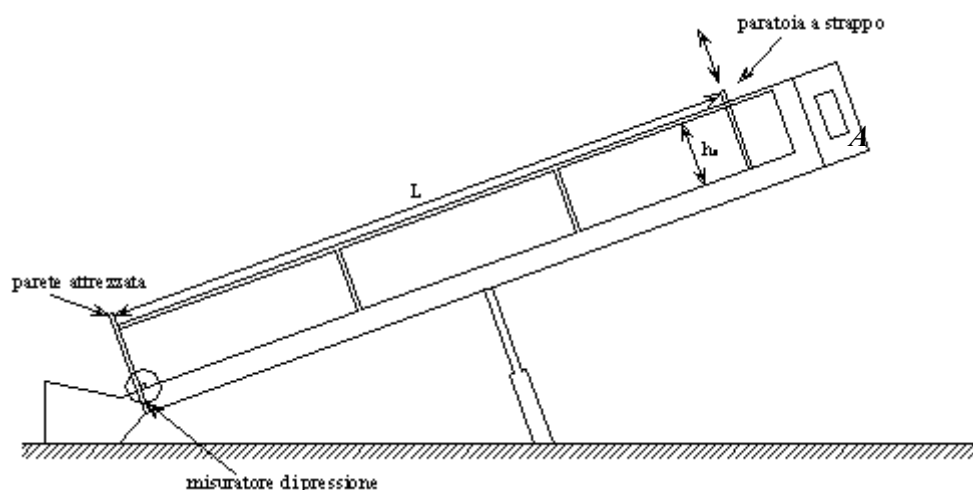


Fig. 3-1. Schema di un tipico apparato sperimentale (canaletta).

L'apparato sperimentale utilizzato da *Armanini* (1993) è una canaletta di lunghezza pari a 6 m e larghezza 40 cm. Un pistone a comando oleodinamico permette una variazione della pendenza θ della canaletta fino ad un massimo di 32° .

Negli esperimenti è stata impiegata acqua e materiale plastico di diverse dimensioni e densità. Tale materiale consiste di particelle di resina anionica di forma quasi sferica, con un diametro medio di 1 mm e densità ρ pari a 1080 kg/m^3 , e granuli di PVC (con densità pari a 1300 kg/m^3), di forma cilindrica, (altezza 2 mm e diametro di 1 mm; più grossolano, quindi, della resina anionica).

Impatto di acqua pura. Nel caso di *acqua pura e fondo liscio* (Fig. 3-2a) esiste una correlazione lineare tra la pressione massima Δp determinata sperimentalmente e l'altezza idrica di monte h_0 :

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \alpha h_0 \quad (3.1)$$

il coefficiente α assume valori maggiori di 4 nel caso di elevate pendenze ($\theta > 20^\circ$).

Nel caso di *acqua pura e fondo scabro* (Fig. 3-2b), la relazione tra pressione massima e altezza idrica di monte non è più lineare. Per pendenze comprese tra 25° e 30° , i valori della pressione massima sono compresi tra il 25% e il 50% di quelli del caso precedente.

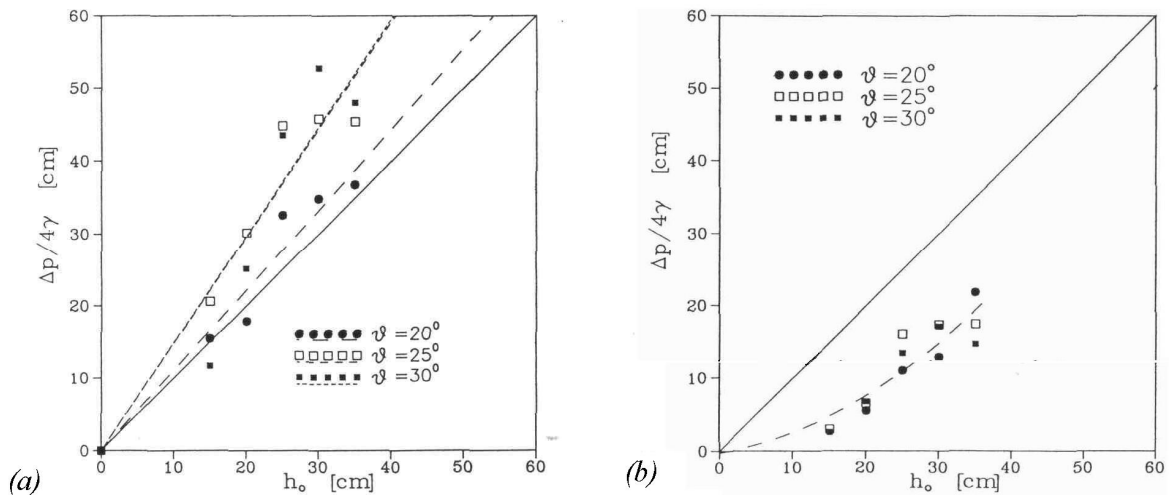


Fig. 3-2. Valori della pressione massima ($\Delta p/\gamma$) rispetto alla profondità di moto indisturbata (h_0) nel caso di acqua pura e (a) fondo liscio, (b) fondo scabro; la pendenza della canaletta varia tra 20° e 30° (Armanini 1993).

Impatto di una miscela di acqua e materiale granulare (Fig. 3-3). Nel caso di miscele sature di materiali granulari, le pressioni massime (Δp) misurate, sono espresse in funzione della velocità del fronte U ; per miscela di acqua e PVC l'Autore ottiene:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 2.2 \frac{U^2}{g} \quad (3.2)$$

Nel caso di miscele di acqua e materiale granulare leggero (resine anioniche) si ottiene la seguente correlazione:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 0.45 \frac{U^2}{g} \quad (3.3)$$

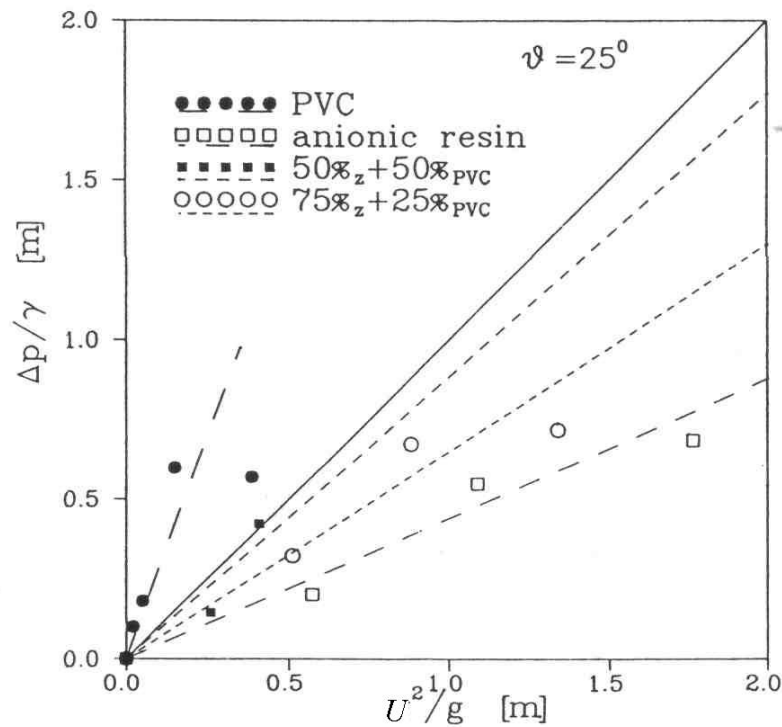


Fig. 3-3. Valori della pressione massima ($\Delta p/\gamma$) in funzione della velocità del moto (U) nel caso di miscele di acqua e materiali granulari; pendenza della canaletta pari a 25° (Armanini 1993).

Secondo l'Autore, nel caso di miscela di acqua e resine anioniche, la forza di gravità prevale sulle forze di attrito, e il materiale, all'impatto, è spinto verso l'alto; nel caso di miscela di acqua e materiale granulare più pesante (PVC) si forma invece un'onda di riflessione (il fluido è riflesso in direzione opposta al moto).

Questa differenza tra le due miscele è dovuta, probabilmente, al valore dell'attrito interno, il quale, nel caso del materiale granulare più pesante, è molto più grande di quello dell'acqua pulita o del materiale più leggero.

Nella Fig. 3-4 sono infine riportati i valori della pressione massima in funzione della profondità del fluido a monte.

Tutti i punti sperimentali si trovano al di sotto della linea di equazione:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 4h_0 \quad (3.4)$$

che corrisponde alla pressione massima teorica esercitata da un fluido a seguito di un dam-break. La spiegazione fornita dall'Autore è che le forze di resistenza sono generalmente più grandi delle forze di gravità dovute alla pendenza del canale.

Utilizzando il PVC (più pesante), questo effetto è accentuato a causa delle resistenze granulo-inerziali e probabilmente anche a causa della non saturazione del fronte.

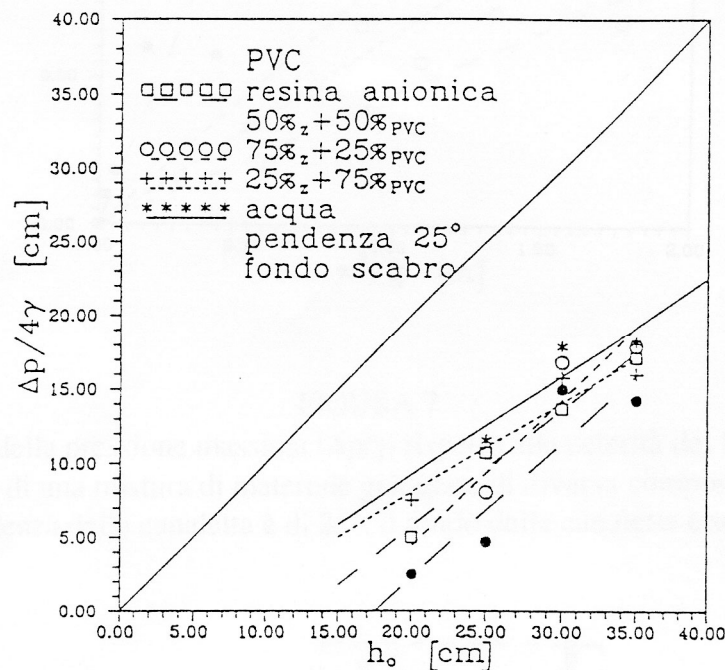


Fig. 3-4. Valori della pressione massima ($\Delta p/4\gamma$) rispetto alla profondità di moto indisturbata (h_0) nel caso di materiale granulare a differente composizione e acqua; la pendenza è di 25°; il fondo della canaletta è scabro (Armanini 1993).

Liu et al. (1997) riporta risultati di sperimentazioni condotte in canaletta, di sezione trasversale 50 cm x 50 cm e lunghezza 8 m; l'inclinazione del fondo pari a 23°; l'altezza media del flusso, all'impatto, varia tra 1 e 4 cm.

I risultati sono riportati in Fig. 3-5 e Fig. 3-6.

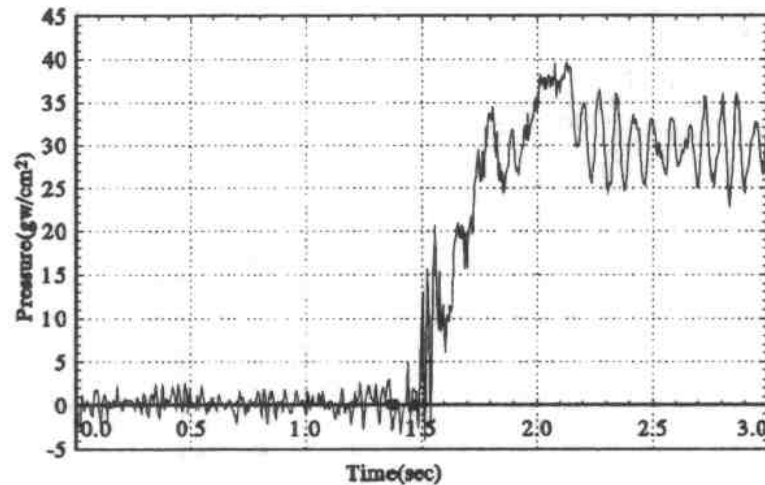


Fig. 3-5. Pressione di impatto misurata da un trasduttore posto 10 cm al di sopra del fondo della canaletta (Liu et al. 1997).

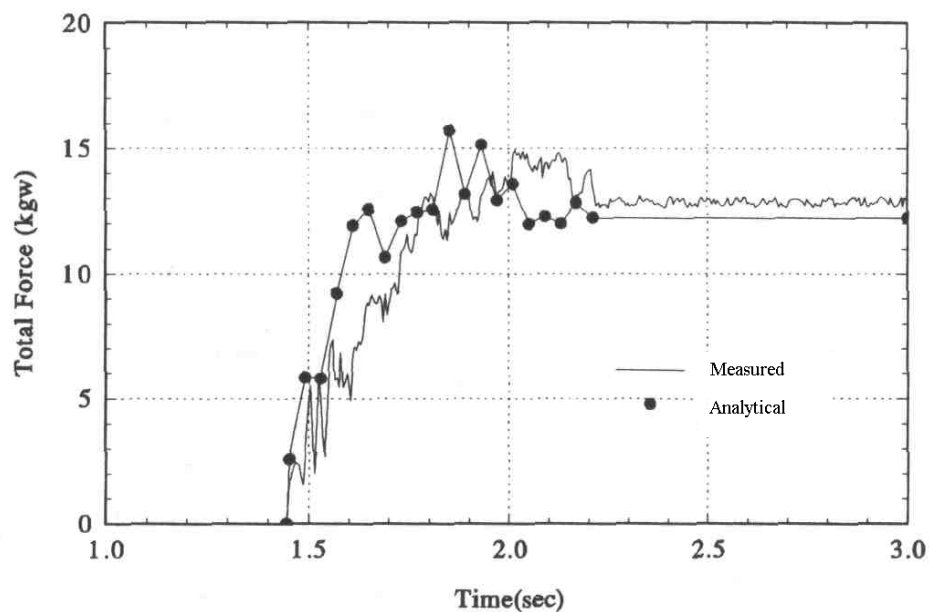


Fig. 3-6. Confronto tra la forza di impatto misurata (linea continua) e forza calcolata attraverso l'applicazione dei risultati dell'analisi teorica (Liu et al. 1997).

Scotton e Deganutti (1997) hanno presentato i risultati di esperimenti effettuati in canaletta con miscele di acqua (con diverse viscosità) e particelle di carbone (densità ρ_m); la canaletta ha una larghezza di 15 cm e una lunghezza di 9.5 m, inclinazione variabile fino a 21°.

I risultati sono analoghi a quelli presentati da *Armanini* (1993): le massime pressioni (p_{max}) esercitate dalla colata sui trasduttori di pressioni posti sulla piastra terminale della canaletta sono approssimativamente proporzionali all'altezza (h) del fronte del flusso al momento dell'impatto:

$$p_{max} = (3.5 \div 5.3) \rho_m g h$$

Ghilardi et al. (2006) presentano i risultati di prove effettuate in una canaletta di lunghezza 10 m, larghezza 10 cm e inclinazione 18.5°; dopo prove preliminari con acqua, hanno eseguito esperimenti con diverse miscele sature di polveri di marmo, micromarmo e granulati di marmo, a granulometria controllata.

Le pressioni di impatto massime (p_{max}) misurate dai trasduttori installati sulla piastra terminale della canaletta sono di poco superiori a 5 kPa (Fig. 3-7).

Una interessante osservazione sulla dinamica dell'impatto è riportata dagli Autori, a seguito delle analisi delle sequenze fotografiche dell'impatto: è rilevata una forte analogia tra il comportamento (in particolare, le accelerazioni verticali) delle miscele sature e dell'acqua.

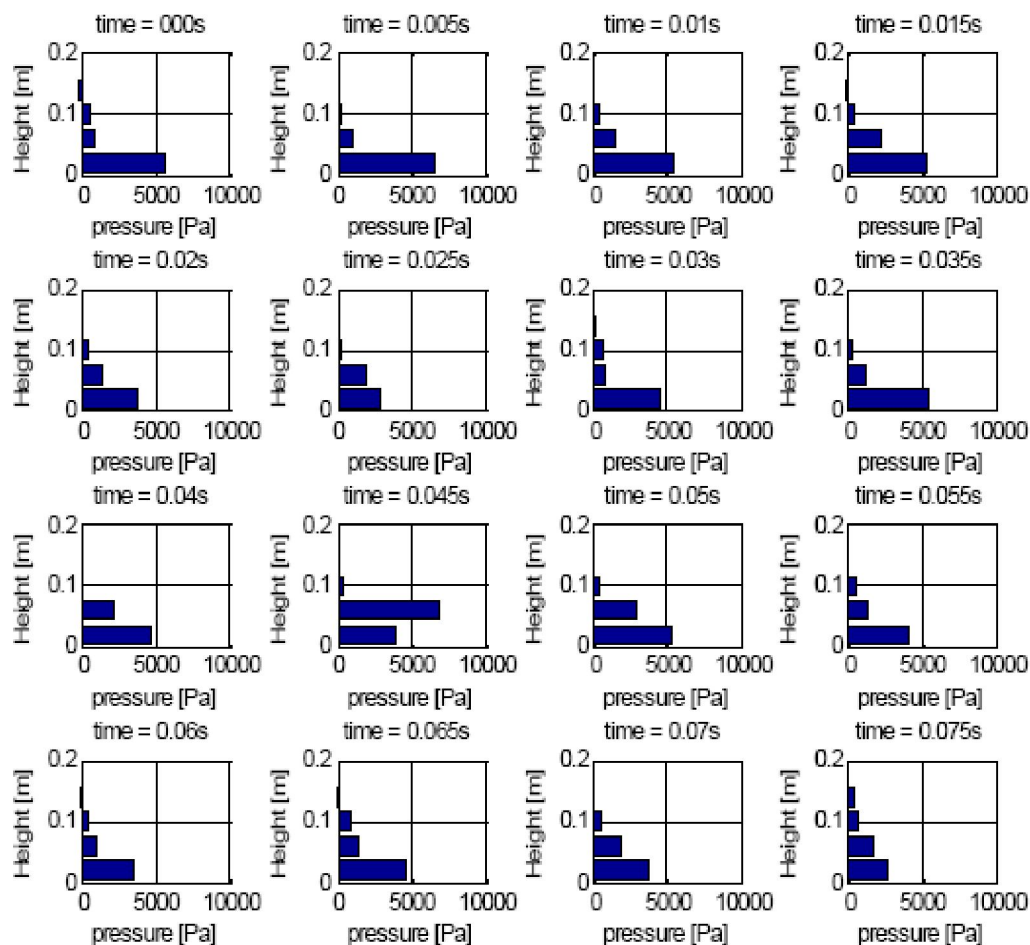


Fig. 3-7. Pressioni d’impatto misurate lungo la verticale della piastra terminale della canaletta (Ghilardi et al., 2006).

3.1.2 MISURE EFFETTUATE IN SITO

Per quanto concerne l’impatto di colate fluide, in letteratura geotecnica sono presenti riferimenti a misure di pressioni effettuate in sito, in genere realizzando pali strumentati in gole montane, sede di colate.

Lo et al. (2000, Fig. 3-8), riporta oltre 30 valori di pressioni misurate in sito, in Cina (valori ripresi da Du et al., 1987) ed in Giappone (ripresi da Wu et al., 1993); si nota una notevole dispersione dei dati presentati in funzione della velocità U (stimata) d’impatto: per la velocità U pari a circa 3.5 m/s, ad esempio, si riscontra sia il valore minimo assoluto della pressione misurata ($p_{min} = 75$ kPa), sia quello massimo assoluto ($p_{max} = 2151$ kPa).

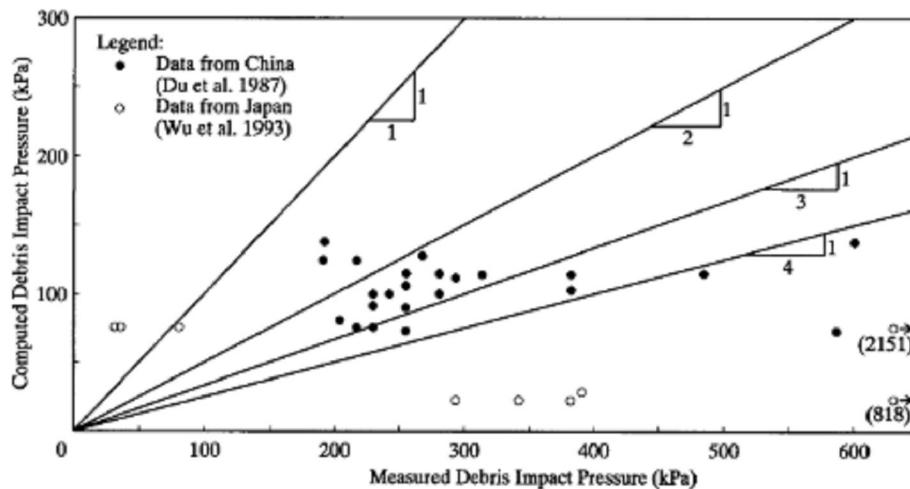


Fig. 3-8. Misure in sito (Lo et al., 2000).

Zhang (1993) riporta pressioni di impatto massime (p_{max}), misurate attraverso le celle di carico installate su un palo strumentato posto nella gola montana Jiangjia Gully (Cina), pari a circa 5 MPa.

3.2 INGEGNERIA COSTIERA

La letteratura tecnica riguardante l'impatto di onde marine su strutture costiere è ricca di analisi teoriche e dati sperimentali.

In studi recenti (Peregrine 2003, Bullock et al. 2004) si sostiene che la dinamica dell'interazione fluido-struttura non è ancora definitivamente compresa; fattori geometrici (forma dell'onda), cinematici (velocità d'impatto) e fisico-meccanici (presenza di aria disciolta nell'acqua, concentrazione salina,...) influenzano notevolmente il fenomeno.

L'attenzione sarà rivolta all'impatto in condizioni estreme, che si verificano quando la configurazione geometrica dell'onda è tale che la superficie esterna del fluido si presenta approssimativamente piana e parallela alla superficie della struttura; tale condizione è definita *perfect breaking* da Kirkgöz (1995) e *flip-through* da Cooker (2003).

Nel passato, questo tipo di impatto non era considerato nella progettazione, in quanto per la sua breve durata non era valutato potenzialmente dannoso; tuttavia, attente

back-analysis di collassi di strutture costiere ha richiesto una maggiore cautela nello studio dell'impatto di onde (Obhrai, 2004).

Kirkgöz (1995) riporta le pressioni d'impatto di onde generate in laboratorio (Fig. 3.9); non sono citate, tuttavia, né dimensioni dell'apparato sperimentale, né dimensioni e velocità delle onde.

Dall'esame dei dati si evince che le pressioni massime (p_{max}) soddisfano una distribuzione normale logaritmica.

Si riporta quindi il grafico di Fig. 3-9, in cui le curve pn ($n = 50, 90, 99$) sono rappresentative delle pressioni p_{max} caratterizzate dalla probabilità n -sima nella distribuzione normale logaritmica.

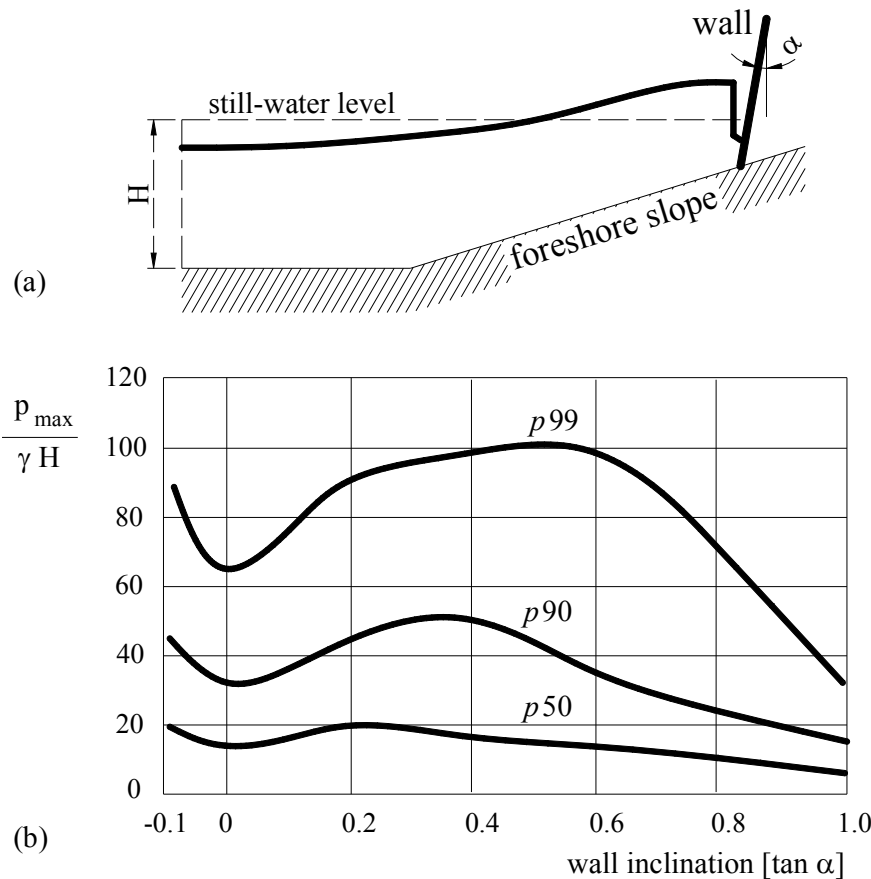


Fig. 3-9. Esperimenti condotti da Kirkgöz; (a) schema dell'apparato sperimentale; (b) rappresentazioni delle pressioni massime in forma adimensionale, organizzate secondo la distribuzione normale logaritmica, in funzione dell'inclinazione della piastra strumentata posta alla fine della vasca.

Nei lavori di *Bredmose et al. (2003)*, *Obhrai et al. (2004)*, *Peregrine et al. (2004)*, *Bullock et al. (2004)*, sono riportati risultati di campagne sperimentali condotte:

- in laboratorio, presso il centro di ricerche Forschungszentrum Küste, (Hannover, Germania); le dimensioni del canale GWK, utilizzato nella ricerca, sono: lunghezza 350 m, larghezza 5 m, profondità 7 m; le onde generate per i test avevano altezza variabile tra 0.5 e 1.7 m; non sono citate le velocità raggiunte dalle onde; le pressioni massime misurate hanno raggiunto valori $p_{max} \approx 4$ MPa; i picchi di pressione erano raggiunti in tempi molto piccoli (≈ 1 ms);
- tramite installazione di strumenti di misura sulla barriera frangiflutti Admiralty (realizzata ad Alderney, isola dello stretto dello Manica, con estensione totale, in lunghezza, pari a 870 m) direttamente esposta alle onde dell'Oceano Atlantico; in questo caso, la massima pressione registrata (Fig. 3-10) è $p_{max} \approx 0.75$ MPa; la durata è pari a circa 1 ms.

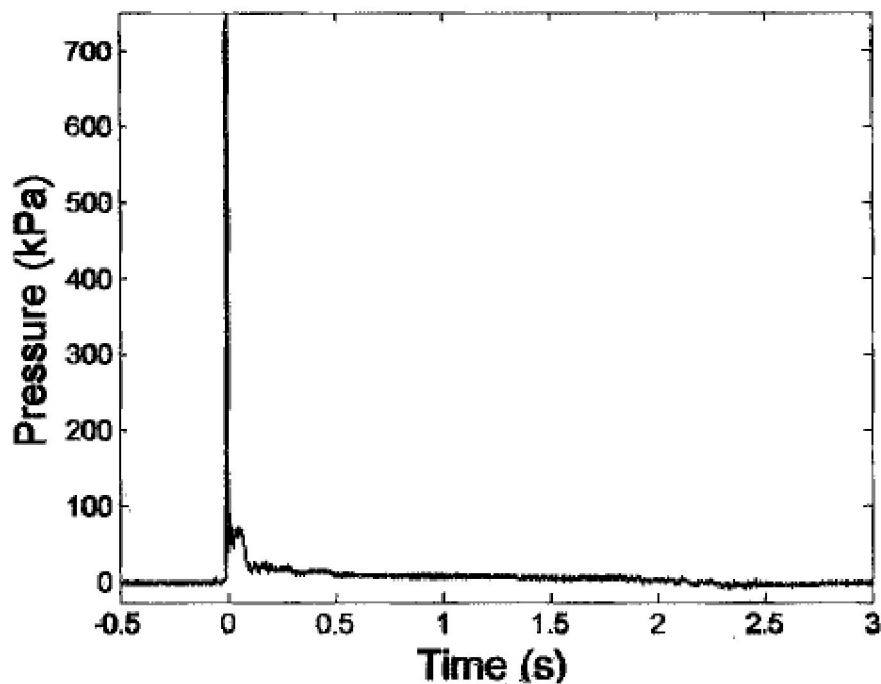


Fig. 3-10. Pressione registrata all'impatto di onde sull'Admiralty Breakwater (Obhrai, 2004).

Gli Autori pongono l'attenzione sulla notevole dispersione dei dati (valori di pressione massima) ottenuti; tale fenomeno è singolare, soprattutto se si considera che in laboratorio si generano *treni di onde* tra loro molto simili; l'interpretazione dei dati stessi risulta quindi molto difficile.

Una quantità che invece risulta approssimativamente invariante rispetto alle piccole variazioni di forma delle onde è l'impulso.

Una variabile che influenza i dati ottenuti è poi la frazione d'aria presente nel fluido.

Lugni et al. (2006) riportano i risultati di una campagna di sperimentazioni effettuata in una vasca (di lunghezza 1 m, larghezza 0.1 m ed altezza del livello d'acqua 0.125 m) con lo scopo di studiare l'interazione tra l'acqua e le pareti durante lo *sloshing* (Fig. 3-11), nella condizione di *flip-through*.

Si evidenzia, in particolare, la valutazione delle accelerazioni verticali del fluido, a seguito dell'interazione con le pareti, che risulta estremamente elevata, dell'ordine di 100-1000 g; tale valore può essere giustificato solo considerando gradienti di pressione elevatissimi.

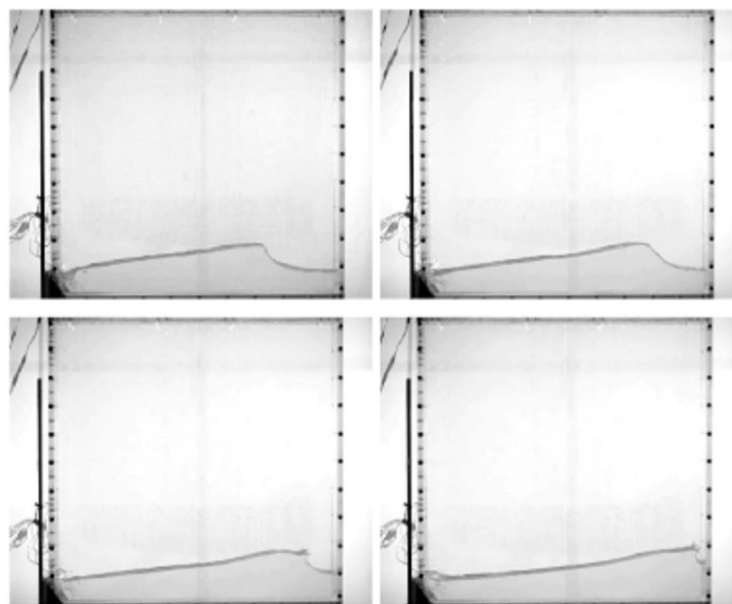


Fig. 3-11. Sloshing (Lugni et al. 2006).

Sempre con riferimento alla dinamica dell'impatto, in questo lavoro sono espresse alcune interessanti riflessioni:

dagli esperimenti si evince che una possibile risposta del fluido consiste in una sorta di riflessione elastica successiva all'impatto con la parete (come osservato da Armanini, 1993, per le colate) che causa un aumento dell'impulso risultante rispetto ad altri tipi di impatto;

a causa della breve durata dei picchi di pressione massima, si evidenzia la necessità di utilizzare strumenti che abbiano una frequenza di acquisizione dati elevata (maggiore di 200 Hz).

3.3 RASSEGNA DI ESPRESSIONI DI PRESSIONI E FORZE D'IMPATTO

Si riporta, infine, una rassegna di alcune delle formule introdotte da vari Autori per la valutazione delle pressioni massime p_{max} , o delle forze F_{max} , dovute all'impatto di colate, ovvero onde in condizioni estreme, su strutture; i parametri da cui tali formule dipendono sono: densità, della miscela (ρ_m) o dell'acqua (ρ), velocità del flusso (U), altezza del flusso (h).

Scotton e Deganutti (1997) propongono, per il calcolo della massima pressione (p_{max}) che si esplica all'impatto di colate su strutture:

$$p_{max} = k_1 \rho_m g h \quad (3.5)$$

in cui $k_1 = 3.5$ per flussi a bassa viscosità;

5.3 per flussi ad elevata viscosità.

Hungr et al. (1984), *Zhang* (1993), *Van Dine* (1996), *Lo et al.* (2000), propongono le seguenti espressioni.

$$p_{max} = k_2 \rho_m U^2 \cos \alpha$$

(3.6)

in cui $k_2 = 1$ secondo *Hungr et al.* (1984) e *Van Dine* (1996);

3 secondo *Lo et al.* (2000);

(3÷5) secondo *Zhang* (1993);

α è l'angolo formato dal vettore velocità del flusso U e la normale alla superficie del solido.

Armanini (1993), per le colate :

$$F_{\max} = \frac{9}{2} \rho_m g h^2 \quad (3.7)$$

Daido (1993), per colate fangose rapide:

$$F_{\max} = k_3 \rho_m h U^2$$

con k_3 variabile tra 5 e 12. (3.8)

Cross (1967), per l'impatto di onde di *tsunami* (fluido perfetto):

$$F_{\max} = \frac{1}{2} \rho_m g h^2 + C \rho_m h U^2 \quad (3.9)$$

in cui C è un coefficiente dipendente dell'angolo tra fronte d'impatto e superficie del solido.

Una ulteriore relazione, proposta da Fukui et al. (1963), per onde marine, contiene informazioni circa la velocità delle onde U e dell'altezza della corrente H :

$$\Delta p = \frac{\gamma U^4}{g^2 H} \quad (3.10)$$

Da una analisi delle varie formulazioni riportate si evince che dalla legge di Scotton e Deganutti (1997) si ottengono valori degli incrementi di pressione simili a quelli in cui è esplicitata una dipendenza dalla velocità, solo per piccolo valori della velocità stessa del flusso.

I coefficienti k introdotti assumono, nelle varie formule proposte dagli autori, valori estremamente variabili. *Inoltre, non si rinviene alcuna spiegazione relativa al significato fisico di tali coefficienti riportati nelle formule.*

Inoltre, dalla formulazione di Fukui et al., per piccolo valori dell'altezza della corrente si ottengono grandi valori dell'incremento della pressione.

Si riporta di seguito (Fig. 3-12) un confronto, per le due altezze di riferimento del flusso $H = 0.1$ m e $H = 1.0$ m, tra le varie formulazioni. E' evidente la dispersione dei dati.

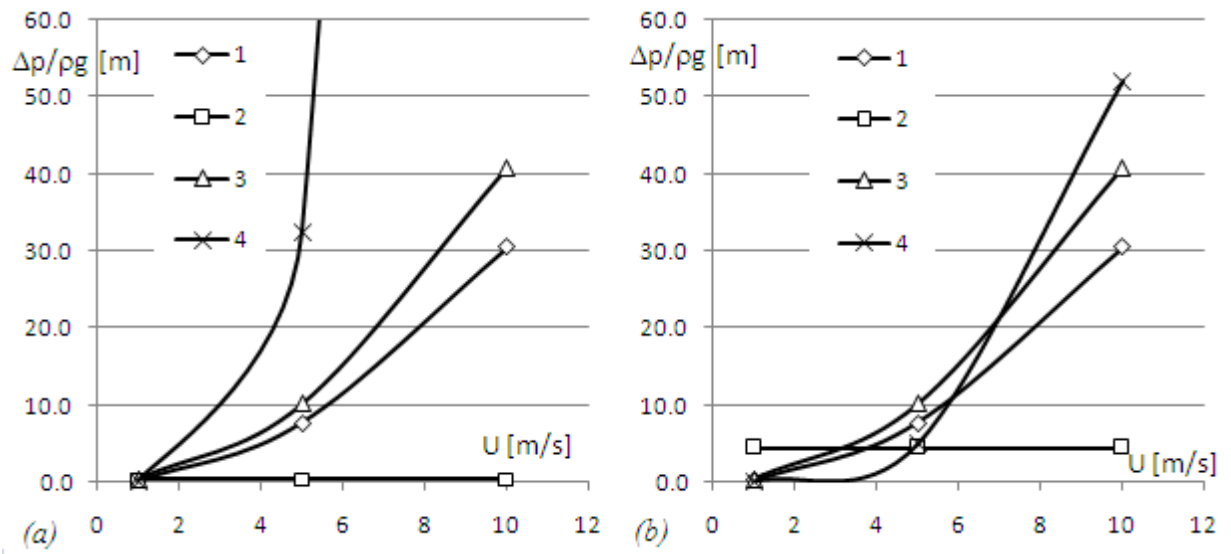


Fig. 3-12. Confronto fra gli incrementi di pressione in funzione della velocità, secondo le espressioni proposte da: 1: Lo et al. (2000, $k_2 = 3$); 2: Scotton and Deganutti (1997, $k_1 = 4.4$); 3: Zhang (1993, $k_2 = 4$); 4: Fukui et al. (1963); (a): $H = 0.1$ m; (b): $H = 1$ m.

4. ANALISI NUMERICHE

4.1 DESCRIZIONE DEL CODICE DI CALCOLO AGLI ELEMENTI FINITI

4.1.1 GENERALITÀ

Le analisi numeriche dell'interazione tra fluidi e solidi sono state condotte con il codice agli elementi finiti Abaqus/Explicit, vers. 6.3.

La procedura di calcolo *esplicita* è basata sull'implementazione, all'interno del codice, di una *central difference rule* (Bathe 1995), tramite la quale le equazioni del moto sono integrate nel tempo in maniera esplicita.

All'inizio di ogni incremento di tempo, il codice risolve le equazioni di equilibrio dinamico:

per ogni elemento, la matrice delle masse nodali M , moltiplicata per le accelerazioni nodali, $\ddot{\mathbf{x}}$, uguaglia le forze nodali totali (pari alla differenza tra il vettore delle forze esterne applicate, F^{ext} , e le forze interne, I):

$$M\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{I}$$

le accelerazioni all'inizio di ogni The accelerations at the beginning of the current increment (time t) are then calculated as:

$$\ddot{\mathbf{x}}|_{(t)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{I})|_{(t)}$$

Nella procedura esplicita si utilizza una matrice delle masse diagonale; risolvere le equazioni del moto per determinare le accelerazioni nodali è quindi molto semplice: non si devono risolvere simultaneamente diverse equazioni; l'accelerazione, per ogni nodo, è determinata completamente una volta note la massa del nodo e la forza netta agente sul nodo stesso.

Per ogni intervallo temporale, tramite l'integrazione dell'accelerazione agente sul nodo (attraverso la *central difference rule*) si ottiene, nell'ipotesi che l'accelerazione sia costante, la variazione di velocità del nodo; si utilizza poi la regola seguente per determinare la nuova velocità:

$$\dot{\mathbf{x}}|_{(t+\Delta t/2)} = \dot{\mathbf{x}}|_{(t-\Delta t/2)} + \frac{\Delta t|_{(t+\Delta t)} + \Delta t|_{(t)}}{2} \ddot{\mathbf{x}}|_{(t)}$$

Dopo questa operazione, le velocità sono integrate nel tempo e si ottiene, per ogni nodo, il campo di spostamenti, secondo la procedura:

$$\mathbf{x}|_{(t+\Delta t)} = \mathbf{x}|_{(t)} + \Delta t|_{(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{x}}|_{(t+\Delta t/2)}$$

Per ottenere risultati accurati, gli incrementi degli intervalli di tempo devono essere piccoli.

Si calcolano poi le deformazioni negli elementi e, applicando le opportune relazioni costitutive dei materiali, si calcola il campo di tensioni negli elementi e successivamente il campo delle tensioni.

Per quanto concerne la modellazione del fluido, si è impiegato un algoritmo denominato *Adaptive meshing*, che consente di mantenere una *mesh* di alta qualità nel corso di tutta l'analisi, anche nel caso (atteso) in cui si sviluppino grandi deformazioni. Per mezzo di questa procedura, infatti, alla *mesh* è consentito muoversi in maniera indipendente dal materiale. Inoltre, la procedura non altera la topologia della *mesh* stessa (non altera cioè gli elementi né le connessioni tra loro) e consente di sfruttare contemporaneamente i benefici dovuti ad un'analisi puramente lagrangiana (in cui la *mesh* segue il materiale) ed ad un'analisi di tipo euleriano (la *mesh* è fissata nello spazio ed il materiale la attraversa). Questo tipo di analisi è definito di tipo *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) analysis.

4.1.2 STABILITÀ DELLA FORMULAZIONE NUMERICA IN FORMA ESPLICITA

Si è appena visto che, con il metodo esplicito, lo stato del modello viene fatto avanzare nel tempo, a partire da uno stato iniziale, di un certo incremento Δt . Questo avanzamento deve essere tale da mantenere coerente la similitudine tra modello ed evoluzione del sistema reale; per ottenere questo scopo la sua durata deve essere minima. Infatti, se fosse troppo elevato, l'incremento supererebbe il *limite di stabilità*. Probabili conseguenze sarebbero la perdita di accuratezza dell'analisi e la possibilità di andare incontro a processi di instabilità numerica che darebbero origine a soluzioni non convergenti.

Per questo motivo, il programma di calcolo, prima di ogni incremento, valuta il *limite di stabilità* e sceglie automaticamente un incremento ad esso inferiore.

Il *limite di stabilità* è definito in termini di frequenza massima del sistema (ω_{max}), e può essere espresso come:

$$\Delta t_{stabile} = \frac{2}{\omega_{max}}.$$

Il parametro frequenza massima è a sua volta funzione di molteplici fattori tra loro interagenti ed è impossibile conoscere esattamente in ogni incremento il suo valore esatto: per questo motivo si utilizza un metodo approssimato, ma affidabile, basato sull'analisi della frequenza dei singoli elementi, in particolare sulle loro dimensioni caratteristiche (L^e) e sulla velocità di propagazione delle onde negli elementi (c_d); quindi:

$$\Delta t_{stabile} = \frac{L^e}{c_d}.$$

Si può precisare ulteriormente che la suddetta dimensione caratteristica L^e altri non è che la dimensione minore dell'elemento in considerazione, e che le caratteristiche di propagazione delle onde nei corpi sono tipiche di ogni materiale: ad esempio per un solido elastico lineare di densità ρ , modulo di Young E e coefficiente di Poisson ν pari a zero:

$$c_d = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Da questa rassegna sull'algoritmo di calcolo si può capire come i materiali presenti e la mesh del modello influenzino la durata dell'analisi.

La scelta del materiale influenza infatti la velocità di propagazione delle onde: maggiore è la rigidità del materiale, maggiore sarà la velocità, con un conseguente limite di stabilità minore; al contrario, maggiore è la densità, maggiore sarà il limite di stabilità.

E' intuitivo dedurre il ruolo della mesh su $\Delta t_{stabile}$: come già detto, esso è direttamente proporzionale alla dimensione minore dell'elemento in considerazione.

4.1.3 DESCRIZIONE DELLE PROPRIETÀ DEL FLUIDO

In ABAQUS/Explicit i fluidi in moto possono essere descritti tramite un modello costitutivo che sfrutta come equazione di stato (EOS) la forma lineare di Hugoniot.

Questa EOS, in particolare, fornisce una risposta di tipo volumetrico alle sollecitazioni applicate, mentre la risposta a sollecitazioni di taglio è imposta separatamente, come si vedrà meglio in seguito; la pressione p (positiva in compressione) è considerata funzione della densità ρ , della deformazione volumetrica η e dei parametri c_0 ed s (caratteristici di ogni materiale) secondo la relazione:

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2}$$

dove ρ_0 è la densità in uno stato iniziale di riferimento, il termine $\rho_0 c_0^2$ è l'equivalente del modulo di rigidità volumetrica K e, come già detto η è la deformazione volumetrica che può essere espressa come:

$$\eta = 1 - \rho_0 / \rho .$$

Il parametro s è necessario nel modello valido in generale per definire la velocità di shock, U_s :

$$U_s = c_0 + sU_p$$

con U_p velocità della particella.

In ogni caso, per modellare i fluidi Newtoniani, regolati dalle leggi di Navier-Stokes, o comunque condizioni idrodinamiche, il parametro s può essere posto pari a zero.

Per quanto riguarda il comportamento deviatorico, questo può essere configurato in due maniere diverse: si può introdurre un modulo di elasticità tangenziale oppure definire un coefficiente di viscosità lineare .

La risposta deviatorica è descritta dall'espressione:

$$S = 2\mu \cdot \dot{\epsilon}$$

in cui S è la componente deviatorica del tensore delle tensioni, μ la viscosità del fluido ed $\dot{\epsilon}$ è la componente deviatorica del tensore delle velocità di deformazione.

4.1.4 ADAPTIVE MESHING

L'adaptive meshing è uno strumento che consente di mantenere una mesh di qualità elevata durante un'analisi, anche quando intervengono larghe deformazioni; risulta quindi molto utile per seguire l'evoluzione di un corpo fluido che urta una superficie

rigida; con questa tecnica si permette alla mesh stessa di muoversi indipendentemente dal materiale rigenerandola entro intervalli di tempo fissati con un processo detto *advection*. E' importante sottolineare che in ABAQUS/Explicit questa operazione non altera la topologia della mesh.

Il dominio sul quale è definito il dominio dell'adaptive mesh può essere di due tipi, ed in entrambi i casi la mesh si muoverà indipendentemente dal materiale:

lagrangiano: in questo caso sul contorno del dominio la mesh seguirà il materiale in direzione normale al contorno stesso, in modo tale da consentirle di coprire il dominio in ogni istante; questo è il tipo di dominio creato di default dal programma di calcolo;

euleriano: in genere è utilizzato per l'analisi stazionaria di flussi di materiale attraverso superfici.

E' ovvio constatare che un dominio di tipo lagrangiano è quello più adatto ad analisi in cui un flusso fluido impatta su una superficie rigida esibendo grandi deformazioni.

Il funzionamento dell'adaptive meshing è basato (oltre che sul dominio) su:

- regioni di confine ,
- spigoli di confine.

Ogni dominio infatti possiede un contorno (che in 3D è costituito da superfici ed in 2D da segmenti) che può essere di tipo lagrangiano od euleriano; a loro volta i contorni sono separati da spigoli (segmenti in 3D, angoli in 2D).

Nel caso di interesse, cioè quello in cui il dominio è di tipo lagrangiano, anche il contorno sarà lagrangiano. La mesh si muoverà in direzione normale alla superficie di contorno.

L'uso dell'adaptive meshing è regolato da controlli: con questa tecnica la mesh (che si muove indipendentemente dal materiale sottostante) viene ridefinita con continuità entro un certo numero fissato di incrementi, ossia con una *frequenza* fissata; ovviamente, aumentando questa frequenza l'analisi sarà più accurata, ma anche più dispendiosa dal punto di vista computazionale.

Un'altra operazione fondamentale è quella detta *sweeping*, con la quale ad ogni rigenerazione della mesh i nodi di questa vengono lievemente ricollocati in modo tale da eliminare le distorsioni localizzate che, pur non influenzando in maniera significativa l'analisi globale, porterebbero ad una fine prematura il processo di calcolo a causa di

deformazioni troppo elevate. Anche in questo caso, si può agire facendo variare alcuni parametri (a partire dalla configurazione di default) per controllare il processo di sweeping; questa operazione è sconsigliata dagli autori del manuale del programma di calcolo perché molto pericolosa ai fini di una buona riuscita dell'analisi.

4.1.5 DEFINIZIONE DELLE CONDIZIONI DI CONTATTO

Al contatto fra corpi si destano forze in direzione perpendicolare alle superfici nella zona di contatto; se è presente attrito, si destano anche forze tangenziali; lo scopo delle simulazioni che coinvolgono il contatto fra corpi è quello di determinare il valore delle forze (e prima ancora delle pressioni) che i due corpi si trasmettono.

ABAQUS/Explicit fornisce due diversi algoritmi per modellare il contatto: con l'opzione *general contact* si può definire un'interazione fra diverse parti (anche non connesse tra loro), col vincolo che le proprietà dell'interazione (ad esempio la presenza di attrito) siano costanti per tutte; con l'opzione *contact pair*, al contrario, si definisce il contatto fra due sole superfici, o tra una superficie ed una regione di nodi, con proprietà peculiari. Sebbene l'algoritmo *general contact* sia più semplice da definire e più potente, il *contact pair* deve essere usato nei casi in cui in output si richieda di analizzare variabili relative al contatto stesso (pressioni e forza risultante, valore dell'area di contatto), o nel caso in cui diverse superfici interagiscano in maniera diversa.

E' importante sottolineare che i due algoritmi possono essere usati insieme.

In genere, nei programmi ad elementi finiti, i vincoli sul contatto sono applicati in maniera discreta, nel senso che viene imposto che i nodi su una superficie non penetrino un'altra superficie. In ABAQUS si vincolano i soli nodi presenti su una superficie, detta *slave*, a non penetrare la superficie *master*; al contrario, i nodi sulla superficie *master* possono penetrare la superficie *slave* (Fig. 4-1).

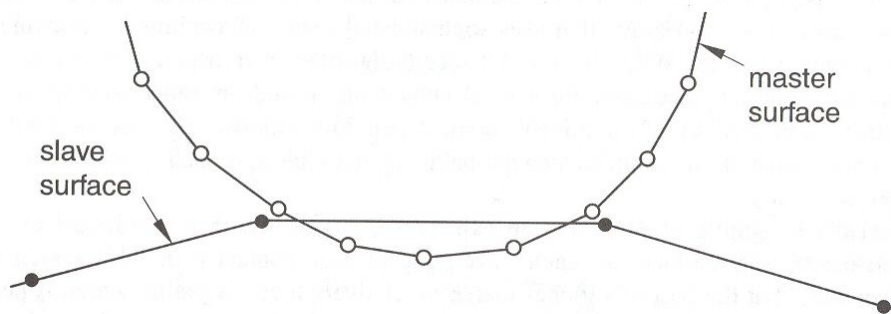


Fig. 4-1 Configurazione del contatto di tipo *pure master-slave*

La configurazione può non essere così rigida: esiste infatti la possibilità di definire un *balanced master slave* contact, in cui semplicemente l'algoritmo *pure master-slave* è applicato due volte: nella seconda iterazione ABAQUS scambia tra loro le superfici *master* e *slave* (Fig. 4-2).

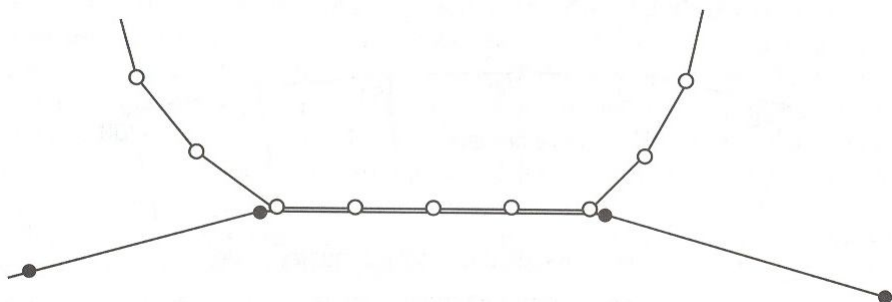


Fig. 4-2. Configurazione *balanced master-slave*

Nel caso in cui si usi l'algoritmo *contact pair* si può scegliere tra l'impostazione *pure* e *balanced*; l'algoritmo *general contact* invece sfrutta di default la configurazione *balanced*.

Tracking approach. Nelle simulazioni in generale per ogni nodo è possibile venire in contatto con ogni faccia dell'altra superficie: ABAQUS/Explicit usa complessi e sofisticati algoritmi per tracciare il moto dei nodi delle superfici.

All'inizio di ogni step il programma attua una ricerca *globale* per determinare la faccia della superficie master più vicina ad ognuno dei nodi sulla superficie slave; a

questo punto (per ogni nodo) determina il nodo della faccia sulla superficie master più vicino al nodo della superficie slave: sulla superficie master è così determinato per ogni nodo sulla slave un *tracked master surface node*. Si intuisce facilmente che questa è un'operazione molto costosa dal punto di vista computazionale e infatti successivamente viene operata di nuovo solamente ogni cento incrementi.

In tutti gli altri incrementi viene effettuata una ricerca *locale*, meno pesante: in questo tipo di ricerca per ogni nodo slave viene calcolata la distanza dai soli nodi master sulle facce adiacenti a quella contenente il *tracked master surface node*.

Dato che gli incrementi temporali sono estremamente piccoli, la combinazione suddetta di ricerca globale e locale garantisce risultati comunque accurati.

Proprietà delle interazioni. Le opzioni a disposizione per definire le proprietà dell'interazione sono molteplici: di default ABAQUS definisce in direzione normale un contatto di tipo hard (per simulare la non compenetrabilità dei due corpi) ed in direzione tangenziale l'assenza d'attrito; queste condizioni possono essere ovviamente modificate, soprattutto per quanto riguarda il comportamento in direzione tangenziale: la gamma delle possibilità prevede un modello attritivo semplice, di decadimento esponenziale (funzione degli spostamenti relativi), ed anche la possibilità di inserire altri campi da cui far dipendere l'attrito.

4.2 CONFRONTO TRA ANALISI TEORICHE E NUMERICHE

Per validare il codice di calcolo Abaqus sono state effettuate delle analisi preliminari di confronto; i riferimenti sono:

- il problema di un'onda a sezione trasversale rettangolare (Lesser, 1993) contro una superficie rigida;
- il problema dell'impatto di un'onda a sezione trasversale triangolare (Cooker, 2002) contro una superficie rigida;
- il problema del *tuffatore* descritto da Frémond (2003).

4.2.1 MASSA FLUIDA CONTRO UNA PARETE SOLIDA

Il primo confronto con la teoria sull'impatto tra solidi e fluidi è quello con i risultati di Lesser, il quale effettuando un semplice bilancio della quantità di moto determina la velocità media laterale (V) acquisita da un fronte fluido piano che colpisce una superficie solida.

L'analisi con il codice Abaqus è effettuata con una geometria 3D, rappresentata in Fig. 4-3. Il dominio fluido, di dimensioni 2m x 3m x 1m, è caratterizzato da una *mesh* costituita da circa 12000 elementi parallelepipedici di tipo C3D8R.

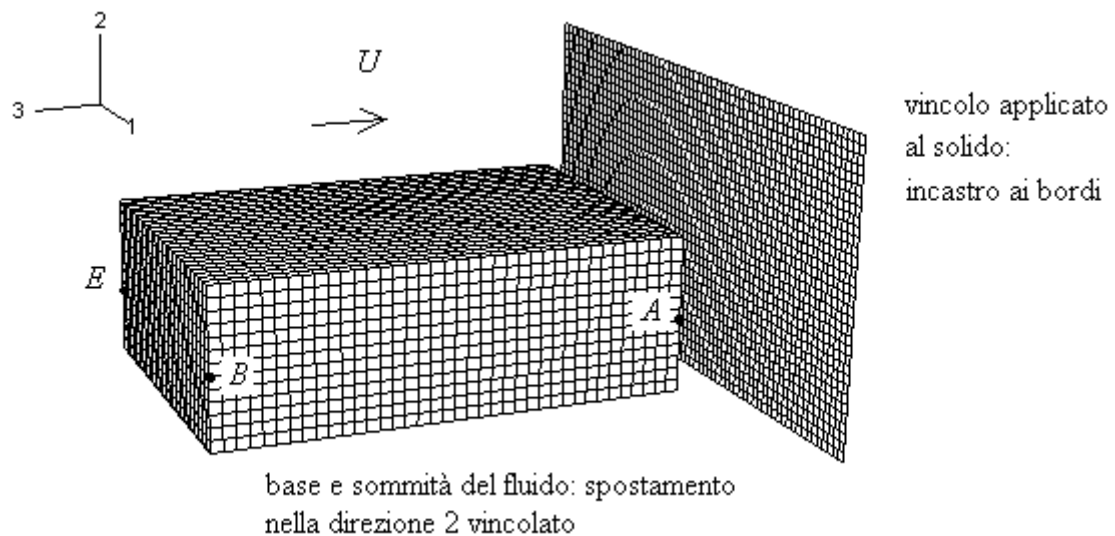


Fig. 4-3. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; dominio di calcolo.

Sono state effettuate due simulazioni, per due diversi valori di c , velocità di propagazione delle onde elastiche nel fluido: $c_1 = 1450$ m/s (acqua pura) e $c_2 = 150$ m/s (acqua con presenza di aria in percentuale volumetrica inferiore all'1%). La velocità all'impatto, in entrambe le simulazioni, è pari a 4 m/s.

- Risultati ottenuti per $c_1 = 1450.6$ m/s.

L'andamento nel tempo delle pressioni nel piano ABE (Fig. 4-3) è riportato in Fig. 4-4; al momento dell'impatto si sviluppano sovrappressioni su tutto il fronte (anche in corrispondenza dei bordi, Fig. 4-4a, $t = 0.154$ ms dopo l'impatto); tuttavia, dopo appena 0.112 ms ($t = 0.266$ ms dopo l'impatto, fig. Fig. 4-4b) sullo spigolo in contatto col muro,

e su tutta la superficie laterale, le sovrappressioni sono svanite; dalle figg. 4-4c-d (rispettivamente per tempi 0.378 ms e 0.490 ms) si può vedere che la sovrappressione massima (all'incirca pari a $\rho c U = 1000 \cdot 1450 \cdot 4 = 5.80 \text{ MPa}$) è raggiunta solo in una porzione centrale del fronte; spostandosi dal centro del fronte verso i bordi laterali, progressivamente la sovrappressione tende a ridursi; all'aumentare del tempo, l'estensione della zona con sovrappressione massima si riduce.

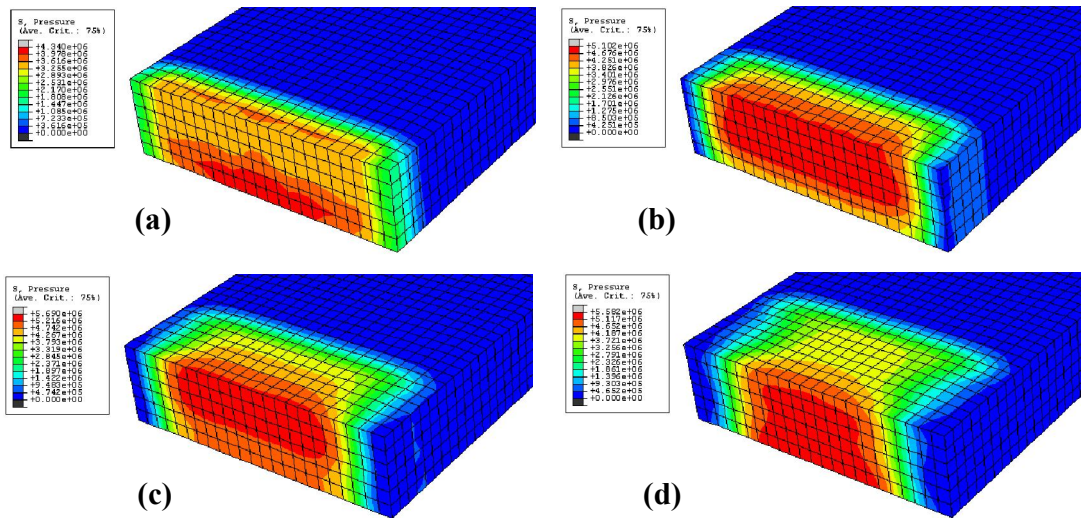


Fig. 4-4. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; $c = 1450.6 \text{ m/s}$; sviluppo delle sovrappressioni in corrispondenza del fronte fluido e della zona retrostante; (a) $t = 0.154 \text{ ms}$; (b) $t = 0.266 \text{ ms}$; (c) $t = 0.378 \text{ ms}$; (d) $t = 0.490 \text{ ms}$.

A questo punto si vuole verificare che la velocità media della zona di transizione S (dalla Fig. 4-3, è la zona che si sviluppa a partire dal bordo esterno, in corrispondenza cioè del punto A di Fig. 4-3) sia corrispondente a quella prevista da Lesser.

Al tempo $t = 0.266 \text{ ms}$ l'onda di compressione ha percorso un tratto (nel fluido) pari a $s = 0.266 \cdot 10^{-3} \cdot 1450.6 \text{ m} = 38.67 \text{ cm}$; la regione S è, in teoria, un quarto di cerchio (ACD, Fig. 4-5); si avrà, quindi, $AC = AD = 38.67 \text{ cm}$.

Nella *mesh* del dominio fluido, la zona S ricopre i nodi riportati in Fig. 4-5: i primi cinque nella prima e nella seconda fila a partire dal fronte, quattro nella terza, tre nella quarta, uno nella quinta; l'estensione a partire dal punto A verso l'interno è di 39 cm.

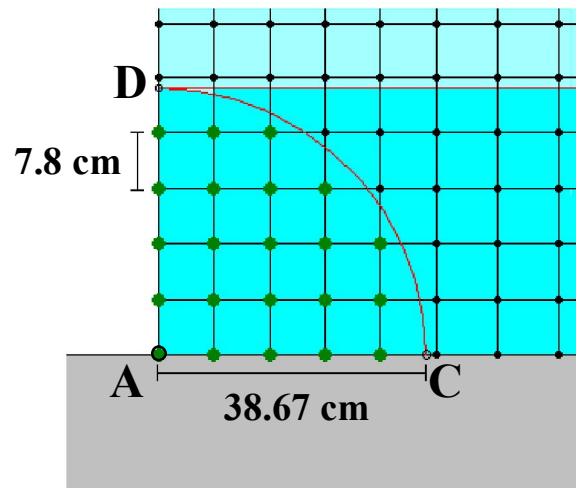


Fig. 4-5. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; rappresentazione della porzione estrema della *mesh* del dominio fluido interessata dallo shock.

Si è ottenuta, dalle analisi FEM (codice Abaqus) la velocità dei nodi interessati, e ne è stato calcolato il valore medio; essa risulta pari a

$$V_{\text{Abaqus}} = 2.23 \text{ m/s}$$

Il valore previsto dal bilancio della quantità di moto, secondo l'approccio di Lesser, è pari a

$$V_{\text{Lesser}} = (2/\pi) v = 2.55 \text{ m/s}$$

•

- Risultati ottenuti per $c_2 = 150$ m/s:

la distribuzione delle pressioni è riportata in Fig. 4-6.

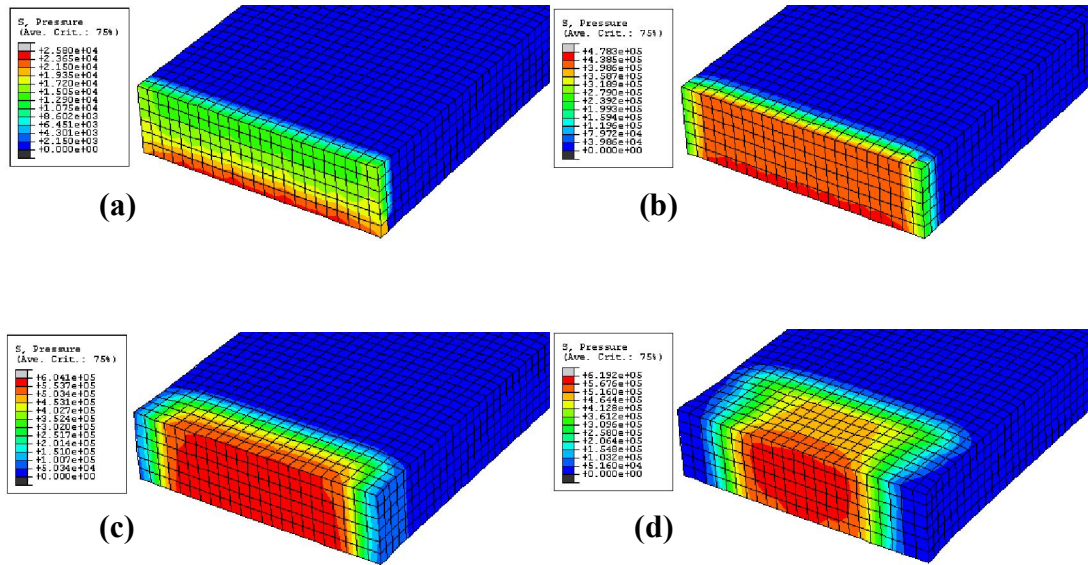


Fig. 4-6. Impatto di un fronte fluido di forma rettangolare; $c = 150$ m/s; sviluppo delle sovrappressioni in corrispondenza del fronte fluido e della zona retrostante; (a) $t = 0.26$ ms; (b) $t = 1.03$ ms; (c) $t = 2.55$ ms; (d) $t = 4.81$ ms.

La dinamica è del tutto simile al caso precedente, ma il tempo caratteristico del fenomeno è maggiore. Si vede infatti (Fig. 4-6 a-b) che sono necessari tempi maggiori affinché sia nettamente visibile la formazione delle regioni sui bordi in cui la sovrappressione svanisce. Ovviamente in questo caso la pressione massima è minore in quanto la rigidità volumetrica del fluido è minore.

La sovrappressione di colpo d'ariete vale infatti $\rho c U = 1000 \cdot 150 \cdot 4 = 0.60$ MPa.

Si vuole verificare che la velocità media della zona di transizione S (la zona che si sviluppa a partire dal bordo esterno, in corrispondenza cioè del punto A di Fig. 4-3) sia confrontabile con quella prevista da Lesser.

Per un tempo $t = 2.44$ ms l'onda di compressione ha percorso un tratto (nel retrofronte) pari a $s = 0.266 \cdot 10^{-3} \cdot 150$ m = 36.85 cm: la regione S è un quarto di cerchio (ACD, tale che ovviamente $AC = AD = 36.85$ cm); tranne questo valore del raggio della zona di transizione, la geometria è perfettamente analoga a quella riportata in Fig. 4-5.

Il valore previsto dal bilancio della quantità di moto secondo l'approccio di *Lesser* è indipendente dal valore di c , pertanto la velocità media nella regione S sarebbe, come prima, pari a

$$V_{\text{Lesser}} = (2/\pi) v = 2.55 \text{ m/s}$$

In questo caso l'analisi numerica fornisce un valore della velocità media

$$V_{\text{Abaqus}} = 2.49 \text{ m/s}$$

Si nota, quindi, un buon accordo tra la teoria e i risultati numerici.

L'analisi 2D dell'impatto di *onde a sezione trasversale triangolare* è stata condotta, sia per fluido incompressibile, sia per fluido compressibile, da *Cooker* (2003).

Nelle analisi FEM si è considerato un dominio 3D; tuttavia, gli spostamenti laterali dell'onda (Δz in Fig. 4-7a) sono stati vincolati, per ottenere condizioni simili a quelle 2D.

Le dimensioni dell'onda sono $R = h = \Delta z = 1 \text{ m}$; la velocità d'impatto è $U = 5 \text{ m/s}$.

Il dominio fluido è stato modellato attraverso circa 22800 elementi di forma tetraedrica; il passo di integrazione temporale, adottato nelle analisi numeriche, è approssimativamente pari a 10^{-6} s .

L'evoluzione, nel tempo, della pressione nel fluido in tempi successivi all'impatto, è riportata in Fig. 4-7b-d. La zona caratterizzata dalla pressione massima p_{max} ($p_{\text{max}} = \rho c U = 7.5\text{E}+06 \text{ kPa}$) varia nel tempo; c'è buon accordo tra la teoria di Cooker ed i risultati dell'analisi numerica, nella quale il passaggio dalla p_{max} alla $p = 0$ è ovviamente graduale, e non netto come descritto nell'analisi teorica di riferimento.

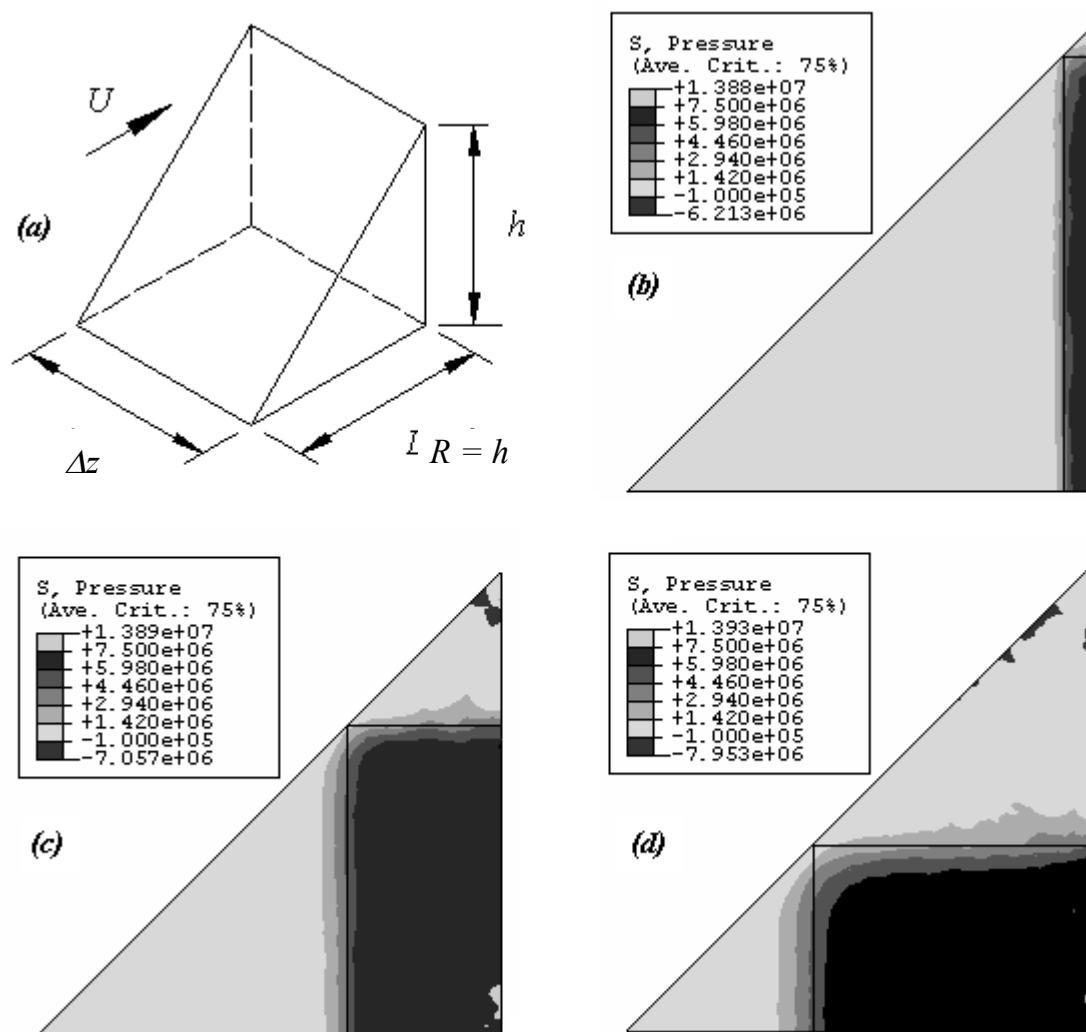


Fig. 4-7. Schema dell’impatto di un’onda a sezione trasversale triangolare contro una superficie solida; (velocità d’impatto $U = 5$ m/s); (a): geometria assunta nelle analisi numeriche ($\Delta z = R = h = 1$ m); (b) – (d): evoluzione, nel dominio fluido, della pressione p ; (b) $t = 0.5E-04$ s dopo l’impatto; (c): $t = 2.5E-04$ s dopo l’impatto; (d): $t = 4.5E-04$ s dopo l’impatto. La linea retta nera mostra la posizione teorica (Cooker 2003) della superficie di separazione tra la zona caratterizzata dalla $p = p_{max}$ e la zona con $p = 0$.

4.2.2 MASSA FLUIDA CONTRO UN BLOCCO DISPOSTO SU UN PIANO ORIZZONTALE

Il modello idrodinamico descritto da Cooker non può essere utilizzato in Abaqus, col quale si possono simulare coi fluidi solo problemi 3D e non in stato di deformazione piano. Sono state quindi condotte inizialmente due simulazioni per onda di sezione triangolare, con due geometrie caratterizzate da diversa profondità, come mostrato in Fig. 4-8. L’obiettivo è capire quanto la terza dimensione influenzi i risultati.

La caratteristiche della mesh sono:

- Fig. 4-8a: il fluido è stato discretizzato con 2908 elementi tetraedrici (di tipo cioè C3D4; distanza tra due nodi del tetraedro: 0.8 m); il blocco con 1000 elementi cubici (C3D8R; dimensione del lato dell'elemento cubico: 1 m).

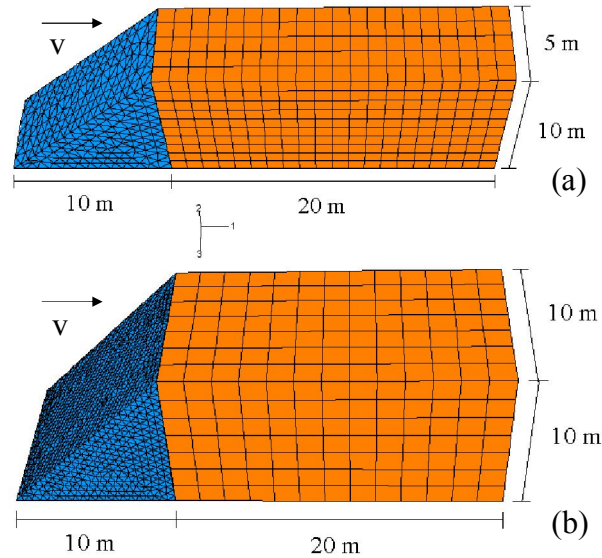


Fig. 2.11 -

Fig. 4-8. Geometria del problema 3D. (a) Profondità pari a 5m; (b) Profondità pari a 10 m.

- Fig. 4-8b: la mesh del fluido è più fitta: 20514 elementi tetraedrici (ancora di tipo C3D4; distanza tra due nodi del tetraedro: 0.5 m); il blocco è discretizzato con elementi cubici (C3D8R) caratterizzati da dimensione del lato dell'elemento 1.2 m.

In entrambi i casi il fluido colpisce il blocco (inizialmente fermo) con velocità orizzontale pari a 10 m/s; è richiesto in output l'andamento nel tempo dell'energia cinetica del blocco, in maniera tale da ricavarne la velocità acquisita, sapendo che

$$E_{cinet,bl} = \frac{1}{2}mv_{bl}^2$$

I risultati sono riportati in Fig. 4-9.

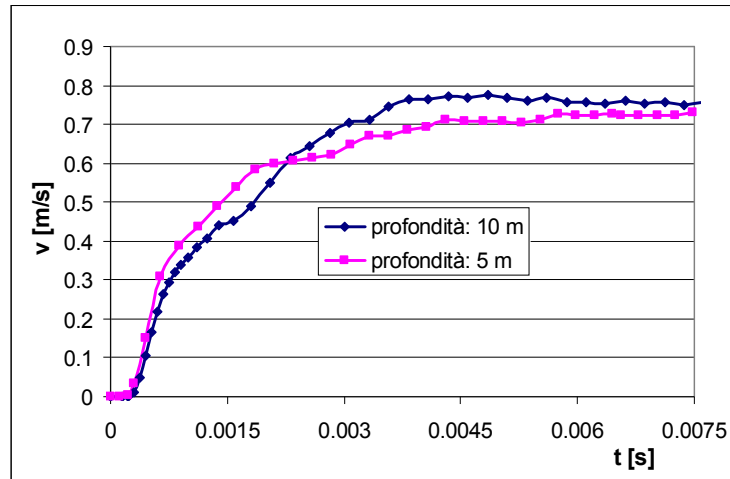


Fig. 2.12 -

Fig. 4-9. Velocità acquisita dal blocco nei primi istanti a partire dall'impatto col fluido.

Si vede che in entrambi i casi il blocco acquista una velocità compresa fra 0.7 m/s e 0.8 m/s; in particolare, per la geometria caratterizzata da una profondità di 5 m, la velocità è 0.73 m/s; per una profondità di 10 m, la velocità è 0.75 m/s.

Utilizzando le (2.20) e (2.21) si risale ad uno spostamento finale del blocco compreso tra 4.4 cm e 4.7 cm.

4.2.3 CORPO SOLIDO CONTRO LA SUPERFICIE LIBERA DI UN FLUIDO IN QUIETE

Per quanto riguarda il *problema del tuffatore*, le analogie, con l'analisi di riferimento, sono la massa del tuffatore ($M = 100$ kg), la velocità d'impatto ($U = 4.47$ m/s) e le dimensioni della sezione trasversale della piscina (Fig. 4-10); le differenze sono costituite dalla geometria (3D in luogo di 2D), e dal modello costitutivo assegnato al fluido e al solido (il tuffatore); nelle nuove analisi, infatti, il fluido è compressibile; il modello costitutivo è espresso attraverso le equazioni riportate nella sezione in cui il codice era descritto (si è imposta viscosità nulla, $\mu = 0$); due diversi valori di rigidità volumetrica K sono stati assegnati all'acqua: $K1 = 2.10$ GPa (velocità di propagazione delle onde nel fluido $c = 1450$ m/s; piccola compressibilità); $K2 = 22.50$ MPa (maggiore

compressibilità, dovuta alla presenza di una piccola, 1% circa, quantità d'aria disciolta nell'acqua; $c = 150 \text{ m/s}$); la densità assegnata all'acqua è $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Il blocco è stato considerato rigido o di comportamento elastico lineare (modulo di Young $E = 200 \text{ GPa}$).

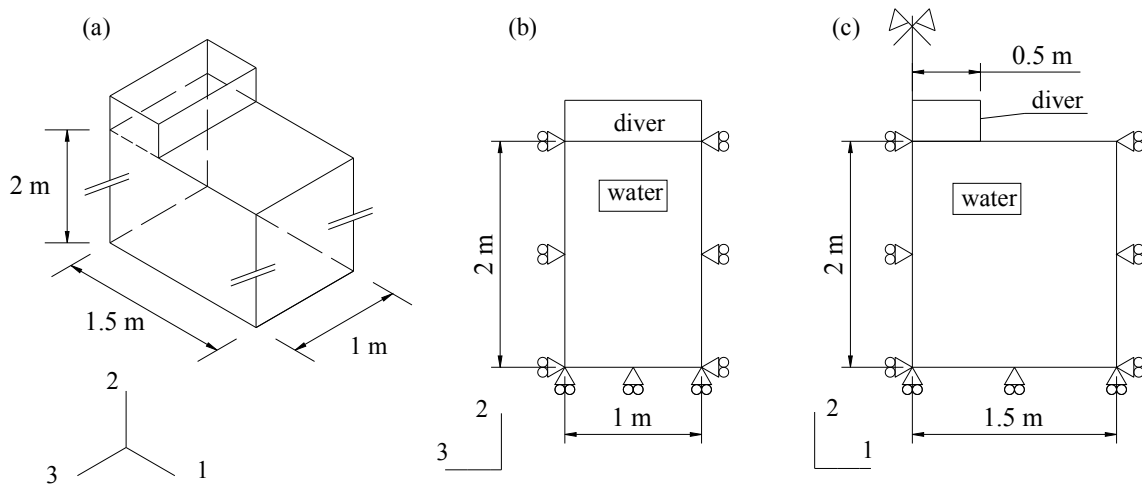


Fig. 4-10. Problema del tuffatore: dominio utilizzato nelle analisi numeriche.

Nella modellazione numerica ad elementi finiti, il fluido e il tuffatore sono stati discretizzati attraverso elementi parallelepipedi del primo ordine (44850 elementi per il fluido, 3375 elementi per il tuffatore); il passo di integrazione temporale è, approssimativamente, 10^{-6} s .

Risultati. L'evoluzione della velocità v del tuffatore, in dipendenza della rigidezza di acqua e tuffatore, è presentata in Fig. 4-11; in caso di acqua più rigida ($K = KI$), la velocità *finale* (2.5 ms dopo l'impatto con l'acqua) del tuffatore è pari a 0.70 m/s; per acqua più comprimibile ($K = KI$), la velocità è circa 0.69 m/s; nella stessa figura è riportata anche la soluzione ottenuta da Frémond ($v = 0.75 \text{ m/s}$).

La soluzione ottenuta non dipende dal valore della rigidezza assegnata al tuffatore (per i due valori considerati).

Dall'analisi della Fig. 4-11 si vede che all'aumentare della rigidezza del fluido la soluzione ottenuta tende a quella di riferimento, ottenuta nell'ipotesi fluido incompressibile.

La Fig. 4-11b riporta poi la distribuzione delle velocità nel dominio fluido, ottenuta con il codice Abaqus, per un tempo t , a partire dall'impatto, pari a circa 1.5 ms; in questo istante particolare, tale distribuzione di velocità è analoga a quella ottenuta nella soluzione di riferimento (Frémond et al., 2003).

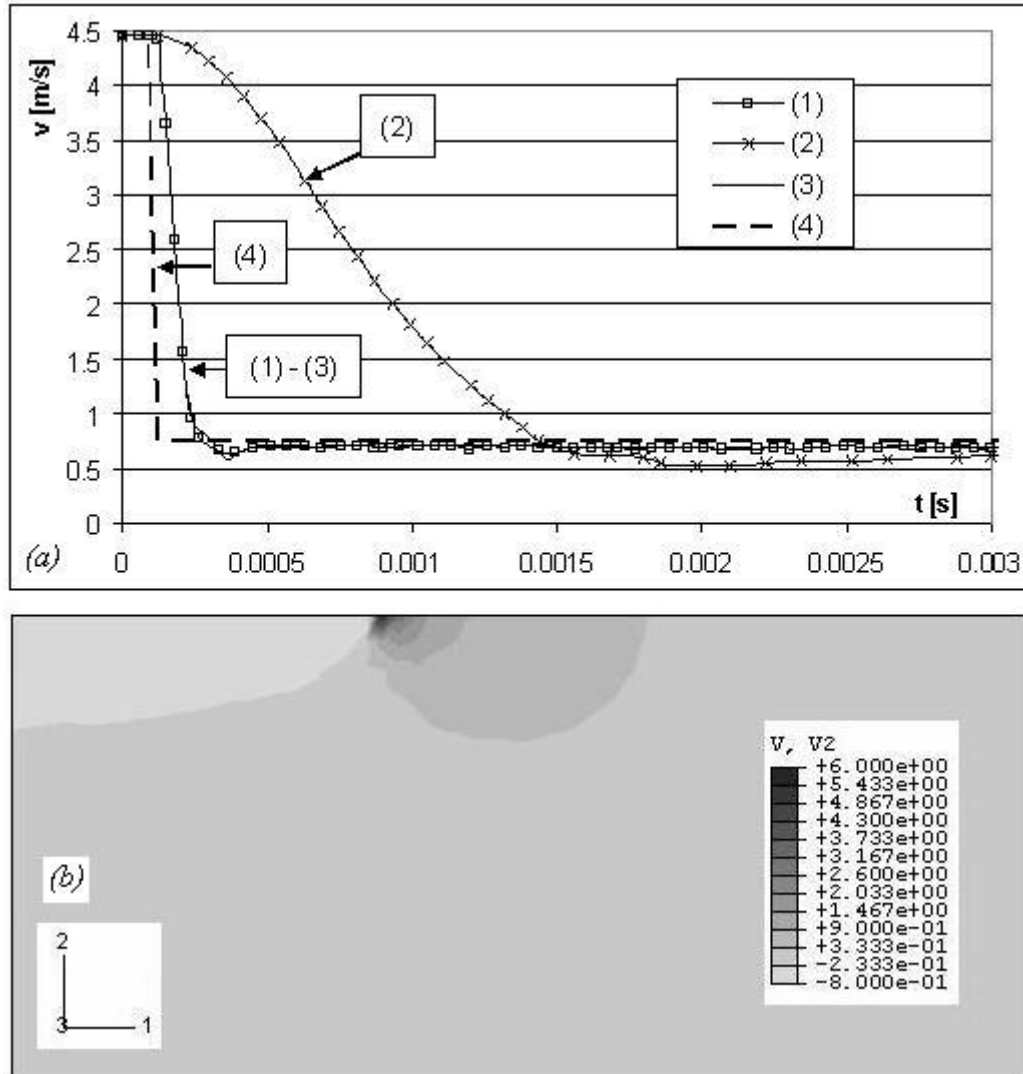


Fig. 4-11. Problema del tuffatore; (a): velocità del tuffatore (solido), in funzione del tempo, per diversi valori della rigidità del fluido e del solido: (1): solido rigido; per l'acqua, $K = K1$; (2) solido rigido; per l'acqua, $K = K2$; (3): solido elastico lineare ($E = 200$ GPa); per l'acqua, $K = K1$; (4): soluzione di riferimento (Frémond et al. 2003); (b): velocità nel fluido per $t = 1.5$ ms (appr.) dopo l'impatto (solido rigido; per l'acqua, $K = K2$).

Si possono poi ottenere i valori della velocità acquisita dal fluido nella zona di contatto.

Nella Fig. 4-12 sono indicati i vettori velocità del fluido, secondo diverse prospettive ed in tempi diversi.

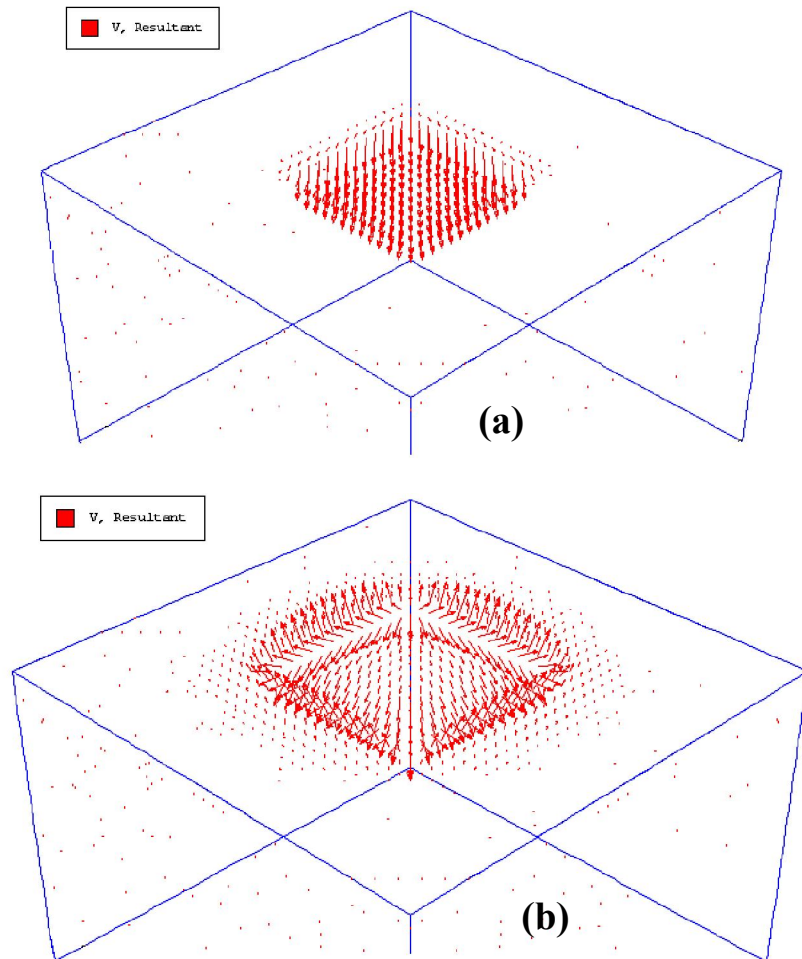


Fig. 4-12. Vettori velocità del fluido a seguito dell'impatto; (a) $t = 0.4$ ms dopo l'impatto (b) $t = 0.75$ ms dopo l'impatto.

Nei primissimi istanti (Fig. 4-12a) il fluido a diretto contatto col solido è vincolato a seguirne il moto e viene quindi trascinato verso il basso, ma dopo appena altri 0.35 ms (Fig. 4-12b) le sovrappressioni che si generano fanno sì che il fluido intorno ai bordi del solido possa schizzare via.

In Fig. 4-13 è riportato lo stesso sviluppo delle velocità di Fig. 4-12, ma da un punto di vista differente.

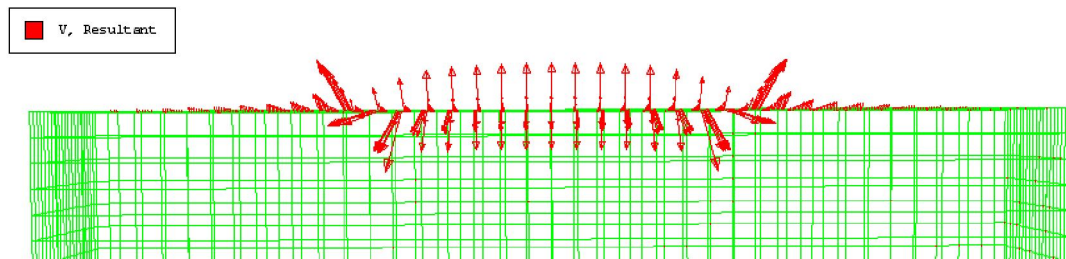


Fig. 4-13. Prospetto frontale dei vettori velocità del fluido per $t = 0.75$ ms dopo l'impatto. Zoom della porzione sommitale del dominio fluido.

Si può anche avere una indicazione quantitativa delle velocità in alcuni punti del pelo libero del fluido. In Fig. 4-14 c'è la definizione di questi punti, rappresentati dai nodi della mesh numero 148 e 156.

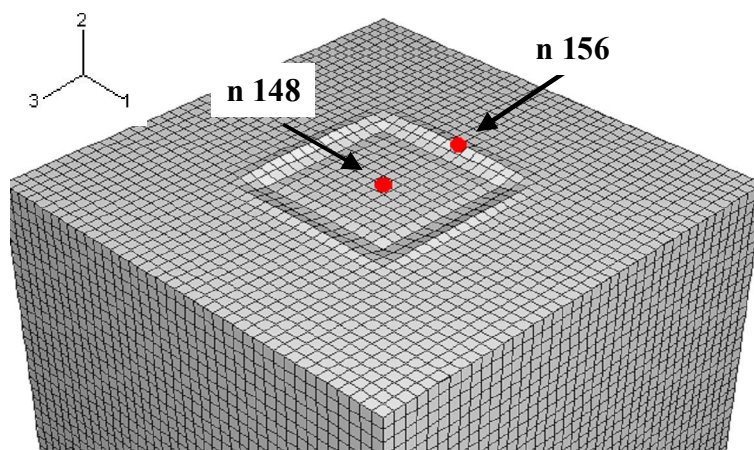


Fig. 4-14. Posizione dei punti del dominio fluido per i quali sono ricavati i valori della velocità. Dalla configurazione deformata del fluido si vede che i nodi 148 e 156 sono posti rispettivamente al centro e sul bordo della zona impattata.

Le componenti della velocità del nodo centrale (n 148) sono in Fig. 4-15: si vede che il suo moto è esclusivamente verticale e diretto verso il basso; all'inizio acquisisce una velocità di 3 m/s ma poi il valore si assesta e diventa praticamente pari a quella del blocco che lo sovrasta.

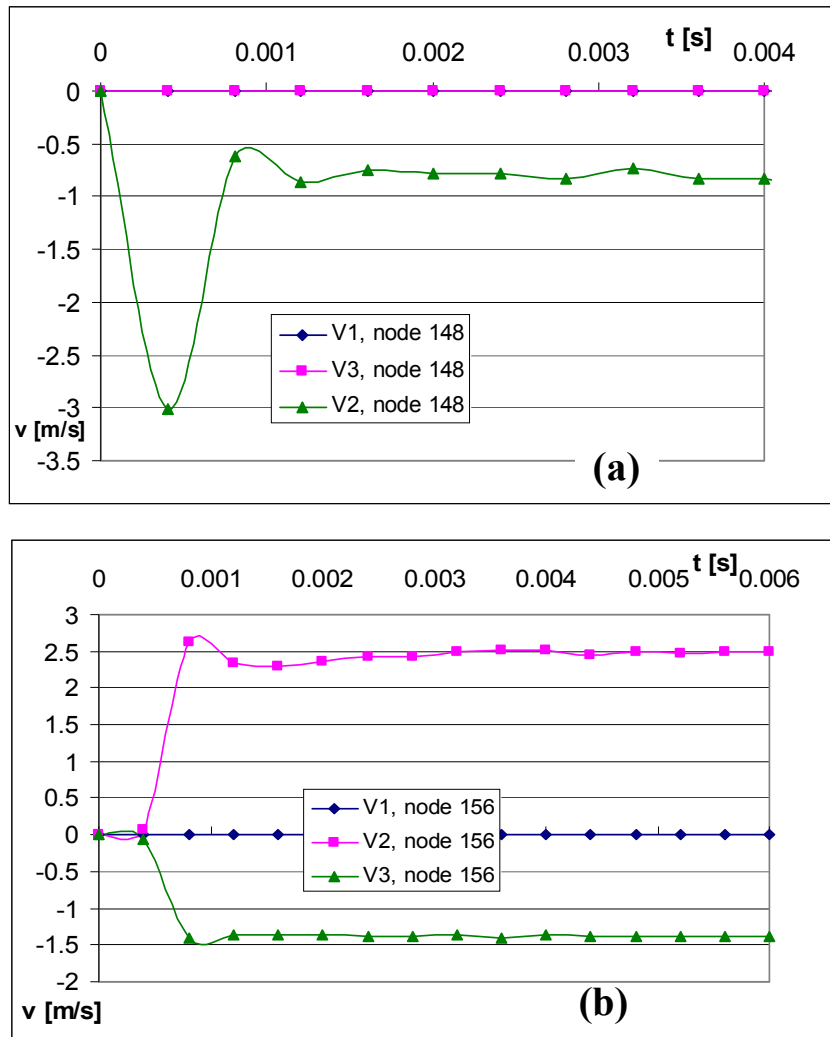


Fig. 4-15. Componenti delle velocità in funzione del tempo di due punti del dominio fluido posti sul pelo libero.

Il nodo 156, sul bordo della zona di contatto, schizza lateralmente con una velocità che nei primi istanti è costante in modulo e verso; il modulo è circa 2.9 m/s, e la direzione è data da un vettore (che giace sul piano $\hat{2}-\hat{3}$ di Fig. 4-11) che forma un angolo, rispetto al pelo libero indisturbato, pari a:

$$\arctan \frac{|v_2|}{|v_3|} \cong 60^\circ$$

4.3 ANALISI PARAMETRICHE DELL'IMPATTO DI FLUIDI CONTRO STRUTTURE

4.3.1 CARATTERI DEL FENOMENO E FATTORI GOVERNANTI

Per investigare le caratteristiche dell'impatto di un fluido contro una parete solida si considera lo schema di calcolo costituito da un corpo fluido di dimensioni (lungo gli assi 1, 2, 3, di Fig. 4-16) 2.0 m x 5.0 m x h m, (h variabile). Al dominio fluido sono state assegnati diversi valori dei parametri fisici e meccanici di riferimento (Tabella 4-1).

In questo ciclo di calcoli le condizioni di vincolo sono costituite da carrelli verticali sulla superficie inferiore e carrelli orizzontali sulle superfici laterali, per simulare lo scorrimento entro pareti rigide.

Alla parete solida, con la quale il fluido si scontra, modellata con un comportamento elastico lineare, sono stati assegnati densità 2500 kg/m^3 , modulo di Young E pari a $3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e coefficiente di Poisson $\nu = 0,2$.

Le dimensioni del muro sono 6.0 m x 1.0 m x 3.0 m.

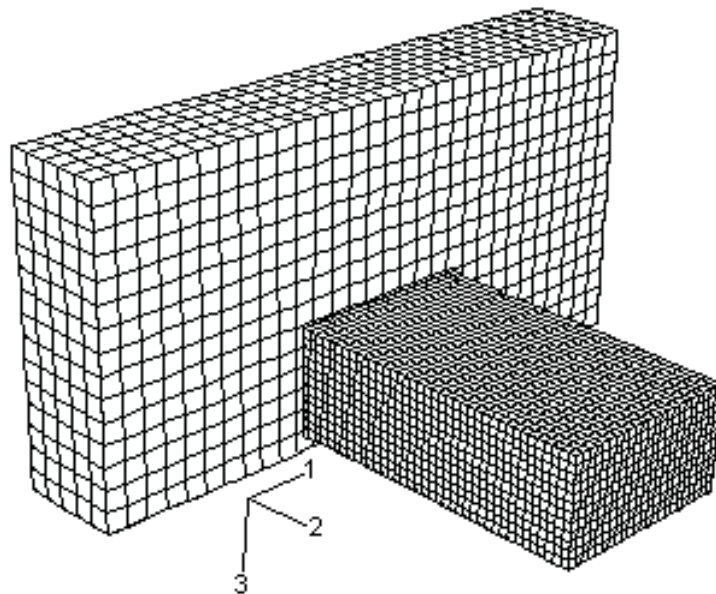


Fig. 4-16. Schema di riferimento dei calcoli.

Tabella 4-1. Parametri geometrici, fisici e meccanici assegnati al dominio fluido.

forma del fronte d'impatto (fig. 5.4)	densità [kg/m ³]	viscosità dinamica [Pa·s]	altezza del fronte d'impatto [m]	velocità d'impatto [m/s]
una superficie verticale, rettangolare	1000	0.001	0.5 – 1 – 2	1 – 4 – 15
	1300	0.01	0.5 – 1 – 2	1 – 4 – 15
	2000	0.1	0.5 – 1 – 2	1 – 4 – 15
una superficie cilindrica (R = 5.05 m)	1000	0.001	1	1 – 4 – 15
	2000	0.1	1	1 – 4 – 15

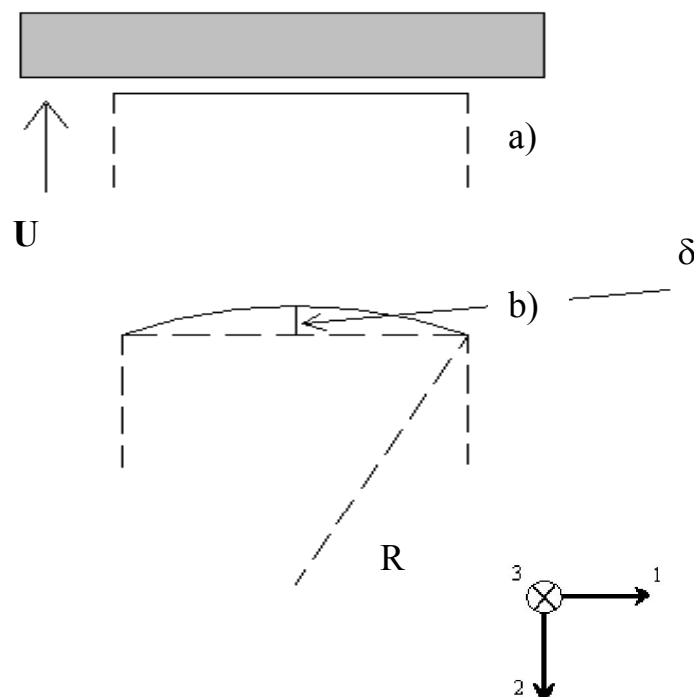


Fig. 4-17. Vista in pianta del sistema: a) fronte d'impatto costituito da una superficie verticale, rettangolare; b) fronte costituito da una superficie cilindrica di raggio R.

Come visto nelle analisi teoriche, lo studio della fase iniziale dell'impatto di un fluido contro un solido è molto delicato; le forze che si sviluppano possono comunque essere descritte da alcuni parametri come velocità della corrente fluida, densità e velocità

di propagazione delle onde elastiche. La presenza di aria in un fluido, anche in quantità esigue, causa una notevole riduzione della velocità di propagazione delle onde elastiche nel fluido stesso, indicata con c . Una frazione volumetrica di aria in acqua pari all'1% riduce c da 1450.6 m/s a 150 m/s.

Ricordando il legame tra c e la rigidità volumetrica del fluido K :

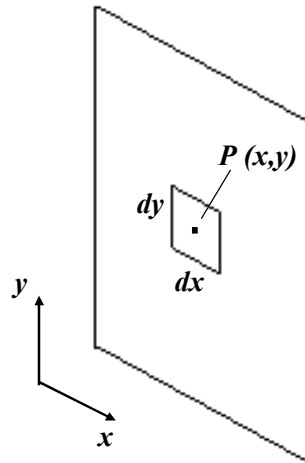
$$K = \rho c^2$$

è evidente come la variazione di questo parametro influenzi le forze ed i tempi di impatto.

4.3.1.1 Caso 1: fronte fluido piano e parallelo alla superficie solida

Se una massa fluida colpisce una parete, le sovrappressioni che si creano a causa dell'urto danno origine alla forza di impatto; la suddetta forza può essere espressa come integrale delle dF che si generano nei vari punti P appartenenti all'area di contatto $A_c(t)$ tra i due corpi (Fig. 4-18):

$$F(t) = \int_{A_c(t)} dF(t) = \int_{x \min}^{x \max} \int_{y \min}^{y \max} \Delta p(x, y, t) dx dy$$



$$\Delta p(x, y, t) \cdot dx dy = dF(x, y, t)$$

Fig. 4-18. Notazioni sulla superficie di contatto

Nel caso in cui il fronte sia piano è intuitivo pensare che, soprattutto nei primissimi istanti del fenomeno, l'area di contatto sia praticamente costante e pari al valore della superficie fluida; in Fig. 4-19 è riportata la scansione temporale delle sovrappressioni che si generano per l'urto di un fluido di densità 1000 kg/m^3 , $c = 1450.6 \text{ m/s}$ e viscosità pari a $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ a velocità 1 m/s : l'integrale delle pressioni assumerà quindi un valore estremamente elevato. E' interessante notare come negli attimi successivi all'impatto il valore delle sovrappressioni sia estremamente superiore a quello previsto dalle equazioni della idrodinamica: non sono infatti proporzionali a $\rho \cdot v^2$ ma sembrano seguire la legge vista per i getti d'acqua: essa prevede che negli istanti successivi all'impatto delle prime particelle fluide si destino pressioni dell'ordine di grandezza di $\rho \cdot v \cdot c$, con chiaro significato dei simboli: ρ è la densità del fluido, v è la velocità d'impatto, c la velocità di propagazione delle onde elastiche nel mezzo fluido.

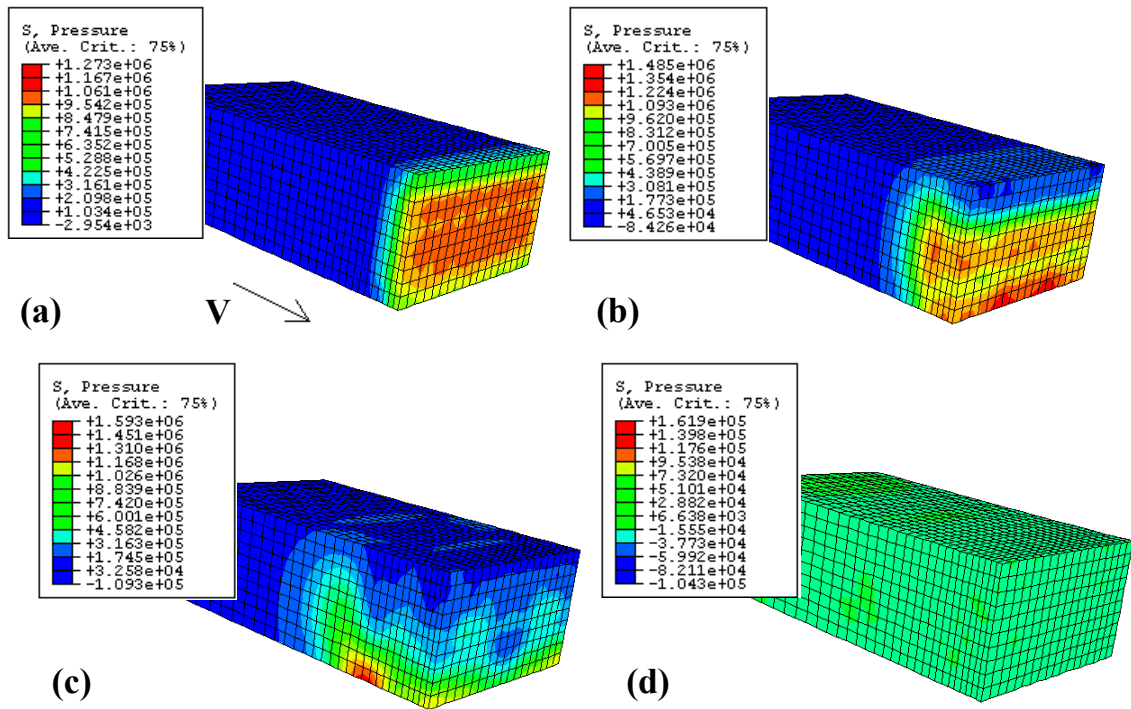


Fig. 4-19. Scansione temporale delle pressioni del corpo fluido di densità 1000 kg/m^3 , viscosità pari a $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$ che urta la struttura a velocità 1 m/s ; (a): $t = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (b): $t = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (c): $t = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ s}$; (d): $t = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Nelle Fig. 4-20a, b, c, per altezza della corrente pari ad 1 m, sono riportate le forze di contatto. Le velocità di impatto sono 1 m/s, 4 m/s, 15 m/s.

E' visibile come le sovrappressioni più elevate, della stessa natura di quelle che nelle condotte in pressione danno origine al "colpo d'ariete", si esauriscano in tempi brevi, dell'ordine dei millesimi di secondo. Successivamente i valori della pressione nel fluido si riportano a quelli già citati, tipici della dinamica dei fluidi. E' altresì visibile l'influenza del parametro c : *la presenza di aria nel fluido riduce notevolmente il picco della forza di impatto e aumenta il tempo caratteristico del fenomeno.*

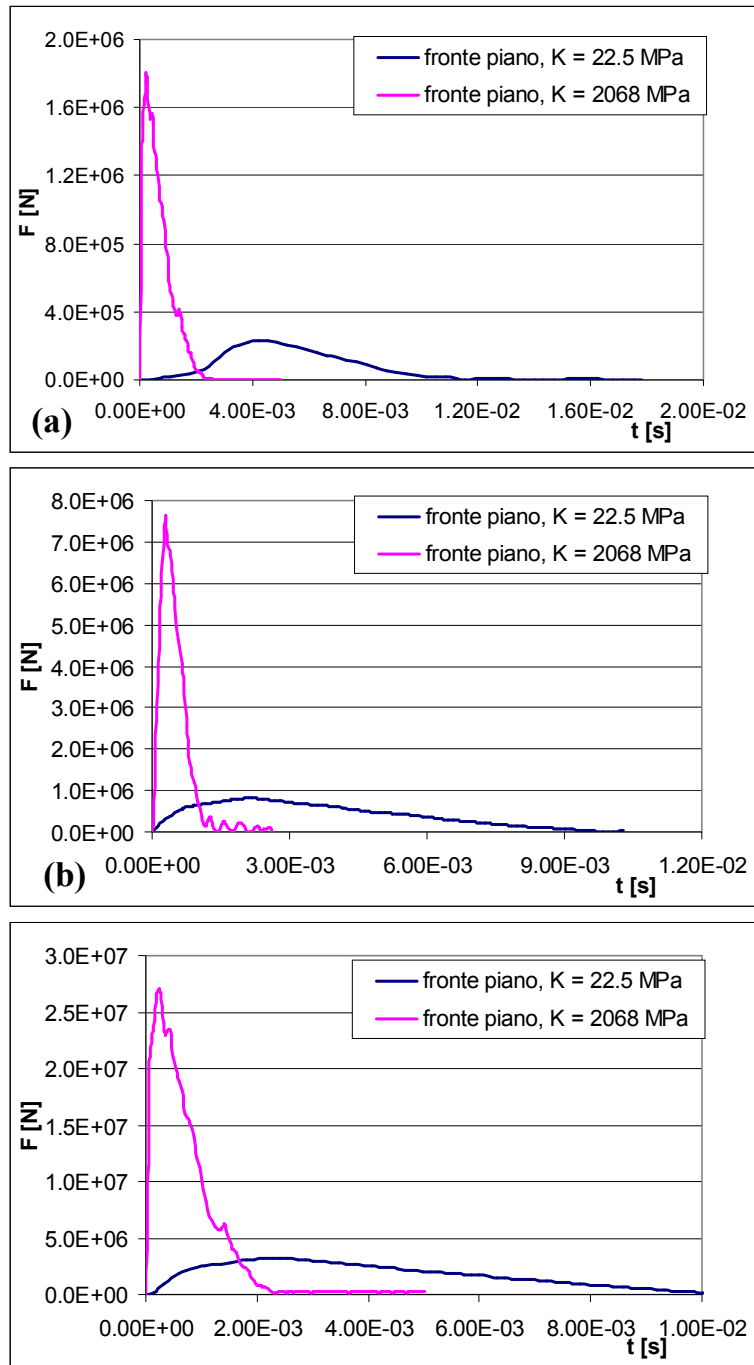


Fig. 4-20 (a), (b), (c). Forza d'impatto per un fronte piano di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$.

Nella Fig. 4-21 sono riportati i risultati dell'impatto di un corpo di caratteristiche analoghe al precedente, ma caratterizzato da una maggiore viscosità, pari a 0.01 Pa s.

In Fig. 4-23 si vede la causa della diversità dell'andamento delle forze di impatto, cioè lo sviluppo diverso delle sovrappressioni nel fronte fluido. La Fig. 4-23 è relativa al nodo A di Fig. 4-22.

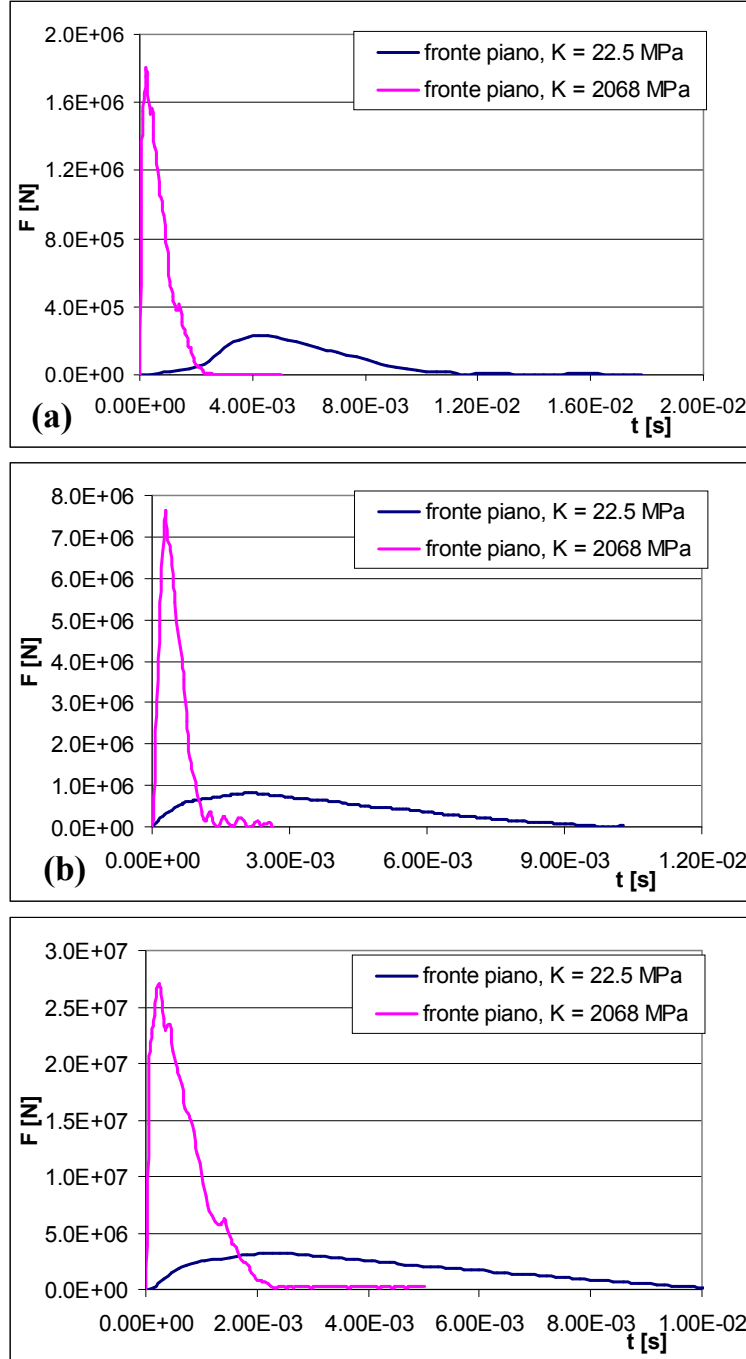


Fig. 4-21 (a), (b), (c). Forza d'impatto per un fronte piano di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$.

Si evince che la viscosità non ha effetti sullo sviluppo delle pressioni e, quindi, delle forze di impatto.

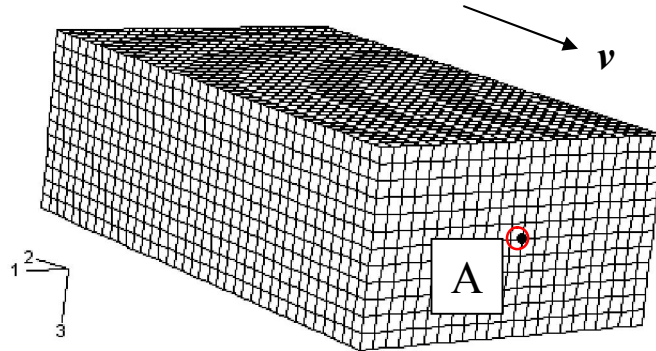


Fig. 4-22. Nodo A appartenente al fronte fluido che colpisce la superficie piana.

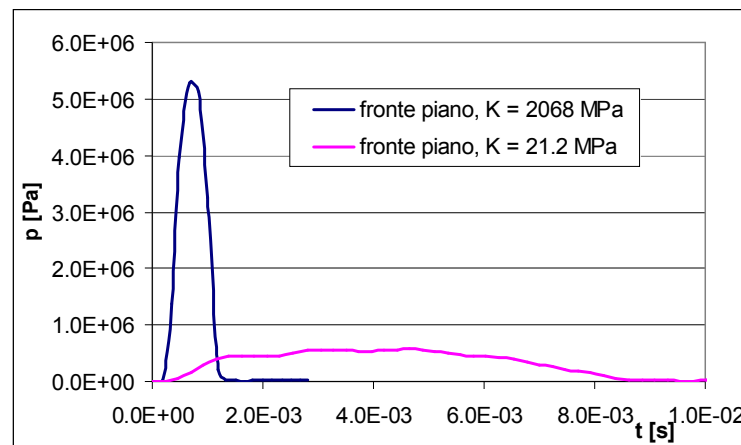


Fig. 4-23. Pressioni del nodo A nei due casi di velocità di propagazione delle onde elastiche pari a 1450.6 m/s e 150 m/s, ottenuto per una velocità all’impatto del fronte di 4 m/s.

Il valore di pressione ottenuto dalle analisi numeriche è dello stesso ordine di grandezza di quello massimo ottenibile teoricamente dalle relazioni del colpo d’ariete, mantenendosi comunque al di sotto di esso.

Si ha, infatti, per $c = 1450.6$ m/s:

$$\Delta p_{\text{max teor}} = \rho \cdot c \cdot v = 1000 \cdot 1450.6 \cdot 4 = 5.83 \text{ E}+6 \text{ Pa}$$

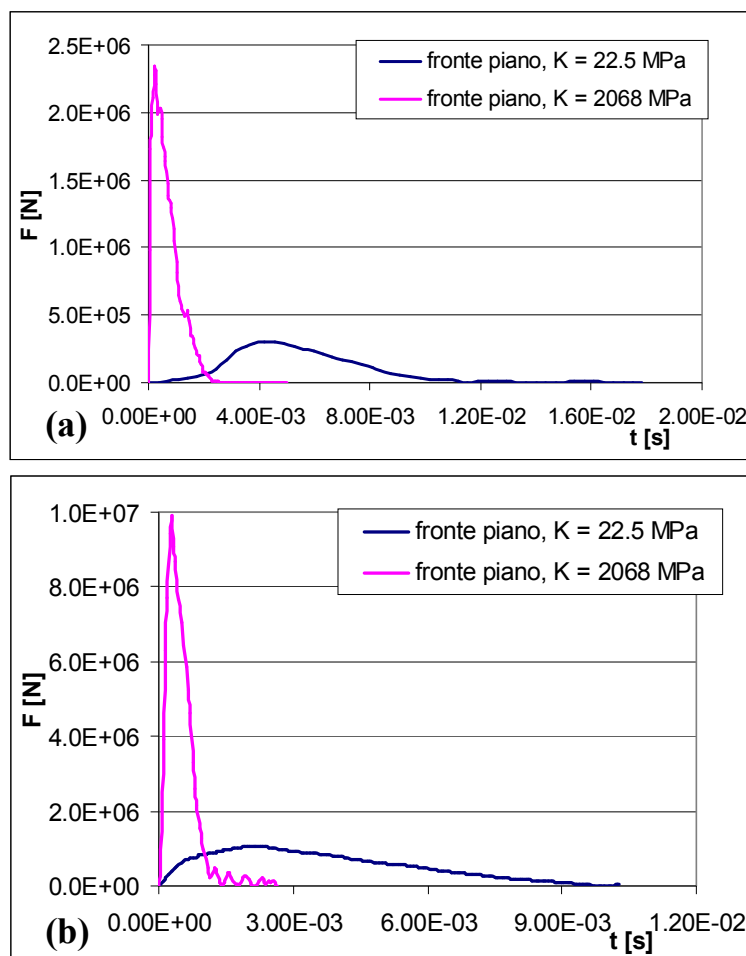
$$\Delta p_{\text{numer}} = 5.2 \text{ E}+6 \text{ Pa}$$

Per $c = 150$ m/s:

$$\Delta p_{\text{max teor}} = \rho \cdot c \cdot v = 1000 \cdot 1506 \cdot 4 = 6.21 \text{ E}+5 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_{\text{numer}} = 5.69 \text{ E}+5 \text{ Pa}$$

Per un fluido di densità maggiore, cioè 1300 kg/m^3 , e viscosità dinamica pari a $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, si ottengono per le diverse altezze le seguenti forze di impatto, sempre nei primi istanti a partire dall'urto (Fig. 4-24).



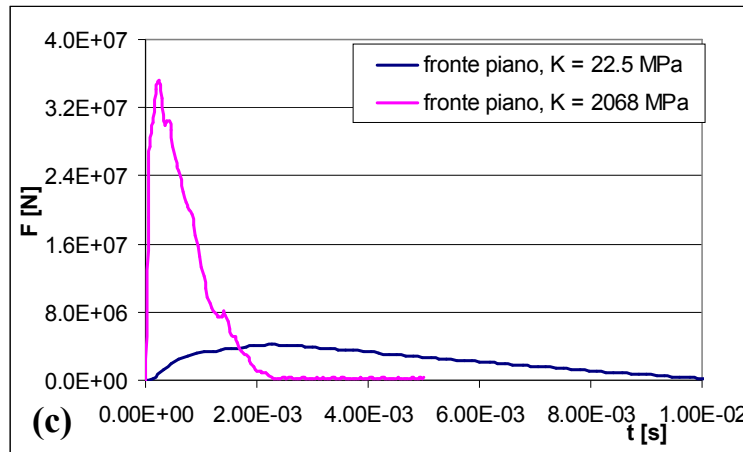


Fig. 4-24 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte piano di densità 1300 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità diverse e con altezza $h = 1.0 \text{ m}$; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$.

Per capire le relazioni che intercorrono fra i diversi casi, si possono costruire delle tabelle; in esse si riportano i valori delle forze di picco per fissati valori di altezza, densità e velocità di propagazione delle onde elastiche; ad esempio:

$h = 1 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$	$v = 1 \text{ m/s}$	$v = 4 \text{ m/s}$	$v = 15 \text{ m/s}$
$\mu = 0.001$	1.81 E+06	7.23 E+06	2.71 E+07
$\mu = 0.01$	1.81 E+06	7.23 E+06	2.71 E+07

$h = 1 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 150 \text{ m/s}$	$v = 1 \text{ m/s}$	$v = 4 \text{ m/s}$	$v = 15 \text{ m/s}$
$\mu = 0.001$	2.33 E+05	8.12 E+05	3.20 E+06
$\mu = 0.01$	2.33 E+05	8.12 E+05	3.20 E+06

$h = 1 \text{ m}$, $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$	$v = 1 \text{ m/s}$	$v = 4 \text{ m/s}$	$v = 15 \text{ m/s}$
$\mu = 0.001$	2.35 E+06	9.40 E+06	3.48 E+07
$\mu = 0.01$	2.35 E+06	9.40 E+06	3.48 E+07

$h = 1 \text{ m}, \rho = 1300 \text{ kg/m}^3,$ $c = 150 \text{ m/s}$	$v = 1 \text{ m/s}$	$v = 4 \text{ m/s}$	$v = 15 \text{ m/s}$
$\mu = 0.001$	3.03 E+05	1.06 E+06	4.16 E+06
$\mu = 0.01$	3.03 E+05	1.06 E+06	4.16 E+06

Dalle precedenti si deduce che fissando altezza, velocità delle onde elastiche e densità le forze massime (i “picchi” nelle figg. 4.20, 4.21, 4.24) che il fluido trasmette alla struttura sono direttamente proporzionali alla velocità; in simboli:

$$F_{\max} \left(v = 15 \frac{m}{s} \right) \Big|_{h_i, \rho_i} = \frac{15}{4} \cdot F_{\max} \left(v = 4 \frac{m}{s} \right) \Big|_{h_i, \rho_i} = 15 \cdot F_{\max} \left(v = 1 \frac{m}{s} \right) \Big|_{h_i, \rho_i}$$

Fissando poi altezza e velocità, si risale al ruolo della densità; si arriva ad affermare che:

$$\frac{1}{1.3} \cdot F_{\max} \left(\rho = 1300 \frac{kg}{m^3} \right) \Big|_{h_i, v_i} = F_{\max} \left(\rho = 1000 \frac{kg}{m^3} \right) \Big|_{h_i, v_i}$$

Si nota che *non* sussiste invece una relazione lineare tra i risultati ottenuti per $c = 1450.6$ e $c = 150 \text{ m/s}$.

Inoltre, non sembra sussistere una dipendenza diretta tra forze di impatto e viscosità.

4.3.1.2 Caso 2: fronte fluido cilindrico

Imponendo al fronte una superficie cilindrica di raggio $R = 5.05 \text{ m}$ (con δ risultante pari a 10 cm), la scansione temporale delle pressioni di contatto fra il fronte del fluido e la parete nei primi istanti fornisce (Fig. 4-25):

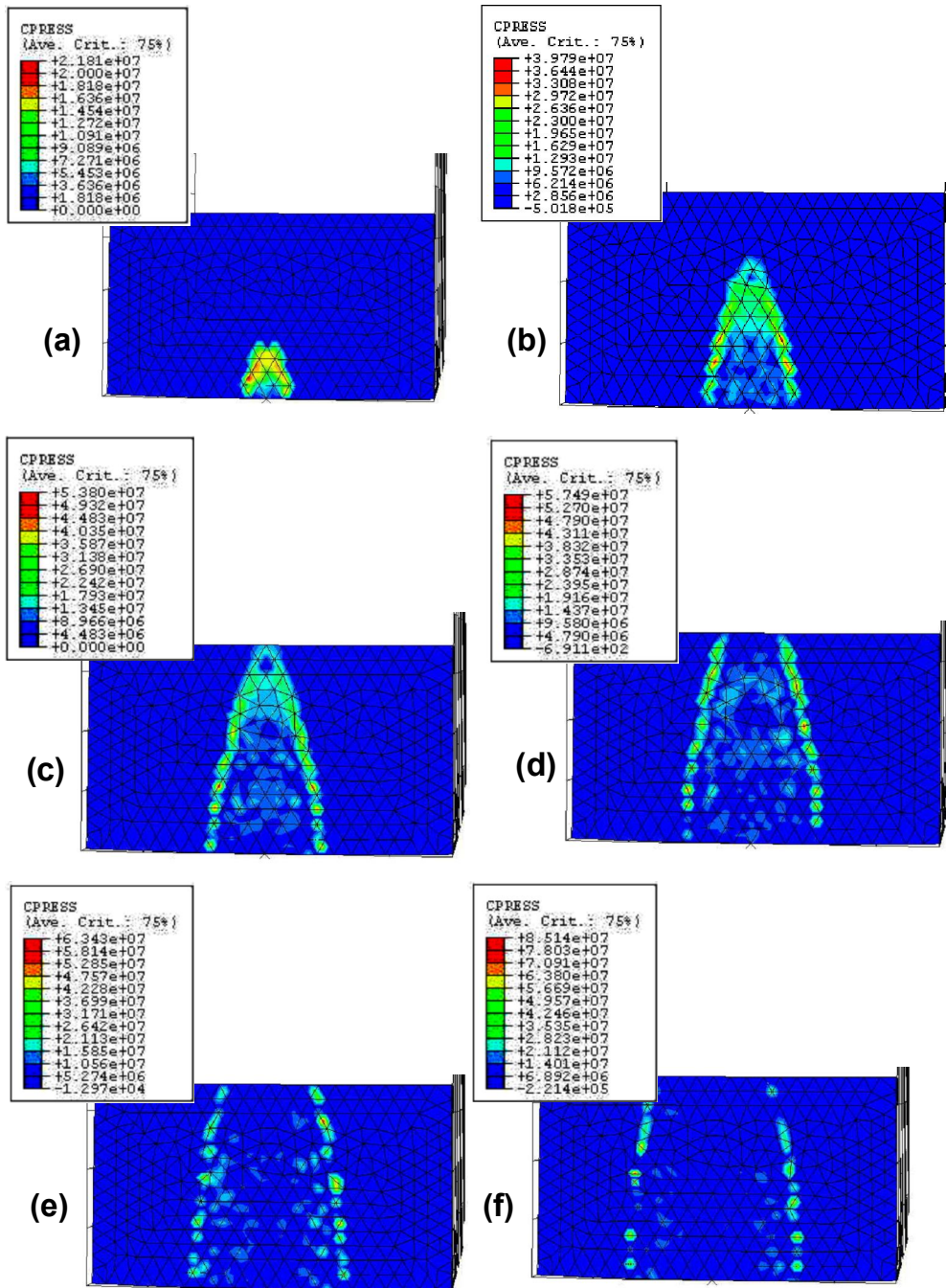


Fig. 4-25. Scansione temporale delle pressioni del corpo fluido di densità 1300 kg/m^3 , $h = 1.0 \text{ m}$, $c = 1450.6 \text{ m/s}$ e viscosità pari a $10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ che urta la struttura a velocità 15 m/s ; (a): $t = 2,05 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (b): $t = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (c): $t = 6,02 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (d): $t = 8,1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; (e): $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$; (f): $t = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Anche in questo caso, le sovrappressioni che nascono al primo contatto tra la particella fluida ed il muro, dovute all'arresto pressoché istantaneo a partire da una velocità pari a 15 m/s , sono estremamente elevate: dell'ordine di grandezza di $\rho \cdot c_0 \cdot v_{imp}$

piuttosto che di $\rho \cdot v_{imp}^2$, pressione di stagnazione (Fig. 4-26). il valore risulta ancora inferiore a quello massimo teorico, e a parità di altri parametri, è comunque minore rispetto a quello ottenuto per un fronte piano.

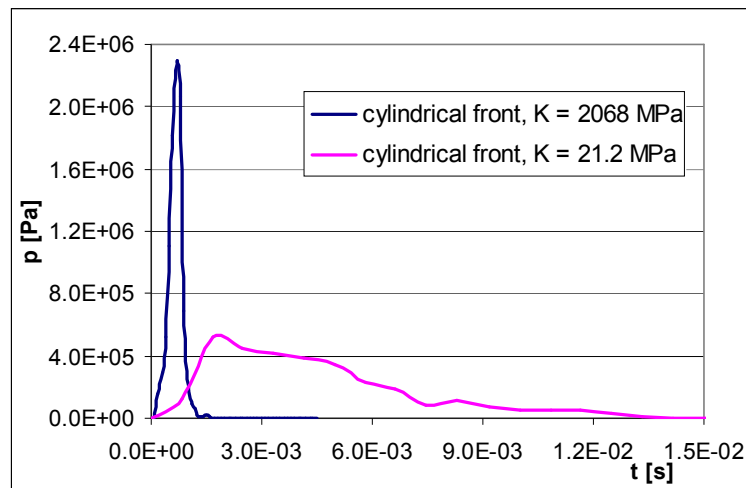
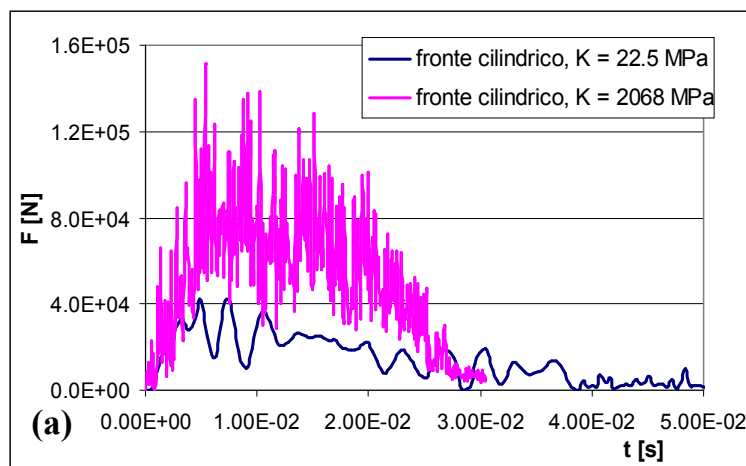


Fig. 4-26. Diagramma delle sovrappressioni che si generano nel nodo centrale del fronte fluido cilindrico a causa dell'impatto.

Per il fluido di densità 1000 kg/m^3 , altezza $h = 1 \text{ m}$ e viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ si ottiene per diverse velocità di impatto l'andamento delle forze riportato in Fig. 4-27.



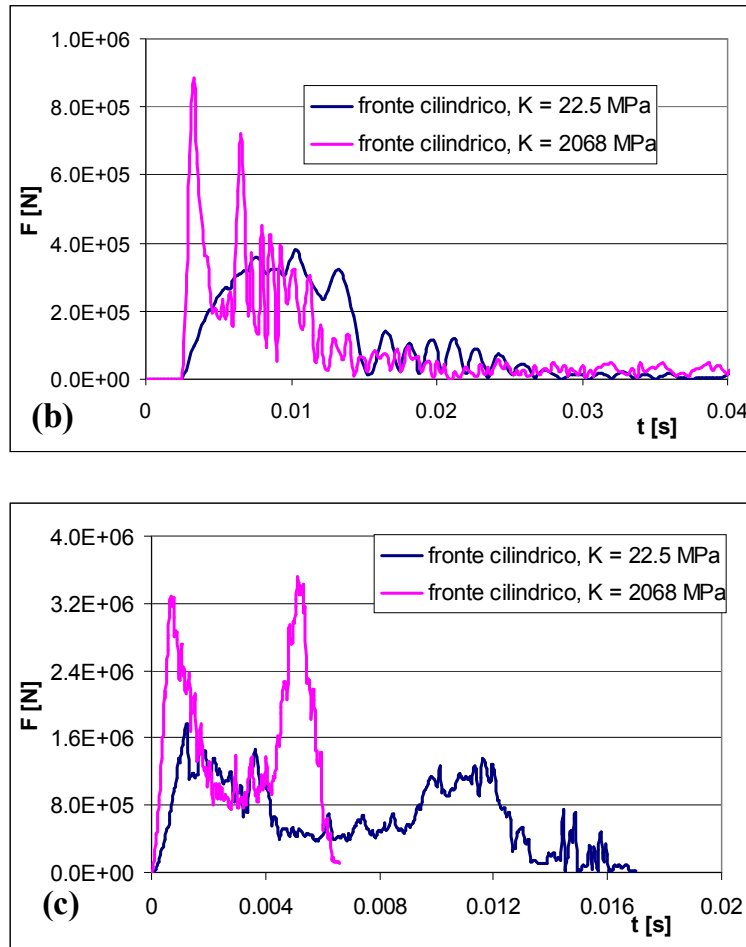


Fig. 4-27 (a), (b), (c). Forza d’impatto per un fronte cilindrico di densità 1000 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, che impatta il muro a velocità fissate e con diverse altezze; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$.

Si può notare, per $c = 1450.6 \text{ m/s}$ e per le velocità 4 m/s e 15 m/s la presenza di due picchi di intensità paragonabile. Inoltre il fenomeno risulta “diluito” nel tempo rispetto al caso di fronte piano.

Per $c = 150 \text{ m/s}$ le forze risultanti sono minori ed i tempi caratteristici maggiori rispetto al caso di acqua pura; le differenze però sono minori rispetto al caso di fronte piano. Per il fluido di densità 1300 kg/m^3 e viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ si ottengono le forze riportate nella Fig. 4-28.

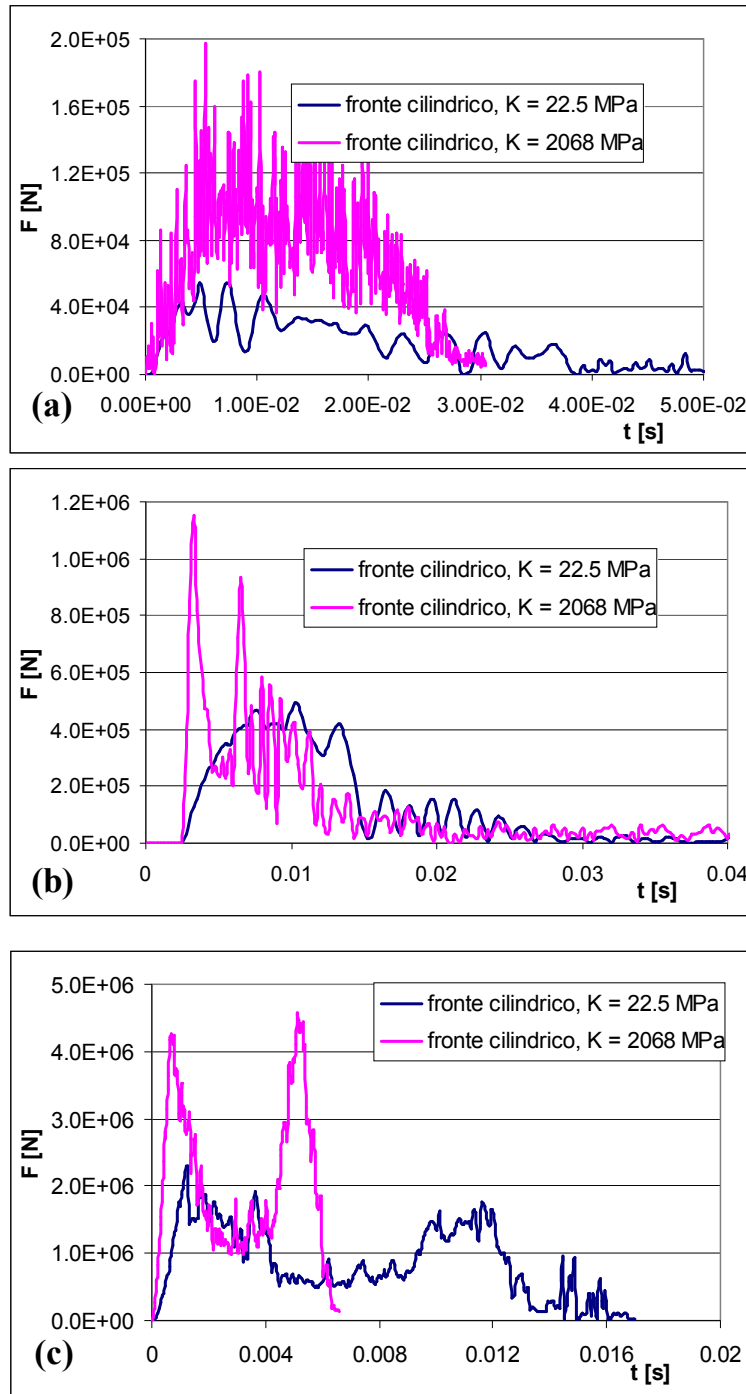


Fig. 4-28 (a), (b), (c). Forza d'impatto per un fronte costituito da una superficie cilindrica, di densità 1300 kg/m^3 , viscosità $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ che colpisce il muro a diverse velocità fissate e con diverse altezze; (a): $v = 1 \text{ m/s}$; (b): $v = 4 \text{ m/s}$; (c): $v = 15 \text{ m/s}$.

Nel caso di fronte cilindrico l'unica relazione di proporzionalità diretta sussistente è fra forza di impatto e densità.

4.3.2 CARATTERIZZAZIONE NUMERICA DELL'IMPULSO E RAPPRESENTAZIONE SEMPLIFICATA DEL FENOMENO

Nella precedente sezione si è analizzato l'impatto sotto determinate condizioni geometriche, cinematiche, reologiche.

Si è scoperto che nel caso ideale di fronte fluido piano e parallelo alla parete solida, le forze trasmesse all'impatto sono correlabili alle grandezze citate precedentemente.

Tale proporzionalità è persa nel caso più generico di fronte non piano.

Si impostano quindi analisi più dettagliate volte alla caratterizzazione dell'impulso, per scoprire se questa grandezza fisica possa essere correlabile a grandezze note della corrente.

4.3.2.1 Domini bidimensionali

Si sono impostate due diverse geometrie per il dominio fluido: sezione trasversale triangolare e sezione trasversale rettangolare.

La Tabella 4-2 riporta il piano delle analisi, in cui sono variati parametricamente la velocità d'impatto U , l'altezza del dominio h , la velocità di propagazione delle onde elastiche nel fluido c , la densità del fluido ρ e la viscosità dinamica μ .

In particolare, i valori di densità considerati si riferiscono all'acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) e ad una colata fluida; la risposta volumetrica della colata, inoltre, è assimilata a quella dell'acqua.

I valori delle velocità U assegnate hanno origine dalle analisi della propagazione di colate a comportamento di tipo fluido riportate da Revellino et al. (2003): nelle analisi, un modello costitutivo di tipo Voellmy è stato impiegato nello studio della propagazione nei dintorni della città di Sarno.

Tabella 4-2. Valori parametrici delle grandezze utilizzate nello studio dell'impatto di colate fluide contro strutture.

$\rho \text{ [kg/m}^3\text{]}$	$c \text{ [m/s]}$	$h \text{ [m]}$	$U \text{ [m/s]}$
1000, 1500	1450	0.5	5
		1	5, 10
		2	5
1000, 1500	150	1	5, 10

Nella seguente figura (Fig. 4-29) sono riportati i risultati per onda triangolare (I_T) e rettangolare (I_S).

Tali risultati sono inoltre confrontati con i valori teorici forniti dalle formulazioni di Cooker (2002) e Korobkin (1997) per i due casi limite di impatto elastico ed anelastico.

Si nota che i risultati delle analisi numeriche condotte si collocano tra i due estremi teorici.

Inoltre, le analisi mostrano che il *valore dell'impulso non è marcatamente sensibile a variazioni della compressibilità del fluido*.

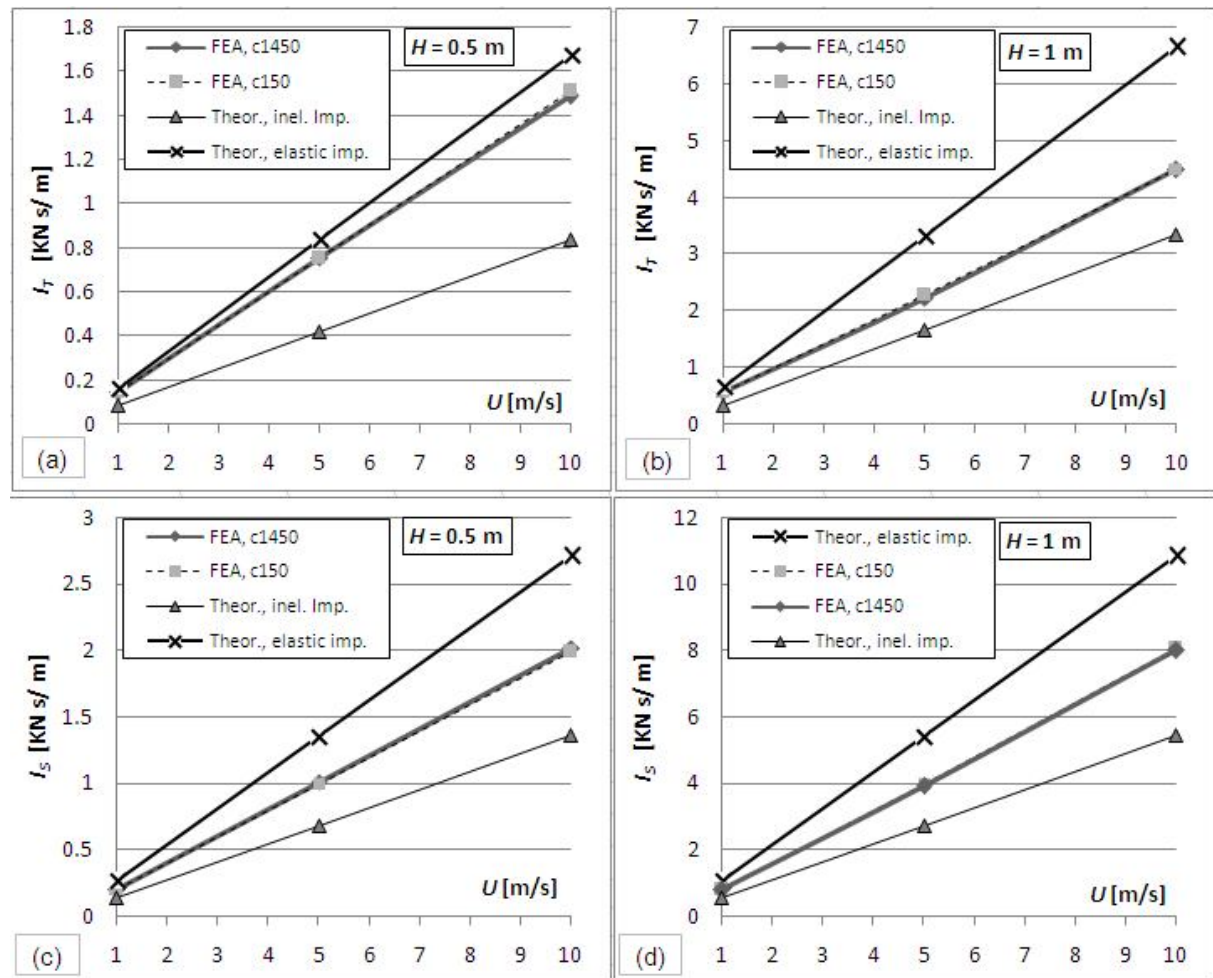


Fig. 4-29. Impulsi della forza di impatto valutati per densità $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$; onda triangolare: (a) $H = 0.5 \text{ m}$; (b) $H = 1 \text{ m}$; onda rettangolare: (c) $H = 0.5 \text{ m}$; (d) $H = 1 \text{ m}$.

4.3.2.2 Domini tridimensionali

La medesima procedura è stata seguita per l'analisi di impatti 3D di corpi fluidi contro strutture, imponendo diverse forme al fronte d'impatto (Fig. 4-30):

- fronte piano vertical (Fig. 4-30a);
- fronte “a cuneo” (Fig. 4-30b);
- fronte cilindrico (Fig. 4-30c);
- fronte piano inclinatore (Fig. 4-30d).

Si sono inoltre assegnati al fluido ($c_0 = 150$ m/s, 1450 m/s), due valori di altezza del dominio fluido ($H = 0.5, 1$ m), due valori del rapporto tra larghezza del dominio fluido (b) e altezza (H) ($b/H = 1, 3$), tre valori della velocità d'impatto ($U = 1, 5, 10$ m/s) e, in caso di fronte non piano e verticale, due valori del parametro δ ($\delta = 0.05$ m, 0.10 m, Fig. 4-30).

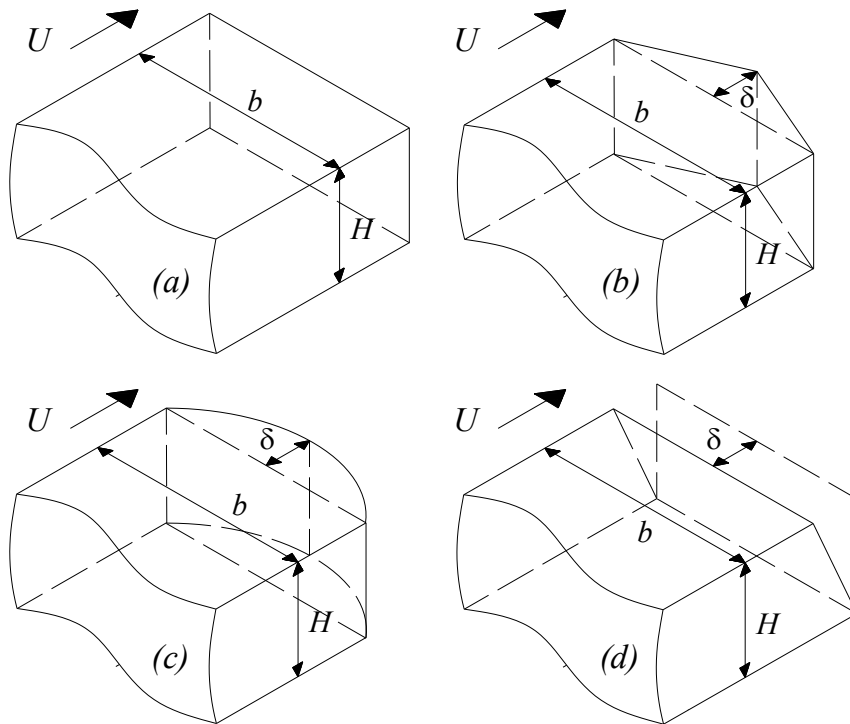


Fig. 4-30. Impatto di onde 3D; schemi geometrici dei corpi impattanti impostati nel modello agli elementi finite; (a) fronte piano; (b) fronte “a cuneo”; (c) fronte curvo; (d) fronte piano, inclinato.

Si riporta, a titolo di esempio, il confronto fra le evoluzioni delle forze di impatto per le quattro geometrie, nei due casi di velocità $U = 5$ m/s e 10 m/s (Fig. 4-31).

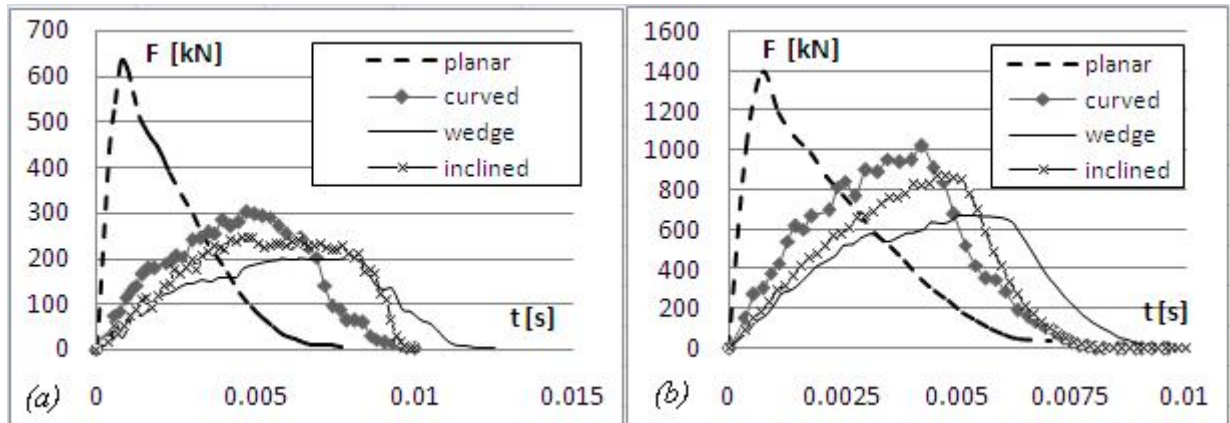


Fig. 4-31. Evoluzione nel tempo t della forza F ; risultati ottenuti per i valori di $c_0 = 150$ m/s; $H = b = 1$ m; $\delta = 5$ cm; (a): $U = 5$ m/s; (b): $U = 10$ m/s.

Si può notare che, nel caso di impatto di fronte piano, la forza di impatto raggiunge il suo massimo valore; contestualmente, la durata del fenomeno è più breve rispetto agli altri casi.

Tuttavia, se la velocità è relativamente modesta, (Fig. 4-31 b vs a) le differenze tra fronte piano verticale e non, diminuiscono.

In Fig. 4-32 si mostrano i contour dell'evoluzione degli incrementi di pressione all'impatto (ottenuti per $\rho_0 = 1000$ kg/m³, $c_0 = 150$ m/s, $U = 5$ m/s) per le geometrie riportate in Fig. 4-30a, c, d; il meccanismo di sviluppo e successivo rapido decadimento dei valori di pressione è analogo a quanto visto precedentemente.

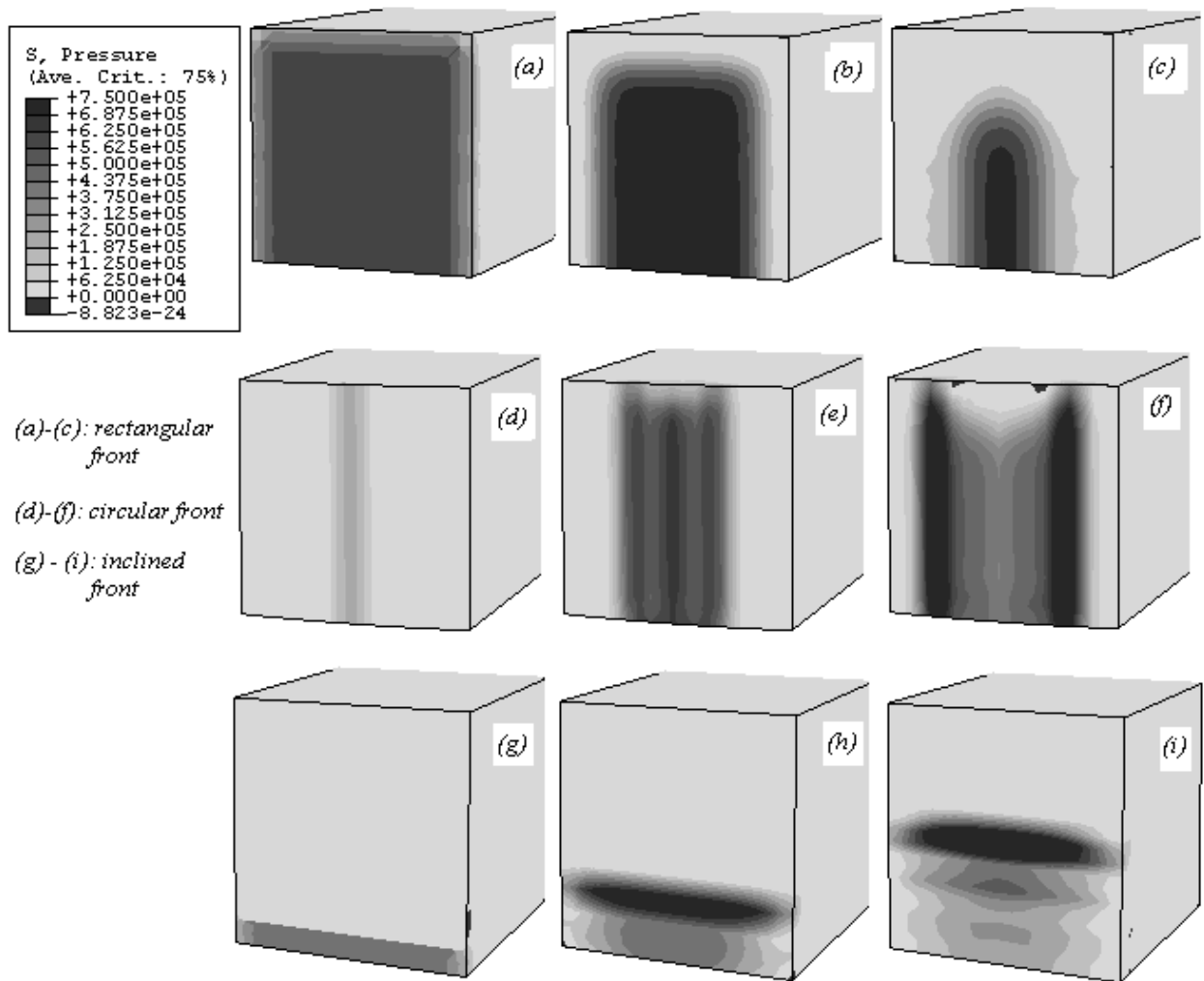


Fig. 4-32. Contours dell'incremento di pressione Δp all'impatto; risultati ottenuti per $c_0 = 150$ m/s; $H = b = 1$ m; $U = 5$ m/s.

La Tabella 4-3 riporta, in sintesi, tutti i valori di impulso I calcolati per i diversi casi considerati, attraverso l'integrazione nel tempo delle forze.

I medesimi valori sono rappresentati sui grafici di Fig. 4-33. L'analisi della figura mostra chiaramente che i valori di I sono del medesimo ordine di grandezza, al variare della forma assegnata al fluido; inoltre, anche per il caso 3D, come nel caso 2D, il valore dell'impulso è indipendente dal valore della compressibilità.

I massimi valori dell'impulso sono ottenuti per il caso di fronte piano, che quindi costituisce un limite superiore.

Tabella 4-3. Valori calcolati dell'impulso I .

planar front (Fig. 3D-1a)		$c_0 = 150 \text{ m/s}$				$c_0 = 1450 \text{ m/s}$			
		$b = H$		$b = 3H$		$b = H$		$b = 3H$	
	$U \text{ [m/s]}$	$H=0.5\text{m}$	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m
	1	0.05	0.36	0.25	1.95	0.05	0.35	0.25	1.97
	5	0.26	1.79	1.24	9.41	0.25	1.76	1.26	9.95
	10	0.52	3.75	2.49	19.46	0.53	3.71	2.52	19.71

wedge front (Fig. 3D-1b)		$c_0 = 150 \text{ m/s}$				$c_0 = 1450 \text{ m/s}$			
		$b = H$		$b = 3H$		$b = H$		$b = 3H$	
	$U \text{ [m/s]}$	$H=0.5\text{m}$	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m
$\delta=0.05 \text{ m}$	1	0.03	0.31	0.22	1.38	0.04	0.31	0.22	1.38
	5	0.18	1.60	1.08	7.10	0.19	1.61	1.11	7.17
	10	0.44	3.51	2.14	14.53	0.45	3.58	2.12	14.53
$\delta=0.1 \text{ m}$	1	0.03	0.30	0.21	1.18	0.03	0.30	0.21	1.17
	5	0.17	1.53	1.01	6.85	0.17	1.55	1.02	6.78
	10	0.41	3.43	2.05	14.13	0.42	3.44	2.03	14.13

curved front (Fig. 3D-1c)		$c_0 = 150 \text{ m/s}$				$c_0 = 1450 \text{ m/s}$			
		$b = H$		$b = 3H$		$b = H$		$b = 3H$	
	$U \text{ [m/s]}$	$H=0.5\text{m}$	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m
$\delta=0.05 \text{ m}$	1	0.04	0.34	0.23	1.53	0.04	0.34	0.22	1.56
	5	0.21	1.76	1.20	7.89	0.21	1.75	1.19	7.82
	10	0.48	3.69	2.38	16.33	0.47	3.69	2.38	16.34
$\delta=0.1 \text{ m}$	1	0.04	0.33	0.22	1.53	0.03	0.35	0.21	1.55
	5	0.19	1.74	1.12	7.61	0.20	1.72	1.13	7.77
	10	0.46	3.68	2.36	16.27	0.46	3.68	2.34	16.27

inclined front (Fig. 3D-1d)		$c_0 = 150 \text{ m/s}$				$c_0 = 1450 \text{ m/s}$			
		$b = H$		$b = 3H$		$b = H$		$b = 3H$	
	$U \text{ [m/s]}$	$H=0.5\text{m}$	1.0m	0.5m	1.0 m	0.5m	1.0m	0.5m	1.0m
$\delta=0.05 \text{ m}$	1	0.04	0.28	0.20	1.74	0.04	0.28	0.21	1.76
	5	0.18	1.42	1.08	8.56	0.18	1.43	1.08	8.60
	10	0.38	3.56	2.19	17.51	0.39	3.56	2.21	17.50
$\delta=0.1 \text{ m}$	1	0.03	0.27	0.19	1.65	0.03	0.27	0.18	1.64
	5	0.16	1.38	1.04	8.21	0.17	1.40	1.05	8.20
	10	0.34	3.44	2.05	17.01	0.35	3.47	2.06	17.05

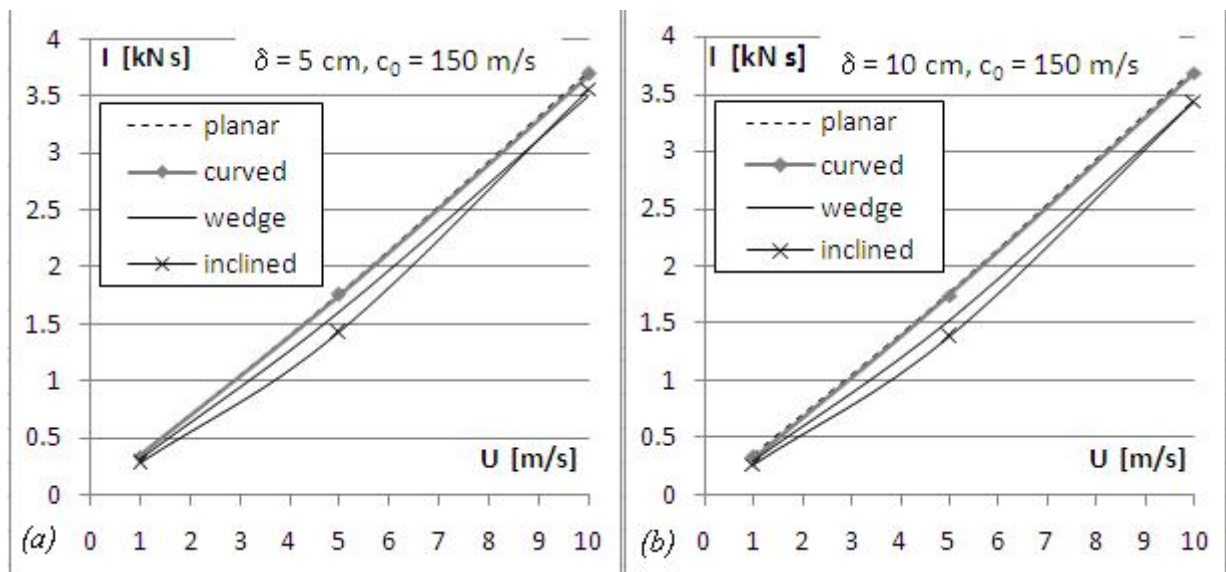


Fig. 4-33. Confronto fra gli impulse I valutati con analisi numeriche agli elementi finite.

4.3.2.3 Sintesi dei risultati

In virtù dell'invarianza dell'impulso nei confronti della compressibilità del fluido, che, in termini pratici, si riconduce ad una indipendenza da contenuto d'aria e di solidi, parametri difficilmente valutabili in fase di progettazione di strutture di difesa contro colate detritiche, si forniscono relazioni analitiche, utili per la progettazione:

$$I = 0.40 \rho_0 U H b^2 \quad \text{if } b/H = 1$$

$$I = 0.22 \rho_0 U H b^2 \quad \text{if } b/H = 3$$

$$I = 0.78 \rho_0 U H^2 \quad \text{if } b/H \rightarrow 0 (b \gg H); I \text{ valutato per unità di larghezza.}$$

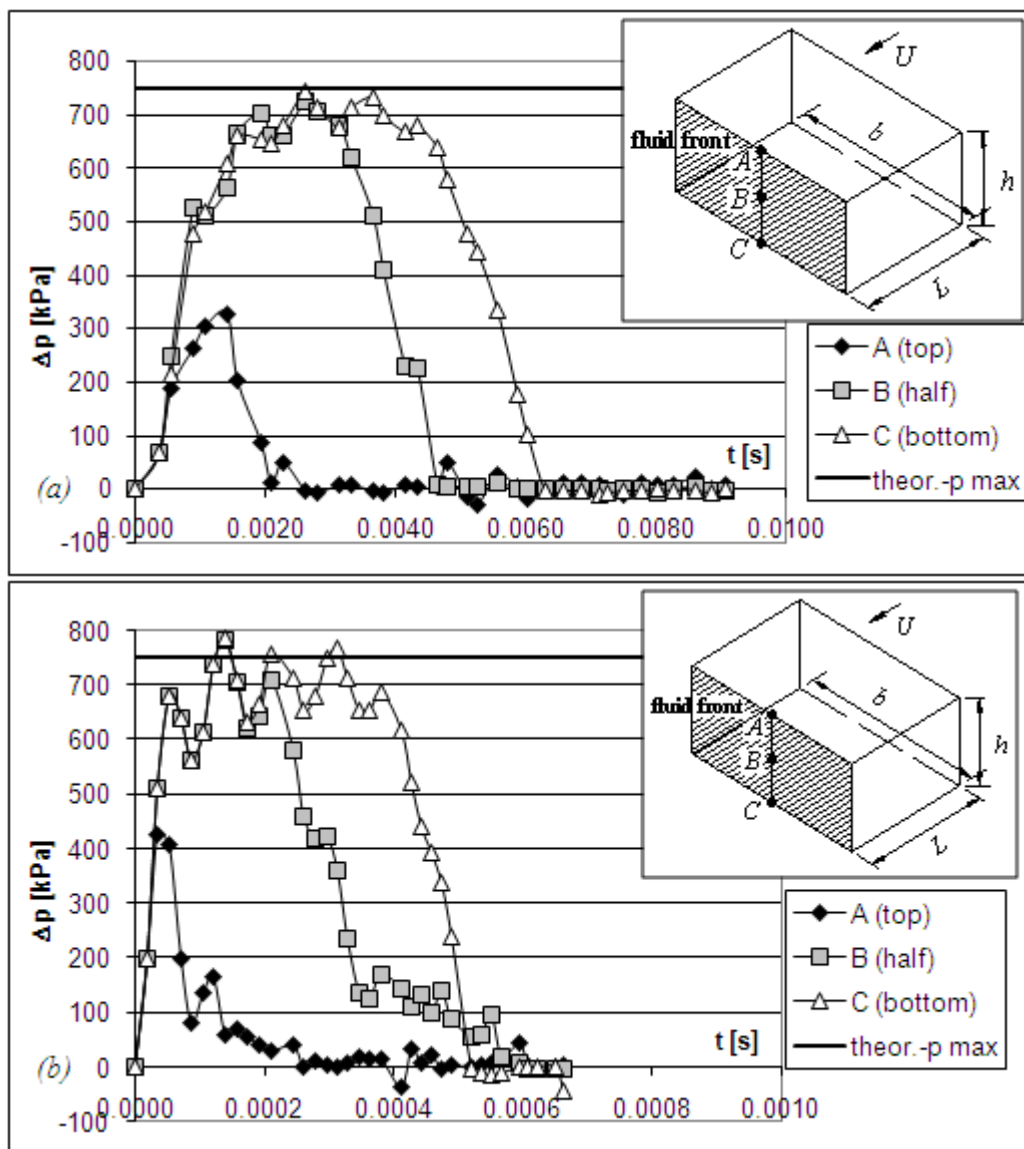
4.4 INTERPRETAZIONE DI DATI SPERIMENTALI RACCOLTI CON MODELLI A PICCOLA SCALA

I risultati delle analisi numeriche mostrano che lo sviluppo delle pressioni che si generano all'impatto sul fronte fluido variano a seconda della posizione sul fronte considerata.

A partire dalle porzioni in sommità, scendendo verso il basso, l'azione di confinamento sul fluido aumenta; la pressione massima agisce quindi più a lungo.

Le dimensioni degli apparati sperimentali usualmente utilizzati in laboratorio sembrano quindi assumere un ruolo fondamentale; se, con riferimento alla Fig. 4-34, l'altezza del fronte all'impatto è pari a 0.05 m (5 cm, un valore tipico nei test di laboratorio) l'incremento di pressione del punto A, il meno confinato, sul fronte, svanisce in un intervallo di tempo estremamente ridotto.

Si inoltre, che la posizione dei trasduttori di pressione, nelle sperimentazioni, è importante, come, del resto, la forma assunta dal fronte all'impatto (Fig. 4-34c, fronte inclinato, con altezza pari a 5 cm).



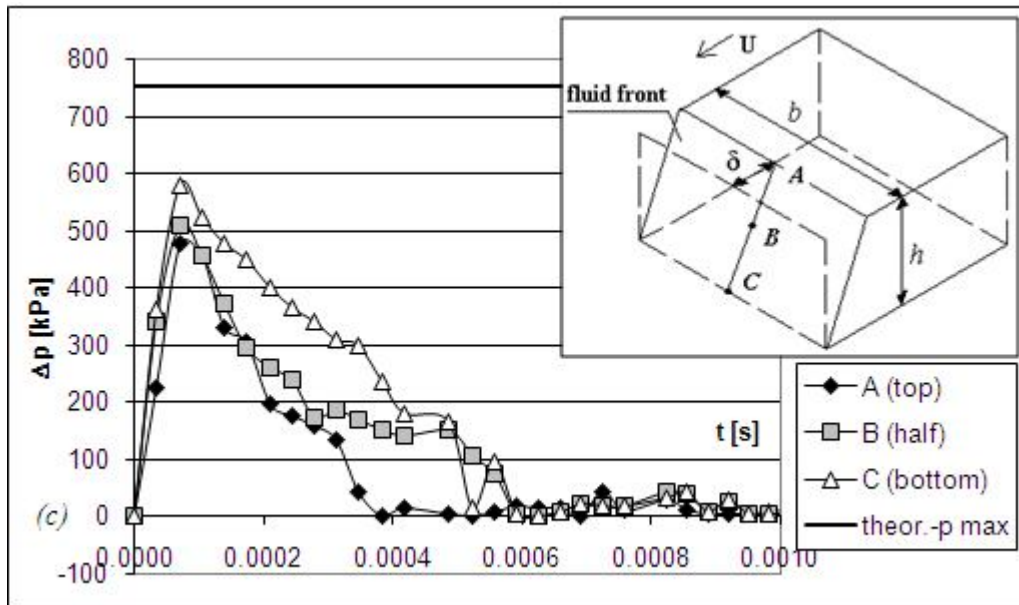


Fig. 4-34. Risultati del modello FEM in termini di sviluppo nel tempo delle pressioni d'impatto (Δp) sul fronte fluido, ottenute per $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $U = 5 \text{ m/s}$, $c_{00} = 150 \text{ m/s}$; (a) $H = 1 \text{ m}$; (b) $H = 0.05 \text{ m}$; (a) e (b) sono caratterizzate da scale temporali differenti.

B – IMPATTO DI BLOCCHI O CORRENTI DETRITICHE GRANULARI
CONTRO UNA STRUTTURA

5. ANALISI TEORICA DEL CONTATTO FRA SOLIDI

5.1 CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI RIVOLUZIONE CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

Il contatto fra due solidi elastici si attua inizialmente in corrispondenza di un punto o di un segmento. Sotto l'azione di un carico, anche minimo, i solidi si deformano, la zona di contatto si amplia e diventa un'area di dimensione finita, anche se in genere molto piccola se confrontata con le dimensioni dei corpi. Esistono in letteratura varie trattazioni teoriche che consentono di prevedere la forma e le dimensioni dell'area di contatto ed il modo in cui questa si sviluppa all'aumentare del carico.

La trattazione analitica del problema del contatto fra solidi in regime di elasticità lineare è sviluppata sulla base di alcune ipotesi semplificative sulla geometria dei corpi. Si assume che il punto di primo contatto sia l'origine di un sistema di coordinate ortogonali, dove il piano x-y è il piano comune tangente alle due superfici e l'asse z è ad esso normale diretto verso il corpo posto in basso (Fig. 5-1).

Ogni superficie è considerata liscia sia nella scala microscopica che macroscopica: ciò implica rispettivamente l'assenza di piccole irregolarità superficiali (che porterebbero a discontinuità nel contatto e nelle pressioni da esso derivanti) e di attrito (ipotesi che successivamente verrà rimossa), e che in prossimità del contatto le superfici siano continue fino al secondo ordine. Le espressioni analitiche delle due superfici nella vicinanza dell'origine, possono scriversi nel modo seguente:

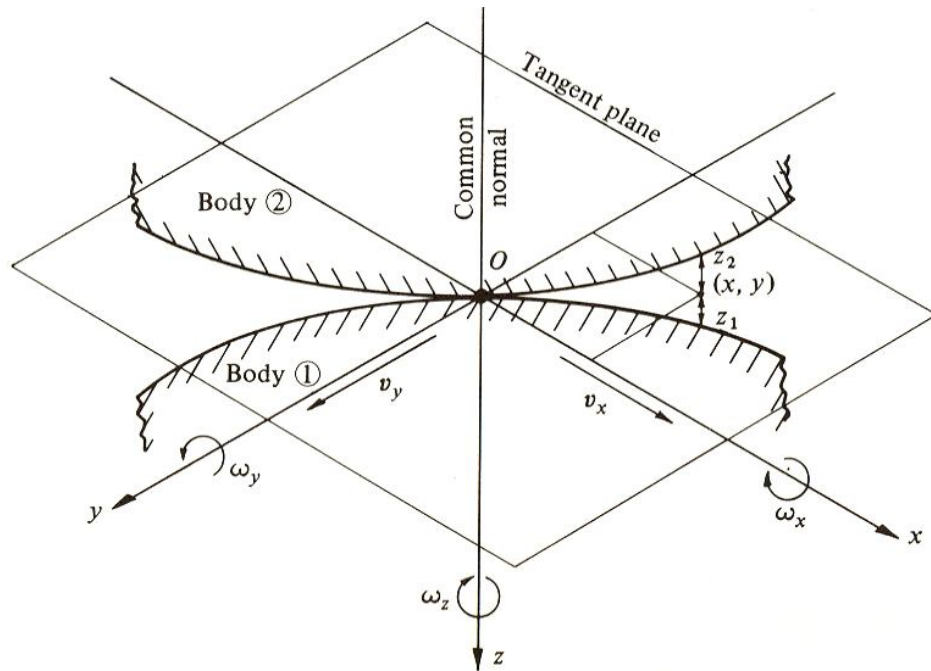


Fig. 5-1. Geometria del sistema composto da due sfere in contatto. Assonometria.

per la *superficie 1*:

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy + \dots \quad (5.1)$$

avendo trascurato i termini di ordine superiore; scegliendo un particolare orientamento degli assi x e y (che diventano così x_1 e y_1) si riesce a far scomparire nella precedente il termine in xy e si può scrivere:

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_1} y_1^2 \quad (5.2a)$$

dove R'_1 e R''_1 sono i raggi principali di curvatura della superficie nell'origine, cioè corrispondenti ai valori massimo e minimo dei raggi di tutte le sezioni trasversali passanti per l'origine.

Una simile espressione può essere scritta per la *superficie 2*:

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R'_2} x_2^2 + \frac{1}{2R''_2} y_2^2 \right) \quad (5.2b)$$

Di conseguenza, la separazione tra le due superfici è espressa dalla relazione $h = z_1 - z_2$.

A questo punto si aggiornano le (5.1) e (5.2a,b) riscrivendole con riferimento ad un sistema comune di assi x e y tali che

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2, \quad (5.3)$$

dove A e B sono due costanti positive e R' e R'' sono definiti come i raggi di curvatura principali *relativi*.

Legare gli assi principali di ogni superficie (cioè x_1 e x_2 , y_1 e y_2) è un'operazione semplice; se ad esempio x_1 e x_2 differiscono di un angolo α , si può dimostrare che:

$$(A+B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right) \quad (5.4)$$

e

$$|B-A| = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos 2\alpha \right]^{1/2} \quad (5.5)$$

Avvicinando le due superfici il valore di h diminuisce con continuità fino a che non entrano in contatto interagendo con forze superficiali di pressione. Facendo riferimento alla Fig. 5-2, si vede che proprio a causa di queste pressioni la superficie di ogni corpo subisce uno spostamento (lungo la direttrice Oz) pari rispettivamente a u_{z1} e u_{z2} , considerati positivi se entranti nei corpi e misurati rispetto a due punti distanti dall'area di contatto, T_1 e T_2 .

Se invece si prendono in considerazione i due punti S_1 e S_2 , distanti ($u_{z1} + u_{z2}$) prima del contatto e coincidenti a contatto avvenuto, si può scrivere:

$$u_{z1} + u_{z2} + h = \delta_1 + \delta_2. \quad (5.6)$$

Definendo la compressione $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ed usando la (5.3), si ottiene per gli spostamenti elastici:

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (5.7)$$

Nel caso di *solidi di rivoluzione*, le espressioni precedenti si semplificano in quanto $R_1' = R_1'' = R_1$ e $R_2' = R_2'' = R_2$; si ottiene quindi dalle (5.4) e (5.5):

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (5.8)$$

Le aree di contatto saranno inoltre di forma circolare, con raggio a .

E' semplice a questo punto riscrivere anche la (5.7), ottenendo:

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - \left(\frac{1}{2R} \right) r^2 \quad (5.9)$$

in cui $\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ è la curvatura relativa.

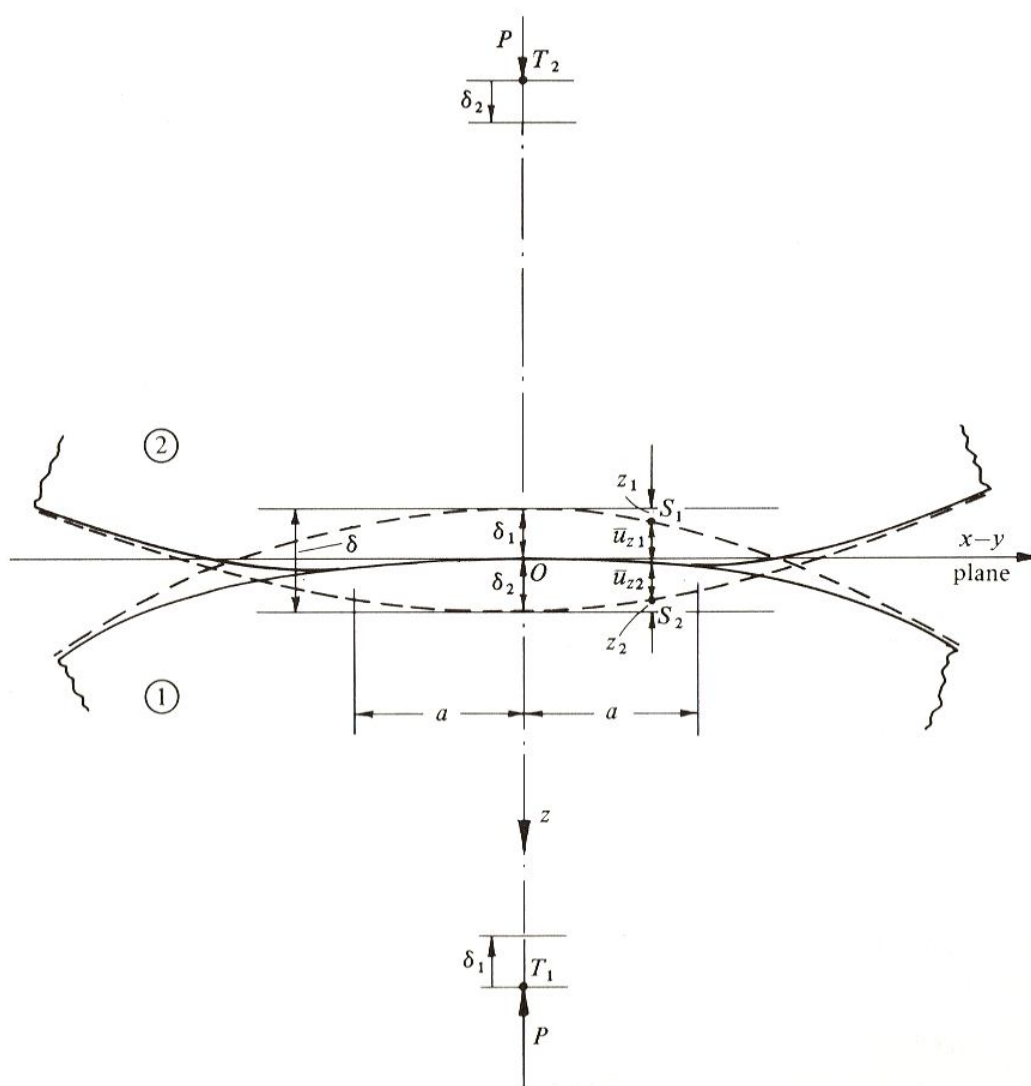


Fig. 5-2. Geometria del sistema di due sfere a contatto. Prospetto frontale.

Una distribuzione di pressioni che dà luogo a spostamenti che soddisfino la (5.9) è stata proposta da Hertz, ed ha la forma:

$$p(r) = p_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

dalla quale si risale al carico totale applicato P :

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi \cdot r dr = 2\pi \cdot p_0 a^2 / 3. \quad (5.11)$$

Sfruttando le notazioni di Fig. 5-3, si può risalire all'espressione analitica degli spostamenti in direzione normale di ogni singola superficie in elasticità lineare.

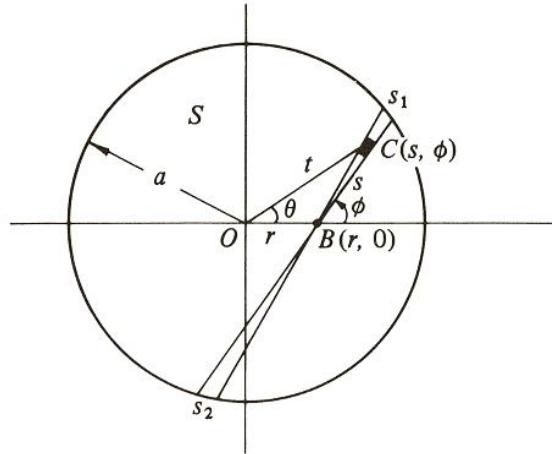


Fig. 5-3. Pressione applicata ad una regione circolare.

Per punti all'interno della regione di contatto, ad esempio C in Fig. 5.3, l'area infinitesima di integrazione è $(s \cdot ds \cdot d\phi)$. Quindi:

$$u_z(r) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S p \cdot ds d\phi \quad (5.12)$$

Per trasformare $p(r)$ in $p(\phi, s)$, dalla Figura 5.3 si evince che:

$$t^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \phi \quad (5.13)$$

quindi, $p(\phi, s) = \frac{p_0}{a} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2}$. Sostituendo quest'ultima espressione nella

(5.11), si ottiene, per $r < a$:

$$u_z(r) = \frac{1-v^2}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2) ds \quad (5.14)$$

con $s_1 = -r \cos \phi + \{r^2 \cos^2 \phi + (a^2 - r^2)\}^{1/2}$;

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds = \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}$$

Nella precedente relazione, una volta inserita nella (5.13), con l'integrazione in ϕ tra 0 e 2π , scompaiono i termini $\beta\alpha$ e $\tan^{-1}(\beta/\alpha)$. Si ottiene dunque, per $r < a$:

$$u_z(r) = \frac{1-v^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (5.15)$$

A questo punto, calcolando u_{z1} , u_{z2} , e ponendo

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}$$

si può tornare alla (5.9), dalla quale si ottiene:

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \left(\frac{1}{2R} \right) r^2, \quad (5.16)$$

che ci permette di ricavare

— il *raggio dell'area circolare di contatto*:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*}, \quad (5.17)$$

— l'*avvicinamento mutuo di due punti distanti* sui due solidi:

$$\delta = \frac{\pi p_0}{2E^*} \quad (5.18)$$

In realtà, nei problemi pratici, la quantità nota è il carico totale esterno applicato, P . Per questo motivo conviene usare la (5.11) in combinazione con le (5.17), (5.18), per ricavare le seguenti:

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (5.19)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \quad (5.20)$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE^*}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (5.21)$$

5.2 CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI FORMA GENERICA CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

Nei casi più generali, nei quali la separazione è espressa dalla (5.3), la forma dell'area di contatto non è nota a priori. Tuttavia, si può assumere che essa sia di forma approssimativamente ellittica, con semiassi a e b .

Hertz riconobbe in questo problema un'analogia col potenziale elettrostatico: una carica, la cui intensità su una regione ellittica su una superficie di un conduttore vari con le coordinate di un semiellissoide, dà origine ad una variazione del potenziale sulla superficie in modo parabolico; allo stesso modo, la seguente distribuzione di pressione

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

determina spostamenti all'interno della regione di contatto semiellittica del tipo:

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} (L - Mx^2 - Ny^2)$$

Per entrambi i corpi si ottiene:

$$u_{z1} + u_{z2} = \frac{1}{\pi E^*} (L - Mx^2 - Ny^2)$$

che soddisfa la condizione

$$u_{z1} + u_{z2} = (\delta - Ax^2 - By^2)$$

nella quale:

$$A = \frac{M}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} \frac{b}{e^2 a^2} \{ \mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e) \}$$

$$B = \frac{N}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} \frac{b}{e^2 a^2} \left\{ \frac{a^2}{b^2} \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e) \right\}$$

$$\delta = \frac{L}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} \{ b \mathbf{K}(e) \}$$

dove $\mathbf{E}(e)$ ed $\mathbf{K}(e)$ sono integrali ellittici rispettivamente di prima e seconda specie di argomento $e = (1 - b^2/a^2)$, $a > b$.

Il carico totale risulta quindi

$$P = \frac{2}{3} p_0 \pi ab ,$$

mentre la compressione risulta pari a

$$\delta = \frac{3P}{2\pi ab E^*} b K(e) .$$

5.3 CONTATTO NORMALE FRA SOLIDI DI RIVOLUZIONE CON COMPORTAMENTO NON ELASTICO

5.3.1 INDENTAZIONE ELASTO-PLASTICA – FORMULAZIONI BASE

E' noto che il comportamento dei corpi nelle normali condizioni può essere considerato elastico lineare solamente all'interno di un certo range di tensioni. Prendendo infatti un provino di materiale e sottoponendolo ad una prova di trazione si raggiunge un punto, la cui tensione è detta di *snervamento*, a partire dal quale c'è un accumulo di deformazioni plastiche, cioè permanenti.

Lo snervamento della maggior parte dei materiali è ben interpretato dal criterio di *von Mises*, per il quale

$$\frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} = k^2 = \frac{Y^2}{3} , \quad (5.22)$$

oppure da quello di *Tresca*, per il quale

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = 2k = Y ; \quad (5.23)$$

nelle precedenti due espressioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rappresentano le tensioni principali, k la tensione di snervamento in una prova di taglio semplice e Y la tensione di snervamento in trazione (o compressione, che nelle considerazioni a venire sarà considerata costante). Tra i due criteri quello di von Mises è più attendibile, anche se la differenza non è molto notevole. Per quest'ultimo motivo, e vista la semplicità analitica della sua espressione, il criterio di Tresca verrà preso in considerazione.

Considerando solidi di rivoluzione come le sfere, sottoposti a carichi simmetrici rispetto all'asse, si ricade nella situazione descritta nel paragrafo 2.1.1, in cui si aveva una superficie caricata circolare, quella di Fig. 5-3, di raggio a . La tensione di taglio massima viene raggiunta sotto la superficie del materiale più soffice. Infatti le tensioni principali lungo questo asse, σ_z, σ_r e σ_θ , assumono i valori:

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = -(1+\nu) \left\{ 1 - \frac{z}{a} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (5.24)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = - \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (5.25)$$

Questa distribuzione di tensioni è ben illustrata in Fig. 5-4, dove è confrontata con quella causata da una pressione uniforme sull'area circolare di raggio a . In figura è riportato anche l'andamento della tensione di taglio principale, τ_1 , lungo l'asse z ; essendo $\sigma_r = \sigma_\theta$, si ha

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|.$$

Con la distribuzione di pressioni alla Hertz ed assunto un valore di ν pari a 0.3, quindi:

$$(\tau_1)_{\max} = 0.31 p_0 = 0.47 \frac{P}{\pi a^2} \quad (5.26)$$

alla profondità $z = 0.57a$.

Il valore massimo di $|\sigma_r - \sigma_\theta|$ quindi è, sempre per $\nu = 0.3$, $0.62 p_0$. inserendo questo valore nell'espressione del criterio di Tresca, (5.23), si ottiene:

$$p_0 = 3.2k = 1.6Y. \quad (5.27)$$

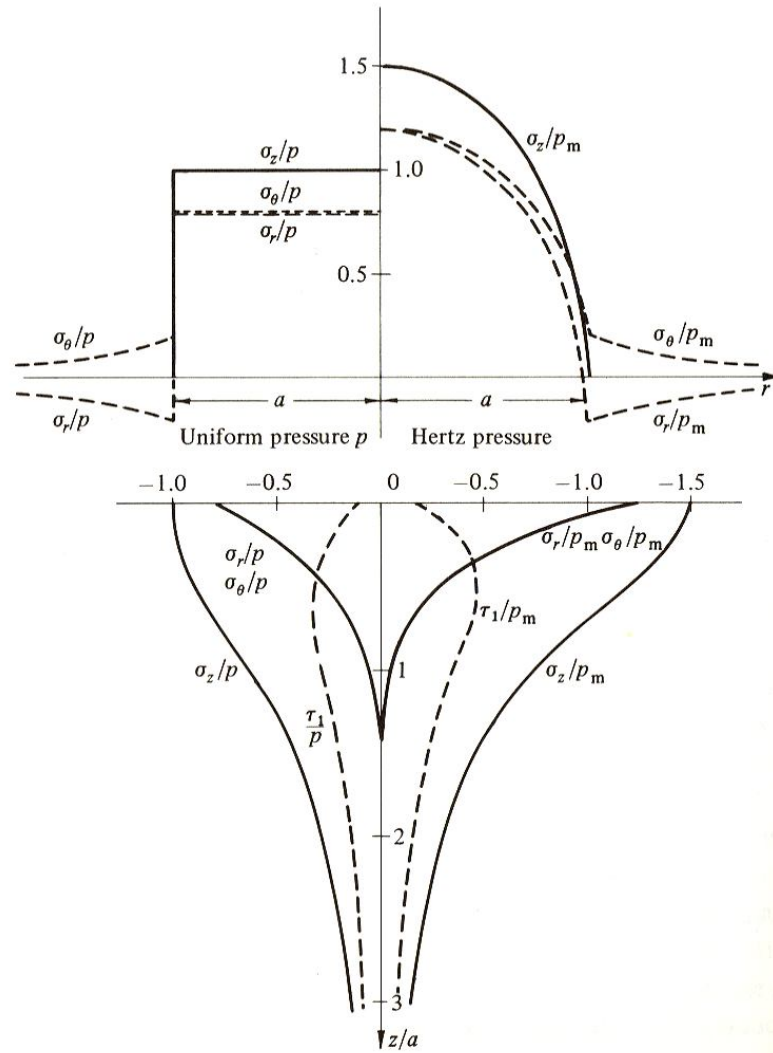


Fig. 5-4 . Distribuzione degli sforzi sulla superficie e lungo l'asse di simmetria causata (a sinistra) da pressione uniforme e (a destra) pressione alla Hertz agente su un'area circolare di raggio a .

Quindi, il carico per il quale si ha snervamento secondo Tresca, indicato con P_Y , si può ricavare dalla combinazione della (5.27) e della (5.21):

$$P_Y = \frac{\pi^3 R^2}{6E^{*2}} (p_0)_Y^3 = 0.68 \frac{\pi^3 R^2}{E^{*2}} Y^3. \quad (5.28)$$

5.3.2 INDENTAZIONE ELASTO-PLASTICA – APPLICAZIONI

5.3.2.1 Fase di contatto

L'elasticità dei materiali reali gioca un ruolo fondamentale nei processi di indentazione plastica. Appena la tensione di snervamento è raggiunta la zona plastica è molto piccola e completamente circondata da materiale elastico, cosicché le deformazioni plastiche sono dello stesso ordine di grandezza di quelle elastiche circostanti: in questa fase il materiale spostato dal corpo incidente si assesta grazie alla deformazione elastica del materiale che lo delimita. Quando l'indentazione diventa più importante c'è bisogno di una pressione crescente al di sotto dell'corpo incidente per produrre la necessaria espansione; al limite il materiale plastico esce sulla superficie libera ed il materiale è libero di uscire (flusso plastico) dai lati del corpo incidente: da questo punto in poi le deformazioni plastiche diventano così elevate che il comportamento del materiale può essere considerato perfettamente plastico.

Contatto fra solidi rigidi perfettamente plastici

Un corpo rigido perfettamente plastico quando è sottoposto a carichi elevati comprende regioni in cui c'è flusso plastico e zone dove, per l'ipotesi di rigidità, le deformazioni sono nulle.

Lo stato tensionale entro la regione di flusso plastico può essere rappresentato da un campo cosiddetto *slip-line*. Le *slip-line* sono disegnate parallele alle direzioni principali della tensione di taglio, cioè inclinate di 45° rispetto alle tensioni principali σ_1 , σ_2 , σ_3 : quindi si può dire che consistono in un set di curve α e β tra loro perpendicolari in ogni punto (Fig. 5-5). Dato che la compressibilità elastica è trascurata, la tensione principale σ_3 , agente nella direzione perpendicolare al piano della deformazione, è data da:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.29)$$

dove ovviamente σ_1 e σ_2 sono le tensioni agenti nel piano della deformazione.

L'espressione assunta da entrambi criteri di Tresca e von Mises, è:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \quad (5.30)$$

dove però per Tresca $k=Y/2$, mentre per von Mises $k = Y / \sqrt{3}$.

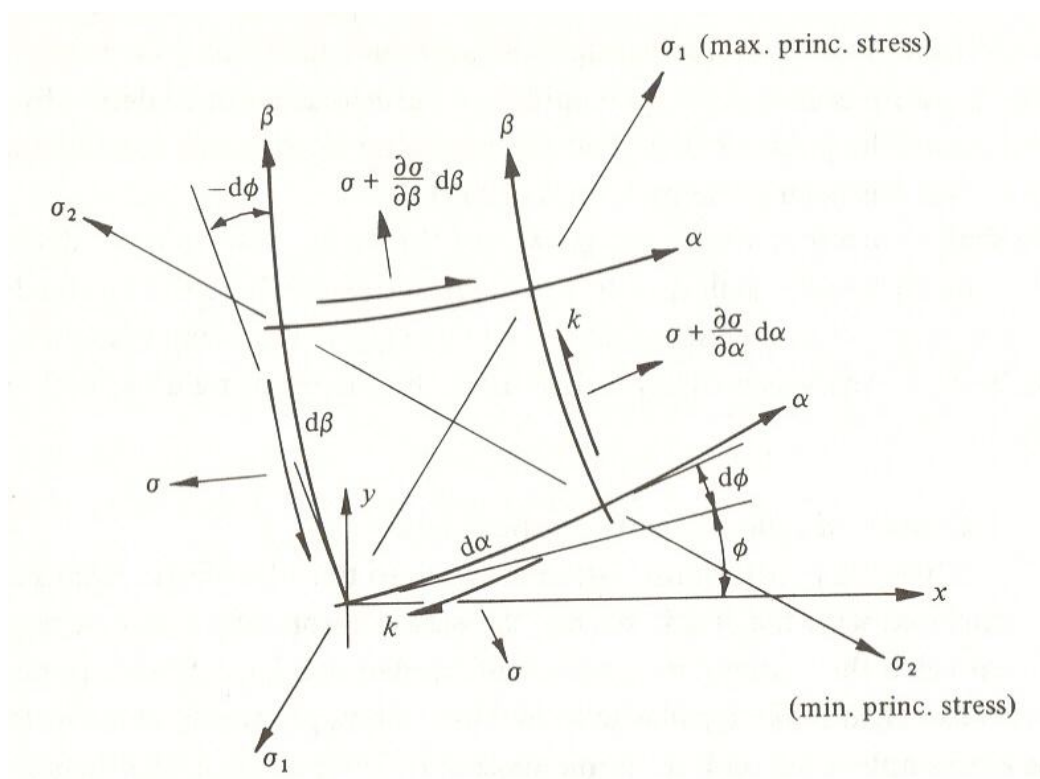


Fig. 5-5. Tensioni su un elemento circondato da slip-lines.

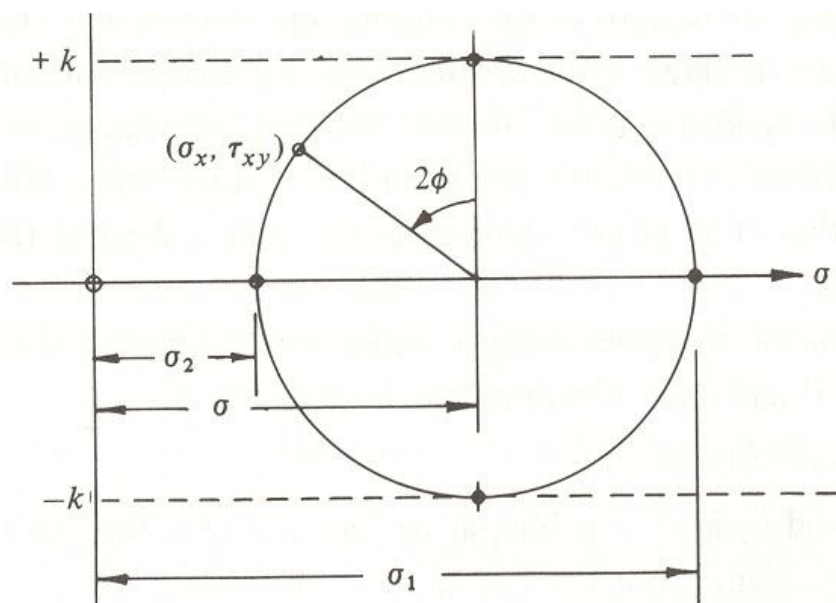


Fig. 5-6. cerchi di Mohr relativi allo stato tensionale precedentemente considerato.

Quindi, globalmente lo stato tensionale nella zona plastica comprende una tensione variabile σ pari a $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ e una tensione di taglio puro k nel piano della deformazione. Questo stato di deformazione è rappresentato dal cerchio di Mohr di Fig. 5-6: esso è centrato in σ ed ha raggio k costante. Considerando l'equilibrio dell'elemento in Fig. 5-5, sottoposto all'azione di σ e k , si ottiene nella direzione data dalle linee α :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \quad (5.31a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0 \quad (5.31b)$$

mentre nella direzione delle β :

$$\sigma - 2k\phi = \text{cost} \quad \text{lungo una linea } \alpha \quad (5.32a)$$

$$\sigma + 2k\phi = \text{cost} \quad \text{lungo una linea } \beta \quad (5.32b)$$

Quindi, partendo da un punto sulla superficie di tensione nota, tramite le (5.32a,b) si riesce a risalire alla tensione σ in tutto il corpo seguendo le *slip-line*.

Le equazioni costitutive dei corpi elasto-plastici correlano la tensione a piccole variazioni della deformazione: conviene prendere in considerazione un piccolo intervallo di tempo dt e riferirsi poi alle velocità di deformazione.

Con la convenzione sugli sforzi tale che quelli di trazione sono positivi e quelli di compressione negativi, si vede che l'elemento di Fig. 5-5 si allunga lungo la direzione di tensione principale massima e si accorcia lungo la direzione della minima. A volume costante vale la: $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$.

Lungo la direzione data dalle slip-line invece non c'è variazione di lunghezza, e così risulta più semplice pensare ad esse come un set di linee inestensibili. Se si costruisce un diagramma vettoriale con le velocità dei punti nella zona deformabile questa inestensibilità delle slip-lines si riflette nel fatto che il vettore velocità di un segmentino di queste linee deve essere ad esse perpendicolare.

La pressione media alla quale viene raggiunto il flusso plastico ha una forma del tipo:

$$p_m = cY \quad (5.33)$$

dove $p_m = P/\pi ab$, e c ha un valore che si aggira intorno a 3, essendo dipendente dalla forma delle superfici in contatto. Inoltre è ovvio dedurre che si ha snervamento quando nella (5.33) c assume valori intorno all'unità (per superfici sferiche è pari a 1.1): esiste quindi una serie di

valori di transizione di c , compresi tra 1 e 3, per i quali il flusso plastico è confinato da materiale elastico.

La teoria che descrive in maniera rigorosa il problema dell'indentazione elasto-plastica è molto complessa; un approccio semplificato, seguito da Marsh (1964) e Johnson (1970), si basa sull'assunzione che le deformazioni prodotte da un corpo incidente al di sotto di una superficie con cui è in contatto sono approssimativamente radiali a partire dal punto di primo contatto (vedi Fig. 5-7).

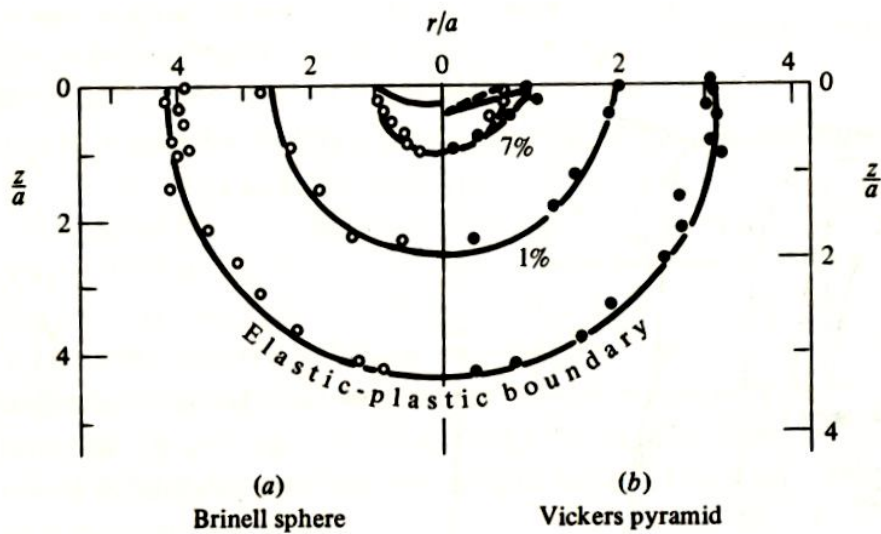


Fig. 5-7. Dati sperimentali di deformazioni dovute a indentazione; (a) sfera ($a/R = 0.51$); (b) piramide.

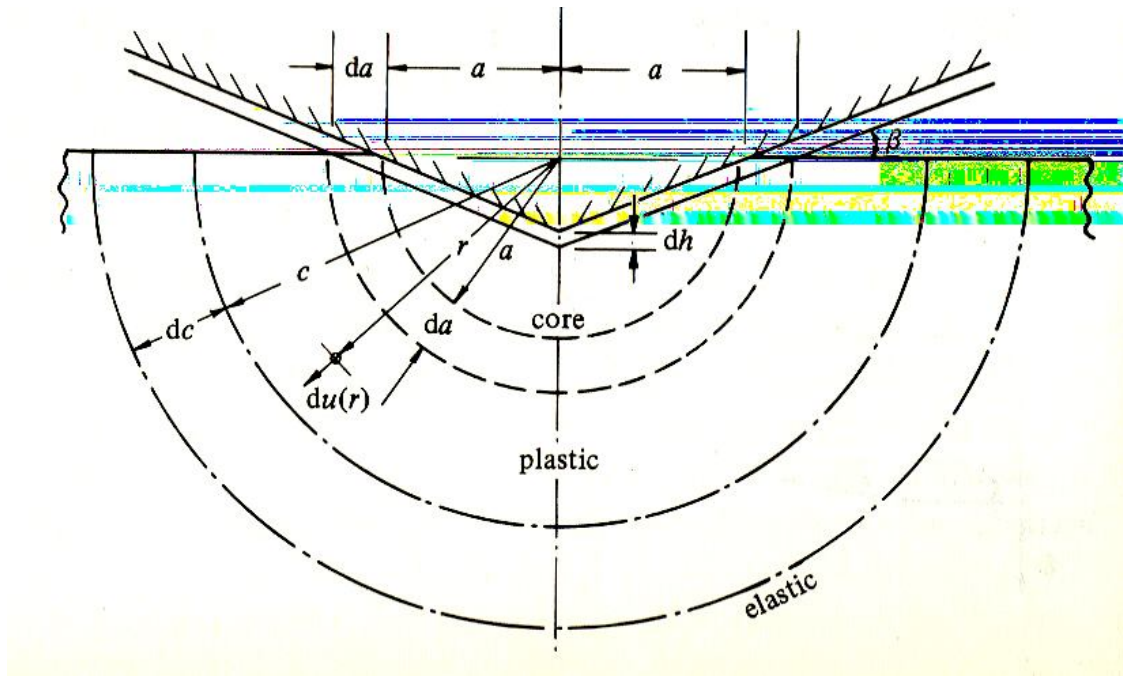


Fig. 5-8. Modello di cavità in caso di penetrazione di un cono in un materiale a comportamento elasto-plastico.

In questo modello semplificato si assume che la superficie di contatto del corpo incidente sia allocata in un *nucleo* di raggio a (Fig. 5-8). all'interno di questo nucleo si assume che ci sia uno stato tensionale idrostatico dato da $\bar{p}$. All'esterno del nucleo si suppone invece che tensioni e spostamenti assumano una simmetria radiale, e siano come quelli presenti in un corpo elastico, perfettamente plastico, contenente una cavità caricata da una pressione $\bar{p}$.

Il limite elasto-plastico giace ad una distanza c , con $c > a$. all'interfaccia tra il nucleo e la zona plastica la tensione idrostatica nel nucleo è pari alla tensione radiale della zona esterna, e lo spostamento radiale di punti sulla superficie $r=a$ in un avanzamento di penetrazione dh deve accomodare il volume di materiale spostato dal corpo incidente.

Le tensioni nella zona plastica ($a \leq r \leq c$) sono:

$$\frac{\sigma_r}{Y} = -2 \ln\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{2}{3} \quad (5.34a)$$

Nella zona elastica invece ($r > c$):

$$\frac{\sigma_r}{Y} = -\frac{2}{3} \left(\frac{c}{r}\right)^3 \quad (5.35a)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{Y} = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{r}\right)^3 \quad (5.35b)$$

Al limite del nucleo:

$$\frac{\bar{p}}{Y} = - \left[\frac{\sigma_r}{Y} \right]_{r=a} = \frac{2}{3} + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) \quad (5.36)$$

mentre lo spostamento radiale è dato da (Hill, 1950):

$$\frac{du(r)}{dc} = \frac{Y}{E} \left\{ 3(1-\nu) \left(\frac{c^2}{r^2} \right) - 2(1-2\nu) \left(\frac{r}{c} \right) \right\} \quad (5.37)$$

Sempre con riferimento alla Fig. 5-8, la conservazione del volume prevede che:

$$2\pi \cdot a^2 \cdot du(a) = \pi a^2 \cdot dh = \pi a^2 \tan \beta \cdot da \quad (5.38)$$

dove β è l'angolo tra la faccia dell'corpo incidente e la superficie piana che esso tocca.

Per un corpo incidente di *forma sferica* si pone $\tan \beta \approx \sin \beta = \frac{a}{r}$, valore variabile nel corso della penetrazione. L'integrazione delle (5.46) e (5.47), con $c/a = 1$ nell'istante dello snervamento ($p_m = 1.1 Y$) porta alla:

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 0.13 \cdot \left\{ 1 + \ln \left(\frac{1}{3} \frac{E \tan \beta}{Y} \right) \right\} \quad (5.39)$$

Per avere un'idea infine del valore della penetrazione δ in funzione del carico P , per un corpo incidente di superficie sferica:

$$\frac{\delta}{\delta_Y} = 0.148 \left(\frac{\delta E^{*2}}{R Y^2} \right) \quad (5.40a)$$

$$\frac{P}{P_Y} = 0.043 \left(\frac{P E^{*2}}{R^2 Y^3} \right) \quad (5.40b)$$

dove con P_Y si è indicato il carico di snervamento, dato dalla (5.28); lo spostamento δ_Y invece è derivato dalla (5.20), relazione introdotta in elasticità, con P_Y al posto di P .

Una regola approssimata, ma valida ai fini pratici, lega per il contatto fra sfere la penetrazione al raggio della sfera e al raggio della superficie di contatto:

$$\delta = \frac{a^2}{2R} \quad (5.41)$$

5.3.2.2 Fase di distacco

Nel contatto fra solidi elastici si considera il processo di scarico come simmetrico rispetto alla fase di carico: tensioni e deformazioni sono indipendenti dalla storia del carico stesso. In

realtà, a causa ad esempio della presenza di attriti e scorrimenti tra le due superfici, questa reversibilità perfetta può essere persa.

Nel caso in cui si consideri poi un materiale elastico sottoposto a cicli di carico, l'isteresi interna del materiale diventa un importante fattore da tenere in considerazione; lo si fa esaminando il rapporto tra l'energia dissipata in ogni ciclo (ΔW), e la massima energia di deformazione elastica del ciclo W : questo rapporto verrà indicato come α .

Si ha:

$$W = \int P \cdot d\delta ;$$

nel caso di due superfici sferiche che entrano in contatto, sfruttando la (5.20):

$$W = \frac{2}{5} \left(\frac{9E^*{}^2 P^5}{16R} \right)^{1/3} \quad (5.42)$$

A questo punto si può affermare che con buona approssimazione l'energia persa in ogni ciclo di carico, da zero al carico massimo e poi di nuovo a zero, è data da:

$$\Delta W = \alpha W;$$

in ogni caso questo effetto può essere spesso trascurato: per l'acciaio ad esempio α vale circa 0.4%.

Quando i carichi cominciano ad essere elevati, la differenza tra carico e scarico comincia ad essere rilevante. Una semplice evidenza di questo fatto è stata riportata da Tabor (1948), che fece osservazioni sul fenomeno della penetrazione di sfere di acciaio di raggio R pressate su superfici piane più molli. L'indentazione sotto carico ha un raggio R' leggermente maggiore rispetto a R a causa della compressione elastica della sfera.

Quando il carico è rimosso nell'indentazione rimane un raggio $\rho > R'$, dovuto ad un recupero elastico della superficie. Si può correlare questa curvatura plastica al raggio della sfera nel caso in cui il carico P non sia troppo elevato (e poter applicare, approssimando, le formule Hertziane) ricordando che ρ , essendo concavo, è negativo:

$$4a^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) = 3 \frac{P}{E^*}$$

relazione che soddisfa i dati sperimentali di Tabor.

Si può infine valutare il recupero elastico della superficie piana δ' in termini di pressione di contatto media:

$$\delta'^2 = \frac{9\pi}{16} \frac{P \cdot p_m}{E^{*2}} \quad (5.43)$$

per poter eventualmente stimare la penetrazione finale $(\delta - \delta')$ con l'ausilio della (5.41).

6. ANALISI TEORICHE DELL'IMPATTO TRA SOLIDI

6.1 SOLIDI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

Fino ad ora il problema del contatto fra solidi elastici è stato analizzato in condizioni statiche. Si analizzano adesso le caratteristiche di un impatto, nel caso in cui le forze siano applicate con velocità elevate, tali da destare effetti dinamici spesso non trascurabili. Le forze appena menzionate sono essenzialmente forze d'inerzia. Nelle analisi dinamiche, tali forze sono portate in conto aggiungendo nelle equazioni dell'equilibrio statico termini pari al prodotto della densità ρ dei corpi per l'accelerazione del punto materiale $\partial^2 u / \partial t^2$. Il sistema completo è costituito da queste equazioni, dalle condizioni di compatibilità e dalle leggi costitutive che legano tensione e deformazione. Le soluzioni del sistema di equazioni così ottenuto sono interpretabili come onde elastiche che si muovono nel corpo con velocità caratteristiche.

Per introdurre il concetto di onde tensionali si ricorre ad un esempio monodimensionale: l'onda di compressione di intensità $-\sigma$ che viaggia in un'asta elastica fissa (Fig. 6-1) a partire dall'estremità sinistra, ad esempio.

In un tempo infinitesimo dt , l'onda avrà percorso uno spazio dx pari a $c_0 dt$; l'elementino di volume ($A dx$), a causa della onda di pressione acquisterà una velocità v ; il bilancio della quantità di moto dell'elementino si scrive:

$$-\sigma A dt = (\rho A \cdot dx) \cdot v = A \rho c_0 V dt$$

cioè, dopo le opportune semplificazioni:

$$\sigma = -\rho c_0 v.$$

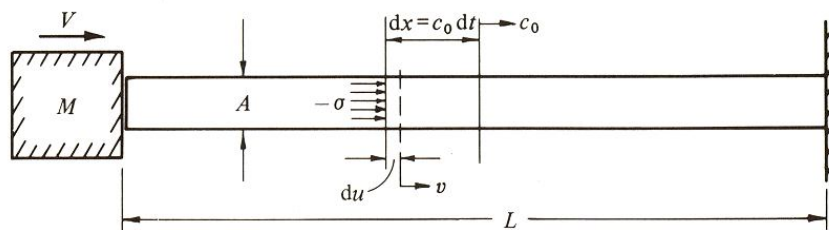


Fig. 6-1. Impatto di una massa M dotata di velocità V su un'asta elastica. L'onda di compressione, di intensità $-\sigma$, si propaga lungo l'asta con velocità c_0 .

La sua deformazione sarà pertanto una compressione :

$$-\frac{du}{dx} = -\frac{v \cdot dt}{c_0 \cdot dt} = -\frac{\sigma}{E}$$

Dalla precedente, si ottiene con le opportune semplificazioni il valore di c_0 :

$$c_0 = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

che è quindi una velocità caratteristica dell'onda di compressione all'interno del materiale. Si può collegare questo risultato all'urto tra l'asta ed una massa M dotata di velocità V , come illustrato in Fig. 6-1. Subito dopo l'impatto, l'estremità sinistra dell'asta acquisterà una velocità V , ed un'onda elastica di compressione comincerà a muoversi verso destra con velocità c_0 espressa dalla (3.1). Lo stress iniziale di compressione sarà proprio $\sigma = -\rho \cdot c_0 \cdot V$.

Ovviamente il precedente esempio è basato su varie semplificazioni, in particolare l'ipotesi di elasticità lineare dell'asta. In realtà, durante gli impatti, spesso le tensioni raggiungono livelli molto elevati, e le deformazioni non elastiche svolgono un ruolo importante. Inoltre, considerando corpi elastici tridimensionali, sono possibili due tipi di onde elastiche: le onde di *pressione*, che causano solo deformazioni volumetriche e onde *distorsionali*, che determinano distorsioni, in assenza di deformazioni volumetriche. Le velocità di propagazione di queste onde sono:

$$\text{onde di pressione: } c_1 = \left\{ \frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\rho} \right\}^{1/2}$$

$$\text{onde distorsionali: } c_2 = \left(\frac{G}{\rho} \right)^{1/2}$$

Si osservi tuttavia che la teoria sviluppata da Hertz per l'urto tra due solidi elastici lineari non tiene conto delle onde elastiche, poiché si ammette l'ipotesi che il fenomeno, di carattere dinamico, sia equivalente ad una successione di fenomeni *statici*: si considera il processo dinamico di carico come una serie di stati statici successivi. I due corpi che collidono sono considerati come due corpi indeformabili, interagenti tramite due molle elastiche, dove si concentra la deformazione. La validità di tale ipotesi sarà verificata in seguito.

Urto centrale fra sfere elastiche

Si considerino due sfere di massa m_1 e m_2 che, muovendosi con velocità v_{z1} e v_{z2} lungo la linea congiungente i due centri, urtano in O (Fig. 6-2). Si può ipotizzare inizialmente che sia $v_{x1} = v_{x2} = 0$, $\omega_{y1} = \omega_{y2} = 0$.

Durante l'impatto, a causa delle deformazioni elastiche, i loro centri si avvicinano della quantità δ_z . la loro velocità relativa è

$$v_{z2} - v_{z1} = \frac{d\delta_z}{dt}$$

e la forza che si trasmettono istante per istante, in assenza di attrito, è data solamente dalla $P(t)$ agente nella direzione data dalla congiungente i due centri.

Inoltre:

$$P = m_1 \frac{dv_{z1}}{dt} = -m_2 \frac{dv_{z2}}{dt}$$

e

$$-\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} P = \frac{d}{dt}(v_{z2} - v_{z1}) = \frac{d^2 \delta_z}{dt^2} \quad (6.2)$$

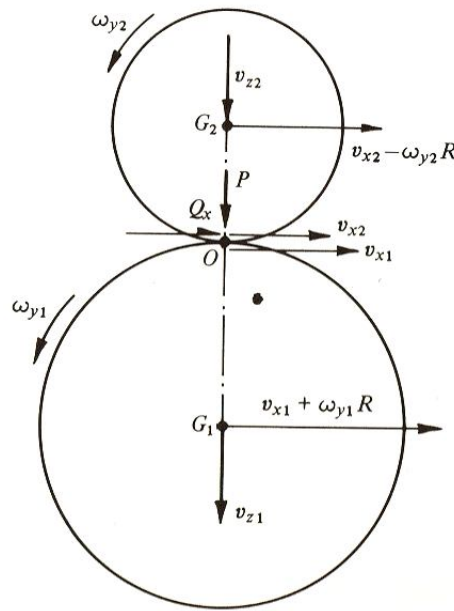


Fig. 6-2. Impatto tra sfere. Geometria.

A questo punto si formula l'ipotesi di processo quasi-statico, prendendo in considerazione la relazione che lega P e δ_z nel caso di contatto statico:

$$P = \frac{4}{3} R^{1/2} E^* \delta_z^{3/2} = K \delta_z^{3/2} \quad (6.3)$$

dove: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ e $\frac{1}{E^*} = \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$.

Scrivendo poi $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, si ottiene:

$$m \frac{d^2 \delta_z}{dt^2} = -K \delta_z^{3/2} \quad (6.4)$$

che integrata rispetto a δ_z fornisce la relazione:

$$\frac{1}{2} \left\{ V_z^2 - \left(\frac{d\delta_z}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{2}{5} \frac{K}{m} \delta_z^{5/2}$$

dove $V_z = (v_{z2} - v_{z1})_{t=0}$, velocità relativa d'impatto. Al momento della massima compressione

poi, $\delta_z = \delta_z^*$ e $\frac{d\delta_z}{dt} = 0$, quindi:

$$\delta_z^* = \left(\frac{5mV_z^2}{4K} \right)^{2/5} = \left(\frac{15mV_z^2}{16R^{1/2}E^*} \right)^{2/5} \quad (6.5)$$

e per il valore della massima forza di compressione che i due corpi si trasmettono, P^* , si sfrutta la (6.3):

$$P^* = K \delta^{*3/2} = \left(1.514 \cdot m V_z^2 E^{*2/3} R^{1/3} \right)^{3/5} \quad (3.6)$$

La curva che lega compressione e tempo è trovata tramite una seconda integrazione della (6.4), che porta alla:

$$t = \frac{\delta_z^*}{V_z} \int \frac{d(\delta_z/\delta_z^*)}{\left\{ 1 - (\delta_z/\delta_z^*)^{5/2} \right\}^{1/2}} \quad (6.7)$$

Questo integrale è stato risolto numericamente da Deresiewicz (1968) e convertito in una curva con la forza $P(t)$ (adimensionalizzata rispetto a P^*) in funzione del tempo (anch'esso adimensionalizzato, ma rispetto a t^*) come mostrato in Fig. 6-2.

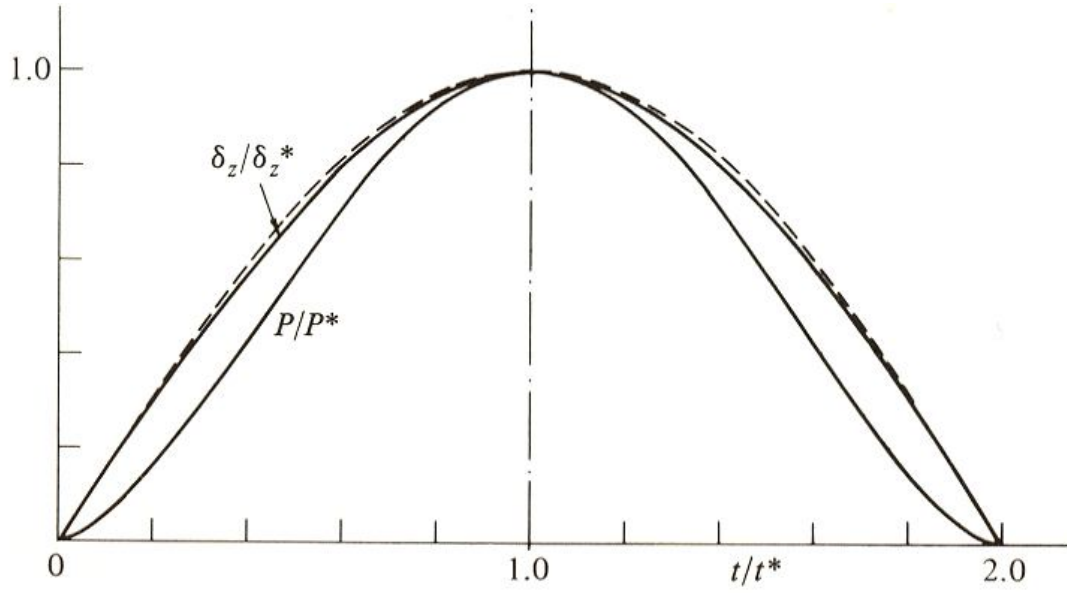


Fig. 6-3. Variazione della compressione δ_z e della forza P , entrambe adimensionalizzate, nel tempo; tratteggiato, è riportato l'andamento della funzione $f = \sin (\pi t/2t^*)$.

Subito dopo l'istante di compressione massima, t^* , le sfere ricominciano ad espandersi; visto che sono perfettamente elastiche, non c'è attrito, e l'energia assorbita dal movimento delle onde è trascurabile, la deformazione è perfettamente reversibile. Quindi è semplice calcolare il tempo totale dell'impatto, T_c :

$$T_c = 2t^* = \frac{2\delta_z^*}{V_z} \int_0^1 \frac{d(\delta_z / \delta_z^*)}{\{1 - (\delta_z / \delta_z^*)^{5/2}\}^{1/2}} = 2.946 \frac{\delta_z^*}{V_z} = 2.87 \left(\frac{m^2}{RE^{*2} V_z} \right)^{1/5} \quad (6.8)$$

L'analisi appena conclusa, i cui risultati sono validi per corpi caricati su una regione circolare, può essere applicata a corpi aventi profili generici: per essi infatti basta considerare (nell'equazione (6.3)) un parametro K consono, cioè quello derivante dall'analisi svolta nel paragrafo 2.1.3.

A questo punto rimane da verificare la validità dell'assunzione della quasi-staticità della trasformazione, su cui tutta la teoria di Hertz è basata.

Secondo Love (1952) bisogna tenere in conto la durata dell'impatto: se questo è abbastanza lungo da permettere alle onde di viaggiare da un estremo all'altro dei corpi diverse volte il processo può essere considerato quasi-statico. Per corpi come le sfere, il tempo necessario ad un'onda per viaggiare da un estremo all'altro è $4R/c_0$. Il tempo dell'impatto, dato dalla (6.8), può essere riscritto, tenendo conto della (6.1), come $5.6(R^5/c_0^4 V_z)^{1/5}$; quindi il rapporto tra tempo di contatto e tempo dell'onda è dell'ordine di $(V_z/c_0)^{1/5}$: secondo il criterio

di Love, affinché la trasformazione sia quasi statica questo rapporto deve risultare minore dell'unità.

Ovviamente il precedente criterio non è più applicabile quando si prendono in considerazione corpi estesi tridimensionali, di dimensioni tali che l'onda non riesce a tornare al punto d'impatto! Hunter (1956) ha studiato un altro approccio: la risposta dinamica di un semispazio elastico può essere simulata sostituendo al semispazio un sistema molla-smorzatore in parallelo: lo smorzatore serve per simulare l'assorbimento dell'energia delle onde da parte del semispazio elastico. Le relazioni (6.3) e (6.7) legano tra loro la forza $P(t)$, la deformazione δ_z ed il tempo t : in figura 6.6 è riportato, oltre all'andamento di P/P^* in funzione di t/t^* , il grafico della curva

$$P(t) = P^* \sin \omega t = P^* \sin (\pi t / 2t^*) \quad (3.9)$$

Si vede bene come i due siano abbondantemente sovrapponibili nell'intervallo $(0, 2t^*)$. Il sistema molla-smorzatore ha rigidezza della molla pari a s , e costante di tempo pari a $T \approx 0.74 a/c_2 \approx 1.2 a/c_0$; quando il sistema è soggetto ad una forza come la (6.9), considerando tempi maggiori di T l'energia assorbita dallo smorzatore è solo una piccola parte e la risposta globale è dominata dalla molla. Se ora consideriamo a (raggio del cerchio su cui il corpo viene caricato) costante e pari al valore massimo a^* , il rapporto tra il tempo di rilassamento T e $2t^*$ vale

$$\frac{T}{2t^*} \approx 0.4 \frac{a^* V_z}{\delta_z c_0} \approx 0.4 \frac{R V_z}{a^* c_0}.$$

Nel caso di trasformazione quasi-statica questo rapporto deve essere molto minore dell'unità.

6.2 SOLIDI CON COMPORTAMENTO NON ELASTICO

Si è visto che in un materiale elasto-plastico si raggiunge il limite elastico per primo in un punto al di sotto della superficie del materiale più molle, quando la pressione p_0 raggiunge il valore $1.6Y$.

Il valore massimo della pressione durante un impatto elastico p_0^* si ricava dalle (6.3) e (6.5), ottenendo

$$p_0^* = \frac{3}{2\pi} \left(\frac{4E^*}{3R^{3/4}} \right) \left(\frac{5}{4} m V^2 \right)^{1/5} \quad (6.10)$$

dove, al solito, $1/m=1/m_1+1/m_2$; $1/R=1/R_1+1/R_2$; V velocità relativa di impatto.

Si può quindi risalire al valore della velocità relativa necessario per causare snervamento, V_Y , sfruttando la (6.27):

$$\frac{1}{2}mV_Y^2 \approx 53 \frac{R^3 Y^5}{E^{*4}} \quad (6.11)$$

che nel caso di una sfera che colpisce una superficie piana diventa:

$$\frac{\rho V_Y^2}{Y} = 26 \left(\frac{Y}{E^*} \right)^4 \quad (6.12)$$

in cui ρ è la densità della sfera.

Fintanto che le velocità sono basse (orientativamente fino a 500 m/s), si può applicare lo stesso criterio utilizzato per l'analisi di impatti elastici: sfruttare le relazioni su tensioni e deformazioni ricavate nel caso statico, e considerare gli impatti come trasformazioni quasi-statiche.

Fino all'istante della compressione massima, l'energia cinetica è assorbita nelle deformazioni, sia elastiche che plastiche, dei due corpi:

$$\frac{1}{2}mV^2 = W = \int_0^{d^*} P \cdot d\delta \quad (6.13)$$

dove m e V hanno i significati già visti.

Dopo l'istante di compressione massima l'energia cinetica del rimbalzo è uguale al lavoro fatto durante il recupero elastico, cioè

$$\frac{1}{2}mV'^2 = W' = \int_0^{d^*} P' \cdot d\delta' \quad (6.14)$$

dove le quantità contrassegnate con l'apice stanno ad indicare la fase di rimbalzo.

Come si è visto nei precedenti paragrafi, la teoria riguardo il contatto elasto-plastico non è definita in maniera precisa, in quanto molto complessa.

Sfruttando le (6.33) con $c=3$, la (6.40b), e la (6.41), si ottiene un'altra formula di particolare interesse pratico:

$$\frac{P}{P_Y} = 0.81 \frac{\delta E^{*2}}{R Y^2} = 5.5 \frac{\delta}{\delta_Y} \quad (6.15)$$

Valendosi ora anche della (6.13):

$$\frac{1}{2}mV^2 = \int_0^{a^*} \pi \cdot a p_d (a/R) \cdot da = \pi a^{*4} \frac{p_d}{4R} \quad (6.16)$$

dove p_d è la pressione media durante la fase di carico dinamico e $P^* = \pi a^2 p_d$.

Considerando poi la fase di rimbalzo elastica, si può scrivere:

$$\frac{1}{2}mV'^2 = W' = \frac{3P^{*2}}{10a^*E^*} = \frac{3}{10}\pi^2 a^{*3} \frac{p_d^2}{E^*} \quad (6.17)$$

confrontando la (6.16) e la (6.17) si ottiene il coefficiente di restituzione e :

$$e^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{3 \cdot 4^{3/4} \cdot \pi^{5/4}}{10} \frac{p_d}{E^*} \left(\frac{0.5mV^2}{p_d R^3} \right)^{-1/4} \quad (6.18)$$

Tabor (1948) usò esperimenti sull'impatto per dedurre il valore della pressione di snervamento dinamica p_d . Come atteso, hanno trovato che quest'ultima era maggiore della pressione di snervamento statica. Per alcuni materiali sono anche tabulati i valori:

<i>materiale</i>	p_d/p_m
acciaio	1,28
ottone	1,32
leghe di Al	1,36

Infine, si può calcolare la durata dell'impatto; per quanto riguarda la fase di compressione, dall'equazione del moto relativo:

$$m \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -\pi a^2 p_d = -2\pi R p_d \delta$$

e quindi:

$$t_p = \left(\frac{\pi m}{8R p_d} \right)^{1/2}$$

che è indipendente dalla velocità relativa dei due corpi sferici; accettando poi la fase di rimbalzo come elastica, e sfruttando la definizione di coefficiente di restituzione e , la durata del rimbalzo stesso si può scrivere:

$$t' = 1.2e \cdot t_p$$

6.3 FORMULE APPLICATIVE DALLA LETTERATURA TECNICA

Per quanto riguarda l'impatto di blocchi su una struttura rigida o deformabile, in letteratura tecnica sono disponibili varie formulazioni.

Se ne riportano e commentano alcune, di seguito, a titolo di esempio.

Esistono abachi (Van Dine, 1984) basati sulla legge di Hertz (Fig. 6-4).

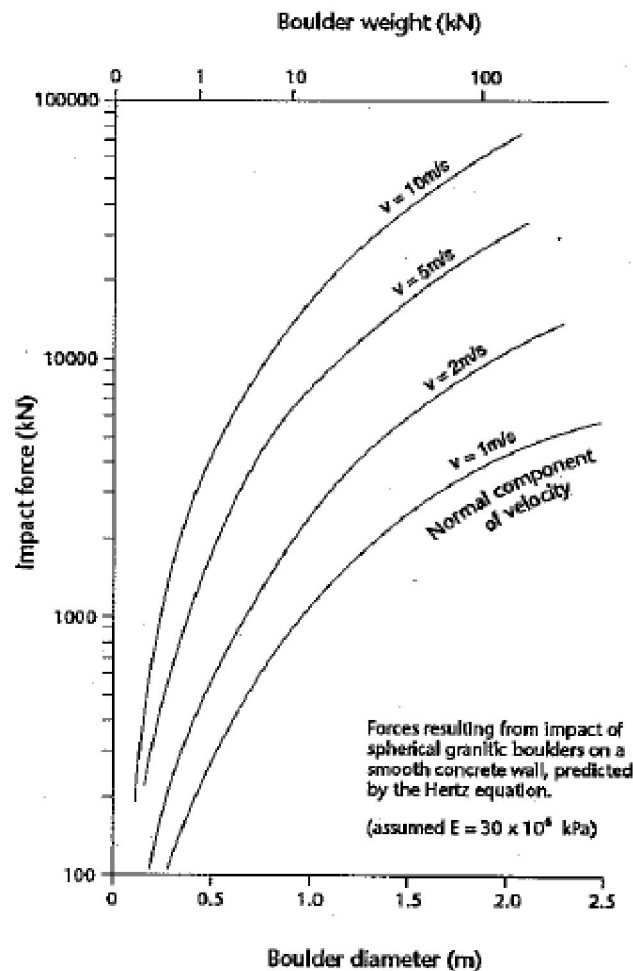


Fig. 6-4. Abaco per la determinazione della forza di impatto, basato sulla legge di Hertz (Van Dine, 1984).

Wu et al. (1993) e ASCE (2005) valutano la spinta F da un semplice bilancio di quantità di moto:

$$F = v_b m_b / \Delta t$$

in cui m_b la massa del blocco, v_b la velocità, all'impatto, del blocco, Δt la durata del fenomeno di impatto. Il valore suggerito per Δt da Wu è 1 s, mentre in ASCE tale valore è considerato non rappresentativo del fenomeno; si propone un intervallo pari a 0.01 – 0.05 s.

Hungr et al. (1984) e Zhang et al. (1996) propongono il “Flexural stiffness method”: per valutare la forza di impatto, oltre alle caratteristiche cinematiche e fisiche del blocco (velocità e massa) si prende in considerazione anche la rigidezza della struttura che intercetta il blocco:

$$F = v_b \sin \beta \sqrt{m_b K_B}$$

in cui K_B è la rigidezza flessionale della barriera, m_b la massa del blocco, v_b la velocità, all’impatto, del blocco.

Zhang et al (1996) propongono anche il “Wave theory method”:

$$F = \rho_b C_b v_b A_c$$

in cui C_b è la velocità delle onde di compressione nel masso, A_c l’area di contatto, ρ_b la densità del masso.

Huang et al. (2007), dall’analisi di dati sperimentali, ottenuti con un modello a piccola scala (diametro massimo dei grani pari a 31.0 mm) hanno ricavato la formula seguente:

$$F = 30.8 U^{1/2} R^2$$

in cui F è in ton, U e R in m.

Per l’impiego delle formule proposte da Wu e Zhang, tuttavia, è necessaria la conoscenza di alcuni parametri di difficile valutazione, quali la durata dell’impatto e l’area di contatto.

7. ANALISI NUMERICHE

7.1 BLOCCO SFERICO CONTRO UNA PARETE PIANA

Precedentemente si è esposta la teoria, dovuta a Hertz, riguardante rispettivamente il *contatto* e l'*impatto* di due corpi elastici lineari. Si implementa ora un modello ad elementi finiti per confrontare il risultato delle simulazioni numeriche con quello fornito dalle equazioni di Hertz.

In Fig. 7-1 è rappresentato lo schema geometrico adottato.

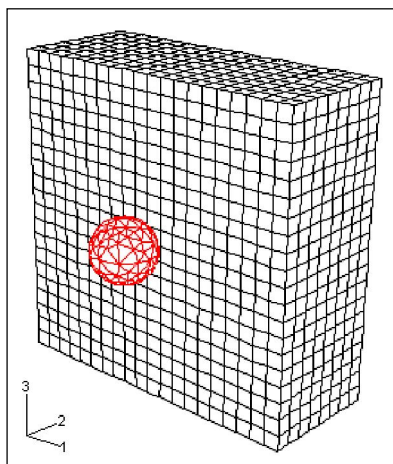


Fig. 7-1. Geometria del sistema costituito da un blocco sferico ed una parete piana.

Per la stessa configurazione spaziale sono state effettuate diverse simulazioni con diversi valori del modulo di elasticità della sfera e della velocità di impatto.

La sfera è caratterizzata da un raggio R pari a 0.125 m, moduli di Young $E_{Y1} = 6 \cdot 10^{10}$ N/m² ed $E_{Y2} = 1 \cdot 10^{10}$ N/m², coefficiente di Poisson $\nu = 0.2$, densità $\rho = 2600$ kg/m³.

La sfera impatta contro la superficie piana ($R \rightarrow \infty$) di un muro avente modulo di Young $E_Y = 3 \cdot 10^{10}$ N/m² e coefficiente di Poisson $\nu = 0.2$.

Le dimensioni del muro sono 2.0 m x 2.0 m x 1.0 m.

I risultati sono riportati separatamente per le due velocità 4 m/s e 15 m/s nella Fig. 7-2:

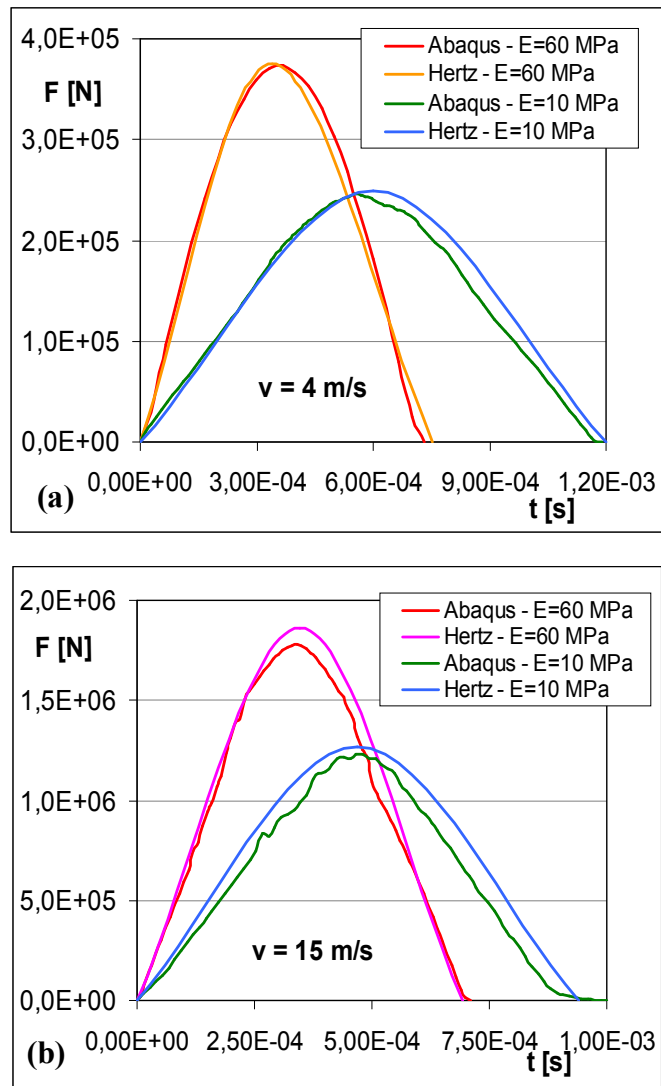


Fig. 7-2. Forze di impatto in funzione del tempo per diversi valori del modulo di Young e per diverse velocità di impatto. (a) $v = 4 \text{ m/s}$; (b) $v = 15 \text{ m/s}$.

I risultati delle simulazioni, per entrambi i tipi di sfere e per ogni velocità imposta, siano in accordo con quelli previsti dalla teoria di Hertz.

E' anche interessante analizzare la scansione temporale delle pressioni di contatto tra la sfera ed il muro (Fig. 7-3):

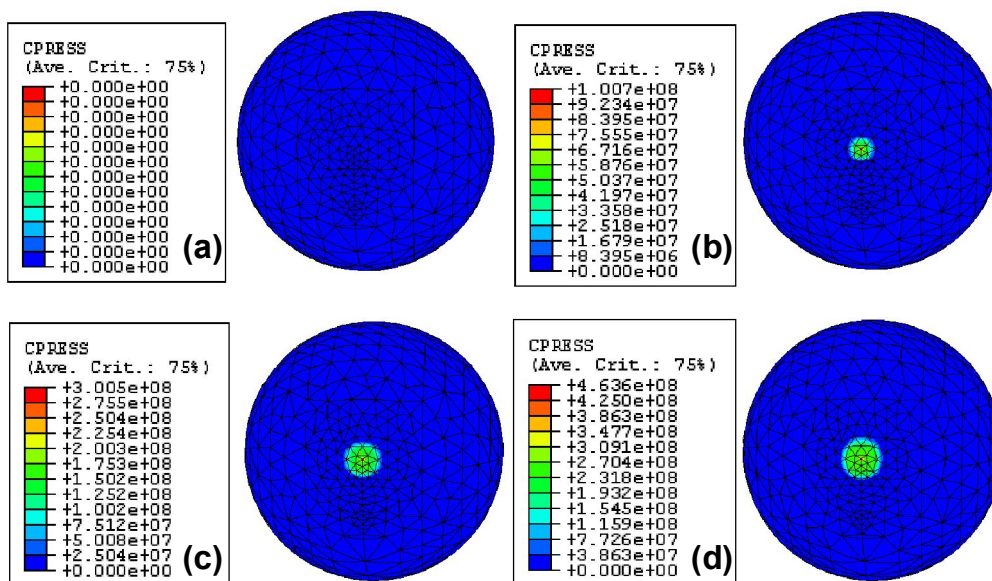


Fig. 7-3. Pressioni di contatto sulla superficie della sfera che impatta alla velocità di 4 m/s; (a) $t = 0$ s; (b) $t = 1.5 \cdot 10^{-4}$ s; (c) $t = 3 \cdot 10^{-4}$ s; (d) $t = 6 \cdot 10^{-4}$ s (tempo al quale corrisponde la massima compressione).

7.2 BLOCCHI SFERICI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE CONTRO UNA PARETE PIANA

Successivamente si è voluto esaminare, sempre nel caso di urto tra sfera e parete, entrambi con comportamento elastico lineare, se fosse maggiore la forza d'impatto trasmessa da un blocco singolo (di massa data e pari a 1000 kg) oppure quella dovuta a più corpi sferici di massa totale pari a quella dell'unico blocco e che urtino il muro simultaneamente. Con riferimento allo schema di Fig. 7-4:

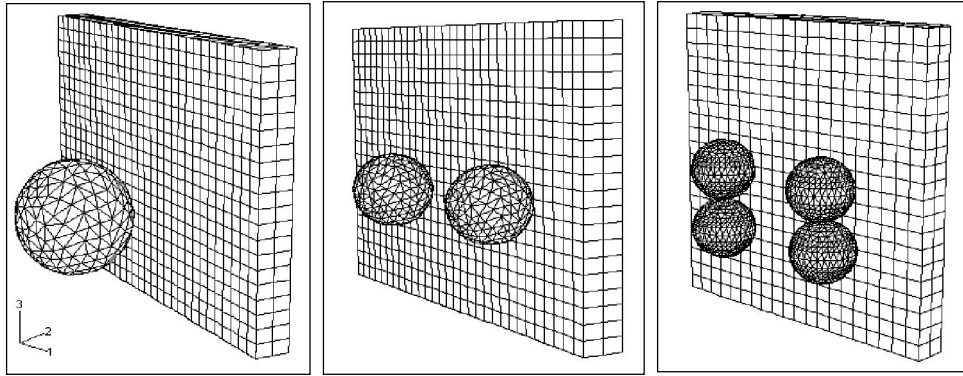


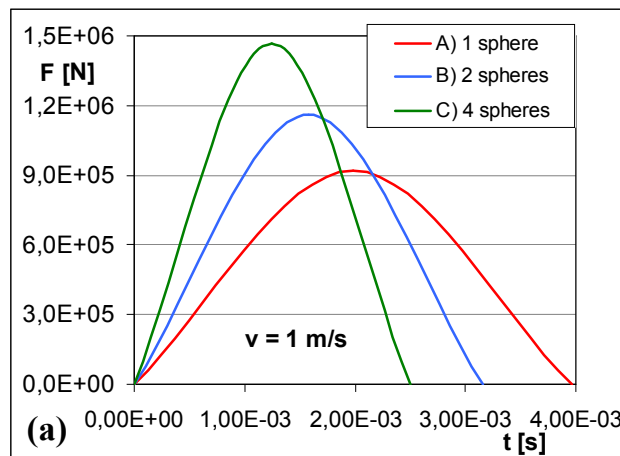
Fig. 7-4. Schema dell'impatto di blocchi sferici diversi contro un muro. Masse e raggi delle sfere: (a) $m = 1000 \text{ kg} \rightarrow R = 0.45 \text{ m}$; (b) $m = 2 \cdot 500 \text{ kg} = 1000 \text{ kg} \rightarrow R = 0.358 \text{ m}$; (c) $m = 4 \cdot 250 \text{ kg} = 1000 \text{ kg} \rightarrow R = 0.284 \text{ m}$.

A parità di massa totale, e quindi di volume, si modifica il raggio, parametro che nelle equazioni di Hertz della forza di impatto svolge un ruolo significativo; richiamando la (4.6), infatti:

$$P^* = K \delta^{3/2} = \left(1.514 \cdot m V_z^2 E^{2/3} R^{1/3} \right)^{3/5}$$

con chiaro significato dei termini.

Le proprietà meccaniche dei corpi valgono: per i blocchi sferici, $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, $E_Y = 6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$; per il muro $E_Y = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$. I risultati ottenuti dalle simulazioni per le velocità $v_1 = 1 \text{ m/s}$ e $v_2 = 4 \text{ m/s}$ sono riportati in Fig. 7-5:



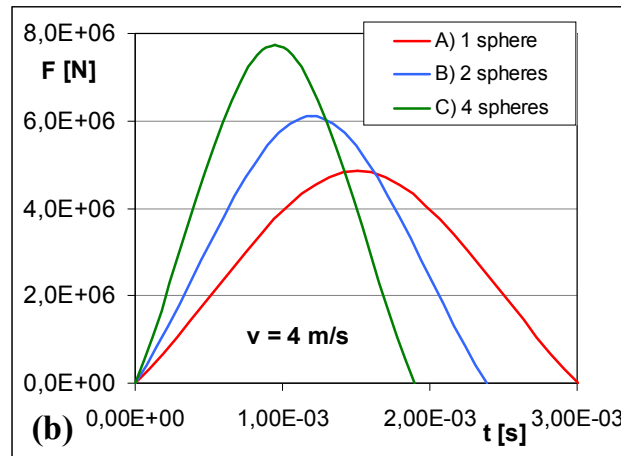


Fig. 7-5. Forze compressive di impatto in funzione del tempo per diverse sfere che urtano il muro simultaneamente; (A) 1 sfera: massa 1000 kg e raggio 0.45 m; (B) 2 sfere: massa 500 kg ognuna e raggio 0.358 m; (C) 4 sfere: massa 250 kg ognuna e raggio 0.284 m. (a) $v = 1$ m/s ; (b) $v = 4$ m/s.

Si deduce che la frammentazione di un corpo sferico elastico in più parti (anch'esse sferiche) determina l'aumento della forza di impatto e la diminuzione della durata del contatto.

7.3 BLOCCO PARALLELEPIPEDO CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE CONTRO UNA PARETE PIANA

Si è svolta l'analisi, sempre per via numerica, dell'impatto di un blocco elastico lineare, con la forma di un parallelepipedo, che impatta la superficie piana di un muro, anch'esso con comportamento elastico lineare. Si è considerato il caso in cui il blocco urta con una delle facce parallela al muro stesso, secondo lo schema di Fig. 7-6:

Le proprietà meccaniche assegnate ai corpi sono: per i blocchi, $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, $E_Y = 6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$; per il muro $E_Y = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$. In questo caso ideale (le due superfici che urtano sono piane, quindi con $R \rightarrow \infty$, e tra loro parallele) *le formule di Hertz non possono essere applicate*, perché nella relazione (4.6), richiamata anche nel paragrafo precedente, il termine R (raggio di curvatura relativo) derivato dalla:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

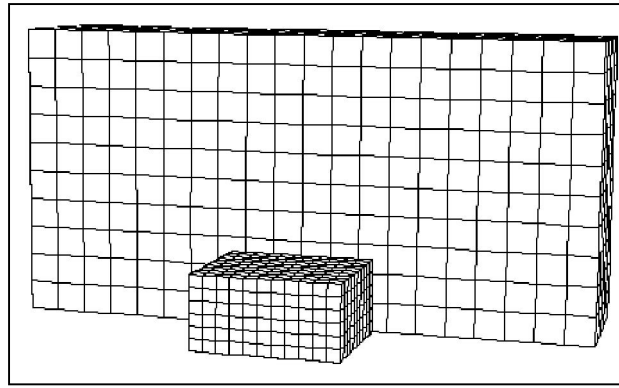


Fig. 7-6. Impatto di un blocco, con la forma di un parallelepipedo, sulla parete piana di un muro.

assumerebbe un valore infinitamente grande, con conseguente forza di contatto di valore infinito.

Le simulazioni, per un blocco di massa 1000 kg e con una superficie di impatto pari a 1 m x 0.5 m forniscono invece i risultati mostrati in Fig. 7-7:

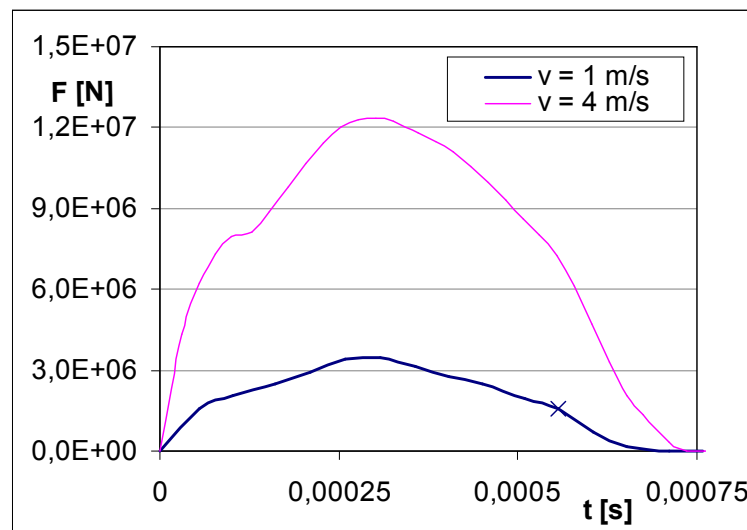


Fig. 7-7. Forze di impatto in funzione del tempo per un blocco parallelepipedo di massa 1000 kg che urta una superficie piana a velocità $v = 1$ m/s e $v = 4$ m/s.

7.4 BLOCCHI PARALLELEPIPEDI CON COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

In analogia col caso di blocchi di forma sferica, si è voluto confrontare la forza d'impatto che si genera per l'impatto di diversi blocchi, mantenendo costante la massa totale del sistema; nel

caso di blocchi con forma di parallelepipedo anche la superficie di impatto deve essere a priori assegnata.

Per operare il confronto fra blocchi di forma parallelepipedica si è scelto di imporre, oltre la parità di massa totale, anche la parità di superficie di impatto globale tra il caso in cui si ha un solo blocco e quello in cui ci sono due blocchi (Fig. 7-8); i risultati che si ottengono sono rappresentati in Fig. 7-9.

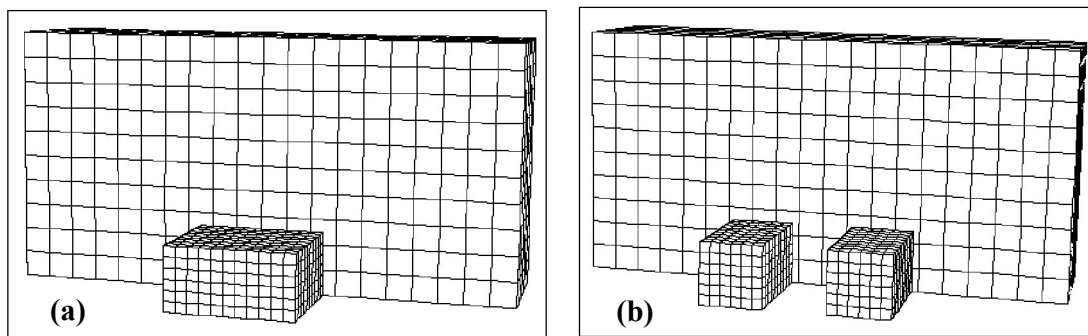


Fig. 7-8. Confronto fra blocchi di diverse dimensioni che impattano il muro. (a) massa $m = 1000$ kg; area di impatto $A = 0.5 \text{ m} \times 1 \text{ m}$; massa $m = 2 \cdot 500$ kg; (b) area di impatto $A = 2 \cdot (0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m})$.

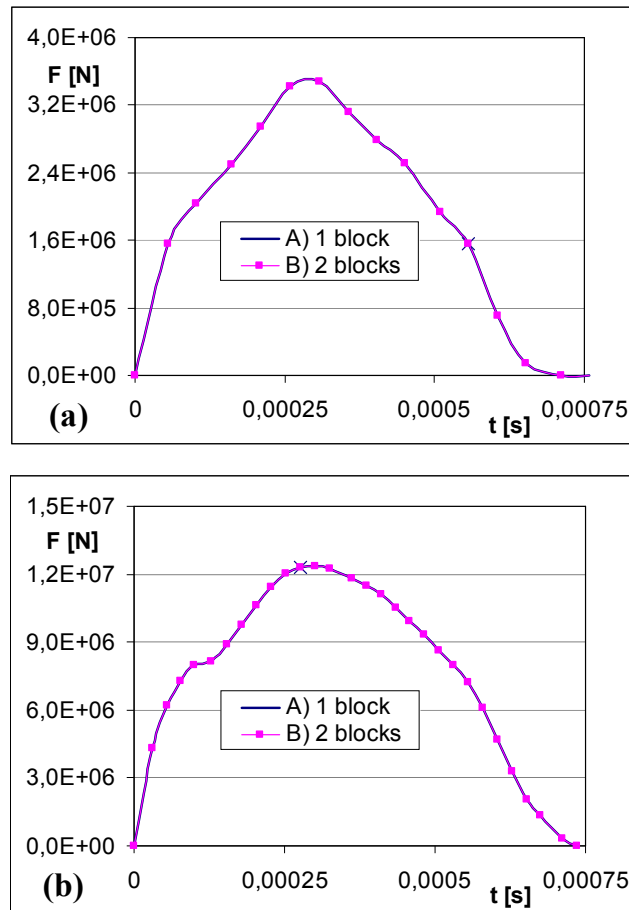


Fig. 7-9. Confronto fra blocchi a forma di parallelepipedo che impattano il muro. A) blocco singolo; massa $m = 1000$ kg; B) due blocchi; massa globale; $m = 2\,500$ kg; (a) $v = 1$ m/s ; (b) $v = 4$ m/s.

Nel caso di blocchi elastici lineari a forma di parallelepipedo non c'è differenza fra l'impatto di un blocco e quello di due blocchi con massa e superficie impattante globale pari a quella del blocco singolo.

7.5 EFFETTO DELLA FORMA DEI BLOCCHI SUL MECCANISMO DI IMPATTO

La prima grande differenza che le simulazioni numeriche evidenziano fra i due casi è la seguente: nel caso di impatto di blocchi sferici contro la parete, pur essendo i corpi elastici lineari, la risposta alla sollecitazione (l'impatto) è di tipo non lineare: al variare del raggio di curvatura dei blocchi varia, in ragione non lineare, la forza di impatto; nel caso di blocchi elastici lineari a forma di parallelepipedo (che impattino con una superficie parallela alla parete) la risposta, a pari velocità, è lineare con la variazione della superficie di contatto.

Successivamente, si può costruire una tabella per confrontare numericamente le forze (F) e i tempi di contatto (t_c) nei quattro casi:

		$v = 1 \text{ m/s}$	$v = 4 \text{ m/s}$
sfera: $R = 0.716 \text{ m}$ $m = 1000 \text{ kg}$	F [N]	9.21 E+5	4.86 E+6
	t_c [s]	0.00397	0.00301
parallelepipedo $A_c = 0.5 \text{ m}^2$; $m = 1000 \text{ kg}$	F [N]	3.48 E+6	1.23 E+7
	t_c [s]	7.11 E-4	7.36 E-4
sfera: $R = 0.358 \text{ m}$ $m = 500 \text{ kg}$	F [N]	5.80 E+5	3.06 E+6
	t_c [s]	0.00316	0.00239
parallelepipedo $A_c = 0.25 \text{ m}^2$; $m = 500 \text{ kg}$	F [N]	1.74 E+6	6.15 E+6
	t_c [s]	7.11 E-4	7.36 E-4

E' evidente come l'impatto di una superficie ideale perfettamente piana che colpisce una superficie ad essa parallela dia origine a forze di contatto ben maggiori rispetto al caso di massa sferico.

7.6 SFERA CON COMPORTAMENTO ELASTICO PERFETTAMENTE PLASTICO CONTRO UNA PARETE PIANA

Si è svolta infine una applicazione per capire come variano le due grandezze di interesse (forza e tempo di contatto) nel caso in cui un massa sferico di raggio R pari a 0.125 m sia caratterizzato dal comportamento elasto-plastico. La tensione di snervamento assegnata al materiale della sfera è $\sigma_y = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Sono mantenuti inalterati, rispetto alle precedenti simulazioni, i rimanenti parametri meccanici: densità $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, modulo di Young $E_Y = 6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e coefficiente di Poisson $\nu = 0.2$; per il muro $E_Y = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$. I risultati sono riportati per le velocità $v_1 = 4 \text{ m/s}$ e $v_2 = 15 \text{ m/s}$; in Fig. 7-10 sono anche riportati i confronti col caso elastico:

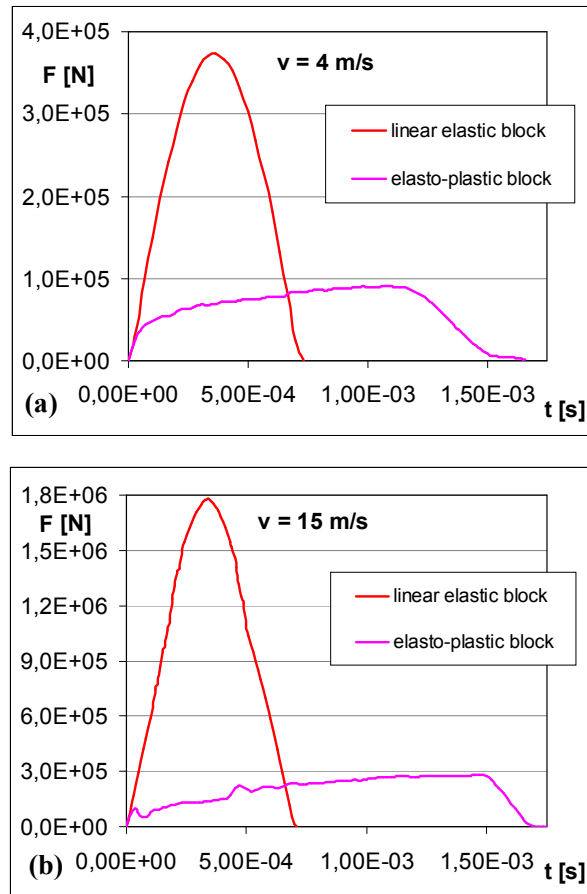


Fig. 7-10. Confronto fra blocchi sferici di raggio 0.125 m e densità 2600 kg/m³ elastici lineari ed elasto-plastici ($\sigma_y = 5 \cdot 10^7$ Pa). (a) $v = 4$ m/s; (b) $v = 15$ m/s.

Come atteso, a causa dell'avvenuta plasticizzazione, i tempi di contatto si dilatano e le forze di contatto diminuiscono sensibilmente.

7.7 CARATTERIZZAZIONE NUMERICA DELL'IMPULSO E RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DEL FENOMENO

E' stata condotta infine una serie di calcoli parametrici per valutare l'impulso della forza esercitato, all'impatto, da un blocco di forma sferica, al variare dei parametri significativi:

- dimensioni (raggio R);
- velocità v ;
- in caso di comportamento elastico-perfettamente plastico, tensione di snervamento σ_y , per i due valori di riferimento pari a 10000 kPa (denominato e.p.1) e 1000 kPa (denominato e.p.2).

I valori ottenuti sono quindi confrontati con formule da letteratura tecnica:

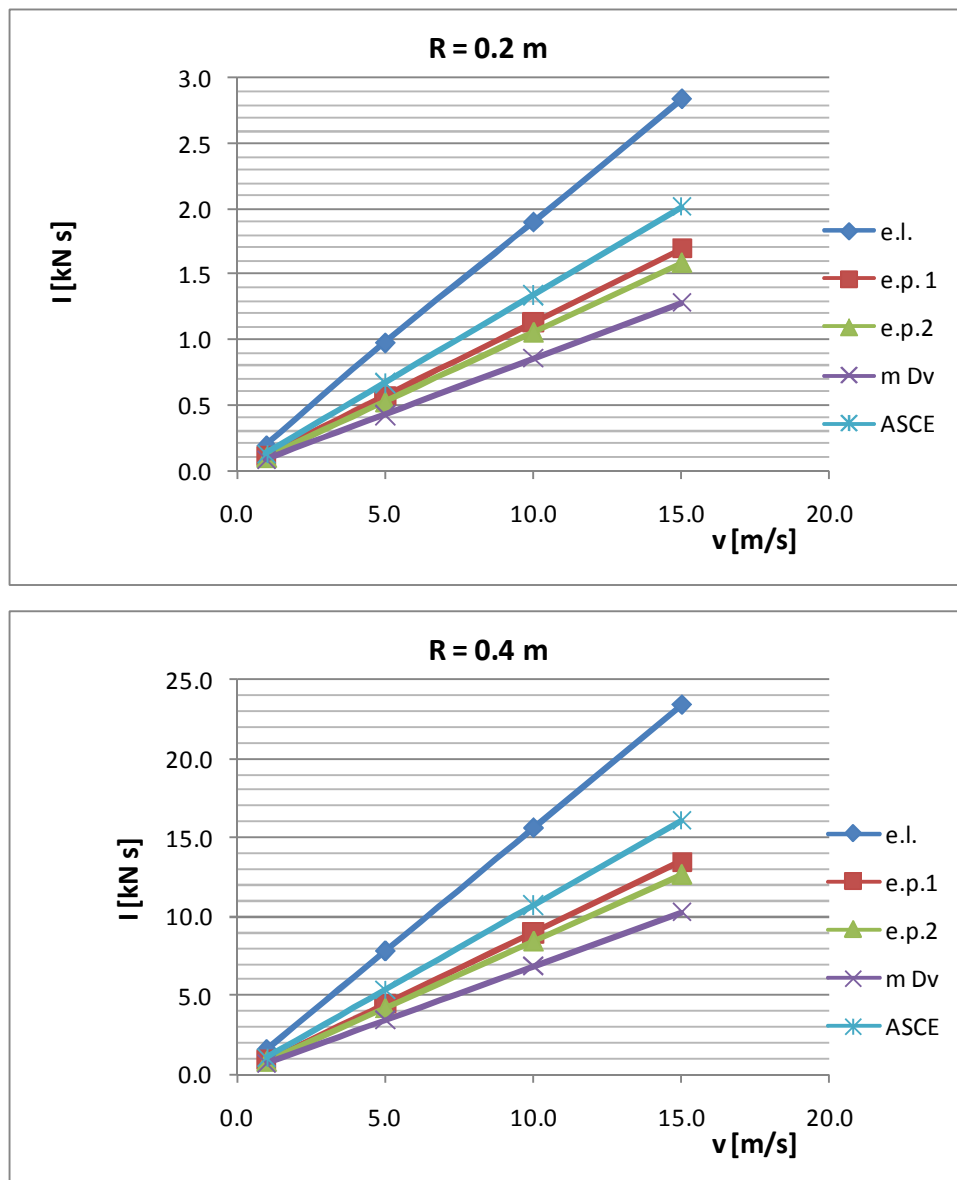
$$I = m \Delta v$$

nell'ipotesi che, a seguito dell'impatto, il blocco si arresti ($\Delta v = v_0$).

$$I = \frac{\pi m v_0}{2}$$

fornita da ASCE.

I risultati sono riportati in Fig. 7-11.



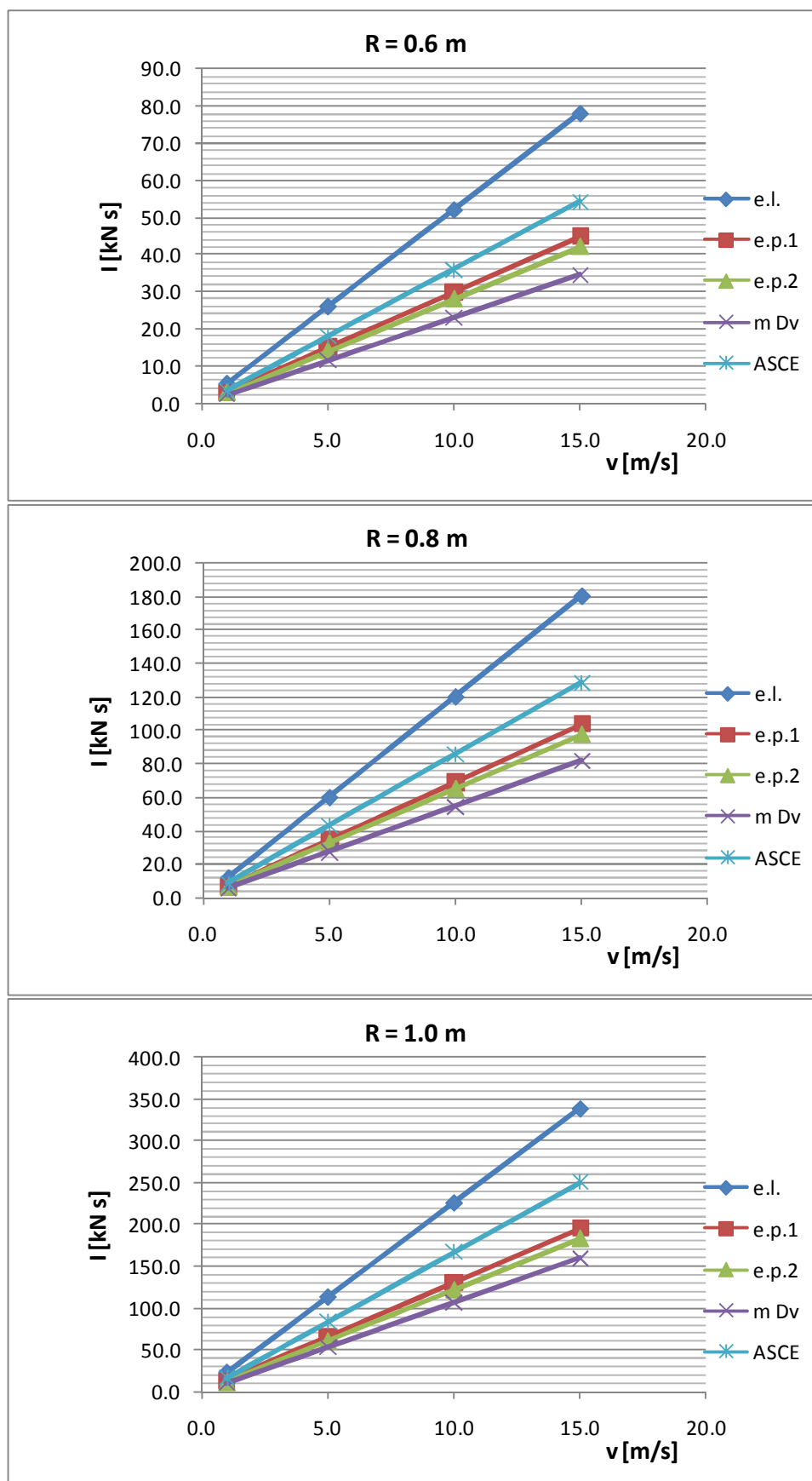


Fig. 7-11. Risultati delle analisi parametriche dell'impulso.

A parità di dimensioni, si riscontra una dipendenza pressoché lineare dell'impulso dalla velocità di impatto; ciò accade sia nel caso di comportamento elastico lineare (e.l.), che in caso di comportamento elastico-perfettamente plastico, per entrambi i valori della tensione di snervamento considerati (e.p. 1: $\sigma_y = 10000$ kPa, e.p. 2: $\sigma_y = 1000$ kPa).

I valori forniti da un'analisi condotta considerando un comportamento elastico lineare del corpo impattante sono, come atteso, estremamente cautelativi.

La formula fornita invece dalla ASCE risulta sicuramente e pare indicata per una cautelativa ma assennata valutazione dell'azione esercitata, all'impatto, da un blocco.

8. DEBRIS – FLOW CON COMPORTAMENTO GRANULARE

Con riferimento alla Fig. 8-1, le simulazioni sono state condotte per due diverse geometrie della massa che colpisce il muro.

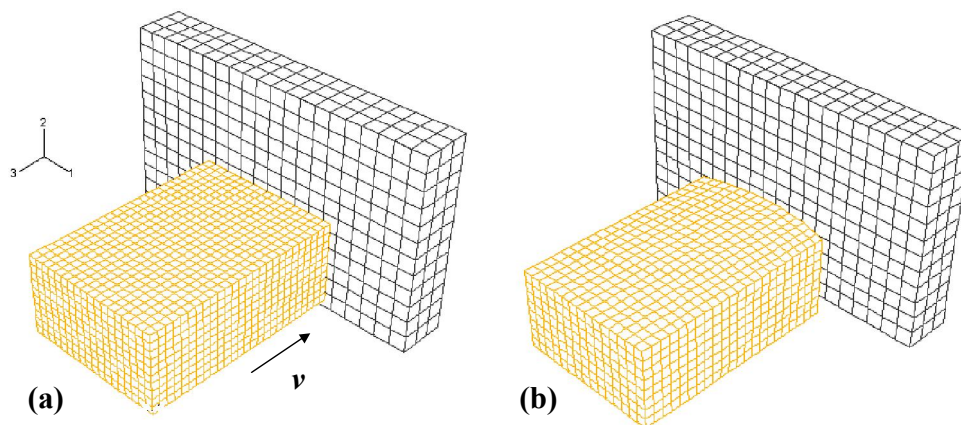


Fig. 8-1. Geometrie utilizzate per le analisi.

La superficie solida (il muro) è costituita da un parallelepipedo di dimensioni lungo gli assi (1, 2, 3) pari a (4 m, 2.4 m, 0.6 m); la mesh è formata da elementi cubici di tipo C3D8R di dimensione del lato pari a 0.2 m.

Nel caso di fronte piano (Fig. 8-1a) la mesh del blocco che impatta il muro è costituita da 4680 elementi di tipo C3D8R con dimensioni del lato pari a 0.1 m.

Nel caso di fronte cilindrico la mesh del blocco è costituita da 2640 elementi di tipo C3D8R con dimensioni del lato pari a 0.12 m; il raggio di curvatura del fronte è pari a $R = 3$ m.

In entrambi i casi le proprietà delle due entità presenti nello schema sono:

- per il muro: modulo di Young $E = 3 \cdot 10^{10}$ Pa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.25$.
- per il blocco: modulo di Young $E = 3 \cdot 10^8$ Pa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$.

In entrambi i casi la velocità all'impatto è 4 m/s.

A causa delle difficoltà incontrate nell'analisi con un corpo dotato di fronte piano, sono state condotte simulazioni solamente nell'ipotesi di fronte cilindrico, cioè per la geometria di Fig. 8-1b.

Al corpo che colpisce il muro sono state attribuite diverse risposte: comportamento elastico lineare, elastico non lineare ed elasto-plastico.

Particolare attenzione merita il comportamento elastico non lineare.

Per la caratterizzazione di questo tipo di materiale sono stati utilizzati dati da letteratura relativi alla prova triassiale standard su una sabbia (Tabella 8-1).

Tabella 8-1. Dati relativi ad una prova triassiale standard su sabbia.

q [kPa]	ε_v	ε_s
0	0	0
100	0.01	0.022
200	0.042	0.063
264	0.08	0.127
287	0.095	0.22
288	0.095	0.328

Dai dati da Tabella 8-1 è stata ricavata una curva nel piano $q - \varepsilon_a$, successivamente interpolata secondo il criterio di Duncan e Chang (1.8):

$$q(\varepsilon_a) = \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a}$$

Dal capitolo 1, i valori di a e b sono legati rispettivamente a E_0 , il modulo di Young tangente iniziale, e al valore asintotico di q .

Si ottiene $E_0 = 6600$ kPa e $q_f/r_f = 288/0.9$. La curva sperimentale e la curva che interpola i dati sperimentali secondo il criterio di Duncan e Chang sono in Fig. 8-2.

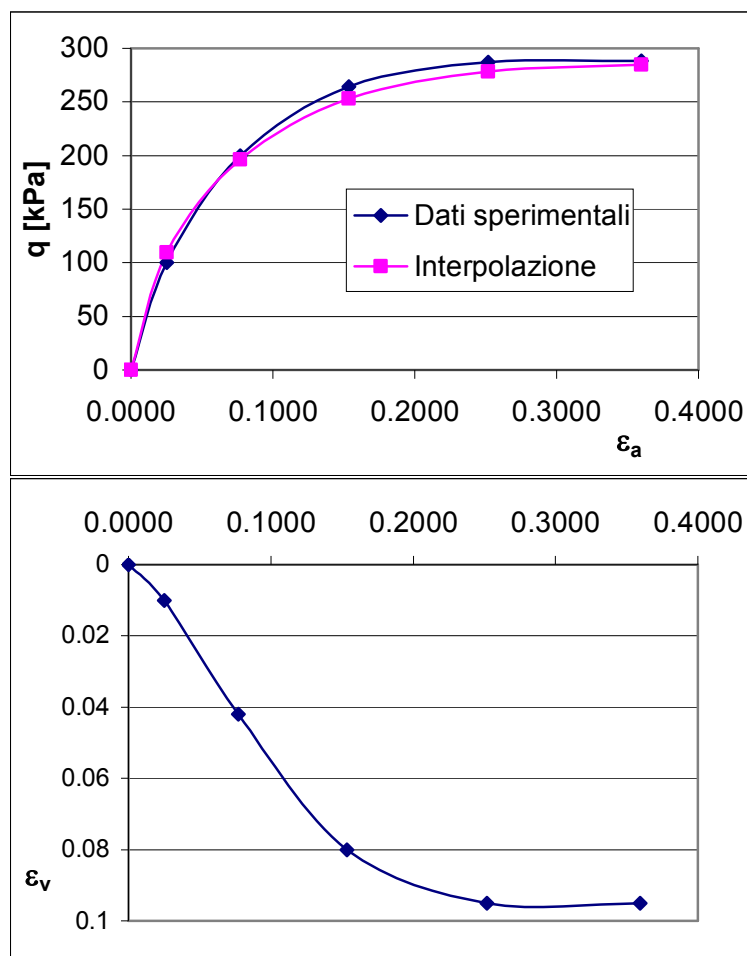


Fig. 8-2. Dati da prova triassiale standard su una sabbia.

Il programma di calcolo richiede in input i valori, tabulati in colonne, di almeno due invarianti di deformazione (ricavabili dai dati sperimentali) e il modulo di Young tangente relativo agli invarianti stessi (ricavabili dall'interpolazione secondo la formula di Duncan e Chang); nella Tabella 8-2 sono indicati questi dati.

Tabella 8-2. Calcolo degli invarianti di deformazione primo e secondo e del modulo di Young E tangente.

q [kPa]	ϵ_v	ϵ_s	$\epsilon_a = \epsilon_s + (1/3)\epsilon_v$	$\epsilon_r = \epsilon_a - (3/2)\epsilon_s$
0	0	0	0.0000	0.0000
100	0.01	0.022	0.0253	-0.0077
200	0.042	0.063	0.0770	-0.0175
264	0.08	0.127	0.1536	-0.0369
287	0.095	0.22	0.2516	-0.0784
288	0.095	0.328	0.3596	-0.1324

$l\varepsilon$	$ll\varepsilon$	E (kPa)
0	0	6.60E+03
0.01	0.00075927	2.85E+03
0.042	0.00654032	9.86E+02
0.08	0.02632257	3.80E+02
0.095	0.07560232	1.72E+02
0.095	0.16437832	9.31E+01

Per quanto riguarda il modello elastico lineare, il modulo di Young, costante, è pari al modulo di Young iniziale E_0 del modello elastico non lineare: $E = 6600$ kPa.

Per il modello elasto - plastico il criterio di snervamento adottato è quello di Von Mises, con tensione di snervamento $\sigma_y = 10$ KPa; in campo elastico il modulo di Young, costante, è pari al modulo di Young iniziale E_0 del modello elastico non lineare: $E = 6600$ kPa.

Il coefficiente di Poisson nei tre casi è pari a 0.25.

Le analisi sono state svolte per una corrente di altezza 1 m, larghezza 2 m e profondità 3 m; le velocità all'impatto considerate sono 1 m/s, 4 m/s, 15 m/s. La densità infine è pari a 1800 kg/m³.

Per la velocità $v = 1$ m/s i risultati sono in Fig. 8-3. Si vede che nel caso di elasticità non lineare la progressiva diminuzione della rigidezza causa una diminuzione della forza d'impatto e l'aumento dei tempi caratteristici dello sviluppo del fenomeno.

Nel caso di elasto-plasticità, come atteso, la riduzione della forza rispetto all'elasticità è ancora più marcata.

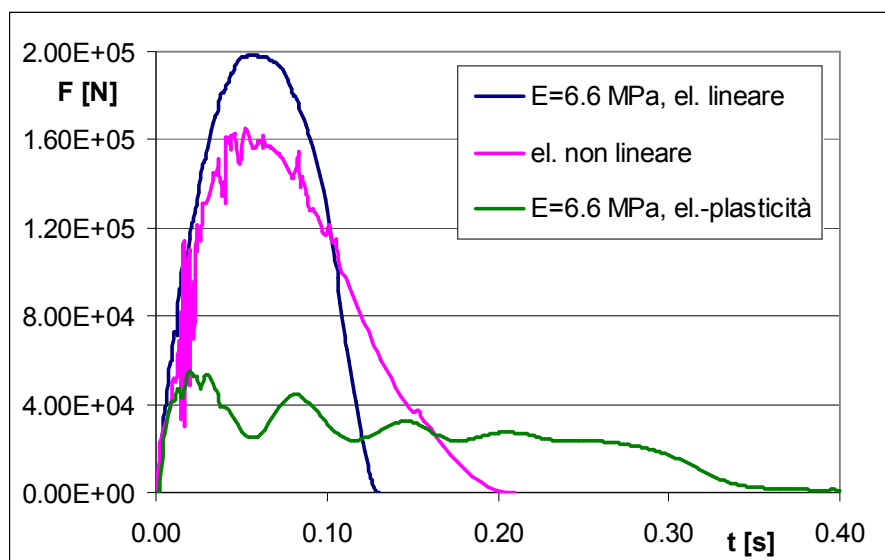
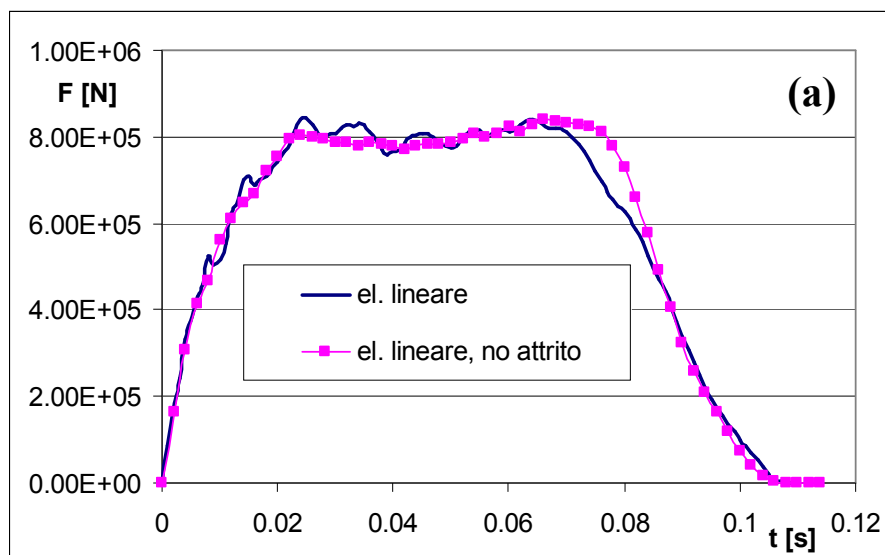


Fig. 8-3. Forza d’impatto di una corrente granulare secca a velocità 1 m/s.

Per le velocità di 4 m/s e 15 m/s sono state condotte simulazioni, in elasticità lineare, considerando sia un coefficiente di attrito pari a 0.5 fra il materiale costituente la colata ed il muro sia l’assenza di attrito.

I risultati sono in Fig. 8-4. Si vede che il risultato non è apprezzabilmente influenzato dall’attrito, quindi le successive analisi sono state condotte in assenza di esso.



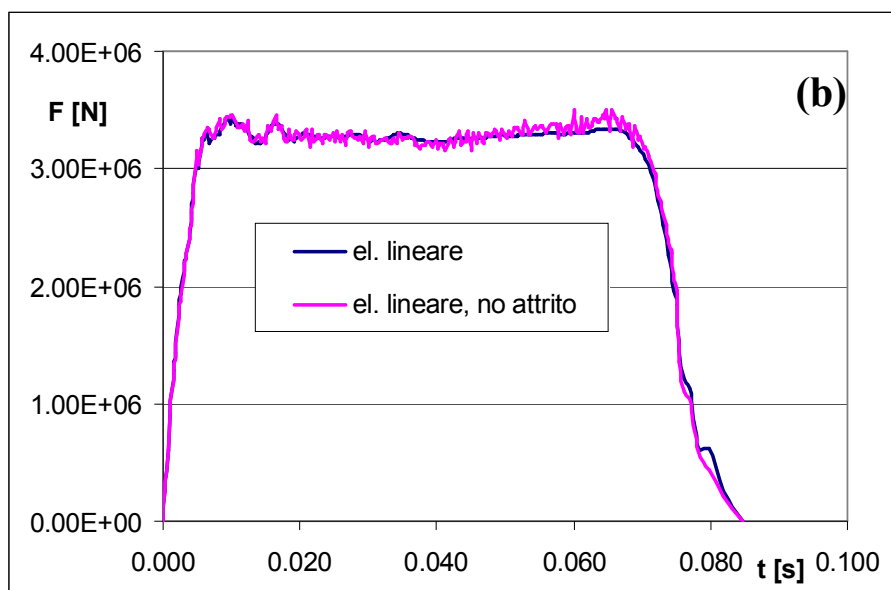


Fig. 8-4. Analisi in elasticità lineare; confronto tra assenza di attrito e presenza di attrito tra muro e fronte della colata. (a) velocità pari a 4 m/s (b) velocità pari a 15 m/s.

In Fig. 8-5 e Fig. 8-6 sono resi quindi i risultati per velocità di impatto pari a 4 m/s e 15 m/s.

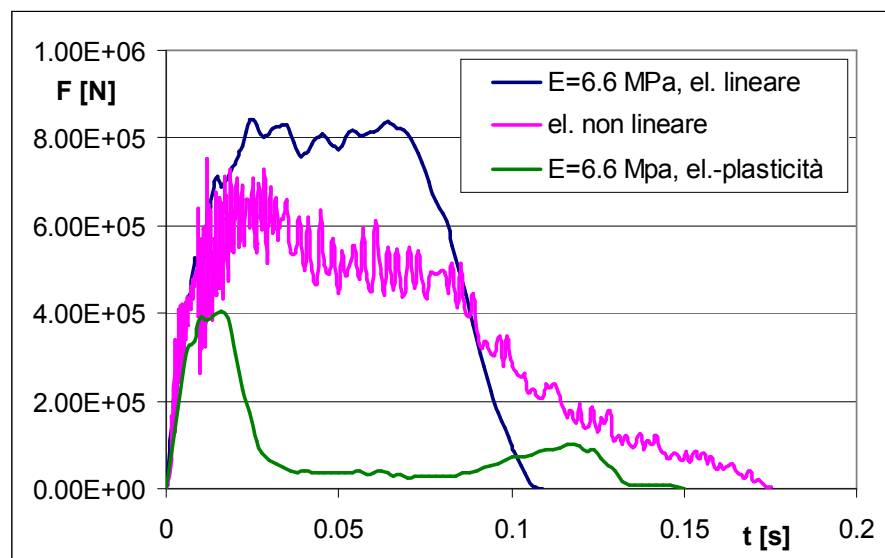


Fig. 8-5. Forza d'impatto di una corrente granulare secca a velocità 4 m/s.

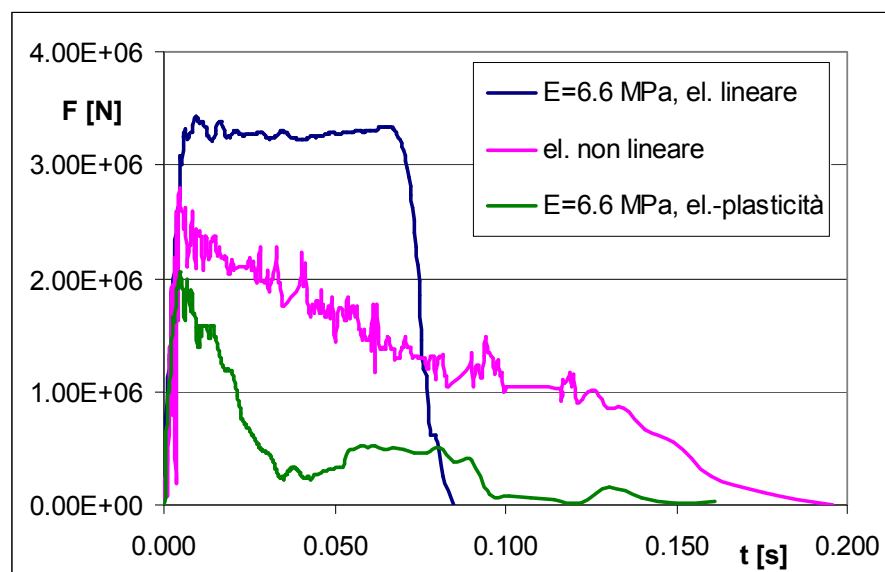


Fig. 8-6. Forza d'impatto di una corrente granulare secca a velocità 15 m/s.

Si può notare il trend già individuato per la velocità di 1 m/s: forza massima e tempi minimi per comportamento elastico lineare, forza minima e tempi massimi per comportamento elasto-plastico.

Nel caso di velocità pari a 15 m/s, in elasticità lineare, c'è la presenza di un tratto del diagramma caratterizzato da forza costante.

**C – EFFETTI MECCANICI DELL’IMPATTO DI COLATE DETRITICHE AD
ALTA VELOCITÀ CONTRO STRUTTURE**

9. COLATE CON COMPORTAMENTO FLUIDO

Si riportano, di seguito, alcune applicazioni dei modelli di calcolo impostati nelle precedenti sezioni, seguite dalla proposta di criteri per la progettazione di opere di salvaguardia dal rischio di colate.

9.1 SPOSTAMENTO DI BLOCCHI

A seguito dell’impatto di colate a comportamento fluido può essere innescato il moto di blocchi, anche di notevoli dimensioni (Fig. 9-1).

Sono quindi stati impostati dei calcoli, sfruttando il modello FEM descritto nelle sezioni precedenti, per valutare il rischio di mobilitazione di blocchi con elevato potenziale distruttivo.

Lo studio è stato condotto considerando un blocco cubico (dimensioni 1 m x 1 m x 1 m) posto su una superficie con coefficiente di attrito statico blocco – base pari a 0.6; si sono quindi fatti variare parametricamente determinati parametri della colata, quali forma (sezione trasversale triangolare e rettangolare), velocità U , densità ρ , altezza H .

Si sono ottenute curve con combinazioni di velocità della colata, altezza e densità tali da spostare il blocco di 0.1 o 0.3 m (Fig. 9-2).



Fig. 9-1. Massi trasportati da correnti (Wieczorek et al., 2001).

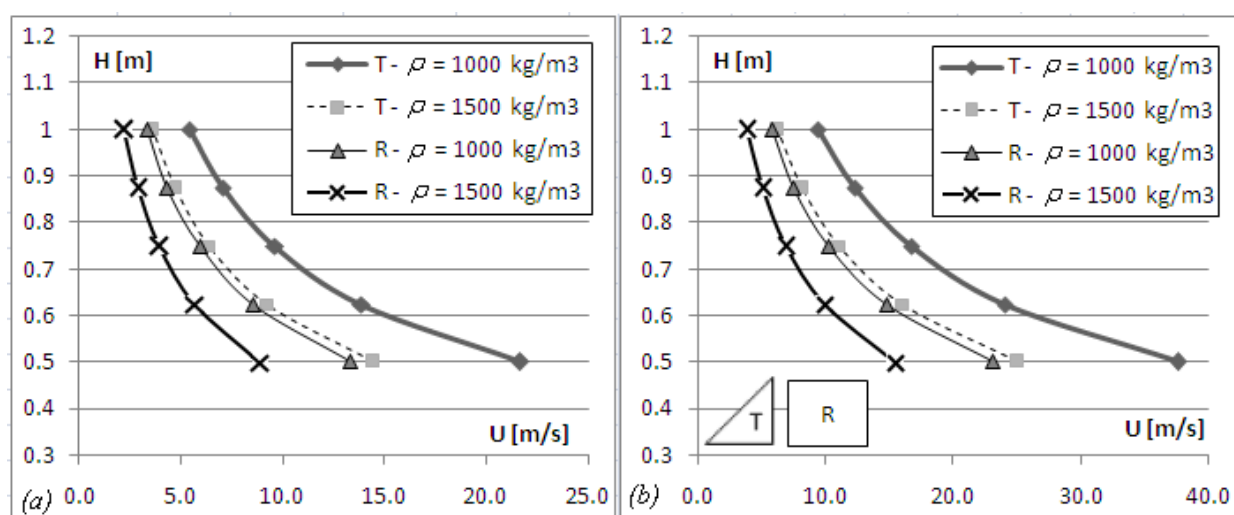


Fig. 9-2. Impatto di colate a sezione trasversale triangolare (T) e rettangolare (R) su un blocco libero di muoversi su un piano orizzontale. Combinazioni di velocità e altezze tali da indurre uno spostamento iniziale del blocco pari a (a) $s = 0.1$ m; (b) $s = 0.3$ m.

Come atteso, correnti con piccole altezze necessitano di velocità elevate per indurre lo spostamento di un blocco di volume pari a 1.0 m^3 . Tuttavia, è sufficiente una velocità di circa 5 m/s , per una corrente di altezza 0.6 m , per indurre uno spostamento di un blocco pari a 10 cm .

Ne consegue la necessità, nelle zone montuose, a rischio di fenomeni di flussi fangosi, di recensire e monitorare la presenza di blocchi potenzialmente instabili, a rischio di caduta.

9.2 BACK-ANALYSIS DEL COLLASSO DI UN PILASTRO

Per valutare la forza distruttiva dell'impatto di fluidi contro strutture, si è analizzato il collasso di un pilastro colpito da una colata fluida, avvenuto a Sarno (Campania, Italia), nel maggio 1998 (Faella & Nigro, 2003).

Le caratteristiche geometriche e meccaniche dell'elemento strutturale sono: sezione trasversale pari a $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, altezza $l = 2.7 \text{ m}$; il flusso è perpendicolare al pilastro. L'armatura longitudinale è composta da quattro barre di acciaio di diametro 1.4 cm ($\phi 14$, Faella & Nigro, 2003); per il calcestruzzo, la resistenza di calcolo considerata è $f_{cd} = 13.83 \text{ MPa}$ (Fig. 9-3a); per l'acciaio, la tensione di snervamento è $f_{sd} = 320 \text{ MPa}$ (Fig. 9-3b).

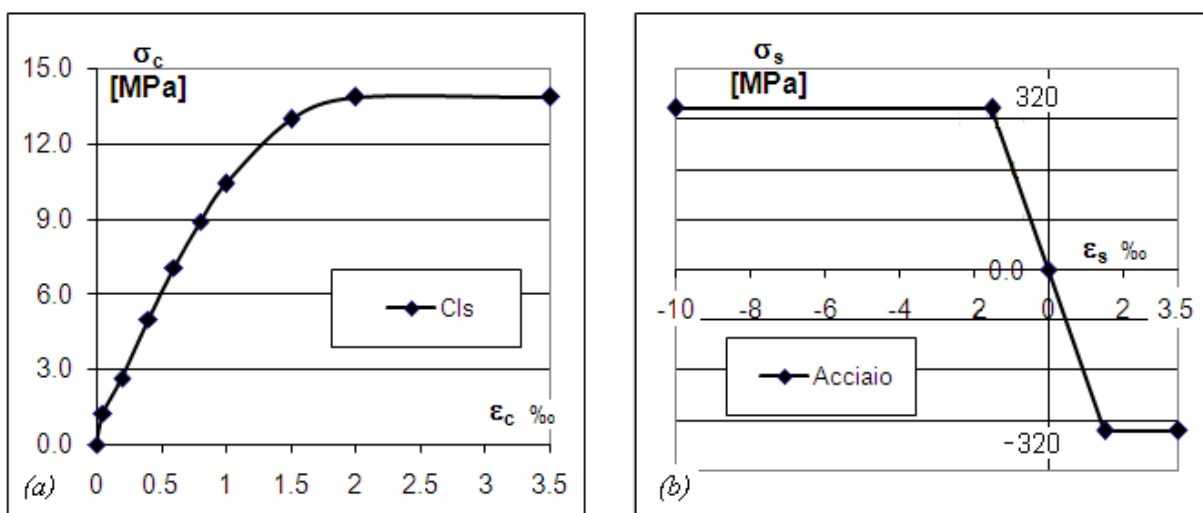


Fig. 9-3. Impatto di una colata fluida contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; modello costitutivo (a) del calcestruzzo e (b) dell'acciaio d'armatura.

Nella back analysis proposta dagli Autori, l'azione esercitata dalla colata è stata modellata come una *pressione idrodinamica uniforme* (q) agente su tutta l'altezza (l) del pilastro (nell'ipotesi di flusso di un fluido incompressibile in condizioni stazionarie).

Attraverso un procedimento di analisi limite, considerando un meccanismo di rottura a tre cerniere, gli Autori hanno poi ricavato il valore della velocità critica del flusso (U_{cr}), tale da causare il collasso della struttura (Fig. 9-7):

$$q_u = \frac{16M_u}{l^2} = \rho U_{cr}^2 \quad (19)$$

con M_u momento ultimo della sezione del pilastro (per le seguenti caratteristiche della sollecitazione valutate dagli autori, $N = N_u = 300$ kN, $M_u = 57.81$ kNm), ρ densità del flusso (considerata pari a 1400 kg/m³).

Dalla (19) si ottiene $U_{cr} = 14.5$ m/s.

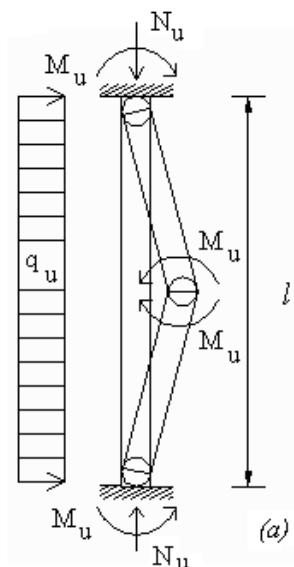


Fig. 9-4. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; schema dell'analisi riportata in Faella & Nigro (2003).

Lo studio effettuato in questa sede è stato indirizzato innanzitutto alla determinazione delle velocità ed altezze del flusso, ancora nell'ipotesi di spinta idrodinamica, tali da indurre la rottura del pilastro, sia per flusso perpendicolare al pilastro, sia per flusso perpendicolare alla diagonale del pilastro .

Si osserva infatti che l'ipotesi di altezza del flusso pari a 2.7 m, imposta da Faella e Nigro (2003) appare poco realistica; inoltre, analisi avanzate della propagazione della colata, riportate in Revellino *et alii* (2004), indicano un valore della velocità del flusso, in prossimità dell'edificio colpito della colata, pari a 5.8 m/s, cioè quasi un terzo del valore determinato da Faella e Nigro (2003).

L'applicazione dei teoremi dell'analisi limite permette quindi di valutare il carico ultimo e, conseguentemente, la velocità del flusso:

$$q_u = \frac{16M_u}{h \cdot (2l - h)}$$

$$v_c = \left(\frac{16M_u}{\gamma D_c} \frac{1}{h \cdot (2l - h)} \right)^{1/2}$$

Si ottengono i risultati riportati nelle Fig. 9-5 e Fig. 9-6.

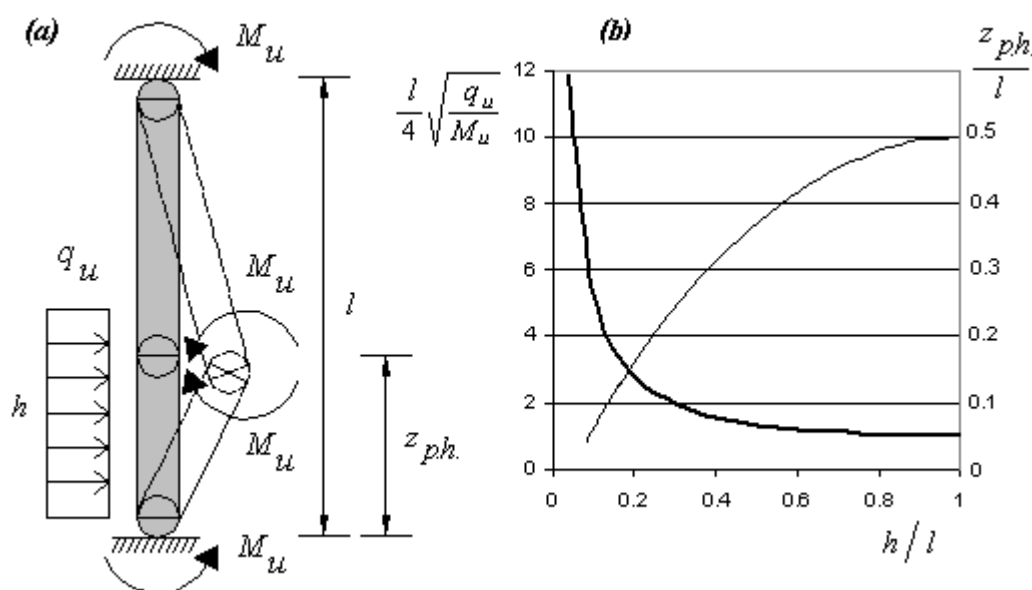


Fig. 9-5. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis della rottura del pilastro nell'ipotesi di altezza e velocità variabili della corrente; (a) meccanismo a tre cerniere; (b) relazione tra carico di collasso adimensionalizzato $(l/4) \cdot \sqrt{(q_u/M_u)}$ e posizione della cerniera plastica ($z_p h/l$), in funzione del rapporto h/l .

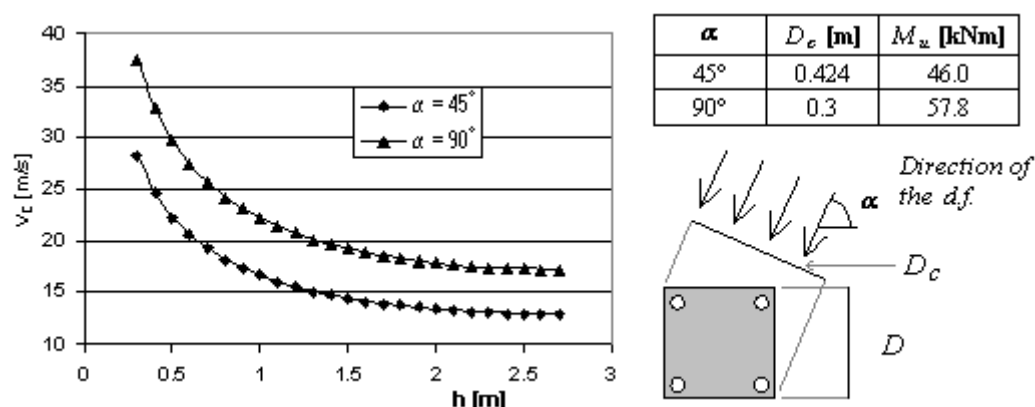


Fig. 9-6. Coppie di valori velocità – altezza del flusso che determinano il collasso del pilastro.

Se si considerano quindi altezze del flusso più realistiche, inferiori a 2.7 m, per avere il collasso del pilastro sono necessarie maggiori velocità.

Per tenere conto di queste differenze, è stato quindi elaborato un modello FEM di un pilastro in calcestruzzo armato colpito da una colata avente altezza pari a 1.5 m (Fig. 9-7), densità $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$, celerità $c = 1450 \text{ m/s}$ e 150 m/s , velocità all'impatto $U = 7.0$ e 14.0 m/s ; il valore risultante della rigidezza volumetrica del fluido potrebbe costituire una stima, per difetto, del valore corrispondente al comportamento non drenato della massa granulare

fluidizzata, che potrebbe manifestarsi nella fase impulsiva dell'impatto. Il comportamento costitutivo assegnato ai materiali costituenti il pilastro (calcestruzzo e acciaio) è il medesimo utilizzato per le analisi proposte da Faella e Nigro (2003). Non si è tenuto conto, nell'analisi dinamica FEM, dell'incremento delle resistenze dei materiali dovuto alla velocità di applicazione del carico.

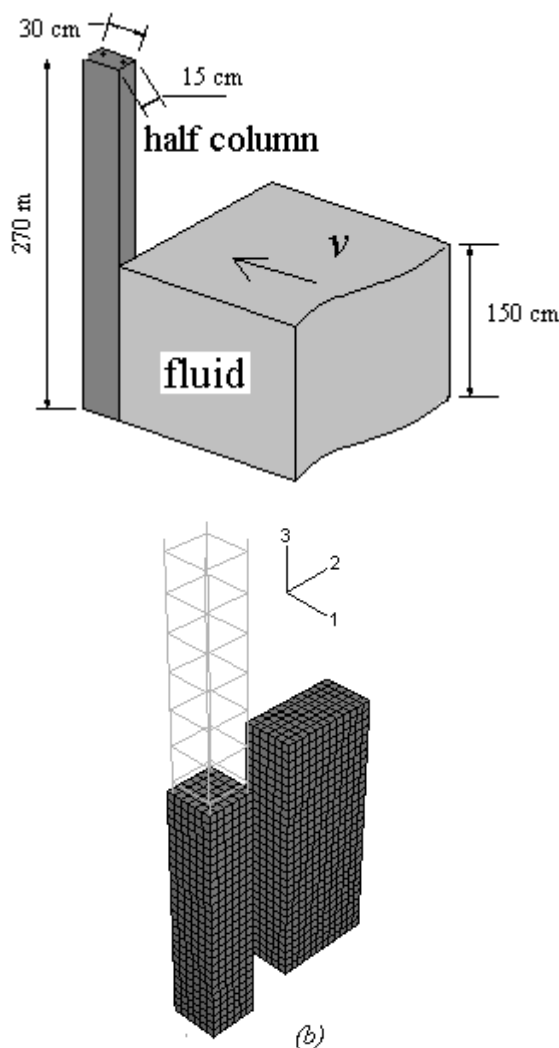


Fig. 9-7. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; (a) dominio impostato nell'analisi; (b) schema del dominio di calcolo impostato per le analisi numeriche (FEM).

I risultati delle analisi mostrano che per una velocità della colata pari a 7.0 m/s, lo spostamento massimo del pilastro (nella direzione parallela al movimento della colata), all'impatto, è pari a 0.96 cm (Fig. 9-9); il calcestruzzo, inoltre, in prossimità delle estremità del pilastro, raggiunge deformazioni di compressione maggiori di 3.5‰ (Fig. 9-9).

Tabella 9-1. Valori di velocità delle onde nel fluido (c) e velocità del flusso considerati nella back-analysis.

c [m/s] \ U [m/s]	14.0	7.0
1450	case (1)	case (2)
150	case (3)	case (4)

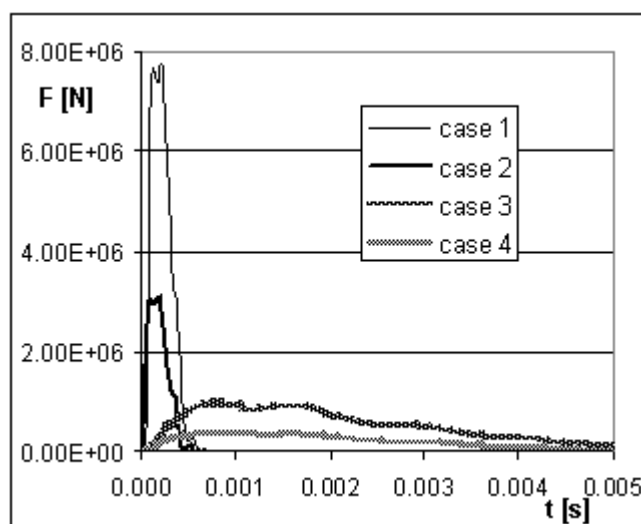


Fig. 9-8. Diagrammi delle forze di impatto nel tempo, per i quattro casi analizzati.

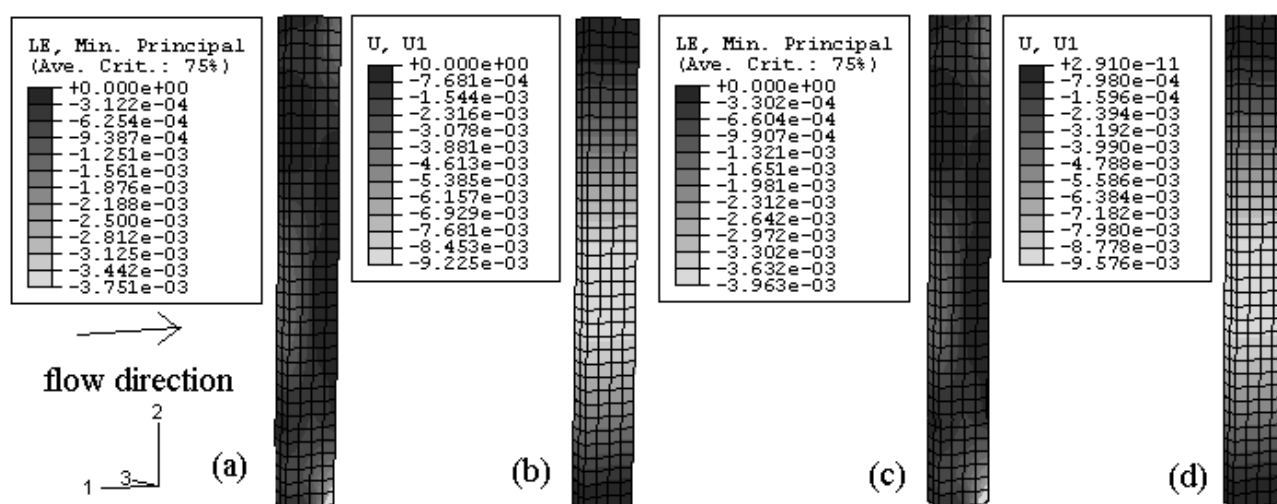


Fig. 9-9. Deformazioni e spostamenti [m] del pilastro a seguito dell'impatto con una corrente fluida; (a), (b): caso 4; (c), (d): caso 2.

Quindi, se si tiene conto della natura impulsiva del fenomeno, le condizioni di collasso del medesimo pilastro si raggiungono per altezze della colata e per valori della velocità più aderenti alle valutazioni degli studiosi del settore (Revellino *et alii*, 2004).

Inoltre, dai risultati mostrati in Fig. 9-9, si nota che la rigidità del fluido, espressa attraverso il parametro c , a parità di velocità del flusso U , non influenza notevolmente i risultati.

10. IMPATTO DI BLOCCHI

10.1 BLOCCO CONTRO UNA STRUTTURA A MENSOLA

Si illustrano, in questa sezione, i risultati dell'analisi parametrica circa l'impatto di un blocco di forma sferica su una struttura a mensola, con e senza fondazione, volta a determinare l'influenza esercitata da parametri quali:

- il punto di impatto del blocco sulla mensola;
- lo spessore della mensola;
- le caratteristiche meccaniche della mensola, nell'ipotesi di comportamento rigido o elastico lineare;
- lo spessore della fondazione, nel caso in cui essa sia considerata presente.

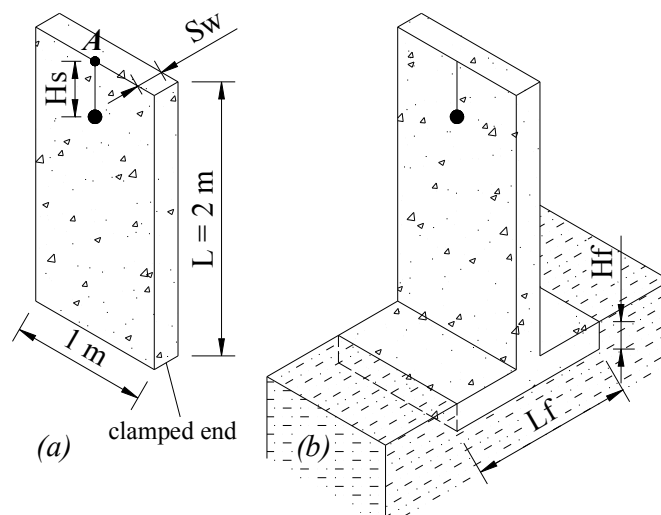


Fig. 10-1. Impatto di un blocco sferico contro una mensola (a) incastrata alla base; (b) connessa ad una fondazione. Posizione del problema; definizione delle grandezze la cui influenza è stata studiata per il presente lavoro: H_s identifica la posizione di impatto, Sw lo spessore della mensola, H_f lo spessore della fondazione, L_f la lunghezza della fondazione.

Le caratteristiche del blocco sono: diametro $D = 0.25$ m, densità $\rho = 2600$ kg/m³, comportamento elastico lineare caratterizzato da un modulo di Young $E = 6 \cdot 10^4$ MPa ed un coefficiente di Poisson $\nu = 0.2$. La velocità, all'impatto, è pari a 4 m/s.

Un primo confronto riguarda il paragone tra le forze esplicate nel caso di impatto contro una superficie piana solida, rigida, dotata di massa infinita ($Sw \rightarrow \infty$), ed una con comportamento elastico lineare (modulo di Young $E = 3 \cdot 10^4$ MPa) e massa infinita; i risultati sono riportati in

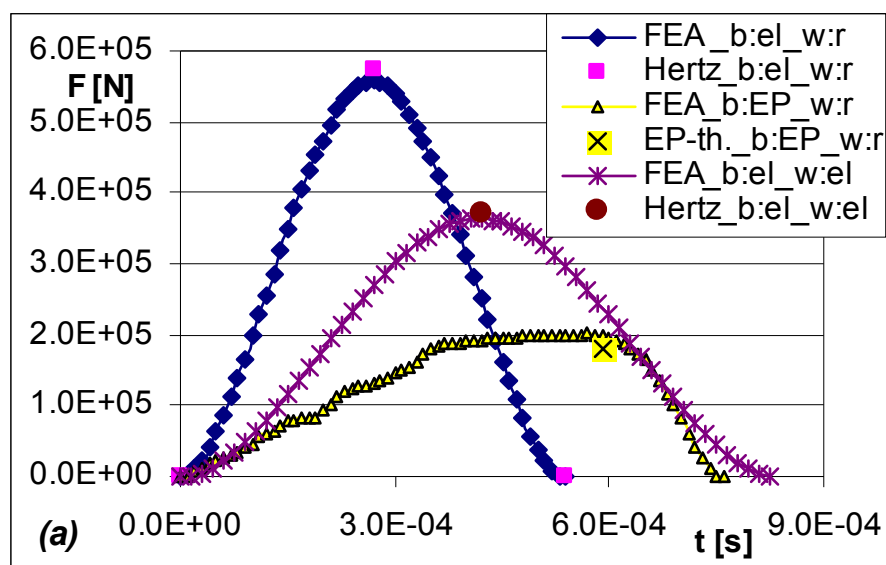


Fig. 10-2. Confronto fra le diverse forze di impatto.

Le conseguenze della possibilità di deformazione “locale”, legata ai punti nei dintorni dell’area di contatto, sono costituite da una diminuzione della forza di impatto ed un contestuale aumento dei tempi caratteristici del fenomeno.

Si riportano quindi in Tabella 10-1 i valori assegnati ad altri parametri significativi.

Tabella 10-1. Analisi FE. Valori dei parametri geometrici (H_s , Sw) e meccanici (E) assegnati al muro.

Combin.	Sw [m]	E [MPa]	H_s [m]
1	0.1	$3 \cdot 10^4$	0.2
2	0.2	$3 \cdot 10^4$	0.2
3	0.5	$3 \cdot 10^4$	0.2
4	0.2	$3 \cdot 10^4$	0.6
5	0.2	$3 \cdot 10^4$	1.0
6	0.2	$1 \cdot 10^4$	0.2
7	0.2	$5 \cdot 10^4$	0.2

La Fig. 10-3 illustra l’effetto dello spessore del muro. Si nota che al diminuire di Sw aumenta l’effetto della deformabilità “di struttura”, che si somma all’effetto dato dalla deformabilità locale. nel caso in cui lo spessore Sw sia pari a 0.5 ci si avvicina notevolmente, per il caso studiato (impatto di un blocco di diametro pari a $D = 0.25$ m) al caso di muro dotato di massa infinita.

La Fig. 10-4 mostra l’influenza del modulo di Young del muro; al crescere di E , di nuovo, si incrementa l’effetto sia della rigidità “locale”, sia quella della struttura.

In Fig. 10-5 si vede invece che, nel range di valori considerati, l'altezza d'impatto non produce effetti significativi sullo sviluppo temporale della forza d'impatto.

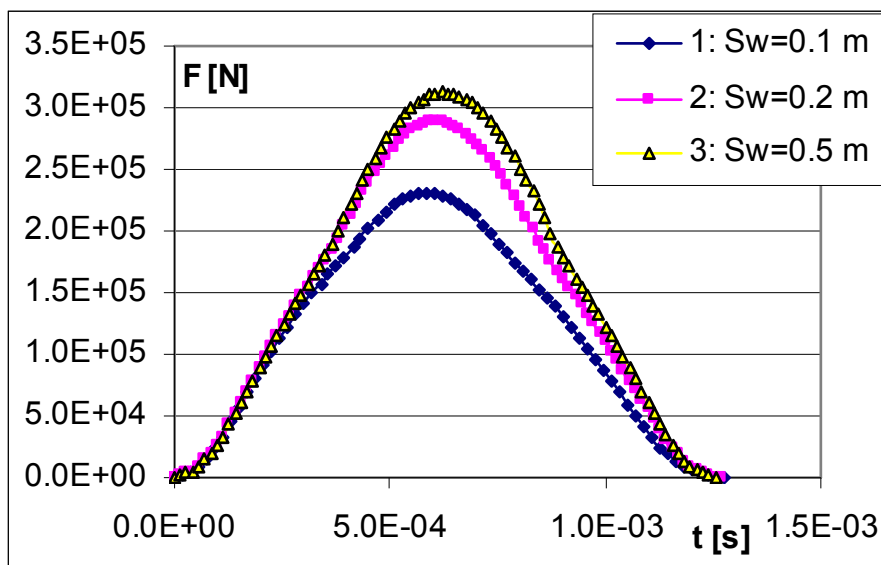


Fig. 10-3. Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di Sw , per H_s e E fissati ($H_s = 0.2$ m, $E = 3 \cdot 10^4$ MPa).

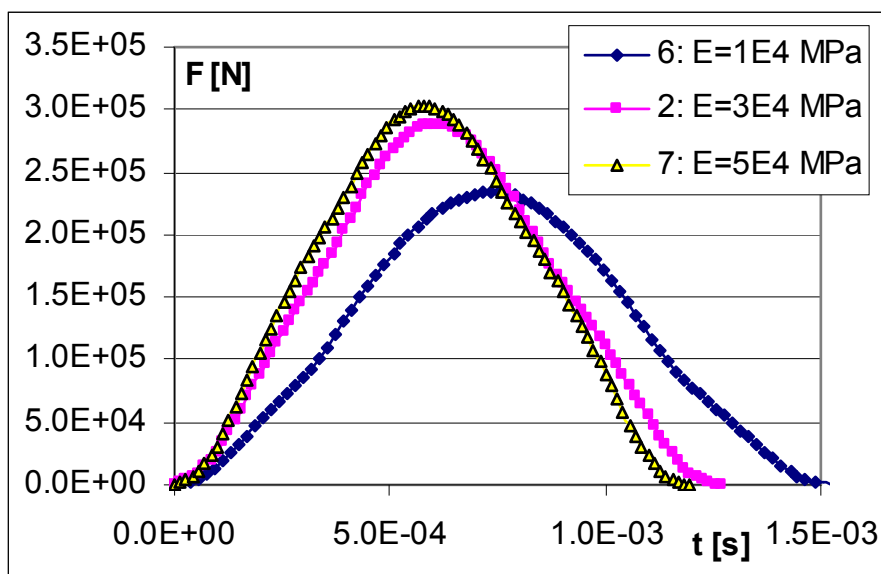


Fig. 10-4. Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di E , per Sw e H_s fissati ($H_s = 0.2$ m, $Sw = 0.2$ m).

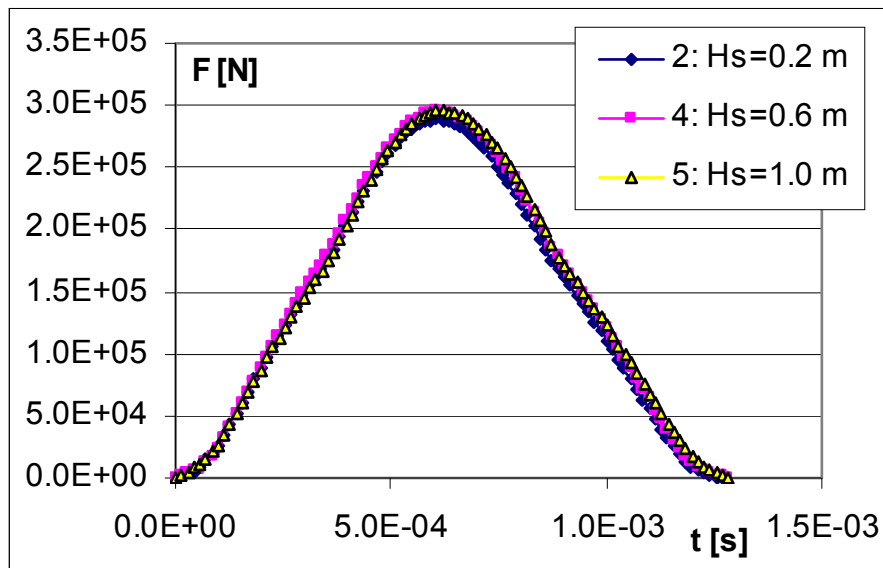


Fig. 10-5. . Risultati delle analisi FE. Evoluzione nel tempo della forza, al variare di H_s , al variare di S_w e E ($S_w = 0.2$ m, $E = 3 \cdot 10^4$ MPa).

10.2 BLOCCO CONTRO UN MURO FONDATA SU TERRENO ELASTICO LINEARE

Il caso di muro con fondazione su terreno elastico lineare è stato studiato in maggior dettaglio.

Il problema è stato impostato considerando un modello costituito da tre parti : il terreno di fondazione, una barriera e un blocco.

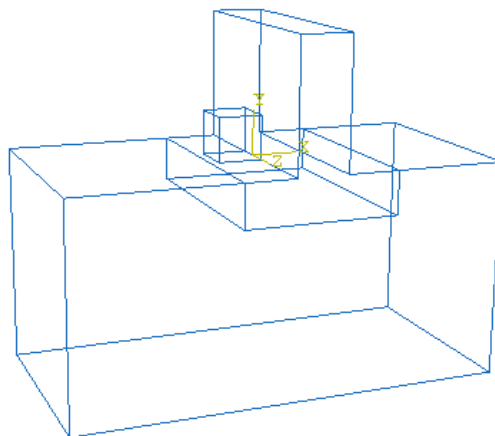


Fig. 10-6. Geometria impostata nelle analisi.

Il terreno di fondazione è incastrato alla base e ha le stesse caratteristiche meccaniche del blocco. La barriera è in calcestruzzo di densità 2500 kg/m^3 , ha un comportamento elastico lineare con modulo di Young E pari a $3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e coefficiente di Poisson ν uguale a 0.2.

Il blocco ha un comportamento elastico lineare ($\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, $E = 6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$, velocità d'impatto $v = 5 \text{ m/s}$) è di forma cubica ed ha un volume pari a 1.0 m^3 . Nelle Fig. 10-7 e Fig. 10-8 sono riportati il modello numerico e la geometria schematica impostata nelle analisi.

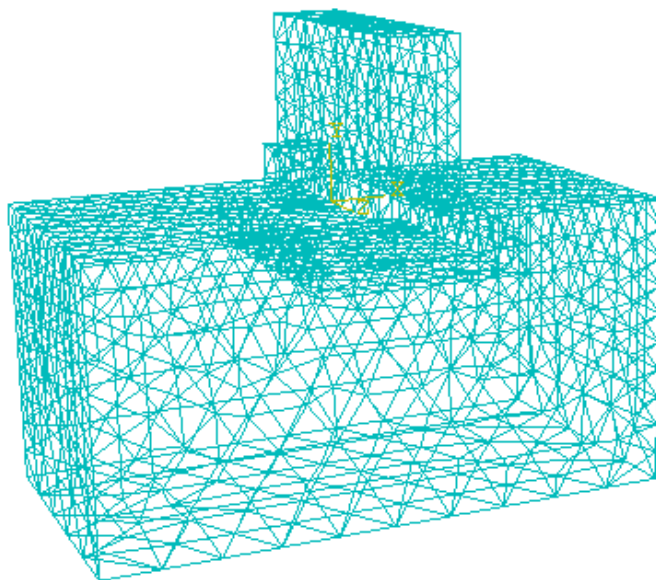


Fig. 10-7. Modello numerico

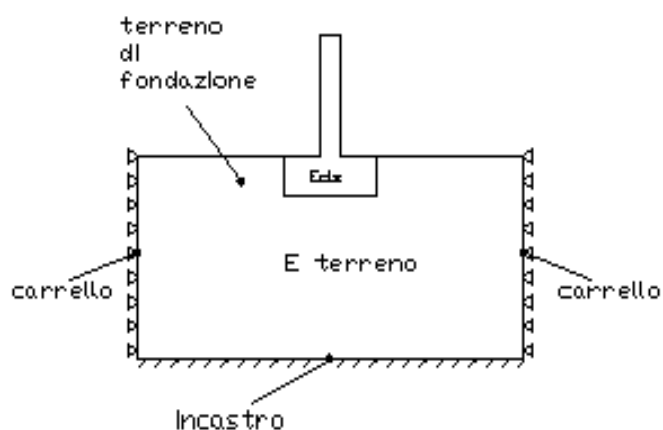


Fig. 10-8. Muro di calcestruzzo dotato di fondazione.

Si valuta, di nuovo, l'effetto della rigidità del terreno di fondazione. Si conferma che, a causa dei tempi caratteristici del fenomeno, estremamente brevi, la natura del terreno di fondazione non esercita un'apprezzabile influenza sulla forza d'impatto.

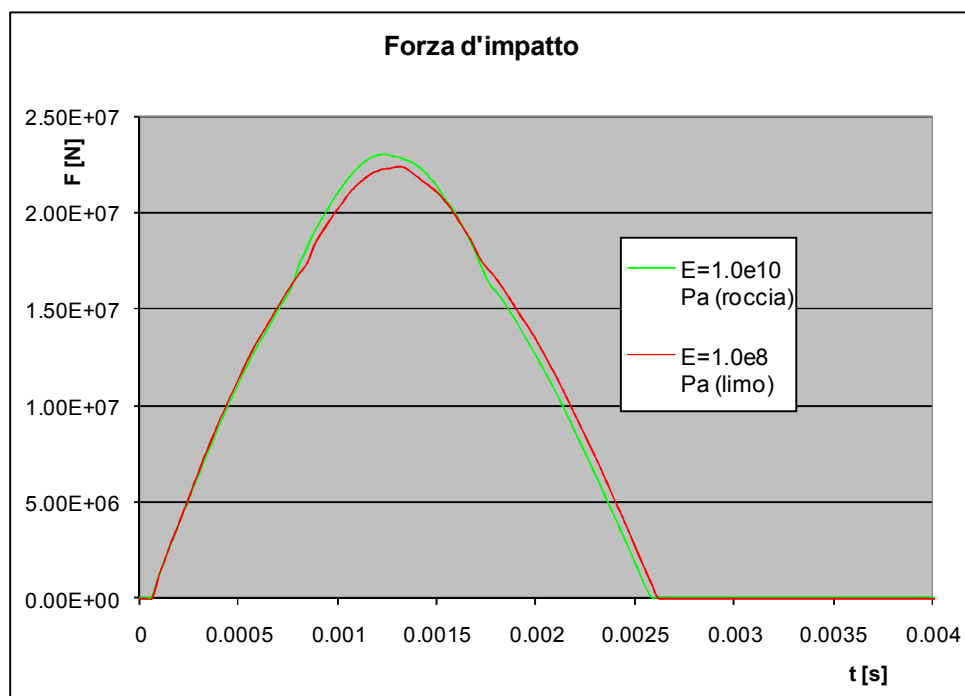


Fig. 10-9. Influenza del modulo di Young della fondazione.

Si studia quindi l'effetto del valore dello spessore di fondazione (Fig. 10-10) sul valore della forza d'impatto e sul quello del momento alla base (Fig. 10-11).

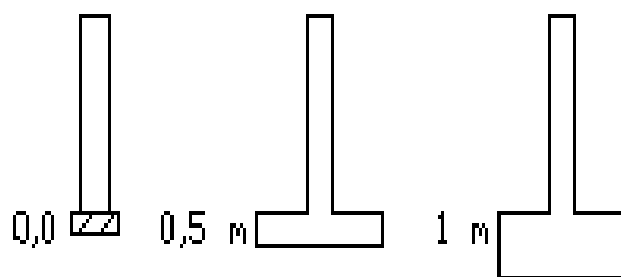


Fig. 10-10. Diversi spessori della fondazione considerati nelle analisi.

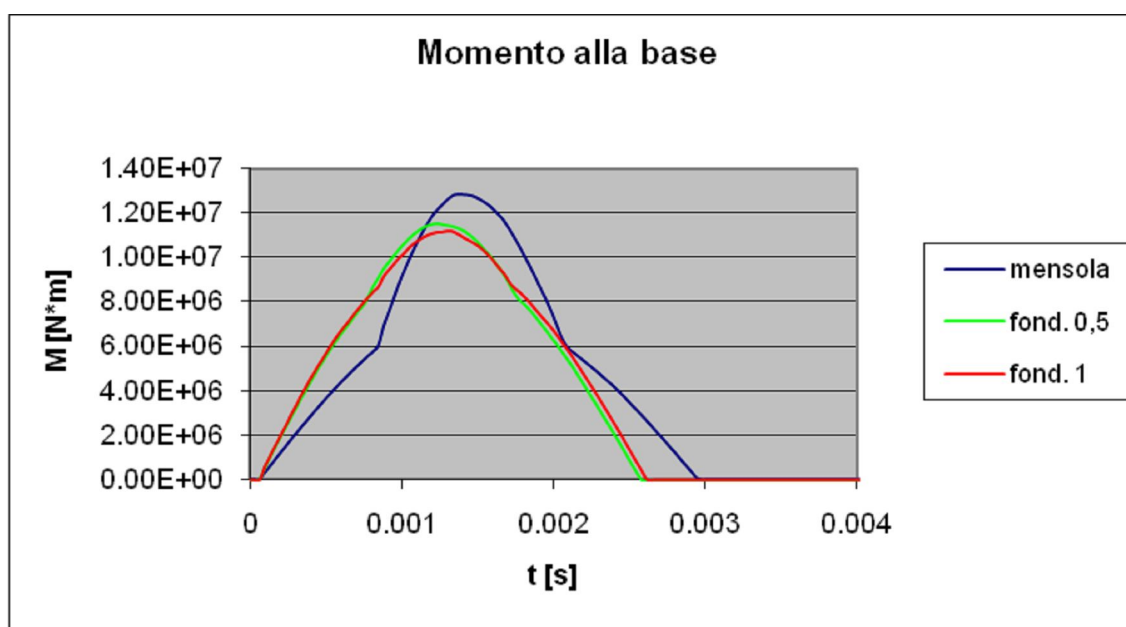
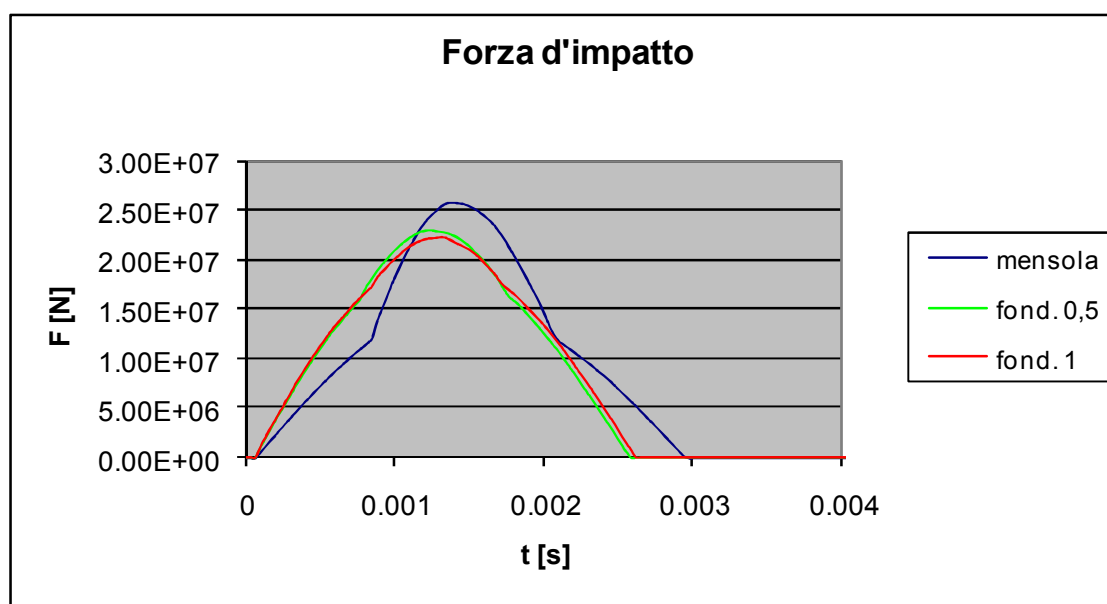


Fig. 10-11. Forza d'impatto e momento alla base per diversi spessori di fondazione.

Infine si è valutato l'effetto delle diverse altezze di contatto (Fig. 10-12).

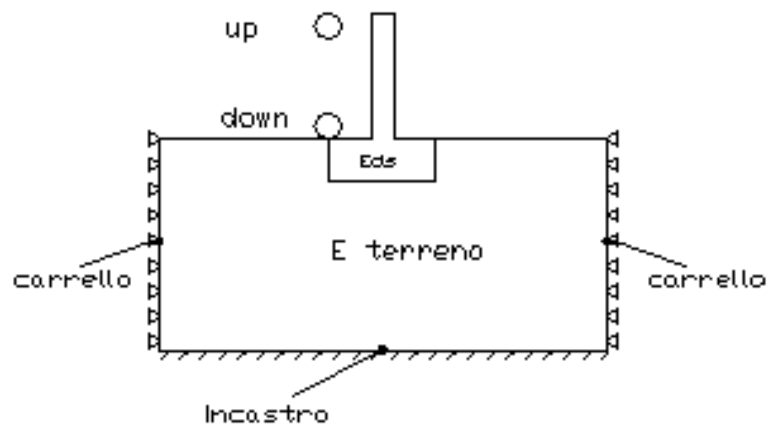
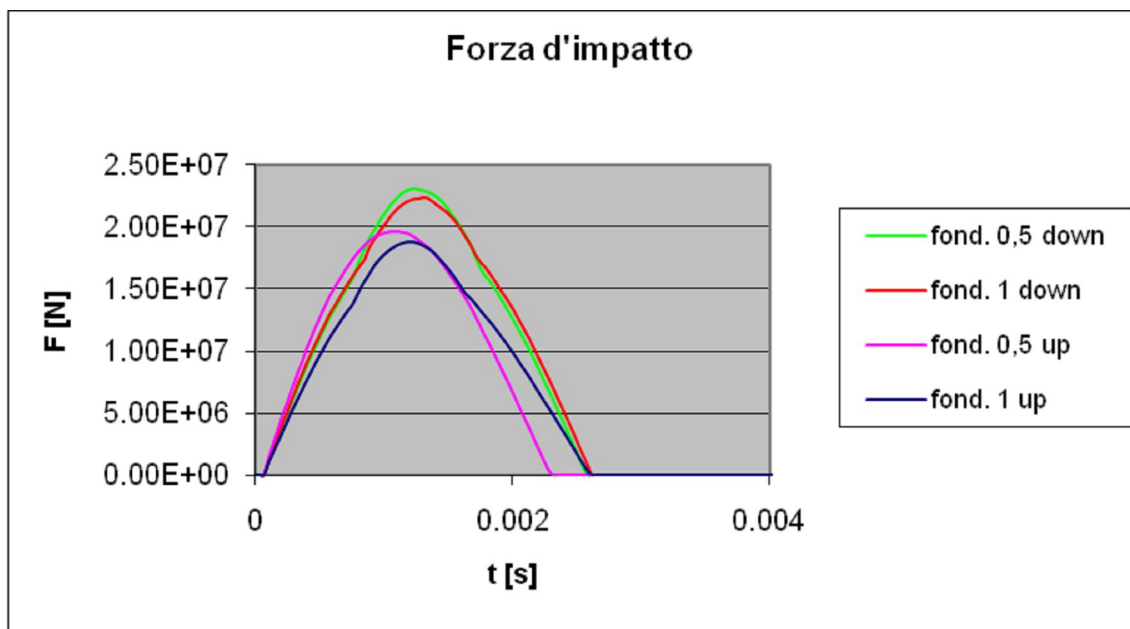


Fig. 10-12. Schema dei diversi punti di impatto del blocco considerati nelle analisi.



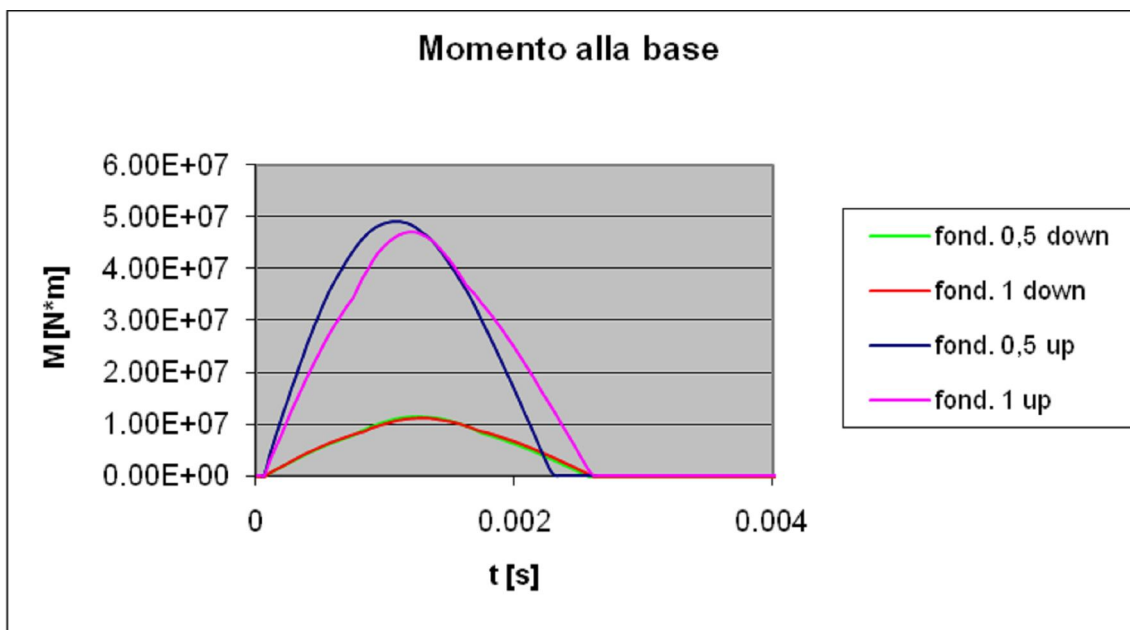


Fig. 10-13. Forza d’impatto e momento alla base per diversi spessori della fondazione.

Rispetto ad una mensola incastrata la forza d’impatto in un muro dotato di fondazione diminuisce, malgrado la massa di quest’ultimo sia maggiore, per effetto della mancanza di incastro al piede.

10.3 BLOCCO CONTRO UN MURO PROTETTO DA TRANSIZIONE DI MATERIALE GRANULARE

Dalle analisi precedentemente svolte, si è osservato che la zona di contatto fra i due corpi risulta interessata da deformazioni significative, dovute essenzialmente alle buone proprietà meccaniche di entrambi i corpi.

Si è pensato di interporre a protezione dell’opera uno strato di materiale granulare (transizione), che eserciti una duplice funzione: estendere l’ampiezza dell’intervallo di contatto e l’area di contatto.

Affinché la transizione sia efficace, le sue proprietà meccaniche devono essere modeste, non confrontabili con quelle del calcestruzzo armato; attenzione deve essere parimenti prestata anche allo spessore della transizione. In questo modo, la transizione diviene sede di deformazioni considerevoli e si ottiene l’effetto desiderato.

10.3.1 EFFETTO DELLE PROPRIETÀ MECCANICHE DELLA TRANSIZIONE

Le analisi, riferite allo schema in Fig. 10-14, sono state svolte considerando la transizione costituita di sabbia o, alternativamente, di ghiaia. Entrambi i materiali sono stati modellati adottando un comportamento costitutivo elastico lineare; i parametri assegnati sono:

- sabbia: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $E = 1\text{e}6 \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$;
- ghiaia: $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$, $E = 1\text{e}7 \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0.2$.

Si è impostato un modello definito “al continuo”: struttura e transizione occupano cioè con continuità il volume complessivamente ad essi assegnato. Di conseguenza, nella modellazione meccanica, la transizione granulare e il muro di calcestruzzo costituiscono un corpo unico, eterogeneo dal punto di vista fisico (diverse densità) e meccanico (differenti proprietà meccaniche).

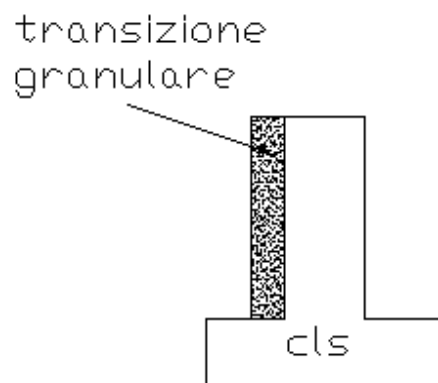


Fig. 10-14. Muro in calcestruzzo armato protetto da una transizione granulare.

La transizione risulta efficace in entrambi i casi; tuttavia, si riscontra un beneficio maggiore nel caso in cui essa sia costituita di sabbia (Fig. 10-15).

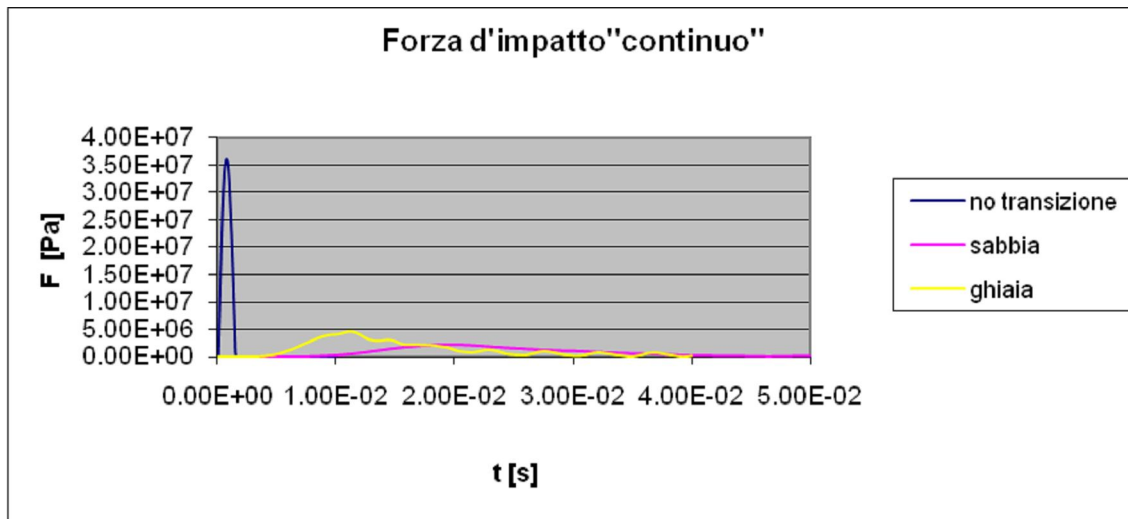


Fig. 10-15. Forza d'impatto nel caso di transizione granulare costituita, alternativamente di sabbia o di ghiaia.

10.3.2 EFFETTO DELLE SPESSORE DELLA TRANSIZIONE

Sebbene la presenza di uno spessore di materiale di transizione, di un qualsiasi materiale, posto a protezione del muro, possa risultare efficace, perché riduce la forza d'impatto e protegge la superficie stessa del muro, va ricordato che la transizione costituisce comunque una massa addizionale, che viene mobilitata nel corso dell'impatto.

Si osserva che, all'aumentare dello spessore della transizione, la forza diminuisce, ma per valori superiori a 0,5 m aumenta nuovamente, pur rimanendo inferiore ai valori corrispondenti al caso di assenza di transizione (Fig. 10-16).

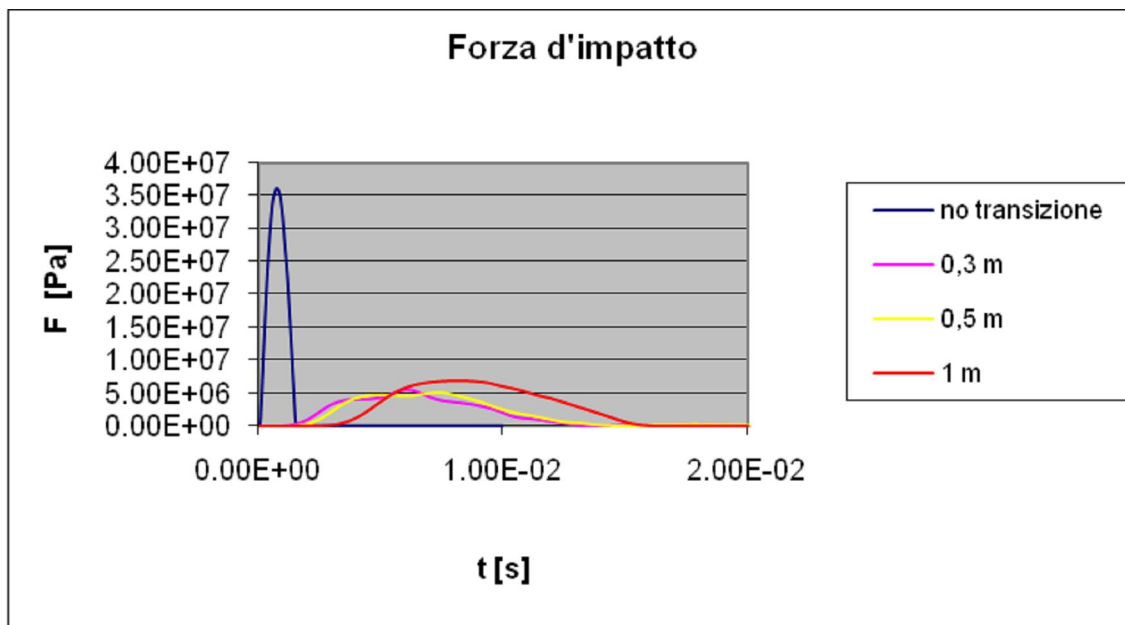


Fig. 10-16. Forza d'impatto per diversi valori dello spessore della transizione.

10.3.3 EFFETTO DEL PROFILO DI CONTATTO DELLA TRANSIZIONE

Il modello di rappresentazione meccanica del materiale che costituisce la transizione, precedentemente utilizzato, è un modello usualmente definito “al continuo”; occupa cioè con continuità il volume complessivamente ad esso assegnato. Di conseguenza, nella modellazione meccanica, la transizione granulare e il muro di calcestruzzo costituiscono un corpo unico, eterogeneo dal punto di vista fisico (diverse densità) e meccanico (differenti proprietà meccaniche).

Il modello così elaborato corrisponde, nella realtà, alla condizione per la quale il materiale granulare sia disposto a stretto contatto con il paramento verticale del muro, e sia anche racchiuso da una membrana o una rete metallica ancorata alla base del muro.

Si è anche considerato il caso di transizione granulare costituita di sabbia contenuta in sacchi separati, perché la sabbia risulta più efficace della ghiaia nel ridurre la forza di impatto (Fig. 10-15).

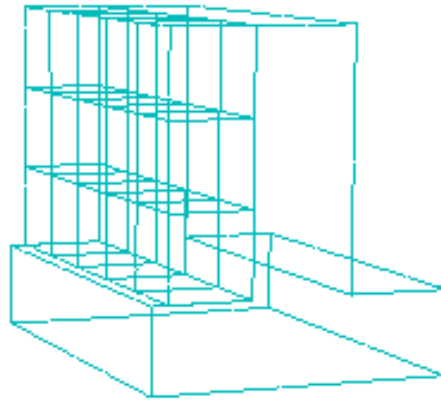


Fig. 10-17. Transizione costituita di sacchi di sabbia.

In questo caso, si è osservato una significativa riduzione della forza d'impatto, *dovuta al coinvolgimento di un singolo sacco nell'impatto* (Fig. 10-18).

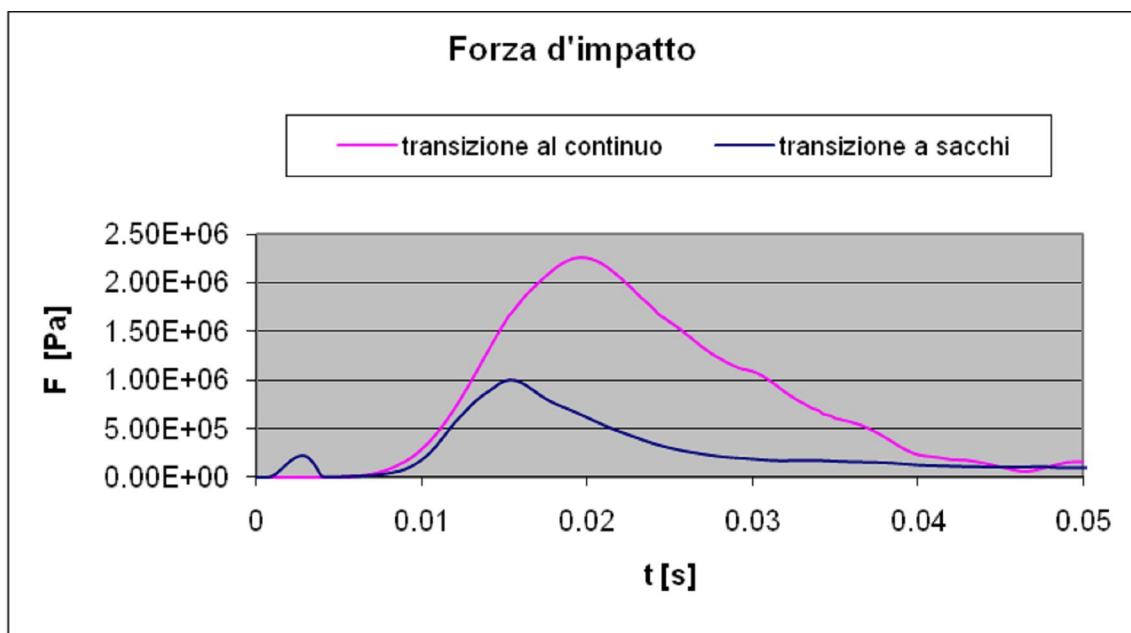


Fig. 10-18. Forza d'impatto nei due casi: transizione continua ovvero costituita da sacchi.

Per comprendere meglio la risposta di un singolo sacco colpito dal blocco ad elevata velocità, si è svolta una ulteriore analisi; per esigenze computazionali l'analisi è stata suddivisa in due fasi distinte.

Nella *prima fase*, si è considerato l'impatto del corpo contro il singolo sacco, *scostato dal muro*. In pratica, nei pochi millisecondi di impatto fra il blocco a elevata velocità e il sacco

di sabbia, l'analisi può essere svolta trascurando la presenza del muro. Il corpo colpisce innanzitutto il blocco e si unisce al sacco; entrambi i corpi acquisiscono quindi una velocità comune, che risulta minore di quella iniziale del corpo impattante.

Nella seconda fase si è studiato l'impatto di un corpo con massa pari alla somma delle masse del sacco e del corpo, e velocità pari a quella ricavata al termine della prima fase (Fig. 10 - 20).



Fig. 10-19 Prima fase.

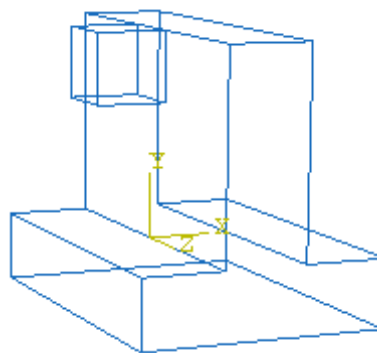
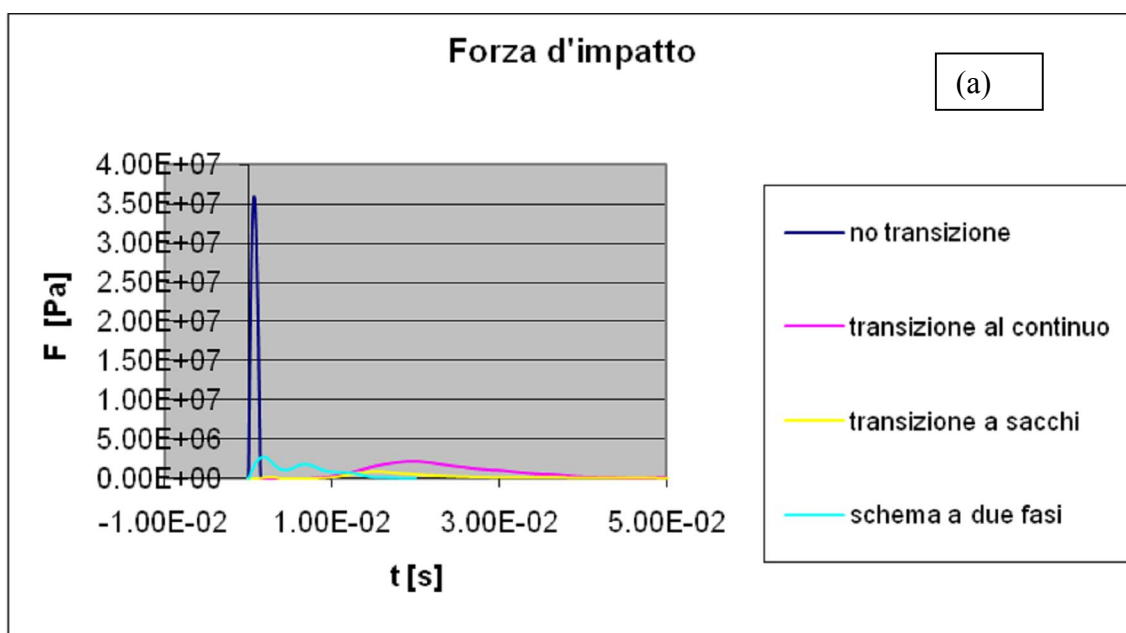


Fig. 10-20. Seconda fase.

La forza che si determina è intermedia fra quelle relative al caso della transizione continua (1) e di assenza della transizione (2); si osserva, inoltre, una riduzione del tempo di contatto (Fig. 10-21 a) e b)).



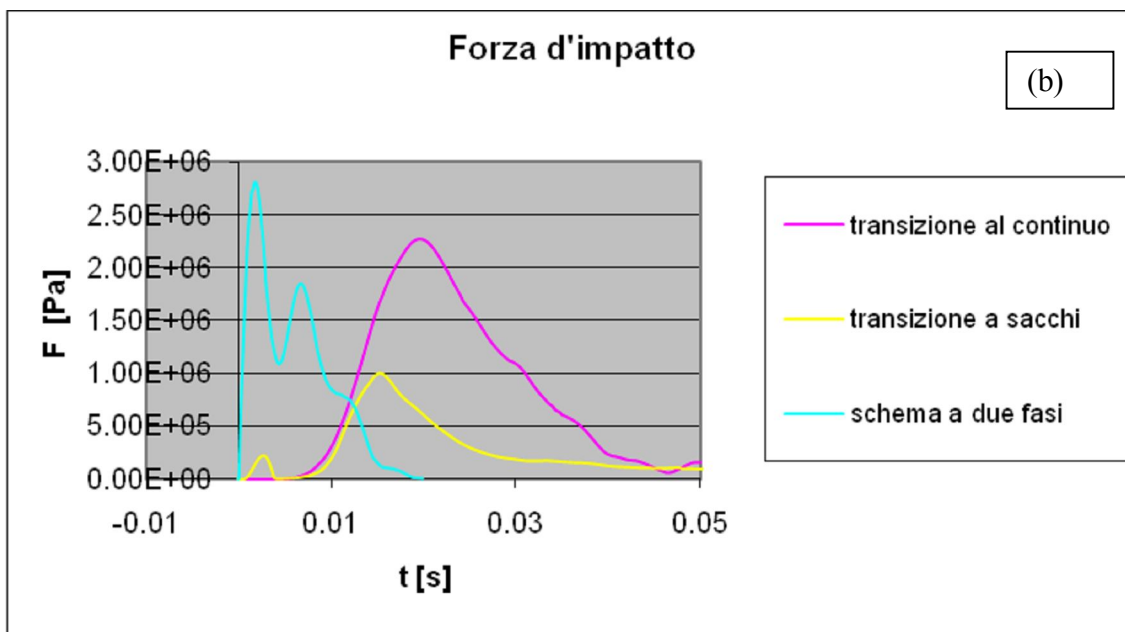


Fig. 10-21. Forza d'impatto: confronti.

Lo schema di calcolo suddiviso in due fasi è caratterizzato da due assunzioni profondamente differenti da quelle adottate nel caso di transizione granulare connessa al muro. Le due ipotesi relative alle velocità del sistema blocco impattante - sacco (prima fase) e al profilo del corpo impattante (seconda fase); tali differenze determinano un impulso (forma della forza d' impatto $F(t)$ e valore massimo della $F(t)$) che differisce marcatamente dai risultati ottenuti dall'analisi in cui la transizione è costituita da sacchi di sabbia separati.

Nella prima fase, infatti, il sacco di sabbia non incontra alcun ostacolo al moto in direzione orizzontale; quindi, il sistema complessivamente in moto, formato dal corpo impattante e dal sacco, acquisisce una velocità, con valore massimo pari a 6,79 m/s (Fig. 10-22), superiore a quella relativa al caso in cui il sacco sia invece ostacolato dal muro, con valore massimo pari a 3,88 m/s (Fig. 10-23).

Questa circostanza, dal punto di vista dinamico, determina una quantità di moto aggiuntiva, corrispondente alla presenza del sacco in moto con velocità maggiore (Fig. 10-22).

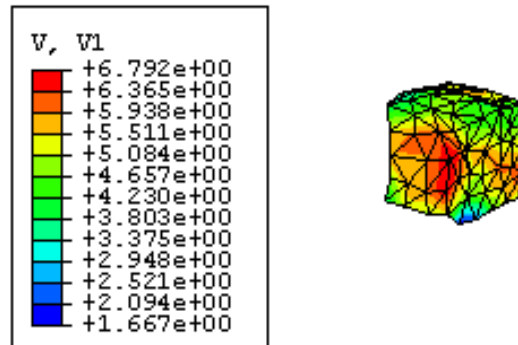


Fig. 10-22. Velocità del sacco nello schema a due fasi: prima fase.

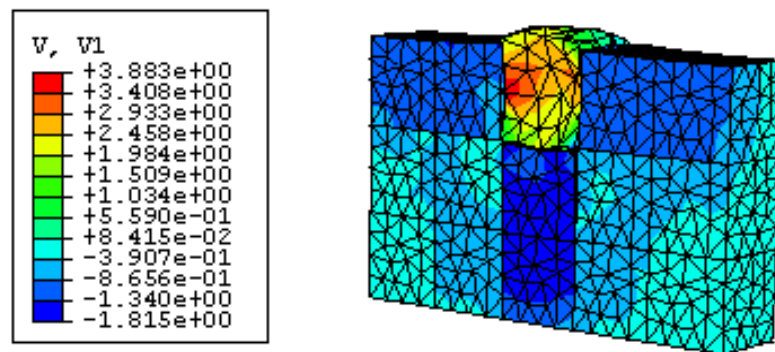


Fig. 10-23. Velocità del sacco nello schema a sacchi.

Nella seconda fase si è studiato l'impatto di un corpo con profilo piano contro un muro. Il precedente schema di riferimento prevedeva invece l'impatto di un corpo sferico contro il muro. La modifica del profilo del corpo che impatta il muro provoca sia un aumento del valore di picco della forza d'impatto, sia una riduzione del tempo di contatto.

I risultati del modello di calcolo articolato in due fasi suggerisce, quindi, una modalità piuttosto efficace di disporre il sacco, allo scopo di ridurre la forza d'impatto: evitare il contatto completo (profilo piano) fra la sezione del sacco e la superficie del muro, preferendo invece un'area di contatto limitata; in definitiva, si ritiene più opportuno utilizzare sacchi con profilo curvo, come qualitativamente indicato nella Fig. 10-24.

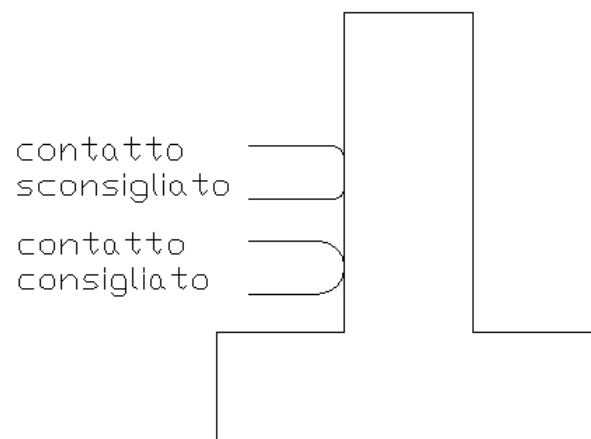


Fig. 10-24. Schemi di posa in opera della transizione granulare racchiusa in un sacco.

11. INDICAZIONI PROGETTUALI

11.1 ESPRESSIONE ANALITICA DELLA FORZA D'IMPATTO DI COLATE A COMPORTAMENTO FLUIDO

Dalle analisi numeriche presentate nelle sezioni precedenti si evince che le condizioni più critiche, in termini di forza d'impatto, si hanno nel caso in cui un fronte fluido urti la struttura con un fronte piano.

Si è quindi ricostruita un'espressione per la forza in funzione nel tempo, da applicare alla struttura. La procedura è consistita in un lavoro di riorganizzazione dei risultati proposti nelle precedenti sezioni, sia per colata a sezione trasversale triangolare, sia per colata a sezione trasversale rettangolare. Si sono quindi raccolti i risultati ottenuti per:

- altezza del dominio fluido (H): $H = 0.5, 1.0$ m;
- rapporto altezza (H) – base (b): $H/b = 1$, $H/b = 1/3$, $H/b \rightarrow 0$;
- velocità d'impatto (U): $U = 1, 5, 10$ m/s;
- densità del fluido (ρ_0) $\rho_0 = 1000, 1500$ kg/m³;
- velocità di propagazione delle onde nel fluido (c_0 , legata alla compressibilità del fluido stesso); $c_0 = 1450$ m/s (fluido puro), 150 m/s (miscela aria - fluido).

I risultati delle analisi FEM mostrano che per entrambi i tipi di sezione trasversale l'evoluzione nel tempo della forza d'impatto $F(t)$ possiede caratteristiche comuni: possono essere infatti identificate tre fasi per la fase impulsiva; a : inizialmente, (Fig. 11-1), $F(t)$ cresce con velocità estremamente elevata, in un tempo molto breve, tendente a zero, raggiungendo il valore massimo; b : tale valore si mantiene approssimativamente costante, per un periodo molto breve; c : nella fase finale, $F(t)$ si annulla, seguendo un'evoluzione nel tempo con legge quadratica (3D) o lineare (2D).

Per determinare quindi una relazione generale per la forza d'impatto $F(t)$, si considera inizialmente una relazione del tipo:

$$F(t) = A(t) \cdot \delta \cdot \Delta p_{max} \quad (30)$$

Δp_{max} è la massima pressione teorica raggiungibile (definite nelle precedent sezioni); $A(t)$ è l'area di contatto sulla quale agisce, nel tempo, la pressione massima ($\Delta p = \Delta p_{max}$); δ è un coefficiente adimensionale

La forza $F(t)$ dipende dalle dimensioni del fronte fluido (b e H), dalla densità (ρ_0), dalla velocità di propagazione delle onde nel fluido (c_0), dalla velocità d'impatto (U).

L'evoluzione nel tempo della forza d'impatto schematicamente esposta precedentemente può essere spiegata considerando che all'inizio del fenomeno ($t = 0$, primo contatto), la pressione Δp_{max} agisce sull'intero fronte a contatto con la parete (le due superfici, infatti, sono verticali e parallele); subito dopo il primo contatto, tuttavia, la condizione al contorno $\Delta p = 0$ comincia a propagarsi verso l'interno del dominio fluido (e quindi verso le porzioni interne del fronte) con celerità c_0 ; quindi, l'area $A(t)$, che, si ricorda, è caratterizzata da $\Delta p = \Delta p_{max}$ decresce molto rapidamente nel tempo (Fig. 11-1).

In particolare, per il tempo $\bar{t} = t - t_2$ ($\bar{t} > 0$) si ottiene:

$$(\bar{t}) = A_0 - \lambda \cdot c \cdot \bar{t} \quad (31a)$$

$$A(\bar{t}) = A_0 - 2 \lambda \cdot c \cdot \bar{t} \cdot h - \lambda \cdot c \cdot \bar{t} \cdot (b - 2 \lambda \cdot c \cdot \bar{t}) \quad (31b)$$

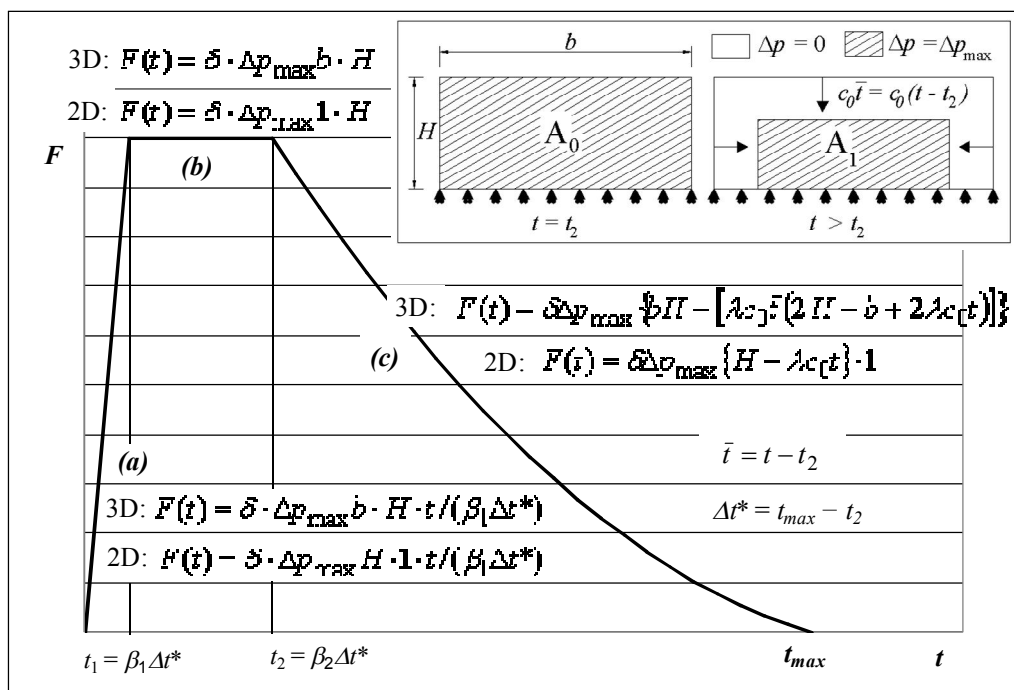
La relazione (31a) è valida per analisi con dominio 2D ($H/b \rightarrow 0$) mentre la (31b) è riferita ad analisi 3D; λ , al pari di δ , è un coefficiente adimensionale.

Attraverso le formule (31) è possibile risalire all'intervallo di tempo Δt^* (Fig. 11-1), dopo t_2 , tale che $A(\bar{t}) = 0$; nella schematizzazione analitica dell'evoluzione nel tempo della forza di impatto, per modellare l'intervallo di tempo nel quale agisce la massima forza d'impatto, F_{max} , sono stati introdotti due altri coefficienti adimensionali (β_1 , β_2), proporzionali a Δt^* .

L'evoluzione schematica della forza d'impatto F è riportata in Fig. 11-1, insieme ai valori suggeriti dei parametric λ , β_1 , β_2 e δ , per i diversi casi analizzati, ottenuti dalle simulazioni numeriche (FEA).

A titolo di esempio, in Fig. 11-2 sono riportati i confronti fra risultati delle analisi numeriche e l'interpretazione analitica, per alcuni casi.

L'espressione analitica proposta per la forza d'impatto è il risultato dell'interpretazione dell'impatto per un caso particolare (fronte fluido piano e parallel alla superficie impattata), ma la meccanica dello sviluppo e seguente dissipazione delle sovrappressioni massime è del tutto generale, quindi può essere applicata allo studio ed interpretazione dei test di laboratorio (velocità U e altezze del fluido H variabili rispettivamente tra 0.1 e 3 m/s e tra 0.05 e 0.5 m), impatti di colate a comportamento fluido ($1 < U < 30$ m/s, $0.5 < H < 2$ m) e impatto di onda marine e oceaniche ($1 < U < 15$ m/s, $0.5 < H < 10$ m).



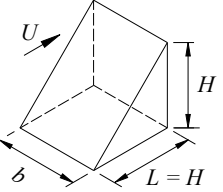
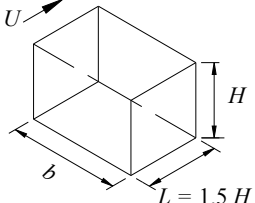
d.f. (or wave) geometry		λ	β_1	β_2	δ
	$b \rightarrow \infty$	1.000	0.075	0.200	0.750
	$b = H$	0.750	0.075	0.250	0.900
	$b = 3H$	1.000	0.075	0.200	0.900
	$b = H$	0.750	0.100	0.300	0.850
	$b = 3H$	1.000	0.075	0.250	0.900

Fig. 11-1. Caratteri analitici dell'evoluzione nel tempo della forza d'impatto $F(t)$.

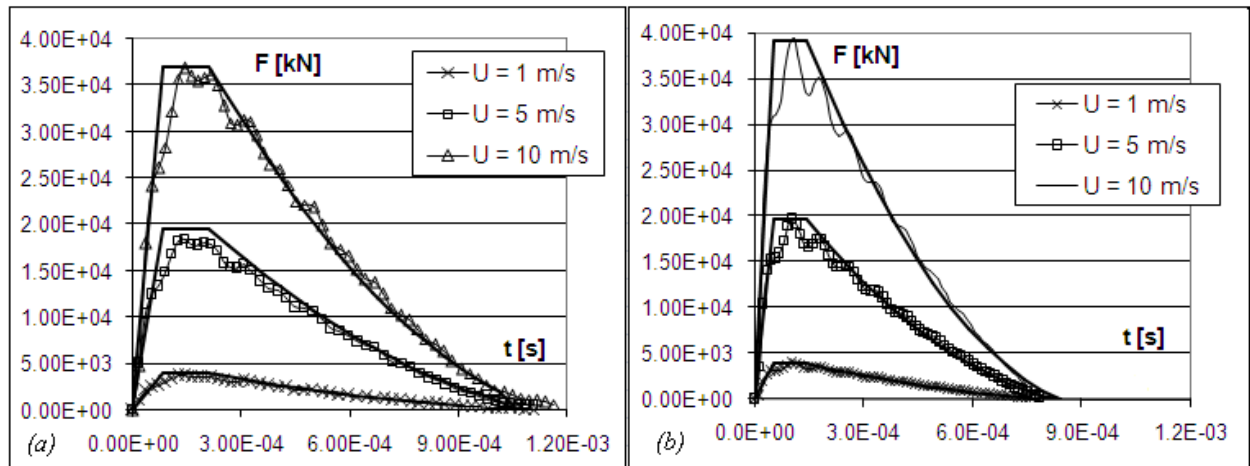


Fig. 11-2. Confronto tra l'evoluzione nel tempo delle forze di impatto F valutate attraverso analisi numeriche (FEA) e attraverso le espressioni analitiche proposte in Fig. 11-1; $H = 1$ m, $b = 3H$, $c_0 = 1450$ m/s, $\rho_0 = 1000$ kg/m³; dominio fluido caratterizzato da (a) sezione trasversale rettangolare, (b) sezione trasversale triangolare.

11.2 IMPULSO DI COLATE A COMPORTAMENTO FLUIDO

Nel caso di impatto di una corrente fluida con forma generica, si è visto, nelle sezioni precedenti, che il caso di fronte piano e parallelo alla superficie solida costituisce un estremo superiore anche in termini di impulso.

E' quindi possibile studiare la risposta della struttura fornendo come dato di ingresso nella progettazione di strutture di mitigazione il valore assunto dall'impulso, come riportato nella sezione I. Si ricordano le relazioni precedentemente determinate:

$$I = 0.40 \rho_0 U H b^2 \quad \text{se } b/H = 1$$

$$I = 0.22 \rho_0 U H b^2 \quad \text{se } b/H = 3$$

$$I = 0.78 \rho_0 U H^2 \quad \text{se } b/H \rightarrow 0 \ (b \gg H); I \text{ valutato per unit\`a di larghezza}$$

in cui I è l'impulso, ρ_0 la densità del fluido, U la velocità all'impatto, H l'altezza della corrente e b la larghezza.

11.3 IMPATTO DI BLOCCHI: RICHIAMI DELLA TEORIA DELL'ANALISI DIMENSIONALE

Si consideri la relazione:

$$g_0 = f(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (11.1)$$

fra le grandezze $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ che caratterizzano un dato fenomeno (variabili indipendenti o variabili di controllo) e una grandezza di interesse g_0 relativa al fenomeno medesimo (variabili dipendenti o variabili di stato).

La relazione fisica tra le grandezze considerate non dipende evidentemente dai riferimenti o dai sistemi di misura adottati, anche se la forma specifica della (11.1) può in generale variare in relazione ad essi.

Tra le grandezze $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ si scelgono tre grandezze fra loro dimensionalmente indipendenti, ovverosia rappresentanti una terna di grandezze base per un sistema di unità di misura.

Posto che siano (g_1, g_2, g_3) si può scrivere:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (11.2)$$

esprimere le dimensioni di ogni grandezza come prodotto di potenze delle tre grandezze base del sistema di unità scelto.

Si definiscono poi le grandezze:

$$\pi_i = \frac{g_i}{g_1^{\alpha_i} g_2^{\beta_i} g_3^{\gamma_i}} \quad (11.3)$$

Per loro stessa definizione, le π_i sono grandezze adimensionali, e rappresentano la misura delle g_i , rispetto alla terna (g_1, g_2, g_3) .

Poiché, come già osservato, la dipendenza fra le grandezze considerate non dipende dal sistema di misura, se non per la forma della relazione funzionale che le lega, la (11.1) può essere scritta nella forma:

$$\pi_0 = f_1(1,1,1, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_n) \quad (11.4)$$

essendo la misura delle (g_1, g_2, g_3) rispetto a se stesse pari all'unità.

Risulta, in definitiva:

$$\pi_0 = f_2(\pi_4, \pi_5, \dots, \pi_n) \quad (11.5)$$

La (12.5) mostra che con una opportuna scelta del sistema di misura, è possibile ridurre il numero delle variabili indipendenti di tre unità.

Questo risultato è noto come teorema di Riabucinski-Buckingham.

La (12.5) può essere espressa in termini di g_0 :

$$g_0 = g_1^{\alpha_0} g_2^{\beta_0} g_3^{\gamma_0} f_2(\pi_4, \pi_5, \dots, \pi_n) \quad (11.6)$$

La formulazione di un problema in termini dimensionali richiede di abbandonare le usuali grandezze base scelte come unità di misura, per passare ad un sistema di riferimento intrinseco al problema.

Scelta la terna, gli esponenti α, β, γ nelle (11.3) si determinano sostituendo alle (g_1, g_2, g_3) e alle g_i le rispettive dimensioni rispetto all'usuale sistema di riferimento (M,L,T), poiché la dimensione di un gruppo è per definizione nulla, deve essere verificata la:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \quad (11.7)$$

Nella (12.7) devono essere eguagliati gli esponenti di ciascuna delle tre grandezze base (massa M, lunghezza L, tempo T), determinando così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

11.4 IMPATTO DI BLOCCHI: INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI ANALITICI E NUMERICI (FEM) CON L'ANALISI DIMENSIONALE

Le variabili indipendenti sono l'impulso I , i moduli di elasticità di entrambi i corpi E_1 e E_2 , le loro masse m_1 e m_2 , il raggio che approssima il corpo che impatta R_1 , e la sua velocità v .

Si può quindi scrivere:

$$\pi = f(I, E_1, E_2, m_1, m_2, R_1, v)$$

Si scelgono come variabili indipendenti:

E_1, m_1, R_1 relative al corpo impattante.

Per i gruppi adimensionali:

$$\pi_p = \frac{I}{E_1^\alpha m_1^\beta R_1^\gamma} \Rightarrow I = M L T^{-1} = M^\alpha L^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^\gamma \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 1/2 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= 3/2 \end{aligned}$$

$$\pi_v = \frac{v}{E_1^\alpha m_1^\beta R_1^\gamma} \Rightarrow I = L T^{-1} = M^\alpha L^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^\gamma \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 1/2 \\ \beta &= -1/2 \\ \gamma &= 3/2 \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\pi_p = \frac{I}{\sqrt{E_1 m_1 R_1^3}} = \pi_2$$

$$\pi_v = v \sqrt{\frac{m_1}{E_1 R_1^3}} = \pi_1$$

L'impulso può essere scritto come:

$$I = \sqrt{E_1 m_1 R_1^3} g\left(\frac{E_1}{E_2}, \frac{m_1}{m_2}, v \sqrt{\frac{m_1}{E_1 R_1^3}}\right)$$

11.4.1 BLOCCO CONTRO UN MURO DOTATO DI FONDAZIONE

Fissate le caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche del muro e del corpo impattante, sono state svolte analisi assegnando diversi valori della velocità.

Le analisi sono state svolte sia per via analitica sia per via numerica.

Metodo analitico

Indicate con il pedice 1 le caratteristiche del corpo impattante, e con 2 quelle del muro, sono stati fissati i moduli di elasticità E_1 e E_2 , la massa m_1 (quella del muro è infinitamente grande), il raggio R_1 (quello del muro è stato posto infinitamente grande per simulare una parete verticale), i coefficienti di Poisson ν_1 e ν_2 , e la velocità del corpo v . Si è applicata la formula di Hertz:

$$P = 4 * E * \frac{\delta_z}{3 * \left(\frac{1}{R}\right)^{0,5}}$$

$$t_c = 2,87 * \sqrt{m^2 * R * \frac{(1/E)^2}{v}}$$

dove:

$$E = \frac{(1-v_1^2)}{E_1} + \frac{(1-v_2^2)}{E_2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

$$\delta_z = \left(15 * \frac{m * v^2 * (1/E) \sqrt{1/R}}{16} \right)^{0.4}$$

Per calcolare una serie di valori della Forza di contatto e del tempo di contatto per diversi valori della velocità. Utilizzando la formula che approssima la forma dell'impulso:

$$I = \frac{2}{3,14} * P * t_c$$

si è ottenuta una serie di valori dell'impulso. Ricordando che:

$$\pi_v = v \sqrt{\frac{m_1}{E_1 R_1^3}} = \pi_1 \quad \text{e} \quad \pi_p = \frac{I}{\sqrt{E_1 m_1 R_1^3}} = \pi_2$$

si ottengono due serie di valori di questi gruppi dimensionali (Tabella).

Tabella 1. Serie di valori dei due gruppi dimensionali.

v	P [N]	tc [s]	I [Ns]	Π2	Π1
1	1,130E+06	4,388E-03	3,156E+03	9,877E-04	4,260E-04
2	2,595E+06	3,820E-03	6,312E+03	1,975E-03	8,521E-04
3	4,222E+06	3,523E-03	9,468E+03	2,963E-03	1,278E-03
4	5,963E+06	3,326E-03	1,262E+04	3,951E-03	1,704E-03
5	7,794E+06	3,181E-03	1,578E+04	4,939E-03	2,130E-03
6	9,700E+06	3,067E-03	1,894E+04	5,926E-03	2,556E-03
7	1,167E+07	2,974E-03	2,209E+04	6,914E-03	2,982E-03
8	1,370E+07	2,895E-03	2,525E+04	7,902E-03	3,408E-03
9	1,578E+07	2,828E-03	2,841E+04	8,889E-03	3,834E-03
10	1,791E+07	2,769E-03	3,156E+04	9,877E-03	4,260E-03

Riportando in ascissa i valori di π_1 e in ordinata quelli di π_2 , si osserva che i punti, come atteso, si distribuiscono lungo una retta (Fig. 11-3).

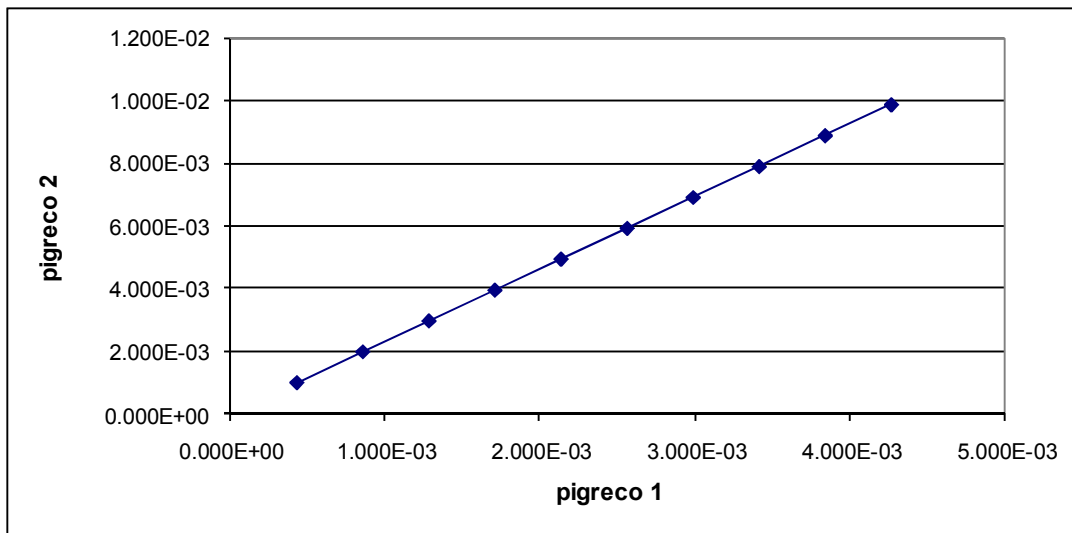


Fig. 11-3. Valori assunti da π_1 e π_2 .

Successivamente, gli stessi calcoli sono stati svolti per diversi valori del rapporto tra le masse dei due corpi (Fig. 11-4).

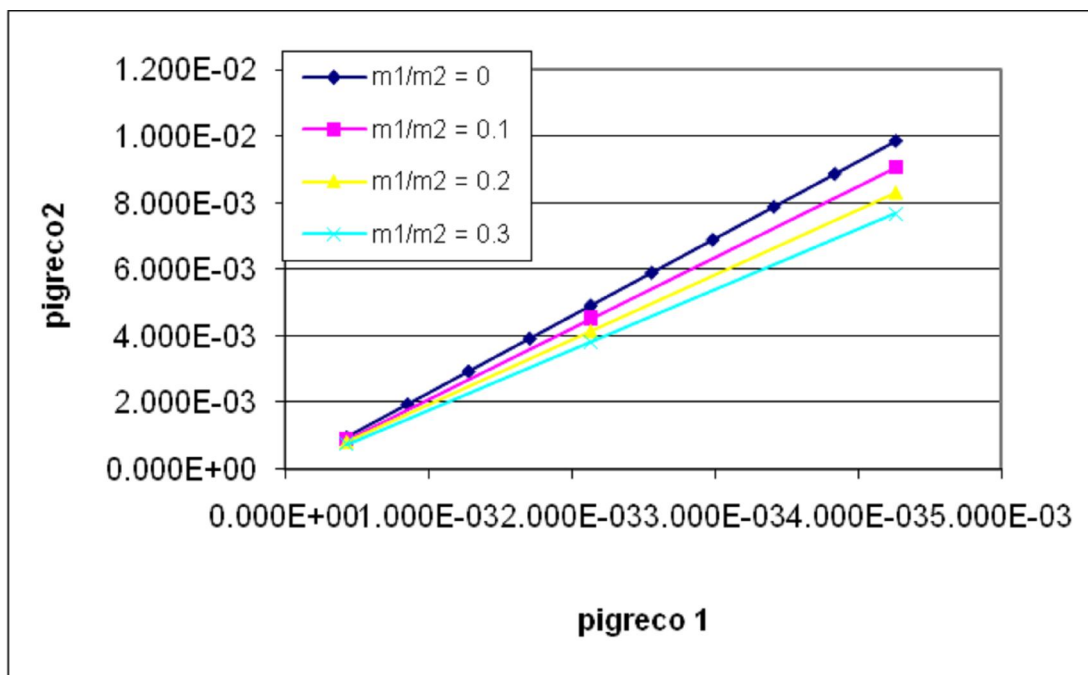


Fig. 11-4. π_1 e π_2 per diversi valori del rapporto fra le due masse.

Per verifica sono stati fissati dei valori di m_1 e m_2 diversi da quelli precedenti, ma che abbiano lo stesso rapporto, 0.3.

Si osserva che sebbene, a parità di densità, una massa diversa implichi un raggio diverso e quindi diversi valori della forza e del tempo di contatto P e di t_c , i punti si distribuiscono ancora sulla stesa retta, in particolare quella corrispondente al rapporto fra le masse pari a 0,3 precedentemente trovata (Fig. 11-5).

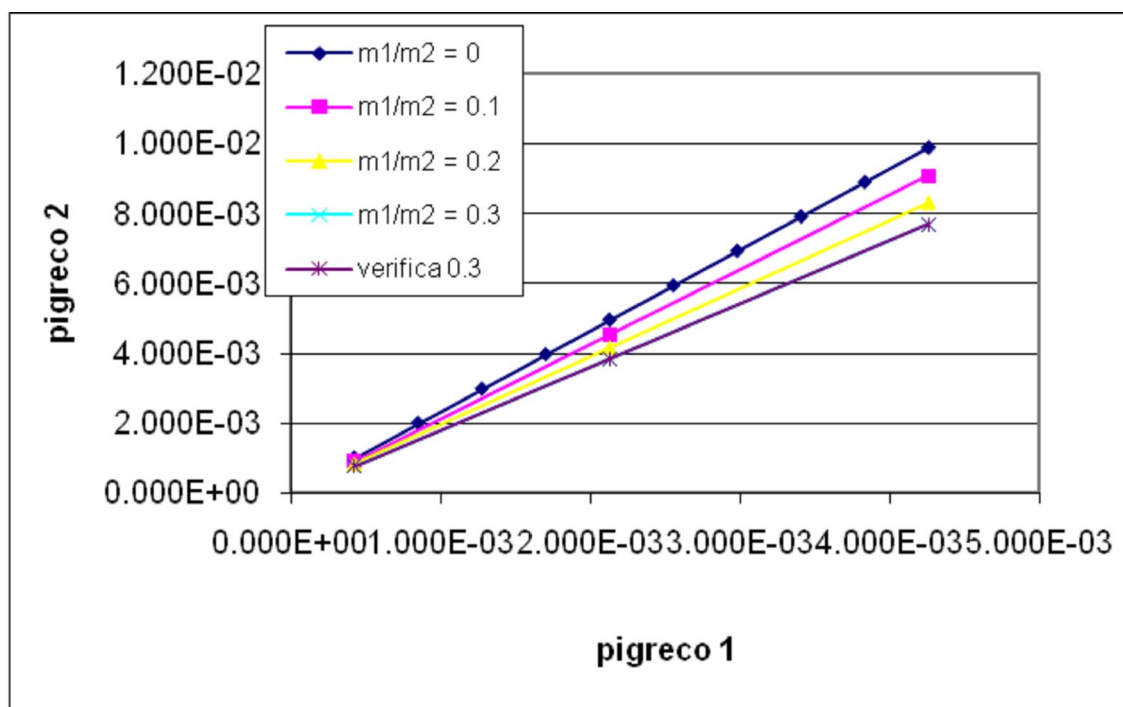


Fig. 11-5. Verifica 1.

Infine, tornando al caso in cui la massa del muro è infinitamente grande rispetto a quella del corpo impattante, sono state svolte ulteriori analisi facendo variare la densità e quindi, a parità di massa, il raggio.

Si osserva che, ancora una volta, i punti si distribuiscono sulla retta trovata con la prima analisi.

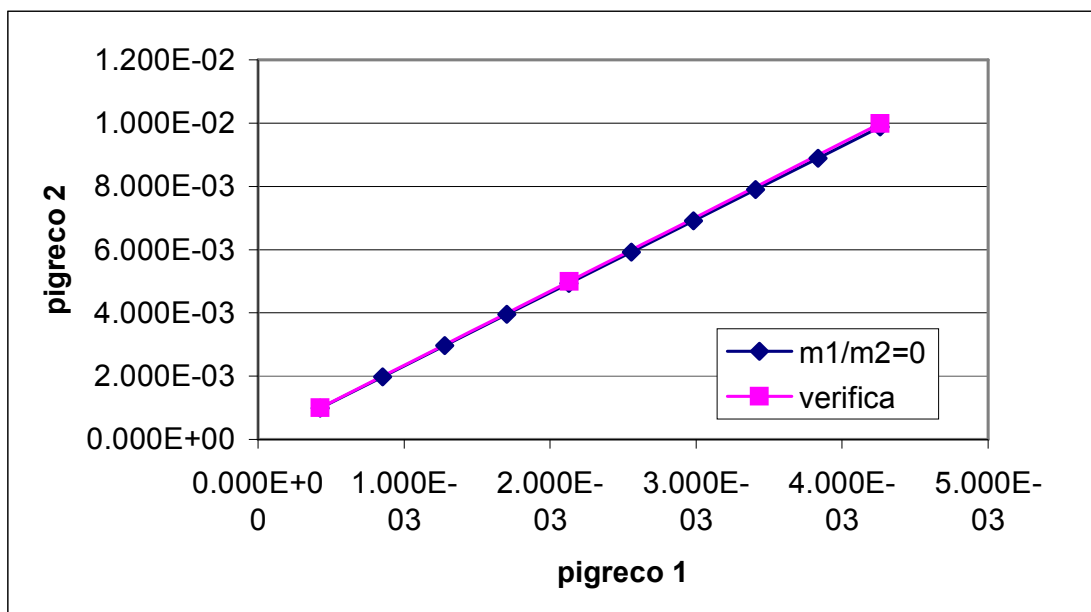


Fig. 11-6. Verifica 2.

Metodo numerico

Fissate le caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche del corpo impattante e del muro, sono stati ottenuti i valori dell'impulso tramite un modello 3D agli elementi finiti.

Da una serie di valori dell'impulso, corrispondente ad una serie di valori della velocità del corpo, si sono calcolate le serie di valori di π_1 e di π_2 .

Disponendo di un modello 3D è stato possibile eseguire i calcoli per un muro di altezza 3m con diversi spessori di fondazione e diversa sezione (Fig. 11-7).

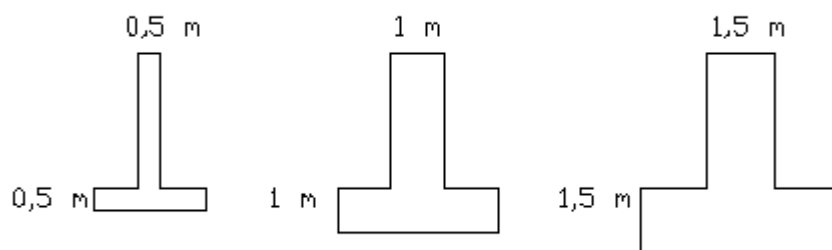


Fig. 11-7. Profili del muro.

I risultati ottenuti sono stati riportati in diagramma (Fig. 11-8).

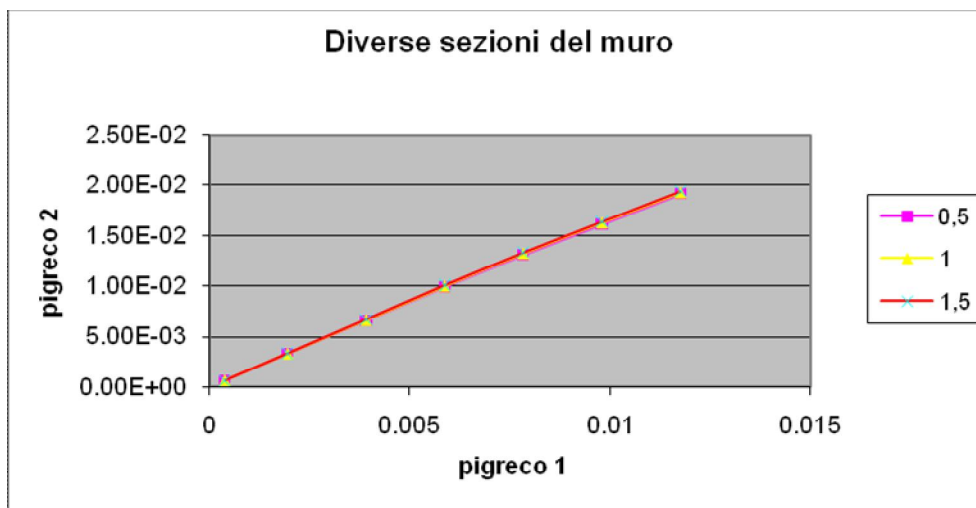


Fig. 11-8. π_1 e π_2 per diversi profili del muro.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La conoscenza delle azioni che nascono in corrispondenza dell'impatto di colate di detriti (debris flows) su strutture consente una razionale progettazione di opere di difesa e mitigazione del rischio.

A causa dell'estrema variabilità delle concentrazioni di solidi nella massa in movimento, che ne determina il comportamento per caratterizzare le azioni all'impatto, sono stati considerati, nella presente tesi, modelli di comportamento semplificati (Fig. 1-3):

- impatto di sospensioni fluide;
- impatto di blocchi isolati;
- impatto di correnti granulari asciutte.

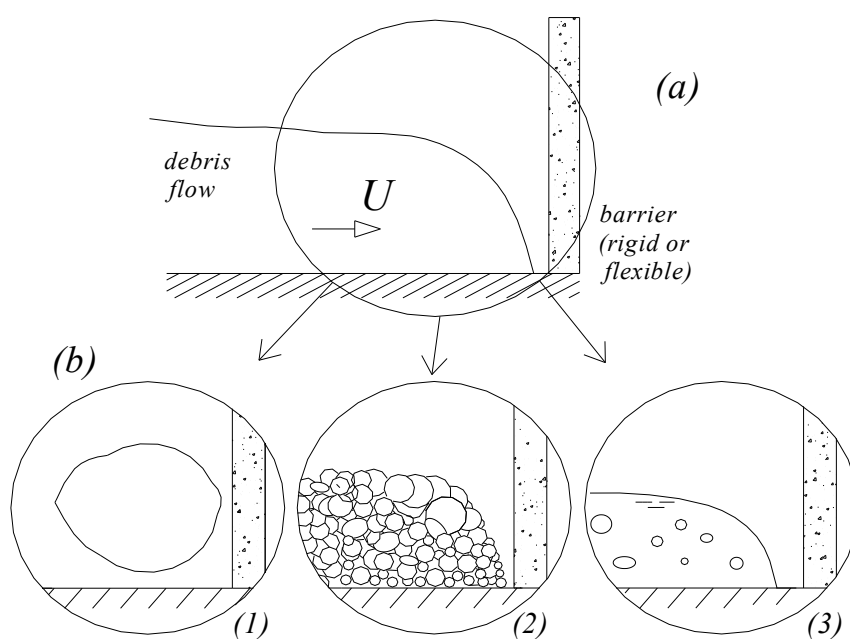


Fig. 0-1. Impatto di debris flows; (a): schema generale dell'impatto tra una corrente di detriti in rapido movimento ed una struttura; (b): modelli semplificati adottati nello studio dei fenomeni di propagazione ed impatto; (1): blocchi (isolati o in gruppo); (2): correnti granulari asciutte o sature; (3): correnti a comportamento fluido, per le quali è possibile una grande varietà di concentrazioni di solidi.

Si riportano, di seguito, i principali risultati, ottenuti per sospensioni fluide e blocchi.

IMPATTO DI COLATE FLUIDE

Nonostante lo studio dei fenomeni di innesco, propagazione ed arresto delle colate sia oggetto di numerosi studi, la letteratura geologico-geotecnica non è particolarmente ricca di analisi avanzate dei fenomeni di impatto, in particolare per quanto riguarda le colate costituite da sospensioni diluite, con comportamento fluido.

Si considera, in genere, un valore modificato della pressione idrodinamica esercitata da un fluido in moto permanente (Faella e Nigro 2003, Lo et al. 2000, Van Dine 1996, Hungr et al. 1984), oppure una pressione multipla di quella idrostatica (Armanini 1993, Scotton e Deganutti 1997).

Nell'ambito dell'ingegneria costiera sono invece presenti numerosi risultati sperimentali e analisi teoriche, riguardanti l'impatto di onde marine. Recenti studi (Peregrine 2003, Cooker 2003) mostrano che le ipotesi semplificative prima esposte, adottate in geotecnica per lo studio delle colate fluide, non sembrano accettabili; si evidenzia, infatti, che le pressioni che si destano all'impatto possono essere estremamente elevate; inoltre, la durata delle azioni massime è molto breve: la natura impulsiva del fenomeno si rivela quindi spiccata.

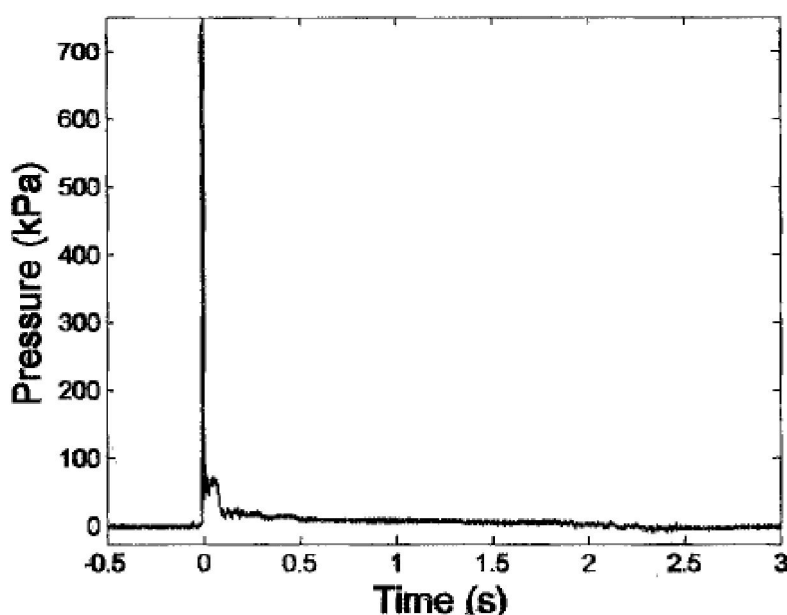


Fig. 0-2. Pressione registrata all'impatto di onde sull'Admiralty Breakwater (Obhrai, 2004).

Inoltre, numerosi sono i fattori di tipo geometrico (forma e dimensioni delle onde), fisico (densità, concentrazione di gas e di solidi), evidenziati dai medesimi autori, che possono influenzare l'azione esercitata all'impatto.

Sono stati analizzati studi teorici condotti nell'ipotesi sia di fluido incompressibile, sia di fluido comprimibile, di seguito sinteticamente descritto.

Durante la fase impulsiva, il campo di velocità 2D non stazionario $U(x,y,t) = (u, v)$ può essere descritto per mezzo di un potenziale $\phi(x,y,t)$, tale che

$$\nabla \phi = U$$

(Korobkin 1998, Cooker 2003).

La variazione di pressione, associata alla variazione del campo di velocità, è:

$$p(x, y, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.22)$$

in cui ρ_0 è la densità d'equilibrio del fluido; la densità ρ gode delle seguenti proprietà:

- è funzione della sola pressione p ;
- nel corso del fenomeno le variazioni di densità sono minime rispetto al valore all'equilibrio.

Per chiudere il modello si introduce l'equazione di stato:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$$

con c velocità di propagazione delle onde elastiche nel fluido. Di particolare interesse sono i risultati di analisi teoriche riguardanti l'impatto di onde di forma triangolare e rettangolare contro strutture (Fig. 2-9, Cooker, 2003), nelle due ipotesi estreme di impatto elastico ed anelastico.

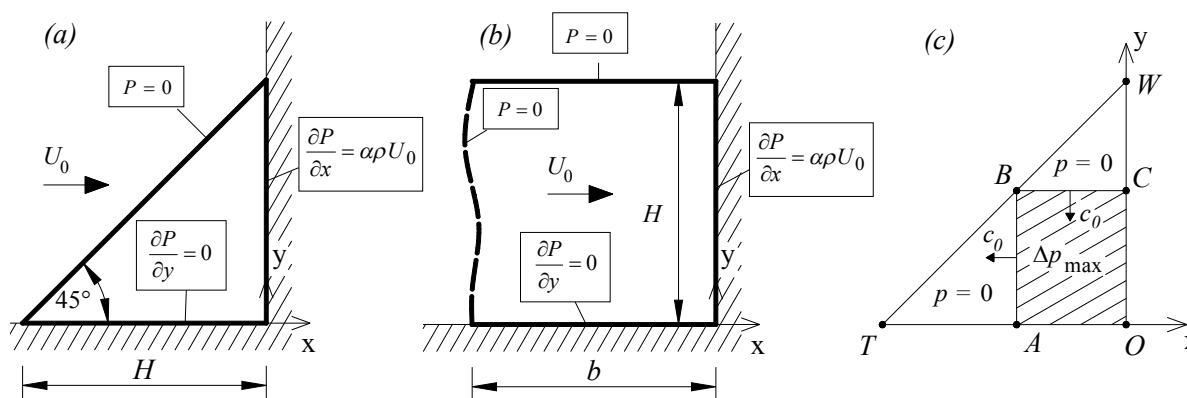


Fig. 0-3. Schema dell'impatto di un'onda (2D) su un muro verticale; (a): schema di un'onda a sezione trasversale triangolare; (b): schema di un'onda a sezione trasversale rettangolare; (c): fluido comprimibile; dinamica dello sviluppo delle sovrappressioni negli istanti successivi all'impatto: il fronte dell'onda di compressione AB si allontana dal muro a velocità c_0 . Il fronte dell'onda di compressione si riflette sulla superficie libera WT, dando origine ad un secondo fronte d'onda, BC. All'interno della regione ABCO la pressione assume un valore uniforme, pari a $\Delta p = \Delta p_{max} = \rho_0 c_0 U$.

E' stato quindi impostato un modello numerico FEM (codice Abaqus®), in cui si modella l'impatto di un fluido (caratterizzato dai due parametri principali densità ρ e velocità delle onde elastiche c). In Fig. 4-29 sono riportati i risultati, in termini di impulso, per onda triangolare (I_T) e rettangolare (I_S). Tali risultati sono inoltre confrontati con i valori teorici forniti dalle formulazioni di Cooker (2003) e Korobkin (1997) per i due casi limite di impatto elastico ed anelastico. Si nota che i risultati delle analisi numeriche condotte si collocano tra i due estremi teorici.

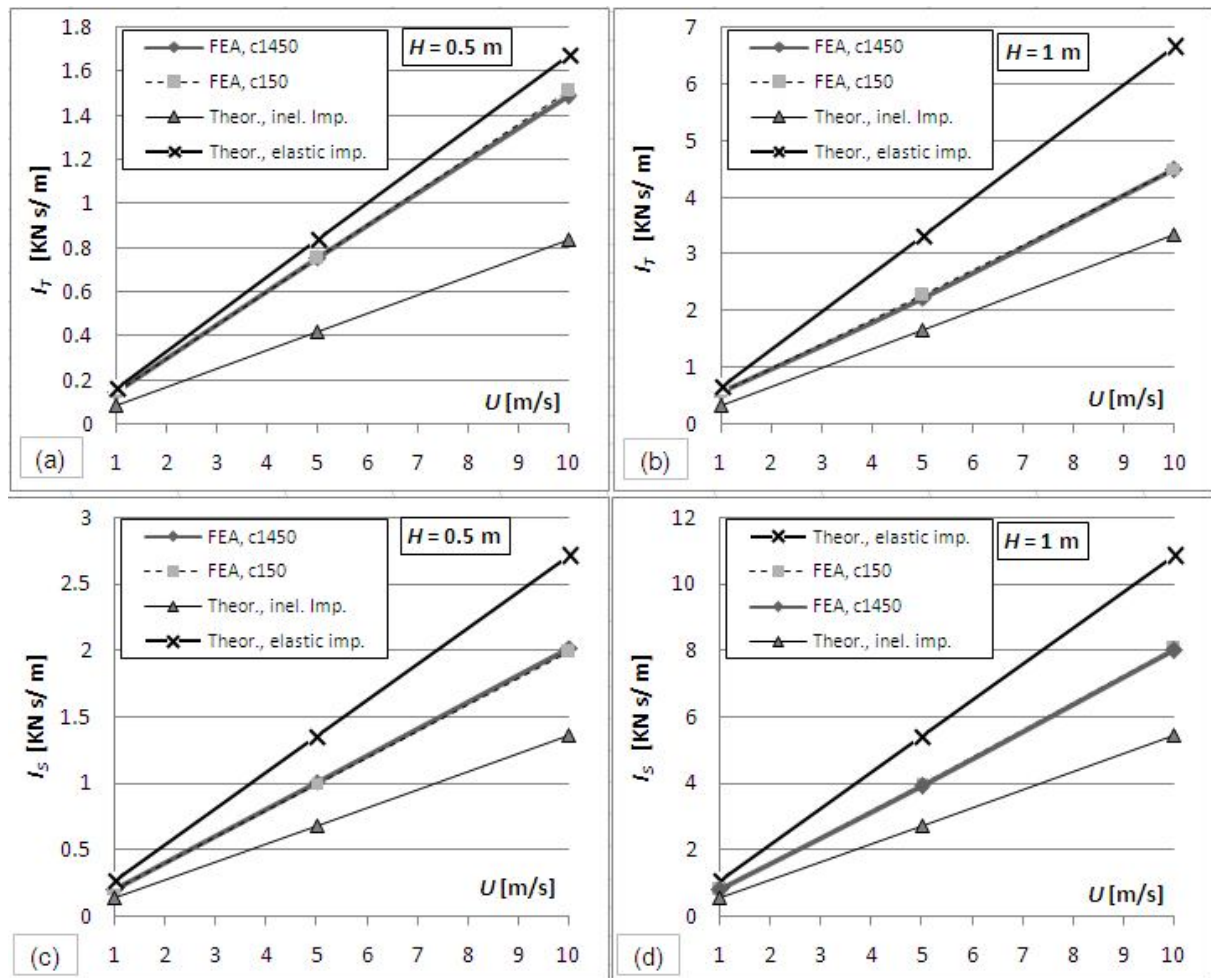


Fig. 0-4. Impulsi della forza di impatto valutati per densità $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$; onda triangolare: (a) $H = 0.5 \text{ m}$; (b) $H = 1 \text{ m}$; onda rettangolare: (c) $H = 0.5 \text{ m}$; (d) $H = 1 \text{ m}$.

Un ulteriore modello numerico è stato quindi impostato per l'analisi di impatti di corpi fluidi 3D contro strutture, imponendo diverse forme al fronte d'impatto (Fig. 4-30):

- fronte piano verticale (Fig. 4-30a);
- fronte "a cuneo" (Fig. 4-30b);

- fronte cilindrico (Fig. 4-30c);
- fronte piano inclinato (Fig. 4-30d).

Si sono inoltre assegnati al fluido due set di valori di velocità delle onde elastiche ($c = 150 \text{ m/s}$, 1450 m/s), due valori di altezza del dominio fluido ($H = 0.5$, 1.0 m), due valori del rapporto tra larghezza del dominio fluido (b) e altezza (H) ($b/H = 1$, 3), tre valori della velocità d'impatto ($U = 1$, 5 , 10 m/s) e, in caso di fronte non piano e verticale, due valori del parametro δ ($\delta = 0.05 \text{ m}$, 0.10 m , Fig. 4-30).

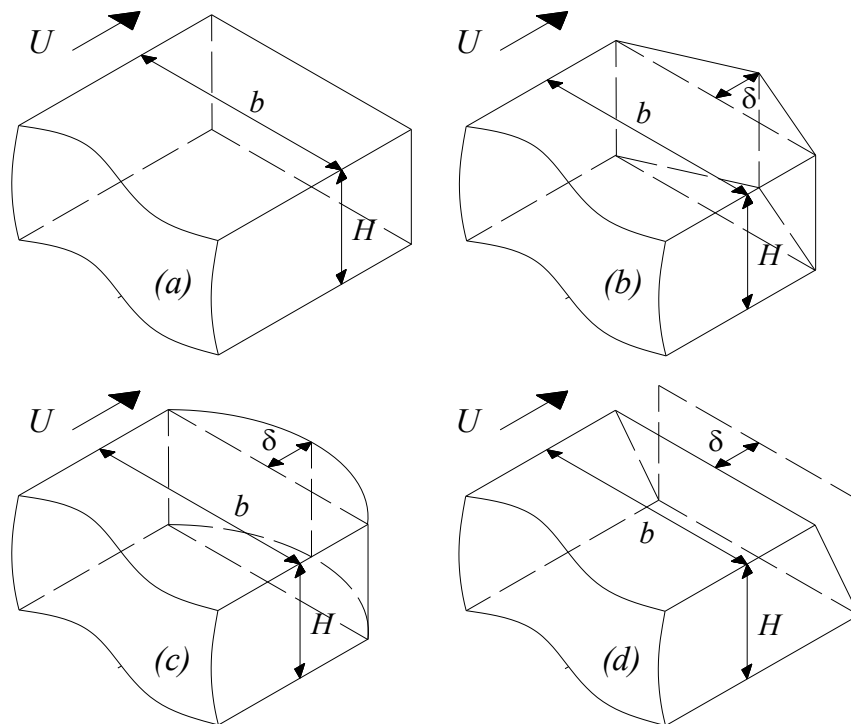


Fig. 0-5. Impatto di onde 3D; schemi geometrici dei corpi impattanti impostati nel modello agli elementi finite; (a) fronte piano; (b) fronte “a cuneo”; (c) fronte curvo; (d) fronte piano, inclinato.

Si riporta, a titolo di esempio, il confronto fra le evoluzioni delle forze di impatto per le quattro geometrie, nei due casi di velocità $U = 5 \text{ m/s}$ e 10 m/s (Fig. 4-31).

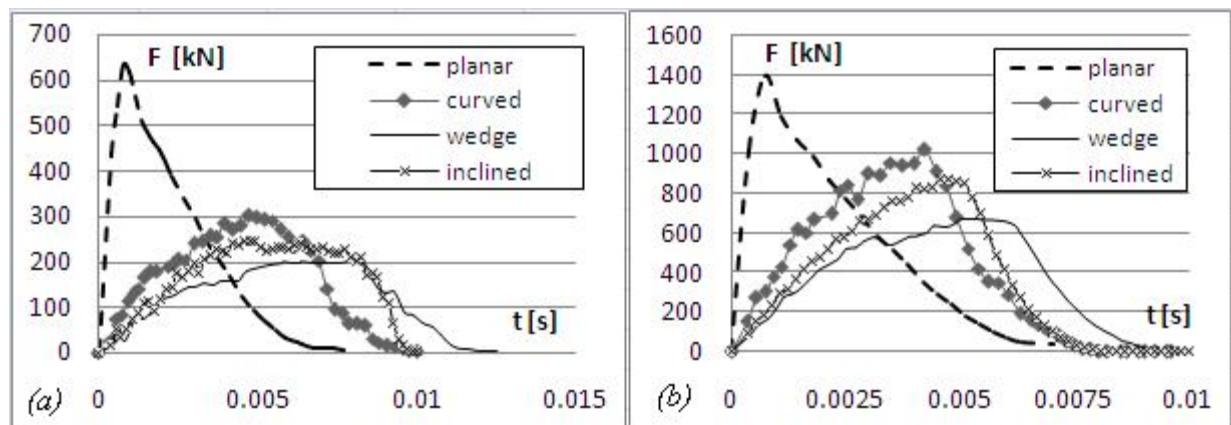


Fig. 0-6. Evoluzione nel tempo t della forza F ; risultati ottenuti per i valori di $c_0 = 150$ m/s; $H = b = 1$ m; $\delta = 5$ cm; (a): $U = 5$ m/s; (b): $U = 10$ m/s.

Si può notare che, nel caso di impatto di fronte piano, la forza di impatto raggiunge il suo massimo valore; contestualmente, la durata del fenomeno è più breve rispetto agli altri casi.

Tuttavia, se la velocità è relativamente modesta, (Fig. 4-31 b vs a) le differenze tra fronte piano verticale e non, diminuiscono.

In Fig. 4-32 si mostrano i *contour* dell'evoluzione degli incrementi di pressione all'impatto (ottenuti per $\rho_0 = 1000$ kg/m³, $c = 150$ m/s, $U = 5$ m/s) per le geometrie riportate in Fig. 4-30a, c, d; il meccanismo di sviluppo e successivo rapido decadimento dei valori di pressione è analogo a quanto visto precedentemente.

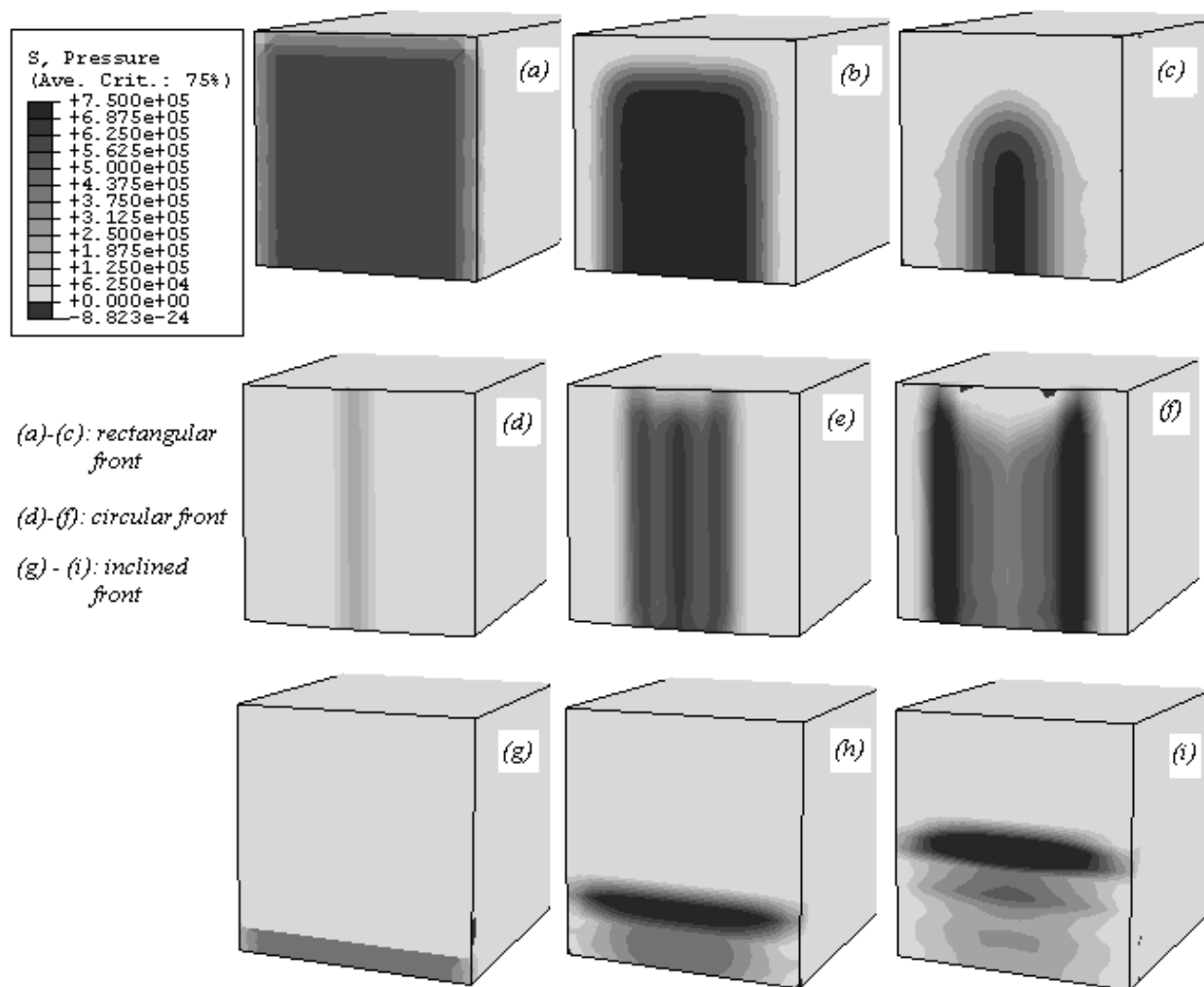


Fig. 0-7. Contours dell'incremento di pressione Δp all'impatto; risultati ottenuti per $c_0 = 150$ m/s; $H = b = 1$ m; $U = 5$ m/s.

La Fig. 4-33 riporta, in sintesi, tutti i valori di impulso I . Dall'analisi dei risultati riportati nella figura si vede chiaramente che i valori di I sono del medesimo ordine di grandezza, al variare della forma assegnata al fluido; inoltre, anche per il caso 3D, come nel caso 2D, il valore dell'impulso è indipendente dal valore della compressibilità (Tabella 4-3. Valori calcolati dell'impulso I).

I massimi valori dell'impulso sono ottenuti per il caso di *fronte piano*, che quindi costituisce un *limite superiore*.

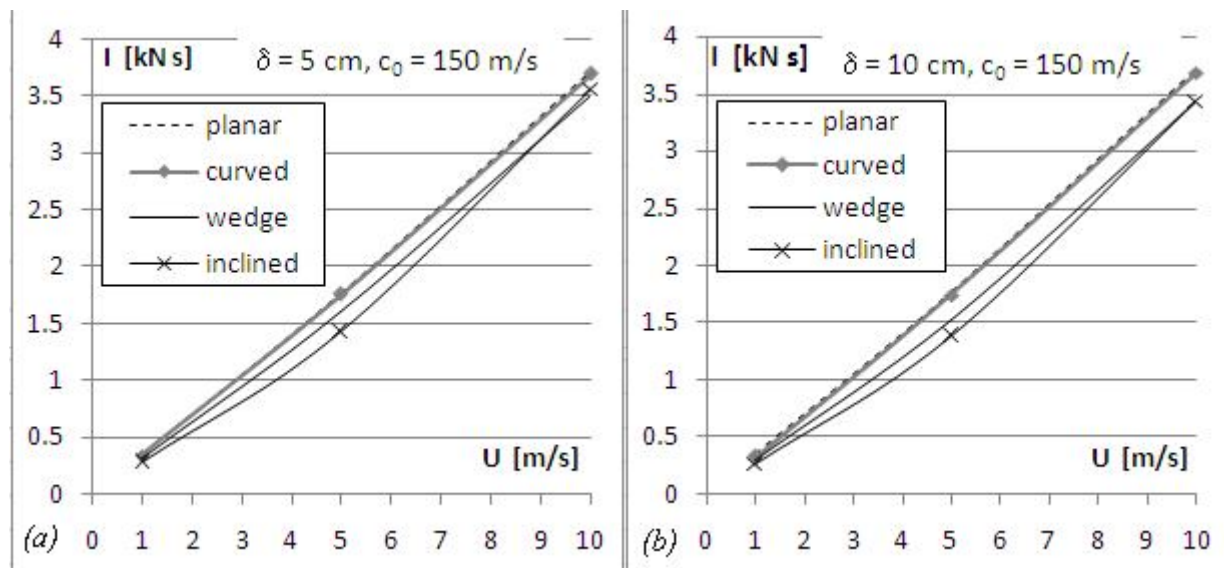


Fig. 0-8. Confronto fra gli impulse I valutati con analisi numeriche agli elementi finite.

In virtù dell'invarianza dell'impulso nei confronti della compressibilità del fluido, che, in termini pratici, si riconduce ad una indipendenza da contenuto d'aria e di solidi, parametri difficilmente valutabili in fase di progettazione di strutture di difesa contro colate detritiche, *si forniscono relazioni analitiche, utili per la progettazione:*

$$I = 0.40 \rho_0 U H b^2 \quad \text{per } b/H = 1$$

$$I = 0.22 \rho_0 U H b^2 \quad \text{per } b/H = 3$$

$$I = 0.78 \rho_0 U H^2 \quad \text{per } b/H \rightarrow 0 (b \gg H); I \text{ valutato per unità di larghezza.}$$

in cui I è l'impulso, ρ_0 la densità del fluido, U la velocità all'impatto, H l'altezza della corrente e b la larghezza.

IMPATTO DI BLOCCHI

Per quanto riguarda l'impatto di blocchi su una struttura rigida o deformabile, in letteratura tecnica sono disponibili varie formulazioni. Se ne riportano e commentano alcune, di seguito, a titolo di esempio.

Esistono abachi (Van Dine, 1984) basati sulla legge di Hertz (Fig. 6-4).

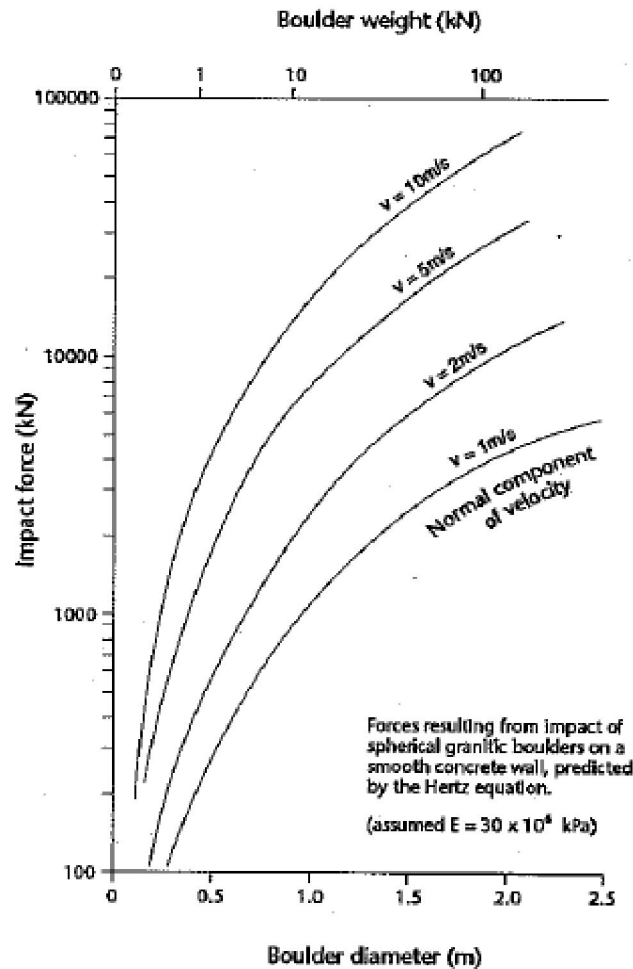


Fig. 0-9. Abaco per la determinazione della forza di impatto, basato sulla legge di Hertz (Van Dine, 1984).

Wu et al. (1993) e ASCE (2005) valutano la spinta F da un semplice bilancio di quantità di moto:

$$F = v_b m_b / \Delta t$$

in cui m_b la massa del blocco, v_b la velocità, all'impatto, del blocco, Δt la durata del fenomeno di impatto. Il valore suggerito per Δt da Wu è 1 s, mentre in ASCE tale valore è considerato non rappresentativo del fenomeno; si propone un intervallo pari a 0.01 – 0.05 s.

Hungr et al. (1984) e Zhang et al. (1996) propongono il “Flexural stiffness method”: per valutare la forza di impatto, oltre alle caratteristiche cinematiche e fisiche del blocco (velocità e massa) si prende in considerazione anche la rigidità della struttura che intercetta il blocco:

$$F = v_b \sin \beta \sqrt{m_b K_B}$$

in cui K_B è la rigidità flessionale della barriera, m_b la massa del blocco, v_b la velocità, all'impatto, del blocco.

Zhang et al (1996) propongono anche il “Wave theory method”:

$$F = \rho_b C_b v_b A_c$$

in cui C_b è la velocità delle onde di compressione nel masso, A_c l'area di contatto, ρ_b la densità del masso.

Huang et al. (2007), dall'analisi di dati sperimentali, ottenuti con un modello a piccola scala (diametro massimo dei grani pari a 31.0 mm) hanno ricavato la formula seguente:

$$F = 30.8 U^{1/2} R^2$$

in cui F è in ton, U e R in m.

Per l'impiego delle formule proposte da Wu e Zhang, tuttavia, è necessaria la conoscenza di alcuni parametri di difficile valutazione, quali la durata dell'impatto e l'area di contatto.

E' stata condotta infine una serie di calcoli parametrici con il codice FEM Abaqus® per valutare l'impulso della forza esercitato, all'impatto, da un blocco di forma sferica, al variare dei parametri significativi:

- dimensioni (raggio R);
- velocità v ;
- in caso di comportamento elastico-perfettamente plastico, tensione di snervamento σ_y , per i due valori di riferimento pari a 10000 kPa (denominato e.p.1) e 1000 kPa (denominato e.p.2).

I valori ottenuti sono quindi confrontati con formule da letteratura tecnica:

$$I = m \Delta v$$

nell'ipotesi che, a seguito dell'impatto, il blocco si arresti ($\Delta v = v_0$).

$$I = \frac{\pi m v_0}{2}$$

fornita da ASCE.

I risultati sono rappresentati in Fig. 7-11, di cui si riporta uno stralcio di seguito.

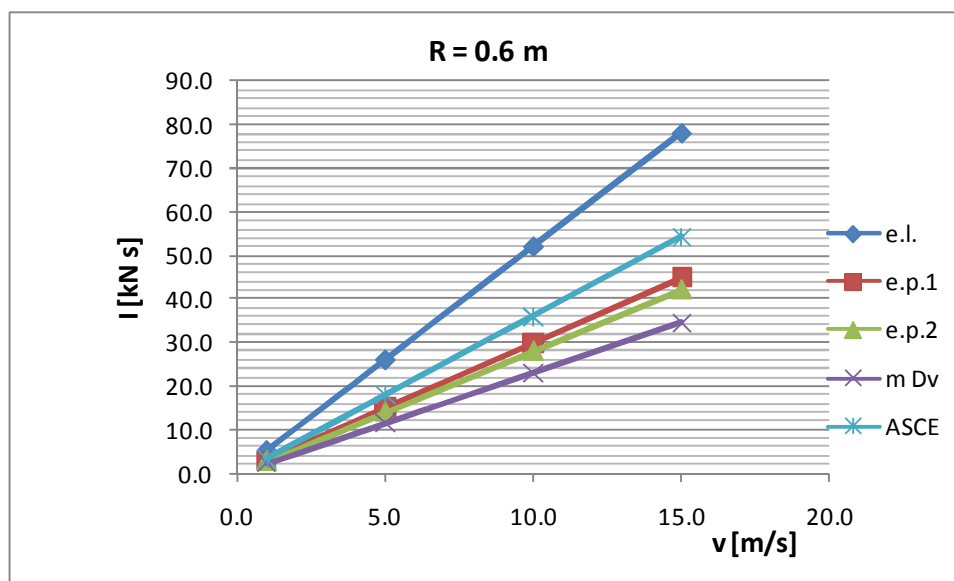


Fig. 0-10. Risultati delle analisi parametriche dell'impulso.

A parità di dimensioni, si riscontra una dipendenza pressoché lineare dell'impulso dalla velocità di impatto; ciò accade sia nel caso di comportamento elastico lineare (e.l.), che in caso di comportamento elastico-perfettamente plastico, per entrambi i valori della tensione di snervamento considerati (e.p. 1: $\sigma_y = 10000$ kPa, e.p. 2: $\sigma_y = 1000$ kPa).

I valori forniti da un'analisi condotta considerando un comportamento elastico lineare del corpo impattante sono, come atteso, estremamente cautelativi.

La formula fornita invece dalla ASCE risulta sicuramente e pare indicata per una cautelativa ma assennata valutazione dell'azione esercitata, all'impatto, da un blocco.

APPLICAZIONI

I modelli numerici precedentemente descritti sono stati impiegati nello studio di casi applicativi. Per valutare la forza distruttiva dell'impatto di fluidi contro strutture, si è analizzato il collasso di un pilastro colpito da una colata fluida, avvenuto a Sarno (Campania, Italia), nel maggio 1998 (Faella & Nigro, 2003).

Le caratteristiche geometriche e meccaniche dell'elemento strutturale sono: sezione trasversale pari a 30 cm x 30 cm, altezza $l = 2.7$ m; il flusso è perpendicolare al pilastro.

Nella back analysis proposta dagli Autori, l'azione esercitata dalla colata è stata modellata come una *pressione idrodinamica uniforme (q) agente su tutta l'altezza (l) del pilastro* (nell'ipotesi di flusso di un fluido incompressibile in condizioni stazionarie).

Attraverso un procedimento di analisi limite, considerando un meccanismo di rottura a tre cerniere, gli Autori hanno poi ricavato il valore della velocità critica del flusso (U_{cr}), tale da causare il collasso della struttura (Fig. 9-7):

$$q_u = \frac{16M_u}{l^2} = \rho U_{cr}^2 \quad (19)$$

con M_u momento ultimo della sezione del pilastro (per le seguenti caratteristiche della sollecitazione valutate dagli autori, $N = N_u = 300$ kN, $M_u = 57.81$ kNm), ρ densità del flusso (considerata pari a 1400 kg/m^3). Dalla (19) si ottiene $U_{cr} = 14.5$ m/s.

Lo studio effettuato in questa sede è stato indirizzato innanzitutto alla determinazione delle velocità ed altezze del flusso, ancora nell'ipotesi di spinta idrodinamica, tali da indurre la rottura del pilastro, sia per flusso perpendicolare al pilastro, sia per flusso perpendicolare alla diagonale del pilastro .

Si osserva infatti che l'ipotesi di altezza del flusso pari a 2.7 m, imposta da Faella e Nigro (2003) appare poco realistica; inoltre, analisi avanzate della propagazione della colata, riportate in Revellino *et alii* (2004), indicano un valore della velocità del flusso, in prossimità dell'edificio colpito dalla colata, pari a 5.8 m/s, cioè quasi un terzo del valore determinato da Faella e Nigro (2003).

Per tenere conto di queste differenze, è stato quindi elaborato un modello FEM di un pilastro in calcestruzzo armato colpito da una colata avente altezza pari a 1.5 m (Fig. 9-7), densità $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$, celerità $c = 1450$ m/s e 150 m/s, velocità all'impatto $U = 7.0$ e 14.0 m/s; il valore risultante della rigidezza volumetrica del fluido potrebbe costituire una stima, per difetto, del valore corrispondente al comportamento non drenato della massa granulare fluidizzata, che potrebbe manifestarsi nella fase impulsiva dell'impatto. Il comportamento costitutivo assegnato ai materiali costituenti il pilastro (calcestruzzo e acciaio) è il medesimo utilizzato per le analisi proposte da Faella e Nigro (2003). Non si è tenuto conto, nell'analisi dinamica FEM, dell'incremento delle resistenze dei materiali dovuto alla velocità di applicazione del carico.

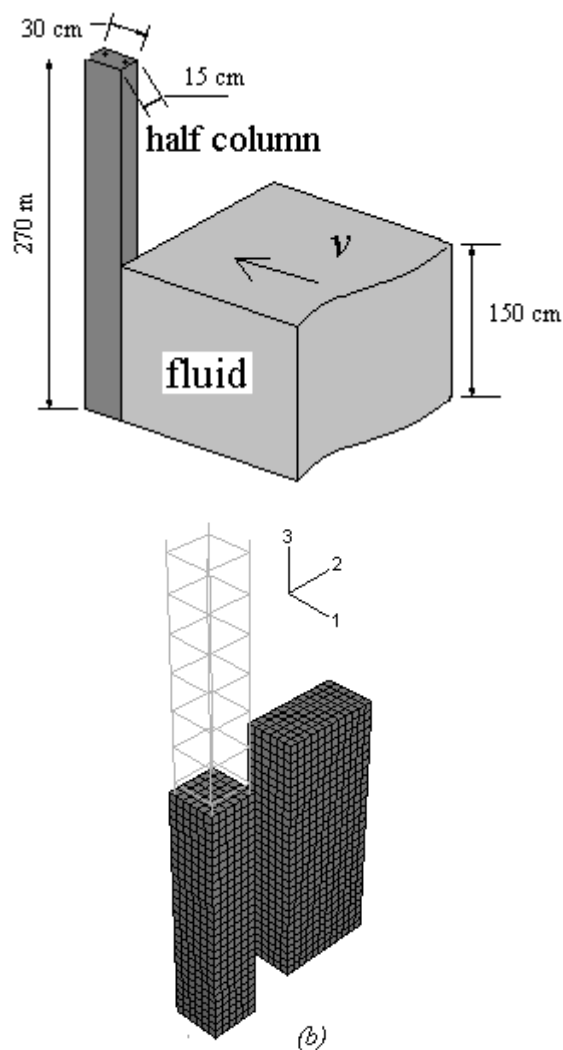


Fig. 0-11. Impatto di una colata a comportamento fluido contro una struttura; back-analysis del collasso del pilastro; (a) dominio impostato nell'analisi; (b) schema del dominio di calcolo impostato per le analisi numeriche (FEM).

I risultati delle analisi mostrano che per una velocità della colata pari a 7.0 m/s, lo spostamento massimo del pilastro (nella direzione parallela al movimento della colata), all'impatto, è pari a 0.96 cm (Fig. 9-9); il calcestruzzo, inoltre, in prossimità delle estremità del pilastro, raggiunge deformazioni di compressione maggiori di 3.5‰ (Fig. 9-9).

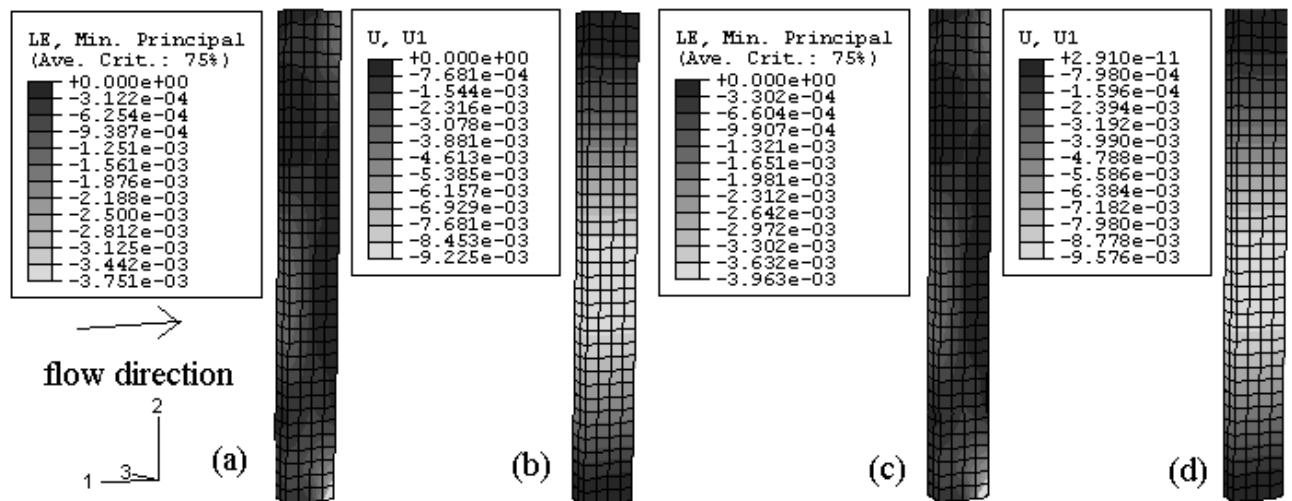


Fig. 0-12. Deformazioni e spostamenti [m] del pilastro a seguito dell'impatto con una corrente fluida; (a), (b): caso 4 ($c = 150$ m/s, $U = 7.0$ m/s); (c), (d): caso 2 ($c = 1450$ m/s, $U = 7.0$ m/s).

Inoltre, dai risultati mostrati in Fig. 9-9, si nota che la rigidezza del fluido, espressa attraverso il parametro c , a parità di velocità del flusso U , non influenza notevolmente i risultati.

Quindi, se si imposta un modello numerico che tenga conto della natura impulsiva del fenomeno, le condizioni di collasso del medesimo pilastro si raggiungono per altezze della colata e per valori della velocità più aderenti alle valutazioni degli studiosi del settore (Revellino *et alii*, 2004).

APPENDICE – STUDIO DELLE SOLLECITAZIONI IN CAMPO DINAMICO DI UNA STRUTTURA A MENSOLA INDOTTE DALL’IMPATTO DI UNA COLATA FLUIDA

PREMESSA

In prima approssimazione si può considerare che una struttura soggetta ad impatto sia assimilabile ad una struttura ad un grado di libertà (SDOF) ammettendo che la una sola deformazione sia possibile, assumendo che il grado di libertà esprima l’ampiezza dello spostamento.

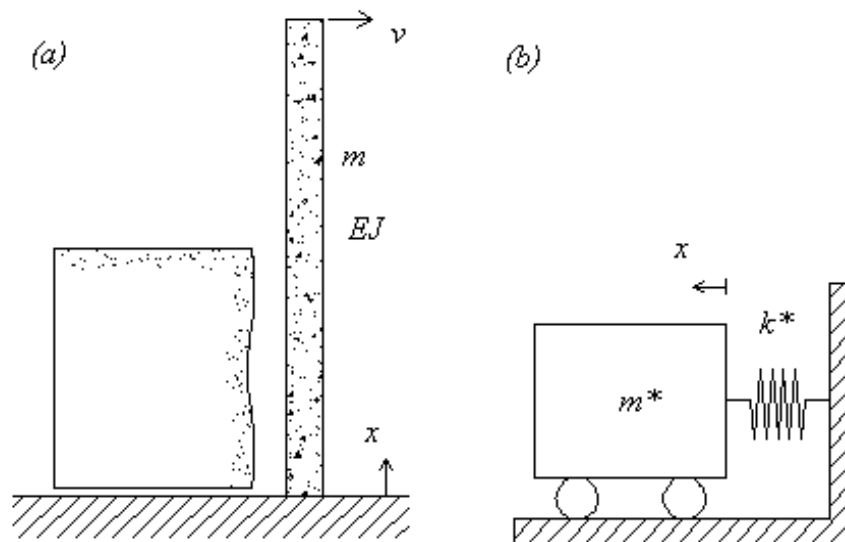


Fig 1. Struttura a mensola colpita da una colata fluida; (a) schema geometrico; (b) analogia meccanica.

Si consideri, ad esempio, la struttura a mensola rappresentata in Fig. 1. Escludendo le dissipazioni, si considerano nell’analisi, come proprietà meccaniche, la sola rigidezza flessionale $EJ(x)$ e la massa per unità di lunghezza $m(x)$.

Per approssimare il moto della mensola come un sistema ad un solo grado di libertà, è necessario assumere una deformata, esprimibile attraverso una funzione.

Tale funzione è designata $\Phi(x)$, e l’ampiezza del moto, relativamente alla base incastrata, sarà rappresentata dalla funzione $Y(t)$; quindi, si avrà:

$$v(x,t) = \Phi(x) Y(t) \quad (1)$$

Tipicamente, si prenderà come riferimento lo spostamento dell’estremità libera della mensola.

L'equazione del moto del sistema ad un grado di libertà, trascurando lo smorzamento del moto stesso, può essere formulate nel modo seguente (Clough & Penzien):

$$m^* \ddot{Y} + k^* Y = P^* \quad (2)$$

$$m^* = \int_0^L \rho A(x) \Phi(x)^2 dx \quad (3a)$$

$$k^* = \int_0^L EJ(x) \Phi''(x)^2 dx \quad (3b)$$

$$P^* = \int_0^L p(x, t) \Phi(x) dx \quad (3c)$$

$$Y(t) = Y_0 \sin \omega t \quad (4)$$

Si sceglie come funzione di forma quella relativa agli spostamenti associati ad un carico statico uniformemente distribuito sulla mensola:

$$\Phi(x) = \frac{1}{3} \left[6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad (5)$$

Si ottiene, quindi, la soluzione semplificata:

$$k^* = 3.20 \frac{EJ}{L^3} \quad (6a)$$

$$m^* = 0.27 \rho AL \quad (6b)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (6c)$$

In caso di moto impulsivo, quale quello a seguito dell'impatto con una massa in movimento, la costante Y_0 può essere valutata considerando che, a causa dell'impulso I , la mensola, caratterizzata dalla massa m_b , acquista una velocità iniziale $\dot{v}_0$ pari a:

$$\dot{v}_0 = \frac{I}{m_b} \quad (7)$$

Quindi, per $\Phi = \Phi_{max} = 1$, si ottiene:

$$Y_0 = \frac{\dot{v}_0}{\omega \cos(\omega 0)} = \frac{\dot{v}_0}{\omega} \quad (8)$$

L'equazione finale del sistema ad un grado di libertà assume la forma:

$$v(x, t) = \Phi(x) Y(t) = \frac{1}{3} \left[6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (9)$$

E l'espressione finale del momento flettente:

$$M(x, t) = EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = EJ \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin \omega t \right) \left(\frac{12}{L^2} + 12 \frac{x^2}{L^4} - 24 \frac{x}{L^3} \right) \quad (10a)$$

$$= EJ \left(\left(\frac{I}{m_b} \right) \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \left(\frac{12}{L^2} + 12 \frac{x^2}{L^4} - 24 \frac{x}{L^3} \right) \quad (10b)$$

SOLUZIONI ANALITICHE

Trave a mensola. Si consideri la trave incastrata di Fig. 2, di lunghezza L , soggetta ad un carico distribuito per una lunghezza l_1 . Il carico applicato sia funzione di x ($x \in [0; L]$) e del tempo t ($t \in \mathbb{R}^+$).

Si intendono determinare le soluzioni del problema proposto in campo dinamico, nell'ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale che costituisce la trave.

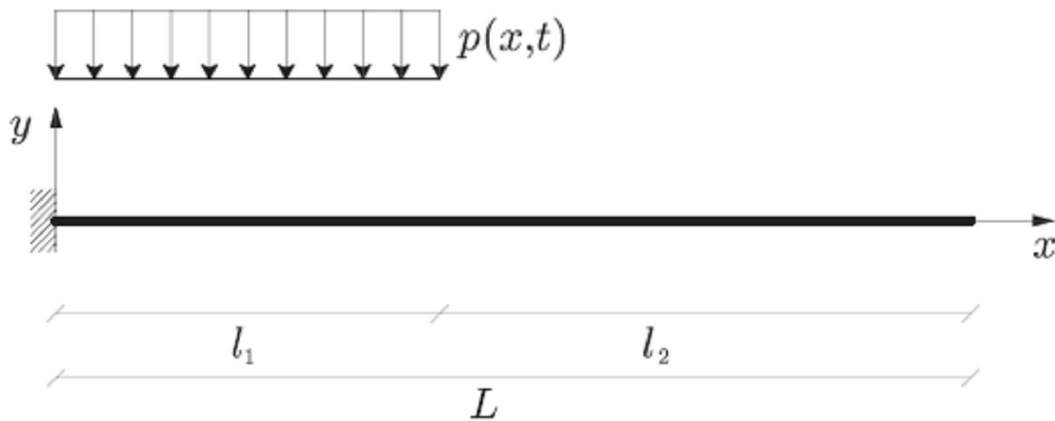


Fig. 2. Trave a mensola.

L'equazione del moto nella direzione perpendicolare all'asse x , che governa il problema, è:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + p(x, t) = 0 \quad (11)$$

dove $M(x; t)$ è il momento flettente, m la massa e $v(x; t)$ lo spostamento della trave in direzione perpendicolare all'asse x .

Introducendo la relazione tra momento M e curvatura:

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t} \quad (12)$$

si ottiene:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (13)$$

dove si è indicato con E il modulo di elasticità di Young e con I il momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse neutro.

La soluzione dell'equazione (13) fornisce la funzione $v(x; t)$ cercata.

Il problema in esame, oltre che dalla (13), è definito analiticamente dalle seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0 \\ \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (14a, b, c, d)$$

Le condizioni iniziali sono:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0 \\ \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \dot{v}_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Soluzione omogenea associata. L'omogenea associata dell'equazione (11) è

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

che può essere scritta:

$$v^{IV}(x, t) + \frac{m}{EI} \ddot{v}(x, t) = 0 \quad (17)$$

Si ricerca una soluzione della forma

$$v(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$$

per cui:

$$\varphi^{IV}(x)\psi(t) + \frac{m}{EI} \varphi(x)\ddot{\psi}(t) = 0 \quad (18)$$

da cui:

$$\frac{\varphi^{IV}(x)}{\varphi(x)} + \frac{m}{EI} \frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = 0 \quad (19)$$

quindi:

$$\frac{\varphi^{IV}(x)}{\varphi(x)} = -\frac{m}{EI} \frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = a^4 \quad (20)$$

Il soddisfacimento della precedente equazione determina la soluzione delle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}(t) + \omega^2 \psi(t) &= 0 \\ \varphi^{IV}(x) - a^4 \varphi(x) &= 0 \end{aligned} \quad (21a, b)$$

in cui:

$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{m} \quad (22)$$

La soluzione della prima equazione differenziale è:

$$\psi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (23)$$

mentre la seconda ha soluzione:

$$\varphi(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cosh ax + C_4 \sinh ax \quad (24)$$

I modi di vibrazione della trave (cioè la funzione $\varphi(x)$) dipendono semplicemente dalle condizioni di vincolo imposte alla trave stessa, e non già dalle condizioni di carico cui è sottoposta; la ricerca della soluzione particolare influirà quindi solo sulla funzione $\psi(t)$, per cui si possono imporre le condizioni al contorno.

Dalla (14a) si ottiene:

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_3 \quad (25)$$

Dalla (14b) si ottiene:

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_4 \quad (26)$$

Dalla (14c) si ha:

$$\left. \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow -C_1 \cos aL - C_2 \sin aL + C_3 \cosh aL + C_4 \sinh aL = 0 \quad (27)$$

Dalla (14d) si ha:

$$\left. \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow C_1 \sin aL - C_2 \cos aL + C_3 \sinh aL + C_4 \cosh aL = 0 \quad (28)$$

Il sistema delle (25), (26), (27) e (28) si può ridurre alla soluzione del sistema di due equazioni lineari, algebriche, nelle incognite C_3 e C_4 :

$$C_3 (\cos aL + \cosh aL) + C_4 (\sin aL + \sinh aL) = 0$$

$$C_3 (-\sin aL + \sinh aL) + C_4 (\cos aL + \cosh aL) = 0 \quad (29, b)$$

Affinché l'unica soluzione del sistema non sia quella banale $C_3 = C_4 = 0$, si impone che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo:

$$\begin{vmatrix} \cos aL + \cosh aL & \sin aL + \sinh aL \\ -\sin aL + \sinh aL & \cos aL + \cosh aL \end{vmatrix} = \\ = \sinh^2 aL - \sin^2 aL - \cos^2 aL - 2 \cosh aL \cos aL - \cosh^2 aL = 0 \quad (30)$$

La (30) si riduce alla forma:

$$\cos aL = -\frac{1}{\cosh aL} \quad (31)$$

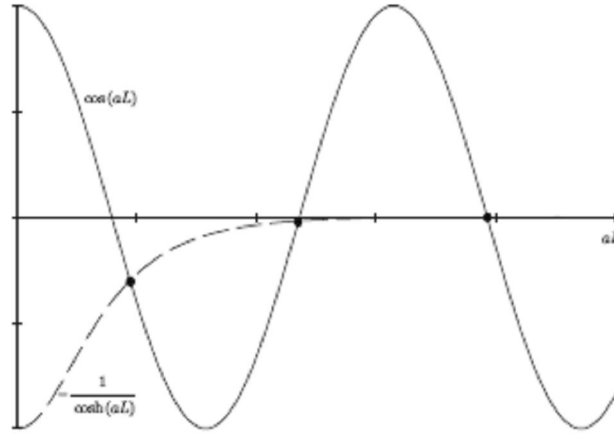


Fig. 3. Soluzioni dell'equazione (4.17)

Le soluzioni di questa equazione trascendente (Fig. 3) forniscono i valori di aL che rappresentano la frequenza di vibrazione della trave incastrata.

Si può assumere che le radici dell'equazione trascendente, oltre la terza, coincidano con i punti ove si annulla la funzione coseno (Fig. 3), e che quindi siano ben approssimate dalla relazione:

$$(aL)_n = \frac{\pi}{2} (2n - 1) \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (32)$$

e quindi la pulsazione corrispondente sarà

$$\omega_n = (aL)_n^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = \frac{\pi^2}{4} (2n - 1)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (33)$$

La costante C_4 può essere espressa in funzione della costante C_3 :

$$C_4 = -\frac{\cos aL + \cosh aL}{\sin aL + \sinh aL} C_3 \quad (34)$$

per cui l'equazione (24) viene riscritta come

$$\varphi_n(x) = C_3 \left[\cosh a_n x - \cos a_n x - \frac{\cos a_n L + \cosh a_n L}{\sin a_n L + \sinh a_n L} (\sinh a_n x - \sin a_n x) \right] \quad (35)$$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata può quindi essere formulata nel modo seguente:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \psi_n(t). \quad (36)$$

Soluzione generale. La soluzione generale può essere posta nella forma:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \Psi_n(t) \quad (37)$$

che, sostituita nella (13), fornisce

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{IV}(x) \Psi_n(t) + m \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \ddot{\Psi}_n(t) = p(x, t) \quad (38)$$

Si consideri ora il generico modo di vibrazione $\varphi_i(x)$; moltiplicando ambo i membri della precedente relazione per $\varphi_i(x)$, ed integrando sulla lunghezza complessiva della trave si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{IV}(x) \Psi_n(t) \varphi_i(x) dx + \int_0^L m \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \ddot{\Psi}_n(t) \varphi_i(x) dx = \\ = \int_0^L p(x, t) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (39)$$

Poiché i modi di vibrazione sono tra loro normali, dalla precedente equazione si ricava:

$$\Psi_i(t) \omega_i^2 + \ddot{\Psi}_i(t) = \int_0^L p(x, t) \varphi_i(x) dx \quad (40)$$

Si pone quindi:

$$Q_n(t) := \int_0^L p(x, t) \varphi_n(x) dx \quad (41)$$

che rappresenta la componente lagrangiana di forza. La (40), quindi, per l'arbitrarietà di i , può essere scritta:

$$\ddot{\Psi}_n(t) + \omega_n^2 \Psi_n(t) = Q_n(t) \quad (42)$$

la cui soluzione è

$$\Psi_n(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin [\omega_n (t - \tau)] d\tau \quad (43)$$

in cui l'ultimo termine a secondo membro è l'integrale di Duhamel.

Assegnazione della funzione $p(x,t)$. Il carico distribuito è applicato sulla trave per una lunghezza pari ad l_1 ed è nullo per $x > l_1$.

Si consideri il caso

$$p(x,t) = \begin{cases} p_0 \cos \omega_0 t & \text{per } 0 \leq x \leq l_1 \\ 0 & \text{per } l_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad (44)$$

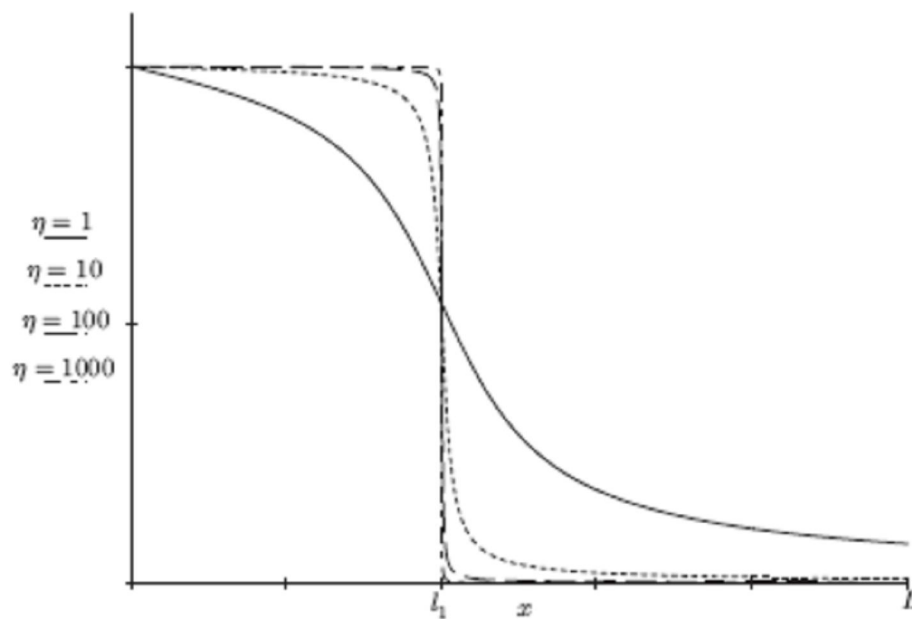


Fig. 4. funzione $p(x,t)$, per t fissato.

Il carico risulta quindi essere discontinuo in x ; per semplificare il problema, tuttavia, si assume che la funzione $p(x; t)$, discontinua in x , sia approssimabile con la seguente funzione, continua in $x \in [0; L]$:

$$\begin{aligned} \bar{p}(x,t) &= p_1(t)p_2(x) = \\ &= p_0 \cos \omega_0 t \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} [\arctan(\eta(x - l_1)) - \arctan(-\eta(x + l_1))] \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

In Fig. 4 è rappresentata la funzione $p(x; t)$ per t fissato; tale funzione approssima abbastanza bene la funzione reale $p(x; t)$, per valori elevati del coefficiente η .

La componente lagrangiana di forza (equazione (41)) viene quindi calcolata facendo uso della (45).

Imposizione delle condizioni iniziali. Si osserva che la soluzione generale differisce da quella dell'omogenea associata a meno dell'integrale di Duhamel; le condizioni iniziali, quindi, possono essere poste alternativamente su $\Psi_n(t)$ o su $\psi_n(t)$, in quanto $\Psi_n(0) = \psi_n(0)$.

Si ha dunque:

$$v(x, 0) = v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \psi_n(0) \quad (46)$$

Moltiplicando per il generico modo di vibrazione ed integrando sulla lunghezza della trave, si ha:

$$\int_0^L v_0 \varphi_i(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \psi_n(0) \varphi_n(x) \varphi_i(x) dx \quad (47)$$

poiché $\psi_n(0) = B_n$, e ricordando che i modi di vibrazione sono tra loro normali, si ottiene:

$$\int_0^L v_0 \varphi_i(x) dx = \int_0^L B_i \varphi_i^2(x) dx \quad (48)$$

da cui, per l'arbitrarietà di i , si ottiene:

$$B_n = \frac{\int_0^L v_0 \varphi_n(x) dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x) dx} \quad (49)$$

Per quanto riguarda la condizione iniziale sulla derivata di $v(x; t)$, si ha:

$$\dot{v}(x, 0) = \dot{v}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\psi}_n(0) \varphi_n(x) \quad (50)$$

Come in precedenza, si procede moltiplicando per un generico modo di vibrazione, integrando sulla lunghezza della trave, e si sfrutta la normalità tra i modi di vibrazione; poiché

$$\dot{\psi}_n(0) = A_n \omega_n$$

si ottiene:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{\int_0^L \dot{v}_0 \varphi_n(x) dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x) dx} \quad (51)$$

Trave incernierata ad una estremità con molla rotazionale. Si consideri la trave riportata nella Fig. 5, con carico distribuito per una lunghezza l_1 , funzione di x e del tempo t .

La trave, in questo caso, non è incastrata all'estremità, in $x = 0$, oltre al vincolo cerniera, è presente una molla rotazionale, di costante k .

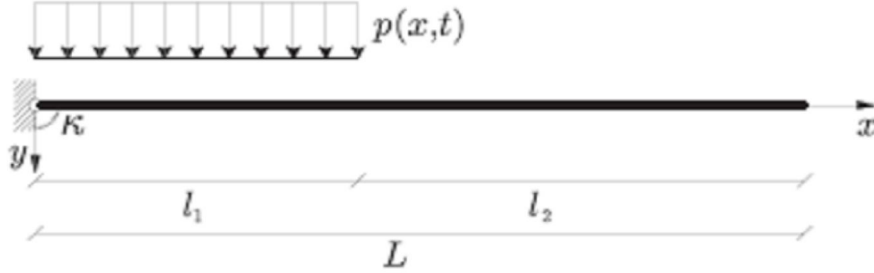


Fig. 5. Trave incastrata ad una estremità.

L'equazione che regge il problema è la medesima del caso di trave incastrata:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (52)$$

Le condizioni iniziali sono le stesse del problema della trave incastrata. Per quanto riguarda le condizioni al contorno, invece, la (14b) è sostituita dalla seguente:

$$\kappa \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \quad (53)$$

La soluzione dell'omogenea associata si determina in modo analogo al caso precedente, ottenendo:

$$v(x,t) = \vartheta(x)\psi(t) \quad (54)$$

$$\vartheta(x) = G_1 \cos ax + G_2 \sin ax + G_3 \cosh ax + G_4 \sinh ax \quad (55)$$

Si procede quindi ad imporre le condizioni al contorno:

$$\vartheta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G_1 = -G_3 \quad (56)$$

Dalla (54) si ottiene:

$$\kappa \frac{d\vartheta(x)}{dx} \Big|_{x=0} = EI \frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\beta}{a} (G_2 + G_4) = G_3 - G_1 \quad (57)$$

in cui

$$2\beta = \kappa/EI$$

Dalla (57) si ha

$$G_3 = \frac{\beta}{a} (G_2 + G_4) \quad (58)$$

e, facendo uso della (56)

$$G_1 = -\frac{\beta}{a} (G_2 + G_4) \quad (59)$$

Dalle rimanenti condizioni al contorno si ricava:

$$-G_1 \cos aL - G_2 \sin aL + G_3 \cosh aL + G_4 \sinh aL = 0 \quad (60a)$$

$$G_1 \sin aL - G_2 \cos aL + G_3 \sinh aL + G_4 \cosh aL = 0 \quad (60b)$$

Utilizzando le (58) e (59) nelle (60), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta}{a} \cos aL - \sin aL + \frac{\beta}{a} \cosh aL \right) G_2 + \\ & + \left(\frac{\beta}{a} \cos aL + \frac{\beta}{a} \cosh aL + \sinh aL \right) G_4 = 0 \end{aligned} \quad (61a)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\beta}{a} \sin aL - \cos aL + \frac{\beta}{a} \sinh aL \right) G_2 + \\ & + \left(-\frac{\beta}{a} \sin aL + \frac{\beta}{a} \sinh aL + \cosh aL \right) G_4 = 0 \end{aligned} \quad (61b)$$

Se si desidera che il precedente sistema non abbia, come unica soluzione, quella banale $G_2 = G_4 = 0$, si deve imporre che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta}{a} \cos aL - \sin aL + \frac{\beta}{a} \cosh aL & \frac{\beta}{a} \cos aL + \frac{\beta}{a} \cosh aL + \sinh aL \\ -\frac{\beta}{a} \sin aL - \cos aL + \frac{\beta}{a} \sinh aL & -\frac{\beta}{a} \sin aL + \frac{\beta}{a} \sinh aL + \cosh aL \end{vmatrix} = \\
= \frac{2\beta + \cosh aL (2\beta \cos aL - a \sin aL) + a \cos aL \sinh aL}{a} = 0 \quad (62)$$

La (62) può essere riscritta come:

$$2\beta \left(\frac{1}{\cosh aL} + \cos aL \right) - a \sin aL = -a \cos aL \tanh aL \quad (63)$$

Le soluzioni dell'equazione trascendente (63), riportati nella seguente figura, forniscono i valori di a che verificano il rispetto delle condizioni al contorno imposte.

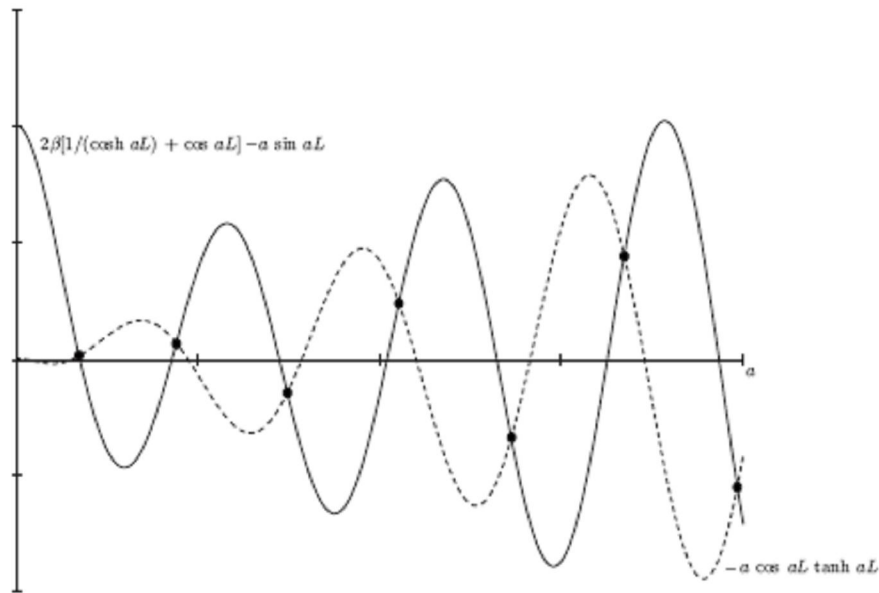


Fig. 6. Soluzioni della equazione (63).

Noti i valori a_n è possibile risalire ai corrispondenti valori di ω_n .

La costante G_4 è legata alla G_2 per mezzo della seguente:

$$G_4 = \frac{(\beta/a) \sin aL + \cos aL - (\beta/a) \sin aL}{(\beta/a) \sinh aL + \cosh aL - (\beta/a) \sin aL} G_2 \quad (64)$$

per cui la (55) può essere riscritta come:

$$\vartheta_n(x) = G_2 \left[\frac{\beta}{a_n} (1 + \xi_n) (\cosh a_n x - \cos a_n x) + \sin a_n x + \xi_n \sinh a_n x \right] \quad (65)$$

nella quale si è posto

$$\xi_n = \frac{(\beta/a_n) \sin a_n L + \cos a_n L - (\beta/a_n) \sin a_n L}{(\beta/a_n) \sinh a_n L + \cosh a_n L - (\beta/a_n) \sin a_n L} \quad (66)$$

La soluzione dell'omogenea associata, è, quindi:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \psi_n(t) \quad (67)$$

La ricerca della soluzione generale e l'imposizione delle condizioni iniziali è identica al caso di trave incastrata, per cui si ottiene:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \Psi_n(t) \quad (68)$$

nella quale le costanti di integrazione si determinano, in questo caso, attraverso le

$$B_n = \frac{\int_0^L v_0(x) \vartheta_n(x) dx}{\int_0^L \vartheta_n^2(x) dx} \quad (69)$$

Trave incastrata alle due estremità. Si consideri la trave incastrata, riportata nella Fig. 7.

Essa è soggetta ad un carico distribuito, per la lunghezza l_1 , funzione di x e del tempo.

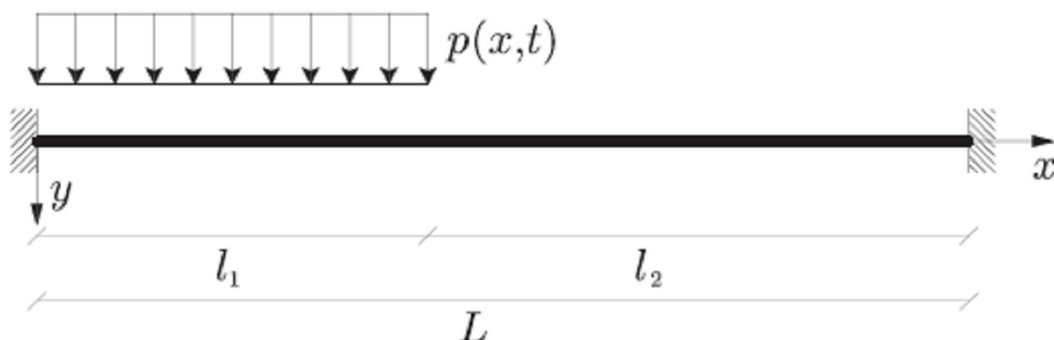


Fig. 7. Trave incastrata alle due estremità.

Le condizioni iniziali sono di nuovo espresse, in generale, dalle (15).

Le condizioni al contorno, per $x = 0$ sono espresse dalle (14) e per $x = L$, valgono, in questo caso:

$$\begin{aligned} v(L, t) &= 0 \\ \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (70a, b)$$

L'equazione differenziale che governa il problema è la medesima dei casi precedenti. La soluzione dell'omogenea associata si determina analogamente ai casi precedenti. Si ottiene, quindi:

$$v(x, t) = \zeta(x)\psi(t) \quad (71)$$

in cui:

$$\zeta(x) = H_1 \cos ax + H_2 \sin ax + H_3 \cosh ax + H_4 \sinh ax \quad (72)$$

Dalla condizione al contorno (14a) si ottiene:

$$H_1 = -H_3 \quad (73)$$

mentre dalla (14b):

$$H_2 = -H_4 \quad (74)$$

La condizione (70a) impone:

$$H_1 \cos aL + H_2 \sin aL + H_3 \cosh aL + H_4 \sinh aL = 0 \quad (75)$$

che, grazie alle (73) e (74) diviene:

$$(\cos aL - \cosh aL) H_1 + (\sin aL - \sinh aL) H_2 = 0 \quad (76)$$

La condizione (70b) impone che:

$$a (-H_1 \sin aL + H_2 \cos aL + H_3 \sinh aL + H_4 \cosh aL) = 0 \quad (77)$$

Poiché, in generale, $a \neq 0$, facendo uso delle (73) e (74) si ottiene:

$$(-\sin aL - \sinh aL) H_1 + (\cos aL - \cosh aL) H_2 = 0 \quad (78)$$

Affinché il sistema costituito dalle (76) e (78) non abbia la soluzione banale $H_1 = H_2 = 0$, si deve imporre pari a zero il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \cos aL - \cosh aL & \sin aL - \sinh aL \\ -\sin aL - \sinh aL & \cos aL - \cosh aL \end{vmatrix} = \\ = 1 - \cos aL \cosh aL = 0 \quad (79)$$

che può essere riscritta:

$$\cos aL = \frac{1}{\cosh aL} \quad (80)$$

Determinati i valori di a_n , soluzioni dell'equazione trascendente (80), che consentono il rispetto delle condizioni al contorno imposte, è possibile determinare le pulsazioni ω_n .

La costante H_2 può essere messa in relazione con la H_1 tramite la (76):

$$H_2 = -\frac{\cos aL - \cosh aL}{\sin aL - \sinh aL} H_1 \quad (81)$$

per cui la (72) diviene:

$$\zeta_n(x) = H_1 [\cos a_n x - \cosh a_n x + \chi_n (\sin a_n x - \sinh a_n x)] \quad (82)$$

dove si è posto

$$\chi_n = -\frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L} \quad (83)$$

La soluzione dell'omogenea associata, è, quindi:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x) \psi_n(t) \quad (84)$$

La ricerca della soluzione generale e la ricerca delle condizioni iniziali è identica ai casi precedenti; si ottiene:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x) \Psi_n(t) \quad (85)$$

in cui le costanti di integrazione si trovano stavolta dalle relazioni:

$$B_n = \frac{\int_0^L v_0(x) \zeta_n(x) \, dx}{\int_0^L \zeta_n^2(x) \, dx} \quad (86)$$

$$A_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{\int_0^L \dot{v}_0(x) \zeta_n(x) \, dx}{\int_0^L \zeta_n^2(x) \, dx} \quad (87)$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Abaqus, User's manual, version 6.3. *Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc.*, 2002.

Antoci C., Gallati M. & Sibilla S. (2005) - *Simulazione numerica dell'interazione fluido-struttura con la tecnica lagrangiana SPH*. Atti XVII Congresso AIMETA, Firenze: 240-245.

Armanini A., On the dynamic impact of debris flows. Armanini A. & Michiue M. (Eds.) - *Recent Developments on Debris Flow*, Springer: 208-226, 1997.

Armanini A., On the dynamic impact of debris flows, *Proc. of the IAHR International Workshop on debris Flow*, Kagoshima, Japan, pp. 89-99, 1993.

Armanini A., Michiue M. (Eds.), Recent developments on debris flows, *Springer*, 1997.

Armanini A. & Scotton P., On the dynamic impact of a debris flow on structures. *Proc. XXV IAHR Congress*, Tokyo, 1993.

ASCE/SEI, Minimum design loads for buildings and other structures, 2006.

Bagnold RA. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proceedings of the Royal Society of London, Serial A*; 225:49-63, 1954.

Bambill D.V., Escanes S.J., Rossit C.A., Forced vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end with an external periodic disturbance acting on the mass with applications in ships' structures, *Ocean Engineering*, 30, pp 1065-1077, 2003.

Batchelor G.K., An Introduction to Fluid Dynamics. *Cambridge University Press*, 1967.

Bathe K.J., Finite Element Procedures. *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, 1995.

Benson D.J., *Momentum advection on a staggered mesh*. J. of Comput. Phys., 100:143-162, 1992.

Bonavina M., Bozzano F., Martino S., Pellegrino A., Prestininzi A. & Scandurra R., Le colate di fango e detrito lungo il versante costiero tra Bagnara Calabra e Scilla (Reggio Calabria): valutazioni di suscettibilità. *Giornale di Geologia Applicata*, 2: 65-74, 2005.

Bredmose H., Peregrine D.H., Porter A., Bullock G.N., Wave impact and aerated water. In: Clément AH, Ferrant P, editors. *Proceedings of 18th international workshop on water waves and floating bodies. Ecole central de Nantes*; 2003. <<http://www.ec-nantes.fr/18WWFBB/index.htm>>.

Buchholtz V., Pöschel T., Interaction of a granular stream with an obstacle, *Granular matter*, 1, pp. 34-41, 1998.

Bullock G., Crawford A.R., Hewson P.J., Walkden M.J., Bird P.A.D., The influence of air and scale on wave impact pressures. *Coast Eng*;42:291–312, 2001.

Bullock G., Obhrai C., Muller G., Wolters G., Peregrine D.H., Bredmose H., Characteristics and design implications of breaking wave impacts. In: McKee Smith J, editor. *Proceedings of 29th international conference on coastal engineering. Lisbon: ASCE. USA: World Scientific Publishing Co.*; 2004.

Cadoni, E., Labibes, K., Alberini, C., Berra, M., Giangrasso, M., Strain rate effect on the tensile behaviour of concrete at different relative humidity levels. *Materials and Structures*, 34: 21 – 26, 2001.

Campbell J., Vignjevic R. & Libersky L., A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184: 49-65, 2000.

Cascini L., Sorbino G., The contribution of soil suction measurements to the analysis of flowslide triggering. In: Picarelli L, editor. *Proceedings of international workshop on occurrence and mechanisms of flow-like landslides in natural slopes and earthfills, Sorrento. Bologna, Italy: Patron*; 2003. p. 77–86.

Chan E.S., Mechanics of deep-water plunging-wave impacts on vertical structures. *Coast Eng*; 22:115–33, 1994.

Chanson H., Air bubble entrainment in free-surface turbulent flows. *Report CH46-95, University of Queensland*, 1995.

Chanson H., Analytical solution of dam break wave with flow resistance. Application to tsunami surges. In: *Proc. of the 21st IAHR Congress, Seoul, Korea*, 2005.

Chikatamarla, R., Laue, J., Springman, S.M., Rockfall impact on protection galleries, *SEMC*

2004. Cape Town, South Africa, 5-7 July 2004, 2004.

Chow, V. T., Open Channel Hydraulics. *McGraw Hill: New York*, 1959.

Cho B.H., Lee H.W., Oh J.S., Estimation technique of air content in automatic transmission fluid by measuring effective bulk modulus. *Int J Automotive Tech*;3:57–61, 2002.

Clough R.W., Penzien J., Dynamics of structures. *Computers & Structures, Berkeley*, 2003.

Cooker, M.J., Liquid impact, kinetic energy loss and compressibility: Lagrangian, Eulerian and acoustic viewpoints. *J. of Engng. Mathematics*, 44, pp. 259 – 276, 2002.

Cooker M.J., Peregrine D.H., Wave impact pressure and its effect upon bodies lying on the sea bed. *Coast Eng* 1992;18:205–29, 1992.

Cooker M.J., Peregrine D.H., Pressure impulse theory for liquid impact problems. *J Fluid Mech* 297:193–214, 1995.

Cooker M.J., Vanden-Broeck J.M., Computations for a nonlinear theory of fluid pressure impulse. *Q J Mech Appl Math*;54:585–98, 2001.

Corte C., Grilli S.T., Numerical modeling of extreme wave slamming on cylindrical offshore support structures. In: Chung JS, Won Hong S, Marshall PW, Komai T, Koterayama W, editors. *Proceedings of sixteenth (2006) international offshore and polar engineering conference, San Francisco, CA, USA*. California, USA: ISOPE; 28 May–2 June 2006. p. 394–401, 2006.

Coussot P., Mudflow rheology and dynamics. *Balkema, Rotterdam*, 1997.

Cross, R.H., Tsunami surge forces. *J. of the Waterways and harbors Div., ASCE*, 93, pp. 201 – 231, 1967 (citato in Ghilardi et al. 2006).

Daido, A., Impact force of mud debris flows on structures, *Proc. of the IAHR International Workshop on debris Flow*, Kagoshima, Japan, pp. 211-218, 1993.

Do R., Kang Z., Chen X. & Zhu P., A comprehensive investigation and control planning for debris flow in the Xiaojiang river basin of Yunnan Province. *Science Press, Chongqing, China*. (in Chinese, citato in Lo et alii, 2000), 1987.

Du, R., Kang, Z., Chen. X., Zhu P., A comprehensive investigation and control planning for debris flow in the Xiaojiang river basin of Yunnan Province. *Chongqing, China, Science Press*, 287 pp. (in Chinese), 1987 (citato in Lo et al. 2000).

Duncan J.M., Chang C.Y., Nonlinear analysis of stress and strain in soils, *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 96 (SM5), pp. 1629- 1653, 1970.

Espa P., Gallati M. & Sibilla S., Free surface perturbation introduced by a vertical 2D liquid jet introduced from the bottom of a rectangular tank: numerical study by SPH method. *Proc. XXX IAHR Congress, Thessaloniki, 2002*, D 567-574, 2002.

Faella C. & Nigro E., a, A hypothesis of technical code on the structural design and repairing in urban areas with high debris flow risk. *Fast slope movements prediction and prevention for risk mitigation Vol. I*, Luciano Picarelli Editor, Pàtron editore, Bologna, 2003.

Faella C. & Nigro E., b, Dynamic impact of the debris flows on the constructions during the hydrogeological disaster in Campania-1998: description and analysis of the damages. *Fast slope movements prediction and prevention for risk mitigation Vol. I*, Luciano Picarelli Editor, Pàtron editore, Bologna, 2003.

Faella C. & Nigro E., c, Dynamic impact of the debris flows on the constructions during the hydrogeological disaster in Campania-1998: failure mechanical models and evaluation of the impact velocity. *Fast slope movements prediction and prevention for risk mitigation Vol. I*, Luciano Picarelli Editor, Pàtron editore, Bologna, 2003.

Federico F., Musso A., Amoroso A., Theoretical analyses of the impact force by debris flows on structures, in *International Workshop “Living with landslides: effects on structures and urban settlements. Strategies for risk reduction”*, Anacapri, Novembre 2003.

Federico, F., Musso, A., Amoroso, A., Analisi dell’impatto di colate detritiche ad alta velocità su strutture di contenimento. *Workshop “Modelli matematici per la simulazione di catastrofi idrogeologiche”*, Rende (CS) - 30 – 31 marzo 2004.

Federico F., Amoroso A., Dynamic impact of fluid-like debris flows on structures. *ISEC-03, Third International Structural Engineering and Construction Conference*, Shunan, Japan, 2005.

Federico, F., Musso, A., Amoroso, A., Dynamic interaction of debris flows on retaining structures. *Powders and Grains. Stuttgart, Germany, 18 – 22 July 2005*, 2005.

Federico, F., Musso, A., Amoroso, A., Impact of a fluid-like debris flows on reinforced concrete pillars. Numerical simulations and back-analyses of a failure case. *ICF – XI - Post Symposium on “Damage and Repair of Historical and Monumental Building”, Venice, March 29th, 2005*.

Federico, F., Amoroso, A., Impact of avalanche boulders on structures. *SEMC 2007, The Third International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, Cape Town South Africa, 10 – 12 September 2007*, 2007.

Federico F., Amoroso A., Simulation of mechanical effects due to the impact of fluid-like debris flows on structures. *Italian Journal of Engineering Geology and Environment*, 1, pp. 5 – 24, 2008.

Federico F., Amoroso A., Impact between fluids and solids. Comparison between analytical and FEA results. *International Journal of Impact Engineering*, 36, pp. 154 – 164, 2009.

Field J.E., Liquid impact and cavitation erosion processes, *Tribology in particulate technology*, edited by Briscoe B.J. and Adams M.J., pp 416-438, 1990.

Frémond, M, Gormaz, R., San Martin, J.A., Collision of a solid with an incompressible fluid. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 16, pp. 405 – 420, 2003.

Fukui Y., Nakamura M., Shiraishi H., Sasaki Y., Hydraulic study on tsunamis. *Coast Eng Jpn, Jpn Soc Civil Eng*, Tokyo;6:67–82, 1963.

Gallati M. & Braschi G., Numerical description of rapidly varied flows via SPH method. *Proc. IASTED International Conference, Iraklion: 530-535*, 2002.

Gallati M., Braschi G. & Falapi S., SPH simulations of the waves produced by a falling mass into a reservoir. *Il Nuovo Cimento*, 28: 129-136, 2005.

Ghilardi, P., Pagliardi, M., Zanuttigh B., Analisi sperimentale del processo di impatto di miscele granulari sature contro pareti verticali. *XXX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, IDRA 2006*, 2006.

Gingold R.A & Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181: 375-389, 1977.

Heumader J., Technical debris-flow countermeasures in Austria - A review. *Debris flow Hazard Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*. Wieczorek & Naeser (eds), Balkema, Rotterdam, 2000.

Hungr, O., Morgan, G.C., Kellerhals, R., Quantitative analysis of debris torrent hazards for design of remedial measures. *Canadian Geotech. J.*, 21, 1984.

Hungr O., A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. *Can. Geotech. J.*, 32. pp. 610-623, 1995.

Hungr O., Analysis of debris flows surges using the theory of uniformly progressive flow. *Earth Surf. Process. Landforms*, 25: 483-495, 2000.

Hungr O., Flow slides and flows in granular soils. In: Picarelli L. (Ed.) - *Proc. Int. Workshop on Occurrence and mechanisms of flow-like landslides in natural slopes and earthfills*. Sorrento, May 2003: 37-44, 2003.

Hutter K., Order and disorder in granular materials - experiment and theory. *Darmstadt University of Technology*, 1998.

Iverson R.M., The Physics of debris flows. *Review of Geophysics*, 35, 3: 245-296, 1997.

Johnson, W., Impact strength of materials. *Edward Arnold*, London, 1983.

Johnson K.L., Contact Mechanics. *Cambridge University Press*, 1985.

Jumikis A.R., Rock Mechanics. *Trans Tech Publications*, 2nd edition, 1984.

Kirkgöz, M.S., Breaking wave impact on vertical and sloping coastal structures. *Ocean Engng.*, 22, pp. 35 – 48, 1995.

Korobkin, A., Elastic response of a catamaran wetdeck to liquid impact. *Ocean Engng.*, 25, pp. 687 – 714, 1998.

Korobkin A., Global characteristics of jet impact. *J. Fluid Mech.*, 307: 63-84, 1996.

Lesser, M., Thirty years of liquid impact research: a tutorial review. *Wear*, 186, pp.28 – 34, 1995.

Lichtenan C., Die Berechnung von Sperren in Beton und Eisenbeton, Kolloquium on Torrent Dams ODC 384.3. *Mitteilungen der Forstlichen Bundes- Versuchsanstalt, Wien*, Heft: 91-127, 1973.

Liu, K.F., Lee, F.C, Tsai, H.P., The Flow Field and Impact Force on a Debris Dam. *Debris-Flow Hazards Mitigation*, ASCE, New York, pp. 737 –746, 1997.

Liu G.R. & Liu M.B., Smoothed Particle Hydrodynamics - A meshfree particle method. *World Scientific*, 2003.

Lo, D.O.K., Ho, K.K.S., Pun, W.K., Pang, R.P.L., Design of barriers for natural terrain landslides. *GeoEng 2000, Melbourne, Australia*, Conference proceedings, 2000.

Lugni, C., Brocchini, M., Faltinsen, O.M., Wave impact loads: the role of flip-through. *Physics of fluids*, 18, 2006.

Malvar L.J., Crawford J.E., Dynamic increase factors for concrete. *28th DDESB Seminar, Orlando, FL*, 1998.

Miao T., Liu Z., Niu Y., Ma C. A sliding block model for the runout prediction of high-speed landslides, *Can. Geotech. J.*, 38, pp. 217-226, 2001.

Mizuyama T., Oda A., Nishikawa S., Morita A., Kasai S., Structures for controlling debris-flows in torrents where debris- flow does not occur frequently, in *Debris-flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, Wieczorek and Naeser eds., Balkema., pp. 579 –582, 2000.

Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30: 543-574, 1992.

Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 68: 1703-1759, 2005.

Musso A., Federico F. & Troiano G., A mechanism of pore pressure accumulation in rapidly sliding submerged porous blocks. *Computers and Geotechnics*, 31, 3: 209-226, 2004.

Musso A. & Olivares L., Flowslides in pyroclastic soils: transition from "static liquefaction" to "fluidization". Invited paper. *Picarelli L. (Ed.) - Proc. Int. Workshop on Occurrence and mechanisms of flow-like landslides in natural slopes and earthfills*. Sorrento, May 2003: 117-128, 2003.

Naef D., Rickenmann D., Rutschmann P. & McCardell B.W., Comparison of flow resistance relations for debris flows using a one-dimensional finite element simulation model. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 6: 155-165, 2006.

Obhrai, C., Bullock, G., Wolters G., Müller, G., Peregrine, D.H., Bredmose, H., Violent wave impacts on vertical and inclined walls: large scale model tests. *Proc. of 29th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE*, Lisbon, 2004.

Peregrine, D.H., Water-wave impact on walls. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35, pp. 23 – 43, 2003.

Peregrine, D.H., Bredmose, H., Bullock, G., Obhrai, C., Müller, G., Wolters G., Violent water wave impact on a wall. *Proc. of 29th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE*, Lisbon, 2004.

Pierson, T. C., Effects of slurry composition on debris flow dynamics, Rudd Canyon, Utah. In *Delineation of Landslide, Flash Flood and Debris Flow Hazards in Utah*, Bowles DS (ed.). *Utah State University*; 132-151, 1985.

Revellino, P., Hungr O., Guadagno, F.M., Evans S.G., Velocity and runout simulation of destructive debris flows and debris avalanches in pyroclastic deposits, Campania region, Italy. *Environmental Geology*, 45, pp. 295-311, 2004.

Scotton P. & Deganutti A.M., Phreatic line and dynamic impact in laboratory debris flow experiments. *Debris flow Hazard Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*. Wieczorek & Naeser (eds), Balkema, Rotterdam, 2000.

Oger G., Doring M., Alessandrini B. & Ferrant P., Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213: 803-822, 2006.

Olivares L. & Picarelli L., Shallow flowslides triggered by intense rainfalls on natural slopes covered by loose unsaturated pyroclastic soils. *Géotechnique*, 53, 2: 283-288, 2003.

Paz M., Structural dynamics: theory and computation, *Van Nostrand Reinhold Company*, 1980.

- Peregrine D.H., Water-wave impact on walls. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35: 23-43, 2003.
- Peregrine D.H., Bullock G., Obhrai C., Muller G. & Wolters G., *Violent water wave impact on a wall. Proc. of 29th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE*, Lisbon, 2004.
- Pierson T. C. & Costa J. E. , A rheologic classification of subaerial sediment-water flow. *Geol. Soc. Am., Rev. Eng. Geol.*, 7: 112, 1987.
- Prestininzi A. & Romeo R., Earthquake-induced ground failures in Italy. *Engineering Geology*, 58: 387-397, 2000.
- Ramasco R., *Dinamica delle strutture*, CUEN, Napoli, 1993.
- Revellino P., Hungr O., Guadagno F.M. & Evans S.G., Velocity and runout simulation of destructive debris flows and debris avalanches in pyroclastic deposits, Campania region, Italy. *Environmental Geology*, 45: 295-311, 2004.
- Seminara G. & Tubino M., *Debris Flow: Meccanica, Controllo e Previsione*. CNR, 1993.
- Stronge, W.J., *Impact Mechanics*, Cambridge Press, 2004.
- Takahashi, T., *Debris Flow. IAHR Monograph, A.A. Balkema: Rotterdam*, 1991.
- USGS, Distinguishing between Debris Flows and Floods from Field Evidence in Small Watersheds. *USGS Fact Sheet: 2004-3142*, 2005.
- Van Dine, D.F., *Debris Flow Control Structures for Forest Engineering*, British Columbia Ministry of Forests Research Program, Working Paper 22/1996, 1996.
- Walkden M.J., Wood D.J., Bruce T. & Peregrine D.H. , Impulsive seaward loads induced by wave overtopping on caisson breakwaters. *Coastal Engineering*, 42: 257-276, 2001.
- Wu, J., Tian L., Kang Z., Zhang Y., Liu J., *Debris flow and its comprehensive control*. Beijing, China, Science Press, 332 pp. (in Chinese), 1993. (citato in Lo et al. 2000).
- Wu, K.Q., Yu, T.X. , Simple dynamic models of elastic – plastic structures under impact. *Int. J. of Impact Engng.*, 25: 735 – 734, 2001.
- Wu G.X., Fluid impact on a solid boundary. *J Fluids and Structures*; 23: 755–765, 2007.

Xiang Zhang & Loc Vu-Quoc, Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions. *International Journal of Impact Engineering*, 27, pp. 317–341, 2002.

Zhang, S., A comprehensive approach to the observation and prevention of debris flows in China. *Natural Hazards*, 7, pp. 1 – 23, 1993.