Una formula corrotta

Franco Ghione[1]

E’ meglio una dimostrazione
in più e una formula in meno

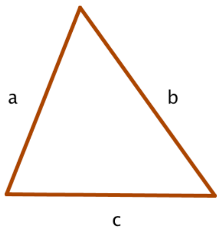
Le formule matematiche e i metodi di calcolo possono, come ogni altro sistema fisico isolato, modificarsi nel tempo e subire delle alterazioni entropiche che ne alterano via via il significato fino a stravolgerne la correttezza. Questo processo è tanto più frequente tanto più la matematica si isola e ancor più se la trasmissione del sapere avviene per via orale omettendo le dimostrazioni. Se, ad esempio, trasmettiamo una formula o un procedimento che permette di calcolare l'area o il volume di un dato oggetto geometrico senza spiegare dettagliatamente la dimostrazione, l'unica garanzia che il processo di comunicazione non introduca "rumore" sta nella memoria di chi ripete la formula. La dimostrazione permette di verificare, ogni volta che vi sia un dubbio, la validità o meno della formula direttamente e da ciascuno senza bisogno di strumenti se non quelli culturali, mentre la formula, il procedimento stesso, trasmesso a memoria, meccanicamente, rischia, di passaggio in passaggio, di modificarsi ed, alla fine, produrre un risultato completamente sbagliato. Le dimostrazioni matematiche sono spesso difficili da ritenere a mente perchè richiedono diversi passaggi e la conoscenza di risultati già dimostrati che vengono utilizzati implicitamente spesso, se appartengono a una cultura scientifica condivisa, senza neppure essere richiamati. Per questo la perdita dei testi scritti e l'impoverimento della cultura di base, rende possibile, se non inevitabile, l'arretramento della cultura scientifica e la dimenticanza di risultati, anche basilari, già acquisiti con tanto di dimostrazione. In questa nota trattiamo di cose del passato, ma la preoccupazione che la matematica possa diventare, nel nostro insegnamento, un collage di regole scollegate tra loro e prive di vere dimostrazioni è della massima attualità.

1. L’area del triangolo nel basso medio evo.

Un esempio significativo di degradazione culturale si può riferire ai metodi utilizzati nel basso medioevo per il calcolo dell'area di un triangolo. La formula *base per altezza diviso due*, che deriva banalmente dal fatto che la diagonale divide un rettangolo in due parti uguali, nasconde al suo interno una difficoltà non trascurabile e poco evidenziata nella nostra didattica. Il problema dell’area è più complicato di quanto possa apparire. Il triangolo *di fatto* è assegnato assegnando le lunghezze dei suoi tre lati e il calcolo della sua altezza produce generalmente un irrazionale quadratico, una grandezza quindi inesprimibile con un numero razionale anzi strutturalmente indicibile nella sua completezza. La teoria dei numeri irrazionali è una teoria matematica astratta, che scomoda l'infinito, ricca paradossi di varia natura, definizioni tutt'altro che banali, mentre l'area di un triangolo, l’oggetto più elementare della geometria, dovrebbe potersi calcolare in modo semplice e preciso. Ma non è così! Una possibile semplificazione, per i triangoli isosceli, è quella di usare il concetto di apotema: dare cioè delle tavole che esprimano attraverso un numero approssimato l'altezza di un triangolo isoscele di base unitaria il cui angolo al vertice sia particolarmente semplice: 120°, 90°, 72°, 60°, 45° ecc in modo che sia possibile calcolare, con una certa approssimazione, l'area di un triangolo simile a quello e, di conseguenza anche, di un poligono regolare di 3,4,5,6 ,8 lati. Ma per un triangolo qualunque? Non è possibile fare una tavola che comprenda gli apotemi di ogni triangolo. Ecco una difficoltà che si nasconde dietro la formula che esprime l'area di un generico triangolo. Se si cercano via d’uscita che evitino il concetto di

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata, ghione@mat.uniroma2.it, direttore del *Centro interdipartimentale di ricerca e formazione permanente per l’insegnamento delle discipline scientifiche* (http://crf.uniroma2.it)

incommensurabilità (come certe cattive ricette didattiche cercano di suggerire) dobbiamo rassegnarci a rozze approssimazioni ed essere consapevoli del prezzo che questo comporta.
Nel libretto *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alquino di York risalente all'VIII secolo d.C. [1] troviamo una serie di problemi con tanto di soluzione che ci permettono di capire che metodo veniva insegnato per calcolare l'area di un triangolo[2]. In sostanza il metodo consiste in questo: consideriamo un triangolo i cui lati misurino, in una data unità di misura a,b,c, allora l'area A del triangolo è data dalla formula:



$$A = \frac{c}{2} \times \frac{a+b}{2}$$

essa viene dunque calcolata moltiplicando metà base per la media aritmetica degli altri due lati.

Mi sembra interessante cercare di capire con quali successive degenerazioni si sia arrivati a questo sconcertante risultato. In questa nota esporrò una possibile ricostruzione di questo processo.

Esiste intanto una formula attribuita a Erone (II secolo d.C.) [2], ma probabilmente, come afferma al-Biruni e si tende oggi a ritenere, risalente ad Archimede [3], che esprime l'area A di un triangolo in funzione della lunghezza dei suoi tre lati:

$$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2}}$$

che diventa, indicando con p la lunghezza del semiperimetro,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

La formula, ha una dimostrazione molto ingegnosa ed, è piuttosto complicata da usare, in situazioni concrete, soprattutto per la presenza della radice quadrata. La dimostrazione sintetica si trova nel testo già citato di Erone, e risale, come abbiamo detto, probabilmente al III secolo a.C., mentre la dimostrazione algebrica, che oggi conosciamo, appare in al-Kwharizmi [4] nel IX secolo d.C., come prima applicazione della nascente Algebra alla Geometria, e poi ancora in Piero della Francesca [5] e altri. Entrambe le dimostrazioni, che riporteremo per completezza più avanti, erano assolutamente inaccessibili al livello culturale dell'Europa carolingia dell'VIII secolo, e quindi il metodo suggerito da Alcuino di York doveva essere il retaggio mnemonico, di una progressiva perdita di conoscenze e metodologie scientifiche. Anche perché semplicissimi ragionamenti potevano suggerire qualche sospetto sulla validità della formula: l'asimmetria richiede di dovere individuare una base il che significa che lo stesso triangolo veniva ad avere, generalmente, tre aree distinte. Inoltre è chiaramente insensato identificare l'altezza del triangolo con la media aritmetica dei due lati che la comprendono, dal momento che, per un verso la media aritmetica di due numeri (diversi) è maggiore del più piccolo e dall'altro l'altezza del triangolo è minore dei due lati poiché, come tutti sanno, in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è più grande dei cateti. Allora come si è arrivati alla formula di Alcuino? Quali semplificazioni, omissioni si sono via via prodotte per arrivare a un risultato così decisamente scorretto? Cerchiamo più avanti di dare una possibile spiegazione.

[2] Propositio 24 de campo triangulo, Propositio 28 de civitate triangula.

2. L’algoritmo di Erone

Osserviamo intanto che, sempre in Erone, troviamo un potentissimo algoritmo per approssimare la radice quadrata di un numero naturale. Se u è il numero del quale vogliamo calcolare la radice quadrata, cominciamo con lo scrivere u come prodotto di due numeri naturali

$$u = nm$$

il più possibile uguali di modo che, se riuscissimo ad avere n=m, la radice cercata sarebbe proprio il numero n. In generale non riusciamo a fare questo e dobbiamo accontentarci di una qualunque possibile decomposizione del numero u come prodotto di due numeri, uno dei quali, nel caso peggiore, quando u è un numero primo, potrebbe anche essere 1. Fatto questo primo passo l’algoritmo può essere facilmente implementato in un foglio Excel e utilizzato per il calcolo delle radici quadrate e delle aree anche nelle scuole di I grado. L’algoritmo converge molto rapidamente e tanto più rapidamente quanto più i due numeri n ed m sono vicini tra loro.
L’idea di base consiste nel fatto, sicuramente noto al tempo dei pitagorici, che la media geometrica tra due numeri n e m è sempre compresa tra la media armonica e quella aritmetica:

$$\frac{2nm}{n+m} < \sqrt{nm} < \frac{n+m}{2}$$

così ad esempio la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato uno è approssimata per difetto da 4/3 e per eccesso da 3/2.

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

L'idea riportata da Erone è quella di continuare a calcolare la media armonica e quella aritmetica delle due medie e dimostrare che, ancora, la media geometrica iniziale è compresa tra queste due nuove "medie delle medie".
Si verifica facilmente che, se indichiamo con m_1 e n_1 le due medie, allora loro prodotto coincide col numero nm del quale si vuole calcolare la radice quadrata:

$$m_1 = \frac{2nm}{n+m} \quad , \quad n_1 = \frac{n+m}{2} \quad , \quad n_1 m_1 = nm$$

inoltre

se m < n allora

$m < \sqrt{nm} < n$	dato che	$m^2 < nm < n^2$
$m < m_1$	dato che	$m(n+m) < 2nm$
$n_1 < n$	dato che	$n+m < 2n$

Risulta dunque

$$m < m_1 < \sqrt{nm} < n_1 < n$$

Iterando il processo, calcolando cioè via via la media aritmetica n_k e quella armonica m_k delle due medie precedenti, si ottiene una famiglia infinita di intervalli $[m_k,n_k]$ sempre più piccoli che contengono al loro interno la radice che vogliamo calcolare dato che, per ogni k, $m_k \times n_k = mn$. In definitiva:

$$m < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_k < \ldots < \sqrt{nm} < \ldots < n_k < \ldots < n_3 < n_2 < n_1 < n$$

Questo algoritmo è formidabile perchè converge con grande rapidità alla radice cercata e fornisce, fin dai primi passi, delle buone approssimazioni di queste grandezze irrazionali. Nel caso di $\sqrt{2}$ abbiamo già una ottima approssimazione (con 4 decimali esatti!) già dopo i primi tre passi:

$$1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \quad \sqrt{2} \quad < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < 2$$

Tornando alla formula di Erone che esprime l'area di un triangolo in funzione delle misure dei suoi tre lati:

$$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2}} \times \sqrt{\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2}}$$

approssimando con la media aritmetica il primo radicale (l'approssimazione più rozza e più semplice) troviamo

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2}} \approx \frac{\frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

approssimando con la media aritmetica anche il secondo radicale troviamo:

$$\sqrt{\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2}} \approx \frac{\frac{-a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2}}{2} = \frac{c}{2}$$

e dunque, dimenticando che abbiamo approssimato grossolanamente, otteniamo

$$A = \frac{c}{2} \times \frac{a+b}{2}$$

Osserviamo anche che, usando un linguaggio più archimedeo, senza cioè ricorrere a formule ma solo alla teoria dei rapporti tra grandezze, possiamo dire che:

Un triangolo ABC di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie geometriche tra P e P-AB e tra P-BC e P-CA

Infatti questa formulazione individua i lati S e T del rettangolo equivalente al triangolo con le proporzioni:

$$P : S = S : (P\text{-}AB) \quad \text{e} \quad (P\text{-}BC) : T = T : (P\text{-}CA)$$

Se trasformiamo la media geometrica in media aritmetica la cosa si semplifica notevolmente!

$$\frac{2P - AB}{2} = \frac{AB + BC + CA - AB}{2} = \frac{BC + CA}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{2P - BC - CA}{2} = \frac{AB}{2}$$

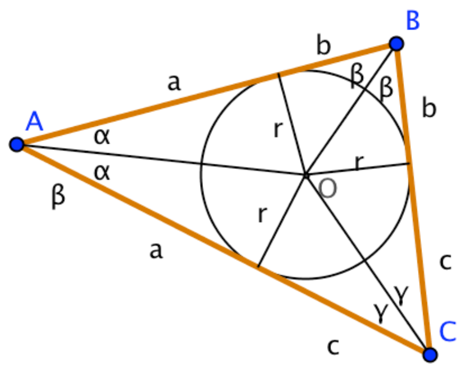
La stessa formulazione omettendo il tipo di media che va presa (quante volte si leggono articoli dove si parla di medie senza mai specificare di quale media si tratti !) conduce alla seguente proposizione:
Un triangolo ABC di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie ~~geometriche~~ tra P e P-AB e tra P-BC e P-CA.
Proposizione che è ancora corretta (ma imprecisa perché non specifica il tipo di media). Questa proposizione diventa la regola di Alcuino prendendo le medie più facili cioè quelle aritmetiche.

Poiché, come abbiamo visto, la media aritmetica è sempre maggiore della media geometrica l'area del triangolo calcolata con la regola di Alquino è sempre maggiore di quella reale, cosa tanto desiderabile (per il sovrano) quanto truffaldina (per il contadino) se tale regola viene usata per calcolare l'area di un appezzamento di terreno e, proporzionalmente, la tassa da pagare.

Poiché dunque è la dimostrazione che ci può salvare da questo e altri raggiri, vediamo le due dimostrazioni, quella sintetica (probabilmente dovuta ad Archimede) e quella algebrica. Riporto le linee principali di queste dimostrazioni anche perché la dimostrazione sintetica è particolarmente intelligente ed elegante e, diversamente da ciò che accade, andrebbe insegnata nelle nostre scuole, anche per evitare, un'altra volta, di dimenticare.

3. La dimostrazione della formula di Erone (Archimede?)

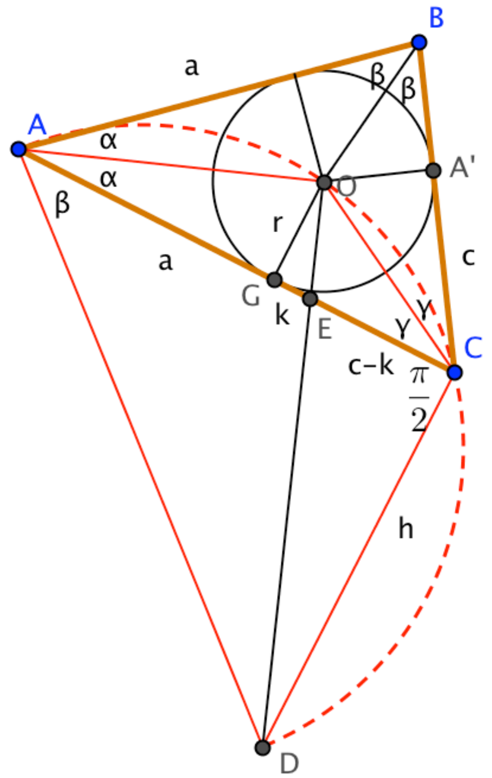
Cominciamo con l'osservare attentamente la figura seguente



p = semiperimetro = a+b+c
A= area del triangolo = rp
p-AB=c , p-BC=a , p-CA=b

$$A^2 = r^2p^2 =(a+b+c)abc$$

Ecco le linee della dimostrazione.



Costruzione:
O è il centro del cerchio inscritto.
Si traccia ad angolo retto il segmento CD e si riporta l'angolo β=DAC=OBC. In questo modo il triangolo ACD è simile al triangolo OBA', quindi

$$h : r = (a+c) : b$$

Anche il triangolo OGE è simile al triangolo ECD, quindi

$$h : r = (c-k) : k = (a+c) : b.$$

I 4 punti AOCD stanno su una circonferenza infatti :

$$OAD = \alpha+\beta$$
$$OCD = \gamma+\pi/2$$

poiché $2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$ abbiamo

$$OAD+OCD=\alpha+\beta+\gamma+\pi/2 = \pi$$

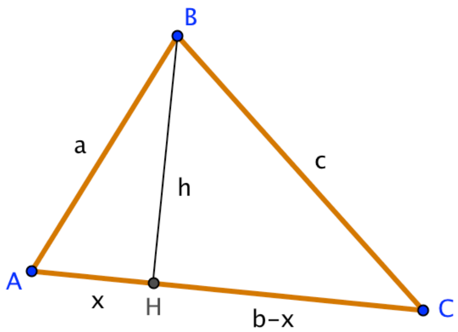
quindi il quadrilatero AOCD è inscritto in una circonferenza.
Ora, essendo l'angolo ACD retto, AD è il diametro di tale circonferenza e quindi anche l'angolo AOD è retto, il triangolo AOE è rettangolo e OG è la sua latezza rispetto all'ipotenusa.

$$ak=r^2$$

In questo modo abbiamo calcolato k in funzione dei dati del problema.
Ora basta fare i calcoli:

$$k(a+c)=b(c-k) \quad \text{cioè} \quad (a+b+c)k=bc \quad \text{ovvero} \quad pk=bc$$
$$A^2 = p^2r^2 = (a+b+c)^2r^2 = p^2ak=(ap)(pk)=apbc=(a+b+c)abc.$$

Vediamo ora la dimostrazione algebrica che ha un certo interesse didattico perché usa ripetutamente due prodotti notevoli.



Guardiamo attentamente la figura dove ora a, b, c rappresentano le lunghezze dei lati interi. Supponiamo che l'altezza h relativa al lato AC cada internamente al lato. Nel caso contrario la dimostrazione andrà leggermente modificata.
Abbiamo

$$h^2 = a^2 - x^2 = c^2 - (b-x)^2$$

e quindi

$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

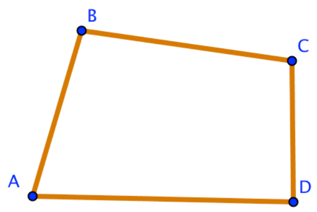
Se A è l'area del triangolo, abbiamo:

$$16A^2 = 4\,b^2\,h^2 = 4b^2\,(a^2-x^2)= 4b^2\,(a-x)(a+x) = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$=[c^2 - (a - b)^2][(a+b)^2 - c^2]= (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Il caso trattato da al-Khwarizmi e da Piero della Francesca si riferisce al fantastico triangolo di lati 13, 14, 15 che ha area 84 dove il procedimento indicato non cambia nella sostanza se al posto dei simboli 13, 14, 15 usiamo i simboli a, b, c. La bellezza e utilità didattica di questo triangolo sta nel fatto che l'altezza relativa alla base 14 è intera e vale 12 e le altre altezze sono razionali e l'area e intera! Questo permette di esemplificare la sostanza di un procedimento di calcolo sui lati a,b,c del triangolo separando la difficoltà del calcolo dalla difficoltà del procedimento concentrando l'attenzione del discinte solo su questo, proprio come viene fatto in algebra dove il calcolo effettivo non viene eseguito ma solo indicato con la formula letterale.

Il caso dei quadrilateri

Nel caso di figure quadrilatere la situazione "peggiora" notevolmente. Sempre nel libricino di Alcuino[3] troviamo questa fantastica regola:



L'area del quadrilatero ABCD si calcola moltiplicando tra loro la media aritmetica dei lati AB e CD con quella dei lati BC e AD. Questa regola, usata dagli esattori delle tasse bizantini [6] è di facile applicazione, ma, come dimostreremo più avanti, fornisce un risultato, guarda caso, sempre maggiore del valore reale dell'area.

Che la regola non possa funzionare deriva anche dalla semplice osservazione che, a differenza dei triangoli, possiamo immaginare moltissimi quadrilateri con gli stessi lati e aree diverse: si pensi, ad esempio, ai quadrati che possono degenerare in rombi di area sempre più piccola, senza modificare la lunghezza dei quattro lati.
La regola di Alcuino ha però un vantaggio che, nel caso degenere, nel quale B=C, otteniamo la regola per i triangoli e questo ci può far intuire che esistano delle parentele tra le due regole.

Se andiamo a vedere come venivano calcolate le aree dei quadrilateri in funzione delle lunghezze dei lati, troviamo una formula attribuita a Brahmagupta, matematico indiano del VII d.C., che generalizza il caso dei triangoli. Se P è il semiperimetro del quadrilatero ABCD, la sua area A è data dalla formula

$$A = \sqrt{(P - AB)(P - CD)(P - BC)(P - DA)}$$

Ragionando come prima abbiamo l'enunciato (quasi esatto come vedremo)

Un quadrilatero ABCD di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie geometriche di P-AB con P-CD e P-BC con P-DA.

Trascurando il tipo di media e procedendo con quella aritmetica abbiamo, come prima, la regola di Alcuino.

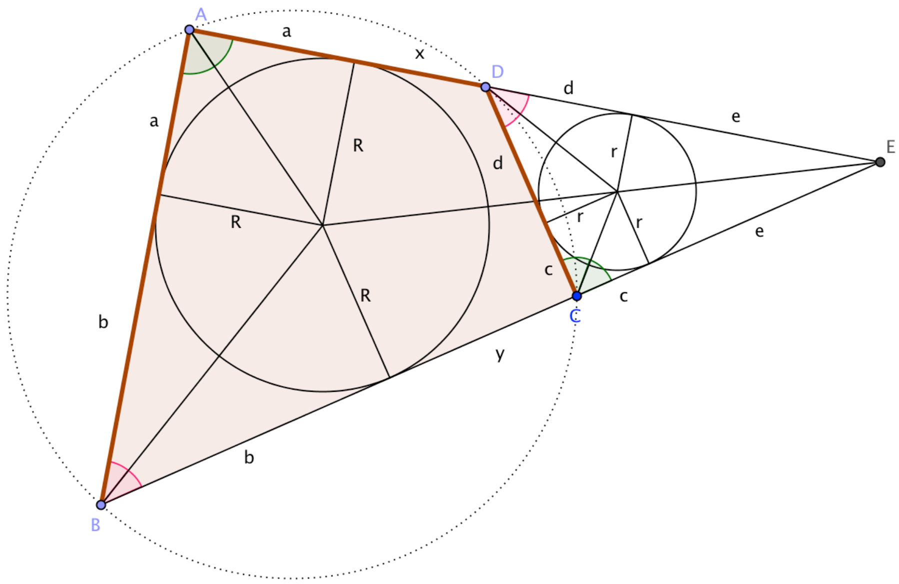
$$\frac{2P - AB - CD}{2} \times \frac{2P - BC - DA}{2} = \frac{BC + DA}{2} \times \frac{AB + CD}{2}$$

In questo caso però le cose sono più complicate infatti la formula di Brahmagupta chiaramente non può funzionare dal momento che l'area dipende non solo dalle lunghezze dei lati, ma anche da un angolo che indica quanto il quadrilatero sia "schiacciato". Per ricostruire la formula corretta

[3] Propositio 23 de campo quadrangolo

(probabilmente più antica di quella di Brahmagupta) dobbiamo considerare *quadrilateri ciclici* cioè inscrivibili in una circonferenza. Questi quadrilateri sono in un certo senso “rigidi” cioè, fissate le lunghezze dei lati, ne esiste, essenzialmente, uno solo inscrivibile in una circonferenza con quei lati. Solo per questi quindi possiamo sperare di trovare una formula che ne esprima l’area in funzione solo della lunghezza dei suoi lati. Ma se lo stesso Brahmagupta, cui si fa risalire la formula, non aveva ben chiara la questione e fa supporre che la formula abbia una validità generale, qual’ è l’origine di questa formula?
Per rispondere a questa domanda proponiamo una dimostrazione sintetica, che per altro non abbiamo trovato in letteratura, che si serve dei metodi propri della matematica greca, che generalizza quella relativa al triangolo e che fa pensare a una origine archimedea anche di questo risultato.

Osserviamo attentamente la figura.



Bisogna sapere che un quadrilatero ABCD è inscrivibile in una circonferenza se e solo se la somma di due angoli opposti è π. Questo significa che gli angoli

$$BAD=DCE \text{ e } ABD=CDE$$

E dunque i triangoli ABE e CDE sono simili.
Seguendo la dimostrazione sintetica del teorema di Erone, consideriamo due cerchi inscritti e indichiamo come in figura le lunghezze dei segmenti relativi. Abbiamo

$$x+d=y+c$$
$$R: r = (x+d+e) : e$$
$$R : r = a : c \quad \text{(dato che gli angoli DAB e DCE sono uguali)}$$
$$R : r = b : d \quad \text{(dato che gli angolo ABC e CDE sono uguali)}$$

Chiamiamo k il rapporto tra i due raggi: k=R:r. Abbiamo allora

$$ke=x+d+e=y+c+e, \text{ da cui } x=(k-1)e-d \quad \text{e} \quad y= (k-1)e-c$$
$$a=kc,\ b=kd$$

Sia P il semiperimetro del quadrilatero

$$2P= 2a+2b+y+c+d+x= 2a+2b+2(y+c) = 2a+2b+2(d+x)$$

cioè $$P= a+b+(k-1)e.$$
Dunque:

$$P-AB = a+b+(k-1)e - (a+b) = (k-1)e$$
$$P-BC = a+b+(k-1)e-(b+y) = a-((k-1)e-c)+(k-1)e = a+c = (1+k)c$$

P-CD = a+b+(k-1)e -(c+d) = (k-1)c+(k-1)d+(k-1)e = (k-1)(c+d+e)
P-DA = a+b+(k-1)e -(x+a) = kd+(k-1)e-((k-1)e-d) = (1+k)d,

Chiamiamo T^2 il prodotto di queste 4 quantità:

$$T^2 = (P-AB)(P-BC)(P-CD)(P-DA)= (k-1)^2 (k+1)^2 (c+d+e)cde = (k^2-1)^2A^2$$

Ora, per la formula di Erone, la quantità A definita dalla relazione A^2=(c+d+e)cde

È l'area del triangolo CDE. Infatti il s emiperimetro p di quel t riangolo vale p=c+d+e e p-CD = e, p-DE=c, p-EC=d. Infine, poiché il triangolo ABE è simile al triangolo DCE secondo un rapporto di similitudine k, la sua area vale k^2A (cosa questa ben nota ad Archimede) e dunque T= k^2A-A risulta essere l'area del quadrilatero ABCD.

Abbiamo così dimostrato, con metodi essenzialmente archimedei, e con idee che generalizzano in modo naturale, quelle usate per dimostrare la formula di Erone, il seguente interessante risultato:

Un quadrilatero ABCD ciclico di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie geometriche di P-AB con P-CD e di P-BC con P-DA.

Questa proposizione corretta si può corrompere in un primo momento (Brahmagupta) nella proposizione più semplice:

Un quadrilatero ABCD ~~ciclico~~ di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie geometriche di P-AB con P-CD e di P-BC con P-DA.

e, semplificando ancora (Alquino), in quest'altra più semplice ancora:

Un quadrilatero ABCD ~~ciclico~~ di semiperimetro P è equivalente a un rettangolo i cui lati sono le medie ~~geometriche~~ di P-AB con P-CD e di P-BC con P-DA.

Osserviamo infine che se il quadrilatero di semiperimetro p e lati a,b,c,d non è ciclico la sua area è data dalla formula

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 2abcd\cos(\alpha)}$$

essendo α la media aritmetica tra due angoli opposti del quadrilatero.
Questa area risulta quindi più piccola o uguale di quella dell'unico quadrilatero ciclico con i lati a,b,c,d per il quale $\alpha = \pi/2$

$$A \le \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

e ancora più piccola di quella approssimata con le medie aritmetiche,

$$A \le \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} < \frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$$

Anche gli esattori del fisco bizantini usavano questa regola per calcolare le grandezze dei terreni quadrangolari e la relativa tassa come sappiamo dal vastissimo repertorio documentato nel testo già citato [6]. Certamente l'uso di quest'ultima formula per calcolare le aree era, per gli esattori del fisco, doppiamente conveniente!

Bibliografia

[1] Alcuino di York, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno*, a cura di R. Franci, Edizioni ETS, 2005

[2] Erone, *Metrica*, in Heron Alexandrinus, Opera, vol. III, edidit Herman Schöne, Leipzig, Teubner, 1903

[3]C M Taisbak*, An Archimedean proof of Heron's formula for the area of a triangle; reconstructed*, *Centaurus* **24** (1980), 110-116.

[4] Al-Khwarizmi, *Le commencement de l'algebre*, a cura di R. Rashed, Ed. Blanchard, 2007

[5] Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, ed. Giunti, 1995

[6] Jean-Claude Cheynet, Jean-Pierre Grélois, Jacques Lefort, Jean-Marie Martin (a cura di), *Géométries du fisc byzantin*, Lethielleux, 2001