

## CAPITOLO II

# COMPORTAMENTO DI STRUTTURE IN MURATURA E CEMENTO ARMATO

### rassegna di modelli ricorrenti in letteratura

#### 2.1. Modellazione del calcestruzzo

Negli ultimi decenni si sono svolti una serie di convegni internazionali [2.3, 2.4, 2.5] riguardanti le strutture in calcestruzzo armato. Nel corso di tali incontri sono emerse alcune nuove valutazioni per il comportamento delle strutture in cemento armato e cemento armato precompresso e sono state introdotte tecniche di calcolo nuove e raffinate. Allo scopo di descrivere il panorama degli studi esistenti si possono distinguere due livelli principali di analisi nello studio di queste strutture:

I modelli “strut and tie”

II modellazione continua

Gli studi afferenti al primo tipo di analisi si rifanno ai metodi facenti capo ai modelli “strut and tie” e di cui si parla più dettagliatamente al *paragrafo 2.1.1*. Tali metodi propongono di schematizzare il comportamento strutturale mediante un ideale traliccio composto da aste tese e compresse. Si rifanno ad una tecnica introdotta all’inizio del secolo da Ritter [2.6] e Morsch [2.7] per rappresentare il comportamento a taglio di travi in c.a.; estesa successivamente da Rausch [2.8] al caso della torsione, questa tecnica è stata di recente ripresa e perfezionata da alcuni gruppi di ricerca [2.9, 2.10, 2.2, 2.11] allo scopo di definire modelli di calcolo.

Gli studi afferenti al secondo tipo di analisi partono da legami costitutivi che definiscono le proprietà meccaniche del materiale sviluppando due distinti approcci, uno relativo alla micromeccanica della frattura ed uno di tipo fenomenologico basato sulla meccanica del danno.

Nel seguito si riporta, in sintesi, il contenuto di alcuni contributi all’analisi di strutture in cemento armato bidimensionali nell’ambito delle due categorie cui si è sopra accennato,

contributi che si sono ritenuti rappresentativi del panorama degli studi che analizzano strutture piane in cemento armato.

### 2.1.1. Modelli “strut and tie”

Il metodo generalmente seguito per la definizione di modelli ad aste tese e compresse consiste nell’orientare gli elementi del traliccio in accordo con l’andamento delle linee isostatiche risultanti da un’analisi di tipo elastico lineare, schematizzando il loro andamento curvilineo con una poligonale. In base al modello così ottenuto si procede poi alla progettazione in accordo con il teorema statico della teoria della plasticità. Questo modo di procedere oltre ad essere cautelativo nei confronti di uno stato limite ultimo, consente di preservare la funzionalità della struttura in fase di esercizio. C’è da notare tuttavia che l’individuazione di un modello del genere non è sempre immediata [2.11].

Contributi alla progettazione automatica degli elementi in cemento armato sono stati forniti da alcuni autori che hanno sviluppato metodi per la ricerca ed il riconoscimento di modelli “strut-and-tie”, rappresentativi di possibili meccanismi resistenti di elementi in cemento armato.

In [2.2] Malerba, Biondini e Bontempi, forniscono un modello “strut-and-tie” per strutture in cemento armato che consiste in un traliccio di elementi biella per il quale formulano le seguenti ipotesi:

- 1) l’equilibrio risulta verificato;
- 2) le aste compresse sono in calcestruzzo;
- 3) le aste tese sono in acciaio, ipotizzando il calcestruzzo incapace di resistere a trazione;
- 4) il collasso del traliccio avviene quando un puntone raggiunge la crisi per schiacciamento o un numero sufficiente di tiranti si plasticizza permettendo la formazione di un meccanismo.

Gli elementi principali necessari per la formazione di un modello “strut-and-tie” sono:

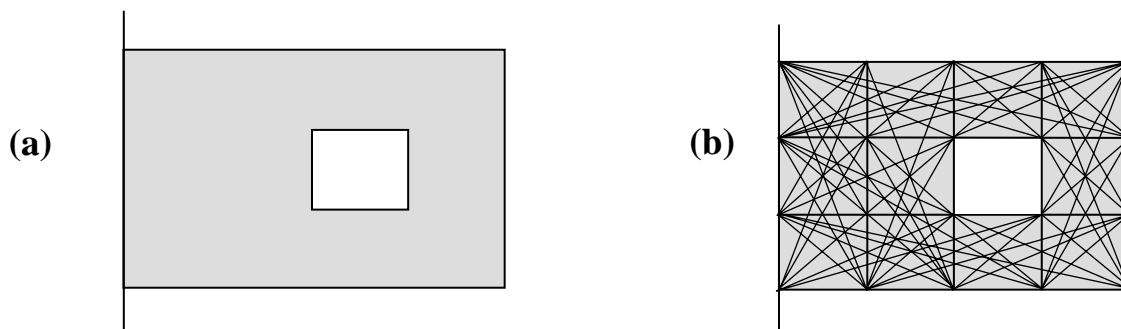
- 1) puntoni di calcestruzzo (bielle compresse o “strut”);
- 2) tiranti in acciaio (bielle tese o “tie”);
- 3) nodi, punti di incontro delle linee d’asse dei carichi esterni o delle reazioni concentrate con le bielle in esse convergenti.

Le tre categorie di elementi così individuate dovranno essere opportunamente verificate, osservando in particolare che:

- La resistenza a compressione del calcestruzzo deve essere opportunamente modificata in funzione dell’effettivo stato di sforzo pluriassiale.

- Deve essere previsto un adeguato ancoraggio degli elementi tesi per garantire l'effettiva possibilità di realizzare il meccanismo resistente ipotizzato;
- Attorno ai nodi occorre individuare degli elementi che possono avere forma poligonale, ottenuta delimitando le varie bielle confluenti nel nodo.

Considerando un generico elemento strutturale di prefissata geometria e con assegnate condizioni al contorno, la regione di spazio che esso occupa definisce il dominio di esistenza dei modelli “strut-and-tie” potenzialmente in grado di descrivere un modello di trasmissione del carico che, nell'ottica del teorema statico, rispetti l'equilibrio e la conformità ovvero i limiti di resistenza. Poiché i carichi si trasmettono in modo che l'energia di deformazione associata risulti minima, per un progetto razionale è ragionevole cercare di individuare fra i vari modelli ammissibili quello cui compete la massima rigidezza. In realtà questo modo di procedere prescinde completamente dall'effettivo comportamento del continuo strutturale considerato, e la valenza di un modello monodimensionale così ottenuto deve in generale ritenersi puramente qualitativa. Una maggiore rispondenza alla realtà strutturale può allora ottenersi ricercando il traliccio di massima rigidezza in una classe di tralicci variata in funzione della loro affinità all'effettivo flusso tensionale valutato nella fase di interesse (iniziale con comportamento elastico lineare, fessurata, anelastica), ad esempio mediante un'analisi agli elementi finiti.

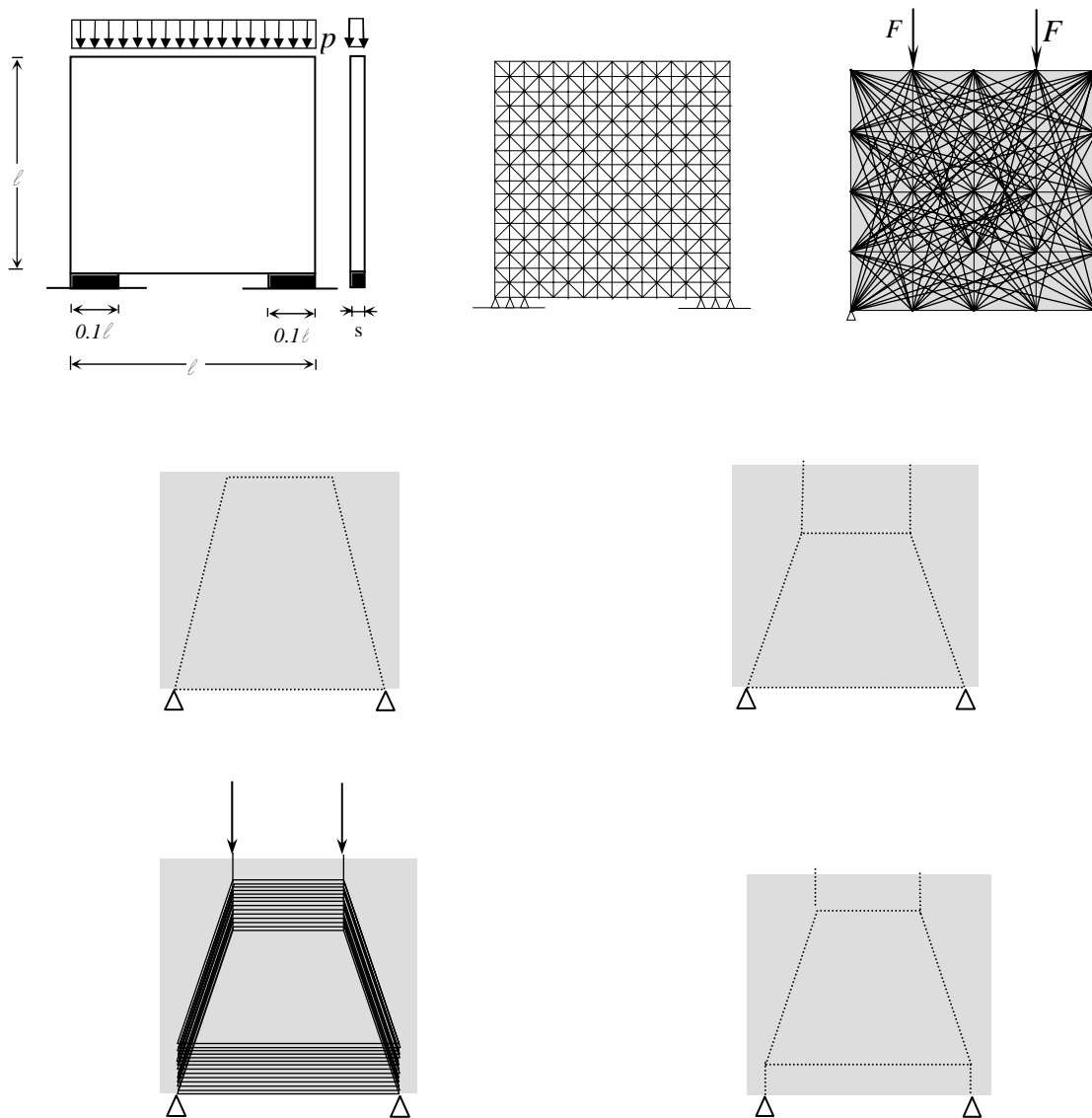


*Figura 2.1: a) struttura con condizioni di carico e di vincolo, b) traliccio base.*

Si individua all'interno della regione definita dal continuo strutturale un insieme di  $n$  nodi interconnessi da  $m$  elementi biella che costituiscono il nuovo dominio di esistenza definito traliccio base.

I nodi presenti nel modello devono comprendere tutti i punti di applicazione dei carichi e dei vincoli. Eventuali vincoli e carichi distribuiti sono pertanto sostituiti con vincoli consistenti e carichi concentrati staticamente equivalenti. Benché tale operazione risulti comunque

necessaria per la formazione di un modello “strut-and-tie”, nel problema discretizzato la distribuzione di carichi concentrati considerata deve essere la stessa per ogni possibile traliccio.



**Figura 2.2: Fasi del procedimento.**

Dopo una pre-analisi che definisce i campi degli sforzi e delle direzioni principali, all’interno della struttura si genera un reticolo di punti mutuamente collegati da elementi tipo biella secondo tutte le possibili modalità di connessione e nel rispetto di alcune caratteristiche tipologiche essenziali (geometria e posizione di vincoli e carichi). Su questo insieme di elementi così definito si ricerca il traliccio di massima rigidezza mediante la *programmazione matematica lineare*; la soluzione ottenuta costituirà una soluzione di riferimento per quella

ottimale incognita. Si attua una seconda fase di ricerca valutando il contributo delle singole aste ed assegnando a ciascuna di esse un peso dipendente dal grado di prossimità dell'asta al tracciato del flusso tensionale di riferimento

Il traliccio prodotto dalla seconda fase di ricerca può essere considerato un prototipo sviluppato con i criteri di ottimizzazione e che individua una determinata forma portante (numero di nodi e di aste, modalità di connessione) che viene poi ulteriormente migliorato.

La posizione dei nodi può essere variata, generando trasformazioni parametriche del traliccio ed effettuando una nuova ricerca di ottimizzazione nella famiglia di tralicci così individuata e nei limiti dell'intorno delimitato dalle maglie della griglia generale iniziale.

Un ultimo passo provvede al dimensionamento di puntoni e tiranti tenendo in conto, mediante fattori di efficienza, delle modalità di lavoro delle aste nei riguardi dei domini di resistenza dei materiali che le compongono.

Con il procedimento descritto sono stati studiati alcuni problemi strutturali [2.2]

La *figura 2.2* è relativa ad uno degli esempi sviluppati in [2.2], gli schemi ivi riportati sono significativi per la comprensione dei vari stadi di calcolo. Si mostra in sequenza: la geometria di vincoli e carichi, la discretizzazione in elementi finiti, il traliccio base iniziale, i tralicci di massima rigidezza, il nuovo traliccio base ed infine il modello "strut-and-tie" definitivo.

### 2.1.2. Modelli continui

Nell'ambito dei modelli continui per il calcestruzzo vi è la "Modified Compression Field Theory" (MCFT) di Collins e Vecchio (1986) e Vecchio (1989).

In tale teoria il calcestruzzo fessurato è trattato come un nuovo materiale composito, ortotropo, elastico non lineare con ben precise caratteristiche tensione-deformazione. Equilibrio, compatibilità e congruenza sono formulate in termini di tensioni medie e deformazioni medie, e gli orientamenti degli assi degli sforzi e delle deformazioni principali sono assunti coincidenti [2.12]. I concetti della MCFT furono usati per analizzare travi in calcestruzzo armato considerandole composte da una serie di strati di calcestruzzo ed elementi di acciaio longitudinale. Questo *modello stratificato*, descritto dettagliatamente nel 1989 da Vecchio e Collins in [2.13], consente l'analisi di travi caricate attraverso combinazioni di taglio, momento e carico assiale. In particolare di travi aventi sezione retta o dettagli d'armatura inconsueti.

Il termine "modified" sta ad indicare un affinamento rispetto ad una prima proposta che ignorava il contributo degli sforzi di trazione a cavallo delle direttrici fessurative.

In [2.14] Vecchio (1989) presenta una *procedura agli elementi finiti non lineare* che incorpora le relazioni costitutive della MCFT, essa è basata su una “secant stiffness formulation”, ed adatta esistenti *algoritmi elastici lineari* raffinando progressivamente per iterazione la matrice di rigidezza materiale calcolata per ogni elemento. Tale procedura è una via alternativa a formulazioni più complesse poiché è in grado di prevedere con un elevato grado di accuratezza la risposta di strutture a membrana in calcestruzzo armato, comunque rinforzate.

Accanto al modello più sofisticato sopra descritto Vecchio prende in considerazione due modelli di analisi approssimata: il primo assume l'andamento delle tensioni di taglio uniformemente distribuito sulla sezione (eliminando così l'iterazione sulla stima del flusso di taglio), il secondo assume che la deformazione a taglio nello spessore della sezione abbia legge parabolica.

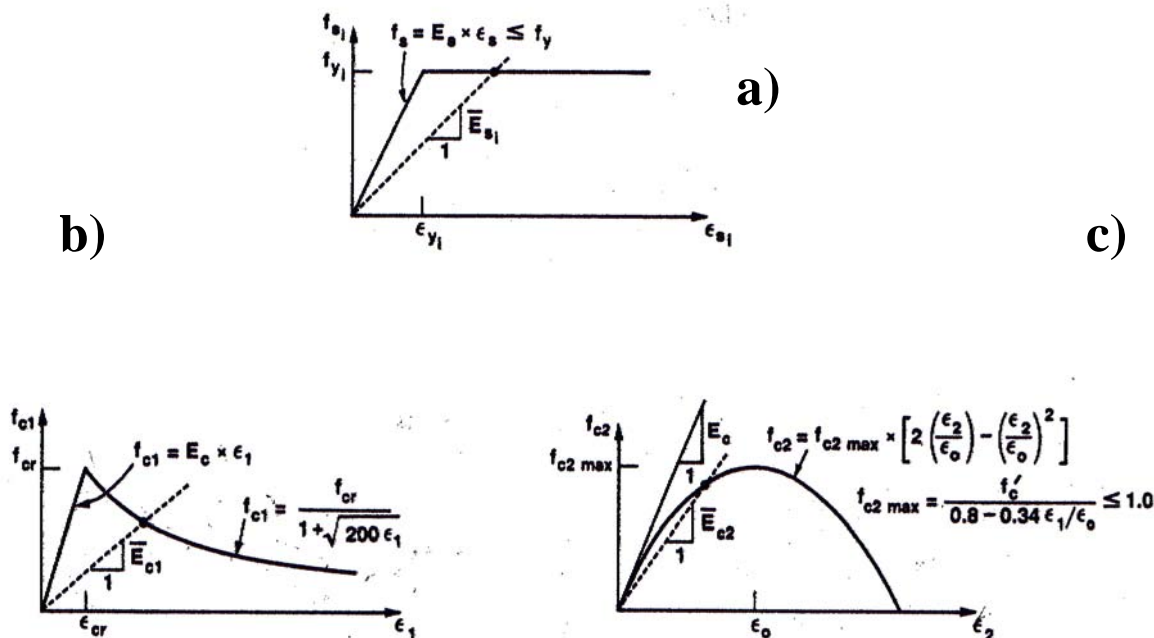


Figura 2.3: Relazioni costitutive della MCFT: (a) acciaio, (b) calcestruzzo in trazione, (c) calcestruzzo in compressione.

Come si è detto all'inizio del paragrafo nell'ambito dei modelli al continuo per il calcestruzzo possono individuarsi alcuni modelli fenomenologici. In [2.15] Di Prisco e Mazars analizzano il problema del miglior posizionamento dell'armatura negli elementi strutturali adoperando la *meccanica continua del danno*.

Il modello proposto considera una relazione tensione-deformazione del tipo:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) C_{ijk} \epsilon_{hk}$$

dove  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{hk}$  sono le componenti del tensore di tensione e di deformazione,  $C_{ijkh}$  è la matrice di rigidezza iniziale e  $D$  la variabile di danno scalare. Il materiale è inizialmente isotropo con  $E$  e  $\nu$  modulo di Young e coefficiente di Poisson. In accordo con la definizione di “scalare di danno” si assume che il calcestruzzo rimanga isotropo fino al collasso. La variabile di danno  $D$  va da zero per il materiale vergine ad uno per collasso asintotico ( $\varepsilon_{ij} \rightarrow \infty, \sigma_{ij} \rightarrow 0$ ). L’evoluzione del danno è controllata attraverso una deformazione equivalente non-locale  $\bar{\varepsilon}$  legata allo sviluppo dell’apertura delle fessure nel *modo I*.

Sono stati implementati in un codice agli elementi finiti due diversi modelli di danno: il modello scalare proposto da Mazars (1984) ed il modello di danno a due parametri proposto da La Borderie (1992).

I materiali, calcestruzzo e acciaio vengono discretizzati separatamente, assumendo la continuità degli spostamenti all’interfaccia seguendo un percorso monotono di carico. Viene inoltre adottato un modello scalare di danno in una versione non locale. Allo scopo di conservare un valore finito dell’energia di dissipazione nel “softening”, viene introdotta una lunghezza caratteristica  $L_c$  eguale a tre volte il diametro massimo degli aggregati. I modelli costitutivi utilizzati sono mostrati in *figura 2.4a*.

Il modello non locale non richiede una formulazione agli elementi finiti particolare: dato ogni punto di integrazione, gli altri punti di Gauss che appartengono al suo volume rappresentativo sono individuati prima che inizi il calcolo. Quest’informazione è immagazzinata una volta e per tutte in una tavola di connettività.

Una prima applicazione del modello sviluppato da Di Prisco e Mazars è l’azione di spinotto; tale comportamento è stato studiato a livello sperimentale da Dei Poli (1993) e Di Prisco e Gambarova (1992). Per modellare tale meccanismo tramite elementi finiti è stato introdotto uno strato di calcestruzzo con caratteristiche meccaniche degradate, e uno spessore pari ad un sesto del diametro della barra, principale responsabile per la continuità degli spostamenti all’interfaccia acciaio-calcestruzzo, la resistenza inferiore è scelta per simulare il distacco del ricoprimento dalla barra di acciaio. Il problema in origine tridimensionale viene ricondotto a tre problemi piani attraverso: una sezione longitudinale assumente il calcestruzzo in deformazioni piane e l’acciaio in tensioni piane, una sezione frontale esaminata in tensioni piane ed una parallela a quest’ultima ma interna esaminata in deformazioni piane (*figura 2.4b*). Per le sezioni frontali (piano  $\beta$  in *figura 2.4b*) è utilizzata una “mesh” ad elementi triangolari a sei nodi; i risultati hanno mostrato l’evoluzione del danno per deformazioni piane e per tensioni piane. Nel caso di deformazioni piane si nota la formazione di una fessura orizzontale radiale e in un secondo tempo una zona danneggiata sotto la barra. Per le tensioni

plane, invece, la barra di acciaio si stacca dal calcestruzzo e spinge contro il calcestruzzo circostante.

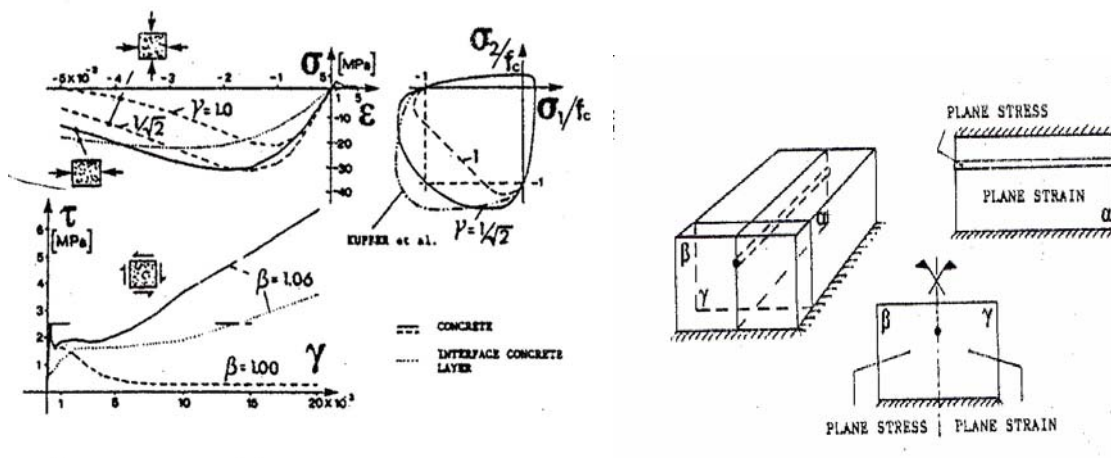


Figura 2.4: Comportamento meccanico assunto per il modello.

Si sono evidenziate così le due diverse risposte: l'andamento degli spostamenti totali indica che modellando il comportamento in deformazioni piane c'è un maggiore sostegno al di sotto della barra a causa del confinamento tridimensionale, mentre la condizione in tensioni piane rivela un comportamento più simmetrico rispetto al centro della barra. Il campo di spostamenti ottenuto è confrontato con quello ottenuto sperimentalmente da Di Prisco ed è stato osservato un buon accordo con l'analisi in tensioni piane. Lo stesso non accade per la rigidità globale in base ai risultati sperimentali; infatti, dopo un pendenza iniziale comparabile le due curve mostrano un punto limite al di là del quale non è possibile seguire il comportamento sperimentale.

Per quanto riguarda invece la sezione longitudinale, l'acciaio e il calcestruzzo sono descritti attraverso una "mesh" ad elementi rettangolari ad 8 nodi mentre per descrivere lo strato d'interfaccia è utilizzata una "mesh" di elementi triangolari a 6 nodi; la curva carico spostamento dell'estremo della barra è confrontata con quella sperimentale ottenuta da Dei Poli (1993), e mostra un ramo discendente di "softening" laddove la curva sperimentale è a rigidità crescente (figura 2.4).

Dai confronti con i dati sperimentali sono stati individuati i limiti del modello di danno adottato, in particolare la *dilatanza* del materiale non è modellata adeguatamente, e i picchi di tensione localizzati non sono modellati per niente, inoltre, la modellazione del comportamento a taglio per ampie deformazioni è irrealistico quando si innesca l'ingranamento degli inerti.



## 2.2. Modellazione delle murature

Anche per le murature possiamo distinguere in generale due grandi categorie:

- I modelli a blocchi
- II modelli continui

Nel resto di questo capitolo è presentata una rassegna dei contributi nella modellazione della muratura, inquadrati nelle due categorie elencate sopra, e con particolare riferimento all'analisi limite.

### 2.2.1 Modelli a blocchi

S. Briccoli Bati, M. Paradiso e G. Tempesta [2.16] propongono l'analisi statica e cinematica e le condizioni di equilibrio al limite di strutture ad arco caricate da forze esterne e da cedimenti vincolari. Si assume che i conci dell'arco siano blocchi rigidi connessi da tre bielle ideali. La soluzione del problema generale viene raggiunta utilizzando un procedimento di calcolo fondato sull'uso delle distorsioni impresse.

In [2.17] gli stessi autori propongono di nuovo il modello di arco con le ipotesi di Heyman, al quale applicano spostamenti relativi tra le imposte per simulare l'effetto del sisma. Utilizzando le teorie sulle *inverse generalizzate* viene definito un algoritmo di calcolo per valutare la resistenza limite alle azioni orizzontali e la determinazione del meccanismo di collasso.

Un algoritmo per l'analisi limite di strutture bidimensionali a blocchi è stato formulato per la prima volta da R.K. Livesley [2.18]. In tale lavoro i blocchi vengono considerati rigidi e infinitamente resistenti, costituendo quindi solo dei vincoli fra le interfacce, che rappresentano i veri elementi della struttura e dei quali viene definito un dominio di resistenza nell'ipotesi di attrito alla Coulomb. La procedura utilizzata consiste nel massimizzare l'unico parametro che guida il processo di carico sotto le condizioni di equilibrio e di resistenza all'interfaccia.

M. Lo Bianco e C. Mazzarella, [2.19, 2.20] hanno dato il loro contributo nell'analisi limite di strutture a blocchi attraverso la formulazione di un problema di programmazione matematica non lineare con il quale si cerca il minimo fra i moltiplicatori del carico di collasso staticamente e cinematicamente ammissibili.

C. Baggio e P. Trovalusci [2.21, 2.22] hanno proposto una procedura di calcolo implementando l'algoritmo di M. Lo Bianco e C. Mazzarella per l'analisi limite di strutture costituite da blocchi rigidi connessi da giunti con attrito.

### 2.2.2. Modelli continui

Per i modelli continui distingueremo due approcci, quello fenomenologico e quello micromeccanico. Per questi due tipi di approccio nei paragrafi che seguono si descriveranno i vari contributi alla modellazione della muratura. Inizieremo con quello fenomenologico ed introdurremo il modello "no-tension".

L'inserimento nell'ambito della meccanica classica del continuo di una teoria dei solidi murari è riconducibile ai lavori di S. Di Pasquale; utilizzando il principio formulato da G. Colonetti nel 1920, egli ha inquadrato il problema dell'equilibrio dei solidi murari negli schemi canonici della teoria dell'elasticità [2.23]. Tale principio afferma che un'opportuna scelta dello stato di coazione permette di fare in modo che  $n$  parametri dello stato di tensione assumano valori arbitrariamente scelti. In [2.24] S. Di Pasquale introduce un *ente cinematico* fittizio detto *tensore delle fratture distribuite*, che è in grado di modificare gli stati di tensione non ammissibili per la muratura e la cui introduzione non crea energia vincolata essendo un tensore di deformazioni a tensioni nulle. Il problema dell'equilibrio dei solidi murari viene formulato come minimo dell'energia complementare con le condizioni aggiuntive che impongono l'equilibrio interno, al contorno e la non reagenza a trazione.

Nel 1984 l'autore raccoglie gli studi realizzati negli anni precedenti sulla statica dei solidi murari [2.25]. In tale raccolta un aspetto evidenziato è quello riguardante la suddivisione del dominio di definizione del solido murario piano in tre tipi di sub regioni differenti, caratterizzate dal tensore di tensione che può essere nullo, canonico o singolare.

In [2.26] Di Pasquale introduce per la prima volta un'interpretazione debole della condizione di normalità fra tensioni e deformazioni anelastiche di fratture distribuite: ovvero nel rispetto della caratteristica di non dissipatività del materiale, assume che il tensore di deformazioni anelastiche possa includere scorrimenti sulle direzioni principali di tensione. Tale ipotesi, introdotta con lo scopo di ampliare la classe di problemi descrivibili con il modello continuo non reagente a trazione comunemente adottato, viene ripresa nei lavori successivi. In particolare in uno di questi lavori [2.27], viene fornita l'espressione analitica delle deformazioni anelastiche di scorrimento in funzione delle componenti di tensione. In tale lavoro l'autore, considerando l'esempio di un muro quadrato soggetto ad un carico concentrato, ricerca la soluzione attraverso gli elementi finiti considerando solo due elementi triangolari (*figura 2.5 a*).

Il metodo di indagine numerica che è stato utilizzato è basato su distorsioni imposte e si sviluppa poi attraverso una procedura "step-by-step". Utilizzando tale metodo nel lavoro che

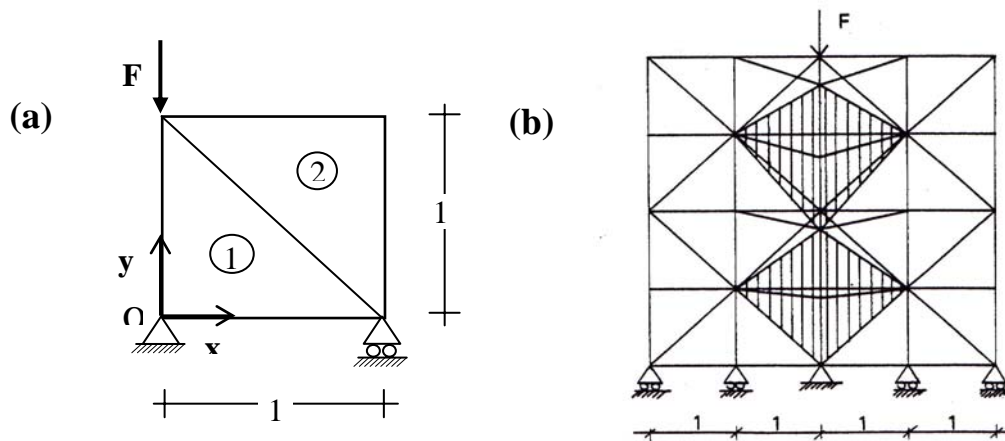


Figura 2.5: Esempi proposti nell'articolo di Di Pasquale.

si sta descrivendo l'autore analizza il problema di un muro quadrato semplicemente appoggiato alla base e caricato al centro della zona superiore con un carico concentrato verticale (figura 2.5 b), ed un problema più complesso come quello della facciata del duomo di Siena.

Sparacio e Russo Spena in [2.28] analizzano attraverso il *metodo delle distorsioni imposte*, estendendolo al continuo tramite analisi agli elementi finiti, lo stato tensionale di strutture murarie. Adottano per il materiale muratura un modello isotropo e prendendo come modulo di Young e coefficiente di Poisson i valori medi tra quelli ricavabili in corrispondenza di due direzioni ortogonali. Per punti rappresentativi di stati tensionali piani la verifica di compatibilità è condotta assumendo sia la frontiera di Drucker-Prager che la frontiera di Hencky-Von Mises (figura 2.6).

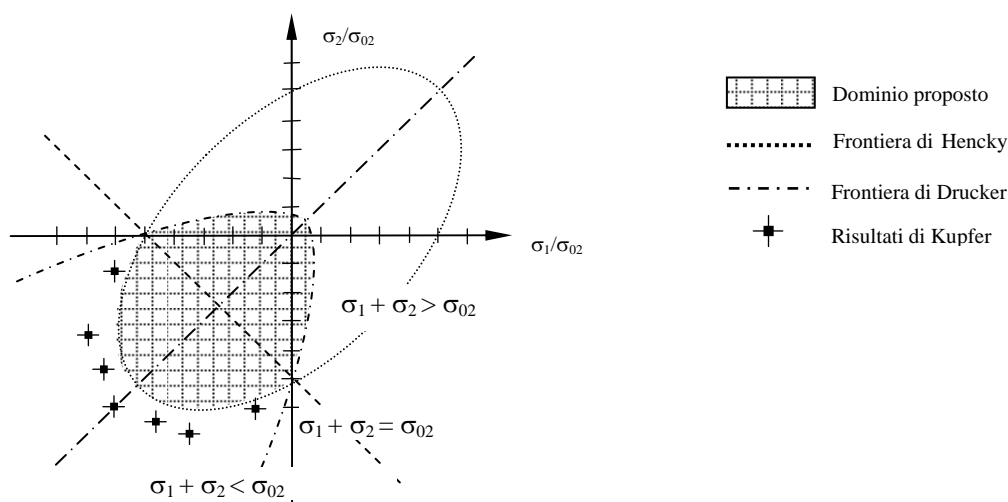
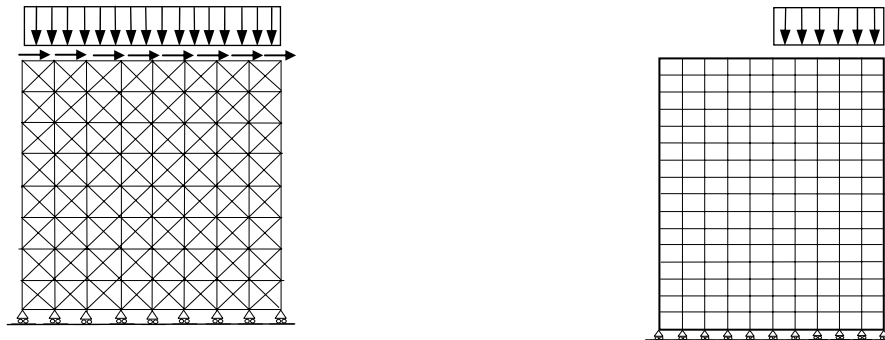


Figura 2.6: Dominio piano adottato da Sparacio e Russo Spena.

Per la fase linearmente elastica la definizione degli stati tensionali è affidata a metodi numerici (elementi finiti).

La correzione degli stati tensionali illeggittimi è ottenuta con l'introduzione di distorsioni plastiche. Le distorsioni correttrici sono ricavate con la condizione che esse riportino il punto tensione illegalmente fuoriuscito dal dominio sulla frontiera dello stesso. La legge dello scorrimento plastico stabilisce il ritorno in un punto  $P$ , diverso da quello di sconfinamento  $P_0$ . Il percorso  $P_0 \rightarrow P$  sulla frontiera è quello corrispondente agli scorrimenti plastici che interessano l'elemento e che comportano l'adattamento plastico dello stato tensionale entro i confini dell'elemento. Il procedimento illustrato in [2.28] rende possibile ipotizzare comportamenti diversi in fase *ultraelastica* senza modificare la logica e la prassi del metodo (consentendo di non variare le matrici di rigidezza dell'insieme). Opzioni sulle quali ci si sofferma sono: il comportamento fragile, quello "strain-softening", e quello plastico fragile. Per controllare in dettaglio il metodo illustrato si propongono poi degli esempi per i quali si analizzano comportamenti differenti, e se ne illustrano i risultati. Infine s'illustra un esempio di un edificio soggetto ad azioni orizzontali (*figura 2.7*).



*Figura 2.7: Esempi per calcolo ad elementi finiti in [2.28].*

A G. Del Piero si devono due contributi fondamentali che consistono da una parte nell'aver riorganizzato e giustificato matematicamente il legame costitutivo del materiale muratura così come presentato più volte in letteratura e le condizioni di compatibilità sui carichi esterni per il materiale muratura e dall'altra di aver formulato una trattazione generalizzata del continuo muratura, fondata sulla meccanica dei continui fratturati [2.29, 2.30].

Negli studi di A. Baratta, ad esempio in [2.68], viene proposto un modello continuo non isotropo per la modellazione delle murature. In tale modello la parete muraria viene assimilata ad un continuo omogeneo bidimensionale dotato di una modesta resistenza a trazione nella

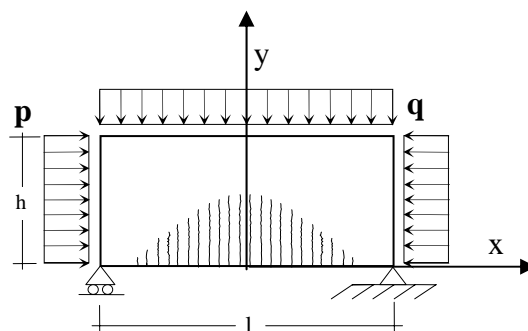
direzione orizzontale. Il dominio delle tensioni ammissibili risulta modificato rispetto al materiale non reagente a trazione: la tensione normale in direzione orizzontale risulta limitata dalla tensione verticale moltiplicata per un coefficiente che dipende dalla densità dei filari e dalle dimensioni della zona di contatto tra due blocchi sovrapposti, mentre la tensione tangenziale deve verificare la legge di Coulomb.

T. Panzeca e C. Polizzotto [2.32] hanno evidenziato come la condizione di normalità fra tensione e deformazione anelastica e la non dissipatività del fenomeno fratturativo dei solidi murari siano esplicitamente riconducibili al *postulato di stabilità locale* di Drucker e al *principio di massimo lavoro plastico* di Hill.

G. Maier e A. Nappi in [2.33] e [2.34], mostrano come i modelli e gli strumenti essenziali della teoria della plasticità strutturale sono trasferiti nel modello non resistente a trazione strutturale, non dissipativo, reversibile e indipendente dalla storia. In [2.33] e [2.34] viene assunta un'approssimazione lineare a tratti della superficie limite nello spazio delle tensioni e viene mostrato come il problema di valori al contorno discretizzato è governato da proprietà di estremo che riducono la sua soluzione ad un problema di programmazione quadratica o di complementarità lineare.

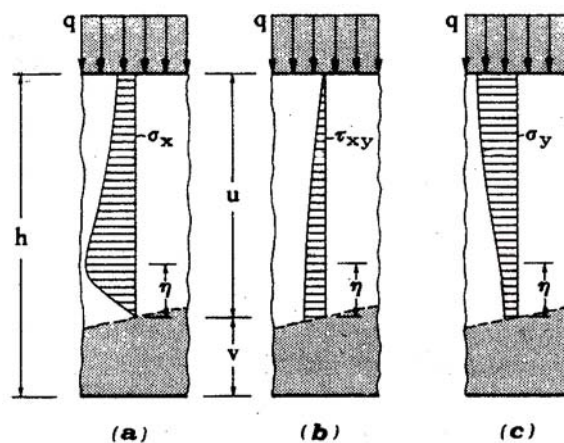
Villaggio in [2.35] affronta il problema della determinazione dello stato tensionale per una lastra sottile di lati  $l$  ed  $h$  soggetta ad un carico distribuito verticale  $q$  sul lato superiore ed un altro  $p$  orizzontale sui due laterali così come illustrato in *figura 2.8*:

Si assume che il materiale di cui è composto il pannello abbia resistenza a compressione infinita e sia totalmente incapace di resistere a trazione. Indicando con  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  le componenti speciali di tensione. Se si pensano le  $\tau_{xy}$  sufficientemente piccole in modo che le  $\sigma_x$  ed  $\sigma_y$  risultino tensioni principali, allora il materiale si presenta non fessurato se queste ultime sono non maggiori di zero.



*Figura 2.8: Schema geometrico e dei carichi della parete analizzata da Villaggio.*

La soluzione del problema è fornita da uno stato tensionale piano che soddisfa le seguenti condizioni: le condizioni indefinite dell'equilibrio nella regione non fessurata  $R$ , le condizioni di equilibrio ai limiti sulla frontiera della regione  $R$ , le condizioni di equilibrio globale, la condizione che  $\sigma_x \leq 0$ ,  $\sigma_y \leq 0$  in  $R$ . Si assume la forma della tensione assiale  $\sigma_x$  nulla nella zona non reagente e soddisfacente una funzione scelta arbitrariamente ma in modo da soddisfare la distribuzione delle tensioni in un muro elastico e annullarsi sul contorno libero nella zona reagente. Utilizzando le equazioni di equilibrio globale si ottengono due equazioni trascendentali. Non essendo ottenibile la soluzione del sistema in forma finita l'autore risolve il problema per due casi limite: grande eccentricità e piccola eccentricità, ricavando per questi due casi lo stato di tensione. La distribuzione approssimata così ottenuta delle tensioni (*figura 2.9*) non rispetta l'annullarsi delle  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  sul bordo libero come richiesto anche se si hanno valori minimi. Per muri in cui il rapporto altezza/luce è piccolo lo studio restituisce la distribuzione lineare classica delle tensioni  $\sigma_x$  per travi composte di materiale non reagente a trazione.



*Figura 2.9: Le tensioni ottenute lungo la parete.*

Un problema analogo a quello studiato da Villaggio viene affrontato in [2.36] da Angelillo e Mollo. In particolare gli autori affrontano due problemi in tensioni piane: pannello caricato simmetricamente (*figura 2.10*), e pannello soggetto a taglio (*figura 2.13a*). Attraverso la minimizzazione dell'energia complementare in un sottoinsieme dell'insieme delle soluzioni staticamente ammissibili si ottengono: soluzioni approssimate per lo stato tensionale, forme approssimate del contorno libero per vari stadi di carico e, infine, il carico limite. Le assunzioni di base sono: il materiale si comporta elasticamente a compressione e non sopporta tensioni di trazione, la deformazione totale come somma di una parte elastica ed una parte

anelastica, la normalità del vettore di deformazione anelastica (inteso come misura della frattura) al cono limite. L'insieme  $K$  degli stati tensionali staticamente ammissibili deve soddisfare le condizioni di equilibrio e le condizioni di vincolo interno sulle tensioni con le annesse condizioni di equilibrio al contorno [2.36]. Vale il teorema del limite superiore dell'analisi limite con meccanismi di collasso associati a deformazioni semidefinite positive. Riferendosi ad un meccanismo di collasso se ne deduce un moltiplicatore superiore dei carichi. In particolare in [2.36] si ricercano soluzioni approssimate minimizzando l'energia complementare sull'insieme  $K$ ; questi stati approssimati ad ogni stadio del programma di carico forniscono forme di tentativo del contorno libero.

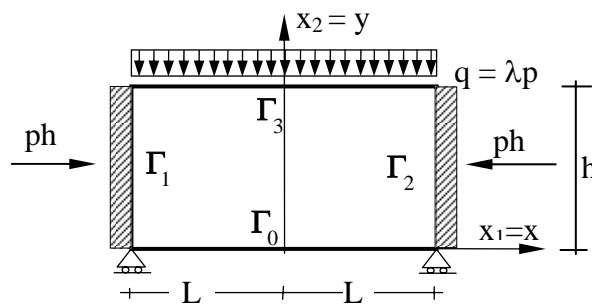


Figura 2.10: Geometria e vincoli dell'esempio analizzato in [2.36].

Lo stato staticamente ammissibile considerato divide il corpo in due parti: una parte reagente ed una parte inerte. Scelte delle opportune coordinate curvilinee, le componenti di tensione sono state espresse in termini della funzione di Airy. E' stato ricavato il dominio ammissibile che è individuato come l'area  $A$  nella figura 2.11.

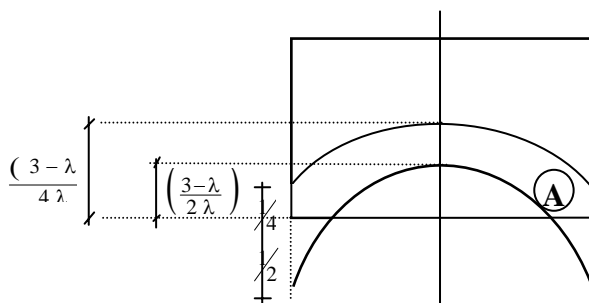


Figura 2.11.

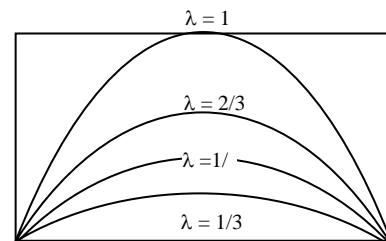


Figura 2.12

Per ogni stadio del processo di carico è stato selezionato lo stato di tensione ottimale tra la classe delle relazioni già determinate (espressioni delle tensioni), minimizzando l'Energia

Complementare  $E_C$  rispetto alla funzione che rappresenta il contorno libero con rispetto dei vincoli interni. In figura 2.12 è rappresentato il dominio ammissibile  $\lambda$  considerando i vincoli lineari e non lineari. Il secondo caso analizzato dagli autori è il pannello rettangolare  $\mathbf{R}$  compresso lateralmente attraverso delle forze date  $P$ . Si considerano le tensioni indotte da un momento  $M = \lambda p$  e un taglio  $S = \lambda p$ . Gli autori anche per questo caso individuano sia la forma del contorno libero (figura 2.13b) sia le componenti di tensione dalla funzione di Airy. Anche qui si costruisce un campo staticamente ammissibile riferendosi ad un sistema di coordinate curvilinee rappresentate in figura 2.13b.

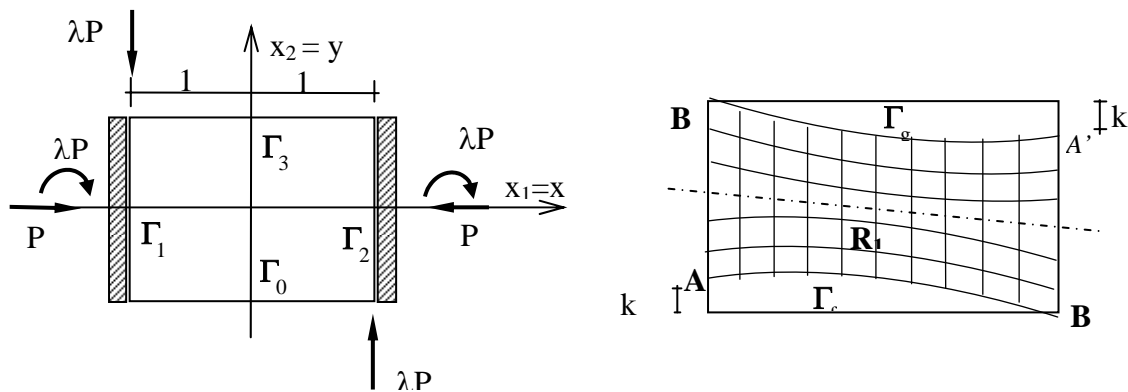


Figura 2.13: (a) geometria e condizioni di carico, (b) forma dell'area reagentel

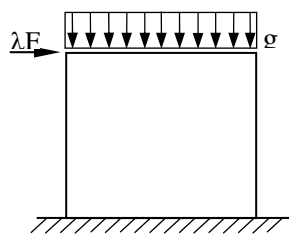
In [2.74] Angelillo propone un modello di materiale non reagente a trazione nel quale si verifica una degradazione progressiva del dominio di ammissibilità delle tensioni per simulare l'innescarsi di fenomeni di danneggiamento.

A M. Como [2.38, 2.39], M. Como e A. Grimaldi [2.40, 2.41], D. Abruzzese, M. Como e A. Grimaldi [2.42, 2.43] si deve la formulazione dell'analisi limite per pareti di muratura sottoposte a forze orizzontali come generalizzazione delle teorie di J. Heiman per le strutture ad arco; in [2.41] la definizione della condizione di collasso viene derivata dalla condizione di esistenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico. In [2.39] utilizzando una disuguaglianza variazionale sul lavoro delle forze esterne lungo un meccanismo viene formulata una versione dei teoremi statico e cinematico di collasso per il mezzo non reagente a trazione.

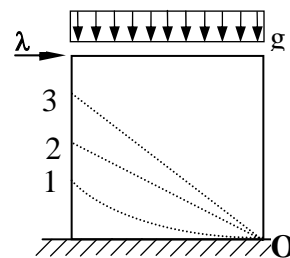
In [2.40] Como e Grimaldi svolgono un'analisi della resistenza limite delle pareti murarie basata su un modello di materiale non resistente a trazione per i maschi e di comportamento elastico perfettamente plastico per le piattabande. Con tale ipotesi si mostra come risultino applicabili i teoremi classici dell'analisi limite. Utilizzando tale formulazione viene fornita una valutazione quantitativa della spinta di collasso della parete e vengono caratterizzati i



diversi possibili meccanismi di collasso al variare dei parametri principali che individuano il comportamento della parete stessa. Nell'ambito descritto sopra vengono analizzati i meccanismi ed il carico di collasso di un pannello murario sotto spinta. Le ipotesi di comportamento del materiale sono quelle di materiale non resistente a trazione così come descritto in [2.50, 2.51]. Gli autori considerano il pannello mostrato in *figura 2.14*, i carichi esterni sono costituiti da una distribuzione di carichi permanenti verticali  $g$  e da spinte orizzontali di intensità crescente  $\lambda F$ . Al crescere del parametro  $\lambda$  si raggiunge una situazione di collasso corrispondente alla formazione di un meccanismo di rottura.

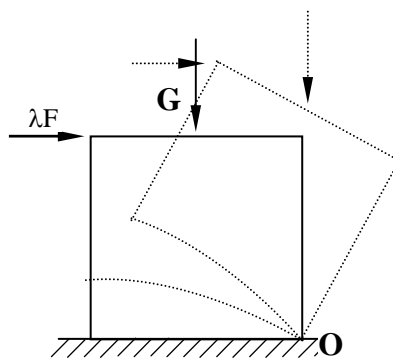


*Figura 2.14: Geometria e carichi.*



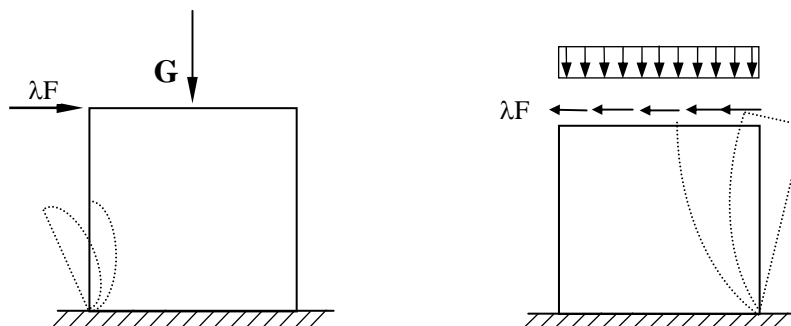
*Figura 2.15: Classe dei meccanismi possibili.*

Per valutare la capacità di resistenza del pannello alla spinta orizzontale si esaminano alcuni meccanismi di rottura rettilinei o curvi (*figura 2.15*). Gli spostamenti sono definiti da una rotazione del blocco superiore rispetto al punto  $O$  (*figura 2.16*). La condizione di lavoro complessivo nullo delle forze applicate fornisce il valore del moltiplicatore  $\lambda$  in grado di produrre il collasso secondo il meccanismo esaminato. La condizione limite di collasso è caratterizzata dal bilanciamento tra il lavoro della spinta ed il lavoro di sollevamento del carico verticale. In entrambi i casi la dissipazione interna è nulla e la resistenza al collasso è dovuta alla geometria della struttura ed ai carichi permanenti. A livello teorico vi sono altre classi di meccanismi:



*Figura 2.16: Lavoro delle forze applicate.*

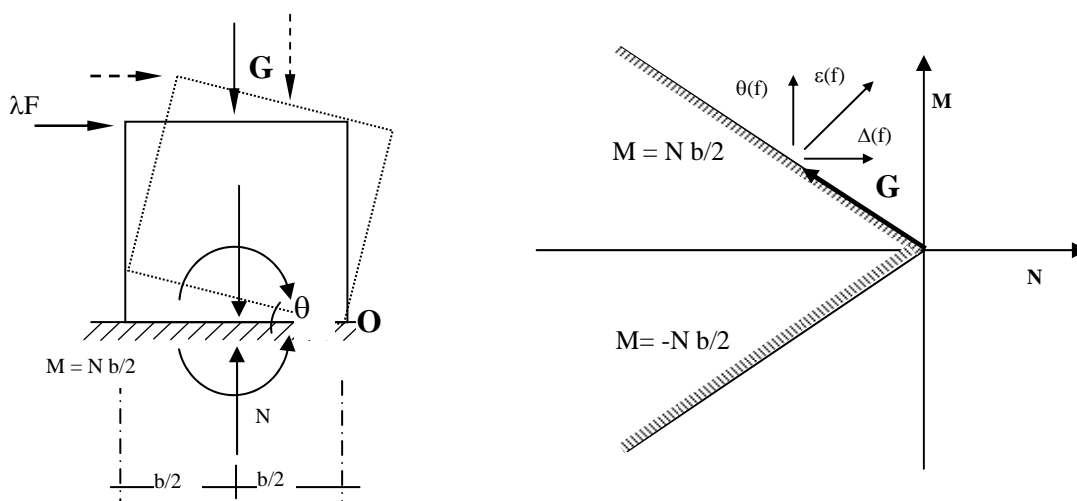
- 1 ogni linea contenuta nella zona non reagente del pannello può costituire un meccanismo di collasso vedi ad esempio la *figura 2.17 a*. ( tali meccanismi in realtà non possono sussistere in quanto una piccola resistenza a trazione del materiale impedisce il loro formarsi).
- 2 un'altra classe di meccanismi è quella costituita dalle linee di fessurazione che iniziando dal punto *O* raggiungono la sezione di testa del pannello (*figura 2.17 b*), (quest'ultima classe di meccanismi è eliminata dalla presenza di vicoli come cordoli e tiranti).



**Figura 2.17: Meccanismi di collasso possibili a livello teorico.**

Si individua il dominio di rottura delle sezioni in termini di caratteristiche generalizzate *M-N* come indicato in *figura 2.18* al fine di una verifica del carico di collasso.

In presenza della spinta di collasso  $\lambda_c F$  l'eccentricità del carico verticale *G* raggiunge il valore  $b/2$  al piede del pannello. In tutte le sezioni del pannello lo stato di sollecitazione, caratterizzato dalla coppia (*M*, *N*), è ammissibile e quindi il valore del moltiplicatore  $\lambda_c$  risulta anche staticamente ammissibile. Nel lavoro citato si analizza poi:

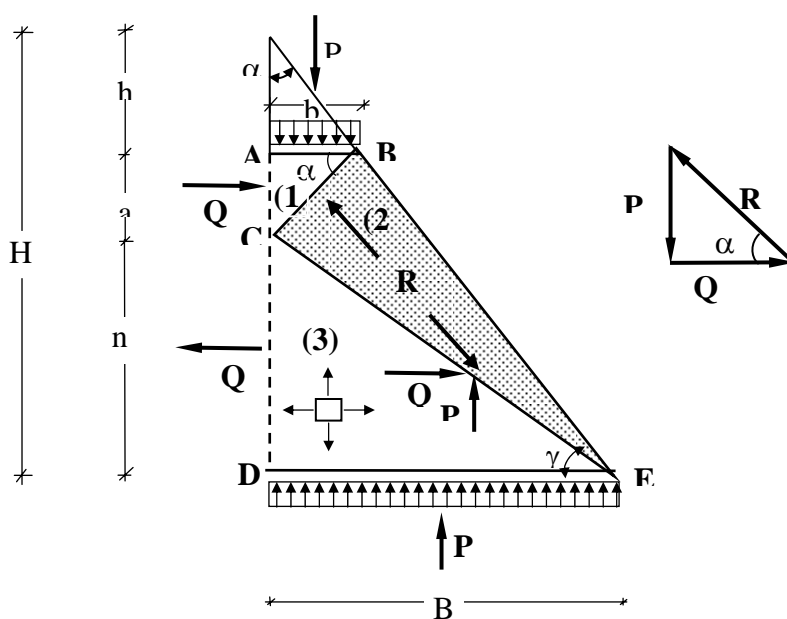


**Figura 2.18.**

il caso di risultante eccentrica del carico verticale e l'influenza dello schiacciamento a compressione della muratura sul carico di collasso del pannello. Confronti tra risultati ottenuti e dati sperimentali su varie tipologie di pannelli mostrano nel complesso un buon accordo.

A A. Grimaldi e E. Sacco [2.44] e A. Grimaldi, R. Luciano e E. Sacco [2.45] e R. Luciano e E. Sacco [2.46] si deve la formulazione in termini di tensioni del problema elastostatico di strutture in materiale non reagente a trazione, come minimo del funzionale energia complementare attraverso un metodo "penalty". In [2.44] si dimostra la convergenza del campo di tensione del problema penalizzato a quello esatto. In [2.45] si sviluppa la formulazione "penalty" agli elementi finiti per il caso bidimensionale.

Binda in [2.47] studia una parete muraria trapezoidale per il caso di stati di sforzo piani, parete già proposta in [2.48], e mostra come il trapezio con la sua particolare distribuzione di sforzo si presti bene ad essere usato come schema interpretativo locale per pareti a geometria globale più elaborata. L'autrice considera il trapezio di *figura 2.19* caricato con un carico uniformemente distribuito di compressione sulle due basi. Poiché elemento e carico hanno una simmetria, è possibile considerare solo metà trapezio.



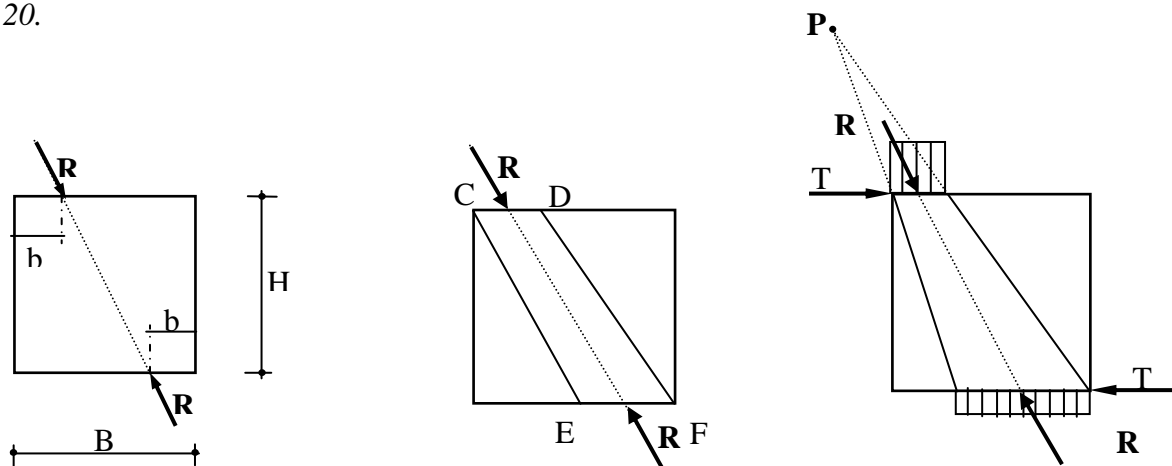
*Figura 2.19: Parete trapezoidale analizzata in [2.47].*

Una via per la ricerca degli angoli che le quattro linee di discontinuità formano con l'asse  $x$  si fonda sull'equilibrio globale del trapezio e sull'equilibrio attraverso le linee di discontinuità.

Considerando i campi (1) e (2) al limite di tensione e utilizzando come criterio la bilatera di Coulomb l'autrice determina, attraverso considerazioni geometriche nel piano di Mohr e di equilibrio lungo le linee di discontinuità, i valori di  $\sigma_1^{(3)}, \sigma_2^{(3)}$  (dove l'apice indica il campo considerato) ed  $n$  al variare di  $\alpha$ . Tali simboli hanno il significato che può dedursi dalla *figura 2.19*.

Come applicazione si considera il calcolo della capacità portante di una **parete forata** con finestre ed archi che viene scomposta in trapezi ed in altri campi discontinui a sforzo costante, come quello rettangolare che si suppone sottoposto ad uno stato di sforzo di compressione monoassiale. L'autrice in [2.47] mostra come l'utilizzo di uno schema **base** trapezoidale si presti bene ad ottimizzare tale stato di sforzo in maniera da tener conto dell'aumento brusco del carico dovuto ai solai ad ogni piano. Si ricavano attraverso la verifica dell'equilibrio globale della facciata i valori dei carichi limite ad ogni piano.

In [2.49] **Jossa** affronta lo studio del comportamento di pareti murarie forate soggette ad azioni sismiche attraverso la scomposizione della parete in elementi semplici per i quali si propone una via d'indagine tale da autorizzare una successiva operazione di assemblaggio. Si pensa a pareti non troppo irregolari in maniera da poterle scomporre in **pannelli rettangolari**, *maschi* e *fasce di piano*, fra loro connessi da *elementi nodo* e si affrontano il problema dell'analisi dello stato tensionale all'interno del pannello. L'autore sceglie come **modello iniziale** del problema in studio il pannello rettangolare sollecitato lungo due lati opposti dalle risultanti delle azioni ad esso trasmesse, con ciò assumendo che per esso si possa da un lato condurre un'analisi sufficientemente attendibile del pannello stesso, e dall'altro sia realizzabile un'operazione di assemblaggio per lo studio della parete forata; vedi la *figura 2.20*.



. *Figura 2.20: (a) modello a biella, (b) Previsioni sulla distribuzione dei carichi al bordo*

Vengono ipotizzate distribuzioni che interessano tutto il trapezio C-D-E-F. Tale trapezio viene indicato come **biella** e, perché sia definito, richiede la conoscenza delle due basi C-D ed E-F. Nel lavoro Jossa propone una distribuzione regolare delle tensioni caratterizzata da stati tensionali monodimensionali con distribuzione polare delle tensioni principali e polo in **P**. Per l'equilibrio viene richiesto un legame di similitudine fra le distribuzioni delle tensioni in testa ed alla base del pannello. Come leggi di distribuzione delle tensioni normali lungo le basi del pannello si prendono in considerazione diverse possibilità tra le quali si individua l'unico schema compatibile mostrato in *figura 2.20*. Questo ultimo schema è quello che interessa in presenza di azioni sismiche. Attraverso l'utilizzo del principio di minimo dell'energia complementare applicato alla classe delle soluzioni polari, l'autore massimizza il volume impegnato dallo stato tensionale in relazione alla prevista legge di distribuzione delle tensioni sulle due basi. Il *modello tecnico* proposto nel lavoro fornisce una soluzione approssimata in cui, per tensioni in genere costanti al contorno, la congruenza è verificata a rigore nel solo caso in cui la biella assume forma prismatica, con basi fra loro eguali. Resta da verificare che tale modello è sufficientemente vicino, alla soluzione esatta valida per un materiale non resistente a trazione. L'autore ricava dunque le condizioni limite di rottura di un pannello rettangolare per incremento progressivo della forza tagliante.

L'autore infine propone un procedimento per il calcolo dell'intera parete utilizzando la classica teoria dei telai con un procedimento iterativo che tratta le bielle come travi alla Saint Venant.

In [2.50] A. Anthoine, nell'ambito del così detto metodo delle medie propone la risoluzione del problema di *localizzazione sulla cella* mediante una procedura numerica agli elementi finiti. Con tale procedura, oltre alle costanti elastiche macroscopiche, è possibile indagare la diffusione dello stato tensionale all'interno della cella rappresentativa della parete muraria. Risolvendo numericamente il problema di localizzazione è possibile omogeneizzare la muratura in un unico passo utilizzando l'effettiva geometria della struttura reale.

In [2.51] G.N. Pande, J.X. Liang e J. Middleton applicano per la prima volta le tecniche dell'omogenizzazione per mezzi bifase in campo elastico lineare alla modellazione delle murature. In questo articolo viene effettuata una omogenizzazione in due passi comprendente prima gli strati di mattoni e i giunti di malta orizzontali e successivamente anche i giunti verticali di malta considerati continui invece che alternati. Utilizzando un modello *multistrato* con aderenza perfetta tra i componenti e con stati tensionali e deformativi costanti negli strati, vengono determinati i moduli elastici del solido ortotropo e omogeneo equivalente. Viene

inoltre studiato l'andamento dello stato tensionale e deformativo di un pannello di muratura di mattoni con carico uniformemente distribuito.

L'approccio utilizzato in [2.52] viene riproposto da S. Pietruszczak e X. Niu in [2.53] dove viene distinta l'influenza dei giunti verticali da quella dei giunti orizzontali, considerando i primi come delle semplici inclusioni, mentre i letti di malta come un mezzo stratificato indipendente. Il processo di omogenizzazione si compone di due passi: il primo comprende i mattoni considerati come una matrice continua con delle inclusioni a forma di cilindro ellittico allineate che rappresentano i giunti verticali; il secondo considera il mezzo omogeneo, ortotropo elasto-fragile ottenuto dalla prima omogenizzazione, unito ai giunti orizzontali costituiti da materiale isotropo elastoplastico, nell'ambito di un modello multistrato. Oltre ai moduli elastici del solido omogeneo equivalente vengono definiti anche gli strati limite di resistenza.

In [2.54] G. Alpa e I. Monetto propongono per la descrizione meccanica di pareti murarie il modello micromeccanico della lastra omogenea isotropa, con difetti rappresentati da fessure e microfessure. Le pareti sono modellate come un assemblaggio regolare di blocchi rettangolari con forze di attrito fra i giunti. Il materiale del blocco, a sua volta, è modellato come un solido elastico con microfratture piane stabili con attrito. Tale descrizione microstrutturale inserita in un opportuno processo di omogenizzazione permette la definizione di equazioni costitutive locali.

**BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO II:**

- [2.1] Bontempi F., Malerba P.G., Romano L., *Il modello MFCT nell'analisi per elementi finiti di strutture piane in c.a.*. Studi e ricerche Vol. 16, 1994, Scuola di costruzioni in Cemento Armato "Fratelli Pesenti", Politecnico di Milano, Italia.
- [2.2] Biondini F., Bontempi F., Malerba P. G., *Generazione di modelli strut-and-tie ed analisi non lineare della corrispondente risposta strutturale*. Studi e Ricerche Vol. 18, 1997, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano.
- [2.3] IABSE, *Plasticity in Reinforced Concrete*. Report Vol. 29, Copenhagen, 1979.
- [2.4] IABSE, *Computational Mechanics of Concrete*. Advances and Applications, Colloquium Report, Vol. 54, Delft 1987.
- [2.5] IABSE, *Structural Concrete*, Colloquium Report Vol. 62, Stuttgart, 1991.
- [2.6] Ritter W., *Die Bauweise Hennebique*. Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXXIII, N° 7, 1899.
- [2.7] Morch E., *Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung*. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1912.
- [2.8] Rausch E., *Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung und Abscheren*. Julius Springer, Berlin. 1929.
- [2.9] Schlaich J., Schafer K., Jennewin M., *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*. PCI Journal, Vol. 32, n° 3, May June, pp.72-150, 1987.
- [2.10] Schlaich J. Schafer K. *Design and Detailing of structural concrete using strut-and-tie models*. The Structural Engineer, Vol. 69, n° 6, March, pp.113-125, 1991.
- [2.11] Biondini F., Bontempi F., Malerba P.G., *Ricerca di modelli strut-and-tie mediante programmazione lineare*. Studi e Ricerche Vol.17, 1996, Scuola di Specializzazione in costruzioni in Cemento Armato - "Fratelli Pesenti", Politecnico di Milano, Italia.
- [2.12] Biondini F., Bontempi F., Malerba P.G., *Ricerca di modelli strut-and-tie mediante programmazione lineare*. Studi e ricerche Vol. 17, 1996, Scuola di specializzazione in Costruzioni in cemento armato "Fratelli Pesenti" Politecnico di Milano, Italia.
- [2.13] Vecchio Frank J., Collins M. P., *Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using MCFD*. ACI Structural Journal, 1988, pp. 258 – 268.
- [2.14] Vecchio Frank J., *Non Linear finite element Analysis of reinforced concrete membranes*. Aci structural Journal, 1989, pp.26-35.
- [2.15] Di Prisco M., Mazars J., *On damage modelling of reinforced concrete subject to high strain gradient*. Studi e ricerche – Vol. 13, 1992, Scuola di specializzazione in Costruzioni in cemento armato "Fratelli Pesenti" Politecnico di Milano, Italia.
- [2.16] Briccoli Bati S., Paradiso M., Tempesta G., *Un procedimento di calcolo per strutture in muratura*. V Conv. Naz. L'ingegneria sismica in Italia, Palermo, 1991.

- [2.17] Briccoli Bati S., Paradiso M., Tempesta G., *Un procedimento di calcolo per strutture in muratura*. V Conv. Naz. L'ingegneria sismica in Italia, Palermo, 1991.
- [2.18] Livesley R. K., *Limit Analysis of Structures Formed from Rigid Blocks*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 12, pp. 1853-1871, 1978.
- [2.19] Lo Bianco M., Mazzarella C., *Tecniche di delimitazione del carico di collasso delle strutture murarie*. Congr. Naz. AIMETA, pp. 361-373, Trieste, 1984.
- [2.20] Lo Bianco M., Mazzarella C., *Sulla sicurezza sismica delle strutture in muratura a blocchi*. "Studi italiani sulla meccanica delle murature a cura di Giuffrè A. e Grimaldi A., Atti del convegno "Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature", pp. 577-596, Roma ottobre 1985.
- [2.21] Baggio C., Trovalusci P., *Non standard limit analysis for jointed block masonry walls*. VII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Trieste 1993.
- [2.22] Baggio C., Trovalusci P., *Discrete Models for Jointed Block Masonry Walls*. 6-th North American Masonry Conference, pp. 939-949, Philadelphia, 1993.
- [2.23] Di Pasquale S., *La teoria degli stati di coazione per le strutture in muratura*. Lezioni per la Scuola di perfezionamento in Restauro dei Monumenti, Napoli, 1978.
- [2.24] Di Pasquale S., *Questioni di meccanica dei solidi non reagenti a trazione*. VI Congr. Naz. AIMETA, Genova, 1982.
- [2.25] Di Pasquale S., *Statica dei solidi murari teoria ed esperienze*. Int. Report, Dipartimento di Costruzioni, Firenze, 1984.
- [2.26] Di Pasquale S., *Sulla cinematica dei mezzi non reagenti a trazione*. Congresso Nazionale Aimeta, Bari, 1988.
- [2.27] Di Pasquale S., *New trends in the analysis of masonry structures*. Meccanica, n°27, pp. 173-184, 1992.
- [2.28] Russo Spena F., Sparacio R., *Analisi tensionale di strutture murarie*. Studi Italiani sulla meccanica delle murature, Roma, ottobre 1985, pp. 299-365.
- [2.29] Del Piero G., *Sulla formulazione del problema di equilibrio per solidi murari*. IX Congr. Naz. AIMETA, Bari, 1988.
- [2.30] Del Piero G., *Recent developments in the mechanics of materials which do not support tension*. Proc. Int. Colloquium on Free Boundary Problems, Irsee, 1987.
- [2.31] Baratta A., Toscano R., *Stati tensionali in pannelli di materiale non resistente a trazione*. VI Congr. Naz. AIMETA, Genova, 1982.
- [2.32] Panzeca T., Polizzotto C., *An extension of the Hamilton principle to no tension materials*. Meccanica n°23, pp. 88-93, 1988.
- [2.33] Maier G., Nappi A., *A theory of perfectly no-tension discretized structural systems*. Conv. Naz. Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature.
- [2.34] Maier G., Nappi A., *A theory of no-tension discretized structural system*. Eng. Struct. N° 12, pp. 227-234.
- [2.35] Villaggio P., *Stress Diffusion in Masonry Walls*. Jour. Struct. Mech., 1981, pp. 439-450.
- [2.36] Angelillo M., Mollo L., *Equilibrium of Masonry Walls*. in Studi italiani sulla meccanica delle murature a cura di Giuffrè A. e Grimaldi A., Atti del convegno "Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature", Roma ottobre 1985, pp. 487-501.
- [2.37] Angelillo M., *Constitutive relations for no tension materials*. Meccanica, n°28, pp. 195-202, 1993.



- [2.38] Como M., *On the confined equilibrium state for elastic no tension bodies*. AIMETA.
- [2.39] Como M., *Equilibrium and collapse analysis of masonry bodies*. Meccanica, n° 27, pp. 185-194, 1992.
- [2.40] Como M., Grimaldi A., *Analisi limite di pareti murarie sotto spinta*. Dipartimento di Ingegneria Civile Edile II Università degli Studi di Roma, Quaderni di Scienza e Tecnica delle Costruzioni. Lavoro presentato al Convegno del Gruppo di Ricerca C.N.R. "Ingegneria Strutturale", Udine 30 Giugno, 1-2 luglio 1983.
- [2.41] Como M., Grimaldi A., *An unilateral model for the limit analysis of masonry walls*, Inter. Congr. On Unilateral Problems in Struc. Analysis, Ravello, 1983.
- [2.42] Abruzzese D., Como M., Grimaldi A., *Sulla valutazione della resistenza sismica al collasso degli edifici in muratura*. Convegno Nazionale l'Ingegneria sismica in Italia, Rapallo, 1984.
- [2.43] Abruzzese D., Como M., Grimaldi A., *Analisi Limite di Edifici in Muratura soggetti a forze orizzontali*. in "Studi italiani sulla meccanica delle murature a cura di Giuffrè A. e Grimaldi A., Atti del convegno "Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature", Roma ottobre 1985, pp. 549-574.
- [2.44] Grimaldi A., Sacco E., *Energia complementare e metodo penalty per problemi elastici unilateri*. Congr. Naz. AIMETA, Pisa, 1990.
- [2.45] Grimaldi A., Luciano R., Sacco E., *Applicazioni penalty per l'analisi di strutture non reagenti a trazione*, Congr. Naz. AIMETA, Pisa, 1990.
- [2.46] Luciano R., Sacco E., *Stress Penalty method for unilateral contact problems, Mathematical formulation and computational aspects*. Eur. J. Mech., A/Solids, n° 1, pp. 93-111, 1994.
- [2.47] Binda L., *Metodi statici di stima della capacità portante di strutture murarie*. in "Comportamento statico e sismico delle strutture murarie" a cura di Gannantonio Sacchi Landriani e Roberto Riccioni, Clup, Milano 1982, pp.225-269.
- [2.48] Chen W.F., *Limit Analysis and soil Plasticity*. Elsevier Scient. Publ. Co., New York, 1975.
- [2.49] Jossa P., *Analisi di pareti murarie soggette ad azioni sismiche*. in "Studi italiani sulla meccanica delle murature" a cura di Giuffrè A. e Grimaldi A., Atti del convegno "Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature, Roma ottobre 1985, pp. 463-486.
- [2.50] Anthoine A., *Derivation of In-Plane elastic characteristic of MasonThrough Homogeneization Theory*. Int. J. of Solid Structures, Vol. 32, n°2, pp. 137-163, 1995.
- [2.51] Pande G. N. Liang J. X., *Middleton J. Equivalent elastic moduli for brick masonry*. Comput. Geotechnics, n°8, pp.243-265, 1989.
- [2.52] Pietruszczac S., Niu X., *A matematical description of macroscopic behaviour of brick masonry*. Int. J. Solids Structures, pp. 531-546, 1991.
- [2.53] Alpa G., Monetto I., *Microstructural model for dry block masonry walls within plane loading*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 42, n° 7, pp. 1159-1175, 1994.
- [2.54] Nappi A. Papa E., *Modelli di danneggiamento per murature: studio numerico e verifica sperimentale attraverso prove su pannelli murari miniaturizzati*. X Congr. Naz. AIMETA, n° 1, pp. 297-302, Pisa, 1990.